2003年入試問題研究

平成30年11月10日

目 次

1　京大理系前期

1.1　5 番問題

$a,\ b,\ c,\ d$ を実数とする．2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と 2 次の単位行列 E に対して，集合 $L(A)$ を

$$L(A) = \{\ rE + sA \mid r,\ s \text{ は実数 } \}$$

とする．このとき次の条件 (*) が成立するための，$a,\ b,\ c,\ d$ についての必要十分条件を求めよ．

$$(*) \quad L(A) \text{ の要素 } B \text{ は零行列でなければ逆行列をもつ}$$

1.1.1　解答

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して数 $\Delta(A)$ を $\Delta(A) = ad - bc$ とおく．$B \in L(A)$ を $B = rE + sA = \begin{pmatrix} r + sa & sb \\ sc & r + sd \end{pmatrix}$ とする．このとき条件 $(*)$ の対偶は

$$\Delta(B) = 0 \text{ となる } r,\ s \text{ については} \quad r + sa = r + sd = sb = sc = 0 \text{ が成り立つ}$$

となる．ここで

$$\Delta(B) = (r + sa)(r + sd) - s^2bc = r^2 + (a + d)sr + (ad - bc)s^2 = 0 \quad \cdots ①$$

なので，条件 $(*)$ はさらに，

$$① \text{ を満たす } r,\ s \text{ が存在すれば } r + sa = r + sd = sb = sc = 0 \quad \cdots ② \text{ となる}$$

と同値である．この条件が成立するための，$a,\ b,\ c,\ d$ の (必要十分) 条件が求める条件である．

① はつねに $r = s = 0$ という解をもつが，このとき常に ② も成立する．したがって求める条件は

(i) ① に $r = s = 0$ 以外の解が存在しない．

(ii) ① に $r = s = 0$ 以外の解が存在すれば，$r + sa = r + sd = sb = sc = 0$ が成立．

のいずれかが成立するための $a,\ b,\ c,\ d$ の条件である．

① のとき $s = 0$ なら $r = 0$ なので $s \neq 0$ である．このとき ① に解がないための必要十分条件は $(a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc < 0$ である．

次に ① に $s \neq 0$ の解があるとする．$\dfrac{r}{s} = t$ とする．このとき ② から

$$t + a = t + d = b = c = 0$$

つまり，$b = c = 0$ かつ $a = d$ でなければならない．

逆に $b = c = 0$ かつ $a = d$ のとき，① は $(r + sa)^2 = 0$ となるのでこの r に対しては $r + sa = r + sd = sb = sc = 0$ が成立する．ゆえに求める必要十分条件は

$$(a - d)^2 + 4bc < 0,\ \text{または}\ b = c = 0,\ a = d$$

1.2　6 番問題

n チームがリーグ戦を行う．すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する．引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする．このとき，$(n-2)$ 勝 1 敗のチームがちょうど 2 チームである確率を求めよ．ただし，n は 3 以上とする．

1.2.1　解答

n チームのリーグ戦は ${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 回ある．したがって全対戦結果の総数は $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 通りある．

$(n-2)$ 勝 1 敗のチームがちょうど 2 チームあるとし，それを $X,\ Y$ とする．そして，X と Y の対戦では X が勝つとする．すると Y は X 以外のすべてのチームに勝つので，全勝するチームはない．

X はチーム Z に負けるとする．

これで X の $n-1$ 回の勝敗と，Y の残る $n-2$ 回，あわせて $2n-3$ 回のの勝敗が確定した．

Z は X と Y との対戦の勝敗は確定したが，残る $n-3$ 回のうち少なくとも 1 つは負けなければならない．

残る他のチームの対戦の結果は，結果の確定した試合をのぞく他の試合の勝敗の決め方だけあるので，$2^{\frac{n(n-1)}{2}-(2n-3)}$ 通りある．ここから Z が X と Y 以外との $n-3$ 試合すべてに勝つ場合を除かなければならない．ゆえに残る試合の結果は

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}-(2n-3)}-2^{\frac{n(n-1)}{2}-(2n-3)-(n-3)}$$

通りある．

n チームのうち $X,\ Y,\ Z$ の決め方は ${}_n\mathrm{P}_3$ 通りある．ゆえに求める確率は

$$\begin{aligned}
& n(n-1)(n-2)\times\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}-(2n-3)}-2^{\frac{n(n-1)}{2}-(2n-3)-(n-3)}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}\\
= \quad & n(n-1)(n-2)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-6}\right\}
\end{aligned}$$

2　京大文系前期

2.1　1 番問題

$\dfrac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す．すなわち小数第 k 位の数を a_k とする．このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$ を求めよ．

2.1.1　解答

$\dfrac{23}{111}=0.\dot{2}0\dot{7}$ であるから，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$a_{3k+1}=2,\ a_{3k+2}=0,\ a_{3k+3}=7$ である．

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{3^k}$ と置く，

$n=3m$ のとき，

$$\begin{aligned} S_{3m} &= \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{3^3}\right)\frac{1}{3^{3(j-1)}} \\ &= \frac{25}{27}\cdot\frac{1-\frac{1}{27^m}}{1-\frac{1}{27}} = \frac{25}{26}-\frac{25}{26}\cdot\frac{1}{27^m} \\ &= \frac{25}{26}-\frac{25}{26}\cdot\frac{1}{27^{\frac{n}{3}}} = \frac{25}{26}-\frac{25}{26}\cdot\frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

$n=3m+1$ のとき，$m=\dfrac{n-1}{3}$ なので

$$\begin{aligned} S_{3m+1} &= S_{3m}+\frac{a_{3m+1}}{3^{3m+1}} \\ &= \frac{25}{26}-\frac{25}{26}\cdot\frac{1}{27^{\frac{n-1}{3}}}+\frac{2}{3^n} = \frac{25}{26}-\frac{23}{26}\cdot\frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

$n=3m+2$ のとき，$m=\dfrac{n-2}{3}$ なので

$$\begin{aligned} S_{3m+2} &= S_{3m}+\frac{a_{3m+1}}{3^{3m+1}} \\ &= \frac{25}{26}-\frac{25}{26}\cdot\frac{1}{27^{\frac{n-2}{3}}}+\frac{2}{3^{n-1}} = \frac{25}{26}-\frac{23}{26}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k} = \begin{cases} \dfrac{25}{26}-\dfrac{25}{26}\cdot\dfrac{1}{3^n} & (n\text{ が }3\text{ の倍数のとき}) \\ \dfrac{25}{26}-\dfrac{23}{26}\cdot\dfrac{1}{3^n} & (n\text{ が }3\text{ で割って }1\text{ 余るとき}) \\ \dfrac{25}{26}-\dfrac{23}{26}\cdot\dfrac{1}{3^{n-1}} & (n\text{ が }3\text{ で割って }2\text{ 余るとき}) \end{cases}$$

2.2 2 番問題

xy 平面上で，放物線 $C: y=x^2+x$ と，直線 $l: y=kx+k-1$ を考える．このとき次の問に答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ．

(2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P，Q とし，線分 PQ の長さを L，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする．k が (1) で定まる範囲を動くとき，$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ．

2.2.1 解答

(1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるのは

$$x^2+x=kx+k-1$$

が異なる 2 つの実数解を持つときである．判別式 $D=(1-k)^2-4(-k+1)>0$ より

$$k<-3,\ 1<k$$

(2) 2 つの交点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とする．

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{kx + k - 1 - (x^2 + x)\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \end{aligned}$$

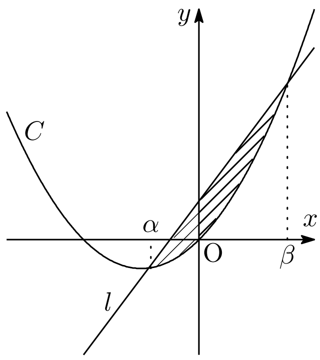
一方直線の傾きが k なので，x 座標が α, β である直線上の 2 点の距離 L は

$$L = \sqrt{k^2+1}(\beta-\alpha)$$

$$\therefore \quad \frac{S}{L^3} = \frac{1}{6(k^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

ここで，(1) の範囲の k に対して $1 < k^2$ であるから，$0 < \dfrac{1}{k^2+1} < \dfrac{1}{2}$.

$$\therefore \quad 0 < \frac{S}{L^3} < \frac{1}{6 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{24}$$



2.3　3 番問題

四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(ii) 4 つの面の面積がすべて等しい．

をみたしている．このとき，この四面体は正四面体であることを示せ．

2.3.1　解答

理系と同じ

2.4　4 番問題

p は 3 以上の素数であり，x, y は $0 \leqq x \leqq p$，$0 \leqq y \leqq p$ をみたす整数であるとする．このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x = y$ であることを示せ．

2.4.1　解答

x^2-y^2 が $2p$ の倍数である．$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ で，$x-y=x+y-2y$ なので $x+y$ と $x-y$ の偶数，奇数は一致する．したがって $x+y$ と $x-y$ はともに偶数で，いずれかが，$2p$ の倍数でなければならない．

$x+y$ が $2p$ の倍数のとき．$0 \leqq x \leqq p$，$0 \leqq y \leqq p$ より $0 \leqq x+y \leqq 2p$ であるから，$x=y=0$ か $x=y=p$ のいずれかである．ゆえに $x=y$ である．

$x-y$ が $2p$ の倍数のとき．$0 \leqq x \leqq p$，$0 \leqq y \leqq p$ より $-p \leqq x-y \leqq p$ であるから，この範囲の $2p$ の倍数は $x-y=0$ のみである．ゆえに $x=y$ である．

2.5　5 番問題

4 チームがリーグ戦を行う．すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する．引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする．勝ち数の多い順に順位をつけ，勝ち数が同じであればそれらは同順位とする．1 位のチーム数の期待値を求めよ．

2.5.1　解答

4 つのチームを A, B, C, D とする．対戦成績は縦軸のチームの勝ち負けを○と●で表すと，

	A	B	C	D
A	＼	1	2	3
B		＼	4	5
C			＼	6

の 1 から 6 までの各々で，○か●の 2 通りあるから，全事象は 2^6 通りあり，これらはいずれも同様に確かである．

ここで 1 位のチームの数を n，その確率を p_n とする．

$n=1$ であるとき．

全体としての勝ち数と負け数が等しいので 1 位のチームは 3 勝，このとき他のチームに 3 勝はいない．したがって 3 勝するチームを決めればそのチーム以外の他チームどうしの対戦 3 試合はいずれが勝ってもよい．ゆえにその場合の数は ${}_4\mathrm{C}_1 2^3$ 通りある．

$$\therefore \quad p_1=\frac{{}_4\mathrm{C}_1 2^3}{2^6}=\frac{1}{2}$$

$n=2$ であるとき．2 チームがともに 3 勝ということはないので，1 位 2 チームが 2 勝 1 敗，3 位 2 チームが 1 勝 2 敗の場合である．

2 勝 1 敗で，他の 2 勝 1 敗のチームに勝つチーム X，2 勝 1 敗で，他の 2 勝 1 敗のチームに負けるチーム Y，1 勝 2 敗で，X に勝つチーム Z，そして 1 勝 2 敗で X，Y ともに負けるチーム，がある，
これらを定めれば対戦結果は確定する．

つまり場合の数は $4!$ である．

$$\therefore \quad p_2=\frac{4!}{2^6}=\frac{3}{8}$$

$n=3$ となるのは $n=,\ 2$ の場合の余事象なので

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = \frac{1}{8}$$

ゆえに求める期待値 E は

$$E = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$$

別解　チーム名を $i\ (1 \leqq i \leqq 4)$ とし，確率変数 X_i を

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i \text{ が } 1 \text{ 位}) \\ 0 & (i \text{ が } 2 \text{ 位以下}) \end{cases}$$

とする．1 位のチーム数 X は $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ である．その期待値は

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)$$

である．試行の条件からチーム i が 1 位となる確率は，すべて等しい．これを p とする．

チーム i が 1 位となるのは，3 戦全勝するか，または 2 勝 1 敗で，チーム i に勝ったチームが残る 2 チームに全勝はしないときである．よって，

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \frac{13}{32}$$

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

なので，

$$E(X) = 4 \cdot \frac{13}{32} = \frac{13}{8}$$

である．

3　京大理系後期

3.1　5 番問題

極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n}\right)^{100}$ を求めよ．

3.1.1　解答

$f(x) = x^{100}$ とおき，有限和 S_n を

$$S_n \quad = \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n}\right)^{100} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ f\left(\frac{2i}{2n}\right) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) \right\}$$

とする．

$0 < X < Y$ のとき平均値の定理から $X < c < Y$ で

$$\frac{f(Y) - f(X)}{Y - X} = f'(c)$$

となるものが存在する．$f''(x)>0$ なので $f'(X)<f'(c)<f'(Y)$ である．つまり

$$(Y-X)f'(X)<f(Y)-f(X)<(Y-X)f'(Y)$$

が成り立つ．ゆえに各 i に対して

$$\frac{1}{2n}f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)<f\left(\frac{2i}{2n}\right)-f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)<\frac{1}{2n}f'\left(\frac{2i}{2n}\right)$$

ところが

$$f'\left(\frac{2i-2}{2n}\right)<f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

なので

$$\frac{1}{2n}f'\left(\frac{i-1}{n}\right)<f\left(\frac{2i}{2n}\right)-f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)<\frac{1}{2n}f'\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f'\left(\frac{i-1}{n}\right)<S_n<\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f'\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f'\left(\frac{i-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f'\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f'(x)\,dx=\Big[f(x)\Big]_0^1=\Big[x^{100}\Big]_0^1=1$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$$

4　阪大理系

4.1　1番問題

a を正の定数，$\omega=a(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ)$ とする．ただし，i は虚数単位である．また，複素数の列 $\{z_n\}$ を

$$z_1=\omega,\ z_{n+1}=z_n\omega^{2n+1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める．

(1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ．

(2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする．$1\leqq n\leqq 17$ であるような n について，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ．

4.1.1　解答

(1) 作り方から $z_n\neq 0$ である．$\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=\omega^{2n+1}$ であるから $n\geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned}&\frac{z_n}{z_{n-1}}\cdot\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{z_2}{z_1}\\ =\ &\omega^{(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3}=\omega^{\frac{(2n+2)(n-1)}{2}}=\omega^{n^2-1}\end{aligned}$$

$z_1=\omega$ なので $\dfrac{z_n}{\omega}=\omega^{n^2-1}$.

$$\therefore \quad z_n=\omega^{n^2}=a^{n^2}(\cos n^2\times 5^\circ+i\sin n^2\times 5^\circ)$$

したがって

$$\begin{aligned} z_n\text{が実数} &\iff n^2\times 5^\circ=k\times 180^\circ(\ k\text{ は整数}) \\ &\iff n^2=k\times 36 \\ &\iff \left(\frac{n}{2\cdot 3}\right)^2\text{ が整数} \end{aligned}$$

つまり n が 6 の倍数であることが必要十分条件である.

(2) $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}=90^\circ$，または $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}=45^\circ$ でなければならない.

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}=90^\circ$ のとき.

$$5(n+1)^2-5n^2=90^\circ,\ 270^\circ \iff \quad 2n+1=18,\ 54$$

これはあり得ない.

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}=45^\circ$ のとき.

$$5(n+1)^2-5n^2=45^\circ,\ 315^\circ \iff \quad 2n+1=9,\ 63$$

$1\leqq n\leqq 17$ より $n=4$.

また $|z_{n+1}|=a^{2n+1}z_n$ なので直角二等辺三角形になるためには $a^{2n+1}=\sqrt{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

つまり $a=2^{\pm\frac{1}{18}}$.

4.2 3 番問題

(1) $f(x)$ を x の整式とし，$\{a_n\}$ は $a_k<a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ および $\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_k=\infty$ を満たす数列とする．このとき，

$$f(a_k)=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

ならば $f(x)$ は整式として 0 であることを示せ.

(2) $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ を x の整式とし，

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)\sin x+f_3(x)\sin 2x$$

はすべて実数 x に対して 0 であるとする．このとき，$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることを示せ.

4.2.1　解答

(1) $f(a_k)=0$ より，因数定理によって $f(x)$ は各 k に対して $x-a_k$ を因数にもつ．$a_k<a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ よりこれら因数はすべて異なる．

整式として 0 ではない整式 $f(x)$ は，定数かまたは因数を有限個しかもちえない．

ところが $f(x)$ は無数の因数をもつ．ゆえに $f(x)$ は整式として 0 である．

(2) $x=k\pi$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ を代入する．この x の値に対して $\sin x$ と $\sin 2x$ はともに 0 になるので

$$0=F(k\pi)=f_1(k\pi)\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

がなり立つ．ゆえに (1) から $f_1(x)$ は整式として 0 である．

$x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ を代入する．この x の値に対して $\sin 2x$ はつねに 0．また $\sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2}\right)=(-1)^k$ なので

$$0=F\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)=(-1)^kf_2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

がなり立つ．ゆえに (1) から $f_2(x)$ は整式として 0 である．

$$0=F(x)=f_3(x)\sin 2x$$

となったが，$x=\dfrac{(2k+1)\pi}{4}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $\sin 2x$ は 0 ではないので，これらの x に対して $f_3(x)$ は 0 である．ゆえに (1) から $f_3(x)$ は整式として 0 である．

つまり，$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることが示された．

4.3　4 番問題

数列 $\{a_n\}$ が $a_k<a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ および

$$a_{kl}=a_k+a_l,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\quad l=1,\ 2,\ \cdots$$

を満たすとする．

(1) $k,\ l$ を 2 以上の自然数とする．自然数 n が与えられたとき

$$l^{m-1}\leqq k^n<l^m$$

を満たす自然数 m が存在することを示せ．

(2) $k,\ l$ を 2 以上の自然数とするとき

$$-\frac{1}{n}<\frac{a_k}{a_l}-\frac{\log k}{\log l}<\frac{1}{n},\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a_2=a$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

4.3.1 解答

(1) $l \leqq k^n$ なら，自然数 x に対して l^x は x の単調増加関数なので，x を 1 から増加してゆけばはじめて k^n より大きくなる x がただひとつある．それを m とするればよい．$k^n < l$ なら $m=1$ にとればよい．

(2) 与えられた条件から $a_{k^{n+1}} = a_{k^n} + a_k$ である．したがって数学的帰納法によって $ak^n = na_k$ となる．

(1) の m をとれば，a_k は k に関して単調増加なので

$$a_{l^{m-1}} \leqq a_{k^n} < a_{l^m}$$

となる．これから

$$(m-1)a_l \leqq na_k < ma_l$$

一方 $(m-1)\log l \leqq n\log k < m\log l$ であるから

$$(m-1) \leqq \frac{na_k}{a_l} < m, \quad (m-1) \leqq \frac{n\log k}{\log l} < m$$

$$\therefore \quad (m-1)-m < \quad \frac{na_k}{a_l} - \frac{n\log k}{\log l} < m-(m-1)$$

つまり

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n}, \quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

が成り立つ．

(3) n は任意なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より

$$\frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} = 0$$

つまり

$$\frac{a_k}{\log k} = \frac{a_l}{\log l}$$

k によらず一定なこの値を C とする．したがって $a_k = C\log k$．$a_2 = a$ より $C = \dfrac{a}{\log 2}$．

$$\therefore \quad a_k = a\frac{\log k}{\log 2} = a\log_2 k$$

4.4 後期 1 番問題

定数 $p,\ q,\ r$ は $p>q>r$ を満たしている．また，3 次方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

の解は，連続する 3 つの整数 $n-1,\ n,\ n+1$ であるとする．このとき，n の値と，$p,\ q,\ r$ の値を求めよ．

4.4.1 解答

3 次方程式の解と係数の関係から

$$\begin{aligned}&(n-1)+n+(n+1)=3n=-p\\&n(n-1)+n(n+1)+(n-1)(n+1)=3n^2-1=q\\&n(n-1)(n+1)=n^3-n=-r\end{aligned}$$

条件 $p>q$ から

$$-3n>3n^2-1$$

つまり n は不等式 $3n^2+3n-1<0$ を満たさなければならない．つまり

$$\frac{-3-\sqrt{21}}{6}<n<\frac{-3+\sqrt{21}}{6}$$

n が整数なので，$n=0,\ -1$ が必要である．

次に $q>r$ から

$$3n^2-1>-n^3+n$$

$n=0,\ -1$ のうちこれを満たすのは $n=-1$ である．

このとき

$$p=3,\ q=2,\ r=0$$

である．

注意

必要条件で n の範囲を求めるところでは次のようにしてもよい．

$f(x)=3x^2+3x-1$ とおく．軸が $x=-\dfrac{1}{2}$ で $f(0)<0,\ f(1)>0$ より，$f(-1)<0,\ f(-2)>0$ もわかる (もちろん直接計算してもよい)．

よって $f(x)<0$ となる整数 x は $0,\ -1$ である．

4.5 後期 3 番問題

n を 3 以上の自然数とする．1 から $2n$ までの数字が書かれたカードがおのおの 1 枚ずつ，全部で $2n$ 枚ある．数字 m が書かれたカードを $\boxed{m}$ で表すとする．この $2n$ 枚のカードを横一列に並べる．

このとき，$\boxed{m}$ が極大であるとは，その両隣のカードの数字が m より小さいことをいう．ただし，$\boxed{m}$ が列の左端にあるときには，その右隣のカードの数字が m より小さいことをいい，$\boxed{m}$ が列の右端にあるときには，その左隣のカードの数字が m より小さいことをいう．

(1) $\boxed{2n}$ のみが極大である並べ方は何通りか．

(2) $\boxed{n}$ と $\boxed{2n}$ のみが極大である並べ方のうち，これら 2 枚にはさまれたカードの数字の中で最小のものが k となる並べ方は何通りか，n と k を用いて表せ．

(3) $\boxed{n}$ と $\boxed{2n}$ のみが極大であるカードの並べ方の総数を $P(n)$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{a^n}$ が 0 でない数に収束するような定数 a の値と，そのときの極限値を求めよ．

4.5.1 解答

(1) $\boxed{2n}$の左側に k $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n-1)$ 枚，右に残る $2n-k-1$ 枚あるとする．$\boxed{2n}$みが極大であることは，その左側のカードは右ほど大きく，右側のカードは右ほど小さく並んでいなければならない．

つまり，$\boxed{2n}$を除く他の $2n-1$ 枚のカードを$\boxed{2n}$の右側に置くか，左側に置くかを決めれば後は一通りである．

$$\therefore \quad 2^{2n-1}\ (通り)$$

(2) 明らかに並べ方が存在するのは $k \leqq n-1$ のときである．

$\boxed{n}$が$\boxed{2n}$の左にあるとき．この 2 枚の間にカード$\boxed{k}$があることが必要である．これら 3 枚で分けられた 4 つの部分を $A,\ B,\ C,\ D$ とおく．(1) と同様に残るカードの置き方を考える．

(i) 1〜$(k-1)$ のカードは A か D に置ける．

(ii) $(k+1)$〜$(n-1)$ のカードは $A,\ B,\ C,\ D$ に置ける．

(iii) $(n+1)$〜$(2n-1)$ のカードは C か D に置ける．

$\boxed{n}$が$\boxed{2n}$の右にあるときも同数である．

$$\therefore \quad \begin{array}{ll} 2\cdot 2^{k-1}4^{n-1-k}2^{n-1} = 2^{3n-k-3}\ (通り) & (k \leqq n-1) \\ 0\ (通り) & (n<k) \end{array}$$

(3)

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{3n-k-3} = 2^{3n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

である．

$$\frac{P(n)}{a^n} = \left(\frac{8}{a}\right)^n \cdot \frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{a^n}$ が 0 でない数に収束するのは $a=8$ のときで，極限値は $\dfrac{1}{8}$ である．

4.6 後期 4 番問題

π を円周率とする．次の積分について考える．

$$I_0 = \pi\int_0^1 \sin \pi t\,dt, \qquad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n \sin \pi t\,dt\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) n が自然数であるとき，不等式 $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}<e^x\ (x>0)$ が成立することを数学的帰納法により示せ．これを用いて，不等式 $I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots+u^nI_n<\pi e^{\pi u}\ (u>0)$ が成立することを示せ．

(2) $I_0,\ I_1$ の値を求めよ．また，漸化式 $I_{n+1}=\dfrac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ が成立することを示せ．

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう．π が無理数でないとし，正の整数 p, q によって $\pi = \dfrac{p}{q}$ として表されると仮定する．$A_0 = I_0$, $A_n = p^n I_n$ とおくとき，A_0, A_1, A_2, $\cdots$ は正の整数になることを示せ．さらに，これから矛盾を導け．

4.6.1 解答

(1) $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して $f_n(x) = e^x - \left\{1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right\}$ とおく．$n \geqq 1$ のとき $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$ である．

$x > 0$ において $f_n(x) > 0$ を示す．

$n = 0$ のとき $f_0(x) = e^x - 1$ は明らかに $x > 0$ において正である．$f_{n-1}(x) > 0$ と仮定する．$f_n(0) = 0$ で $f_n'(x) = f_{n-1}(x) > 0$ なので $x > 0$ で $f_n(x) > 0$ である．数学的帰納法により各 n について $f_n(x) > 0$ である．つまり不等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < e^x \ (x > 0)$$

が成立する．

$0 \leqq t \leqq 1$ に対して $t^n(1-t)^n \sin \pi t \leqq 1$ である．

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \sum_{k=0}^{n} u^k I_k &= \sum_{k=0}^{n} u^k \frac{\pi^{k+1}}{k!} \int_0^1 t^k (1-t)^k \sin \pi t \, dt \\
&\leqq \pi \sum_{k=0}^{n} \frac{(\pi u)^k}{k!}
\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\pi u)^k}{k!} < e^{\pi u}$ なので，不等式

$$I_0 + uI_1 + u^2 I_2 + \cdots + u^n I_n < \pi e^{\pi u} \ (u > 0)$$

が成立する

(2) $\dfrac{d}{dt} t^n (1-t)^n = n t^{n-1} (1-t)^{n-1} (1-2t)$ なので，

$$\begin{aligned}
I_0 &= \pi \int_0^1 \sin \pi t \, dt = \left[\frac{-\cos \pi t}{\pi}\right]_0^1 = 2 \\
I_1 &= \pi^2 \int_0^1 t(1-t) \sin \pi t \, dt = \pi^2 \left\{ \left[t(1-t) \frac{-\cos \pi t}{\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 (1-2t) \frac{\cos \pi t}{\pi} \, dt \right\} \\
&= \pi \int_0^1 (1-2t) \cos \pi t \, dt = \pi \left\{ \left[(1-2t) \frac{\sin \pi t}{\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 2 \cdot \frac{\sin \pi t}{\pi} \, dt \right\} \\
&= 2 \int_0^1 \sin \pi t \, dt = \frac{4}{\pi}
\end{aligned}$$

同様に部分積分をくりかえす．

$$I_{n+1} = \frac{\pi^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{n+1} \sin \pi t \, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}\left\{\left[t^{n+1}(1-t)^{n+1}\frac{-\cos\pi t}{\pi}\right]_0^1+\int_0^1(n+1)t^n(1-t)^n(1-2t)\frac{\cos\pi t}{\pi}\,dt\right\} \\
&= \frac{\pi^{n+1}}{n!}\left\{\int_0^1 t^n(1-t)^n(1-2t)\cos\pi t\,dt\right\} \\
&= \frac{\pi^{n+1}}{n!}\left\{\left[t^n(1-t)^n(1-2t)\frac{\sin\pi t}{\pi}\right]_0^1-\int_0^1\left\{nt^{n-1}(1-t)^{n-1}(1-2t)^2-2t^n(1-t)^n\right\}\frac{\sin\pi t}{\pi}\,dt\right\} \\
&= \frac{2\pi^n}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\sin\pi t\,dt-\frac{\pi^n}{(n-1)!}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}\{1-4t(1-t)\}\sin\pi t\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}I_n-I_{n-1}+\frac{4\pi^n}{(n-1)!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\sin\pi t\,dt=\frac{2}{\pi}I_n-I_{n-1}+\frac{4n}{\pi}I_n \\
&= \frac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}
\end{aligned}
$$

(3) (2) の結果に $\pi=\dfrac{p}{q}$ を代入すると

$$I_{n+1}=\frac{(4n+2)q}{p}I_n-I_{n-1}$$

なので

$$A_{n+1}=p^{n+1}I_{n+1}=(4n+2)qp^nI_n-p^nI_{n-1}=(4n+2)qA_n-p^2A_{n-1}$$

である．$A_0=I_0=2$，$A_1=pI_1=4q$ で整数であるから，A_n は整数となり，明らかに $I_n>0$ なので，A_n は正整数である．

(1) の結果を $u=p$ で用いて

$$A_0+A_1+\cdots+A_n<\frac{p}{q}e^{\frac{p}{q}\cdot p}(\text{一定})$$

となる．左辺は正整数の和なので $n\to\infty$ のとき $+\infty$ となる．これは一定値で押さえられていることと矛盾する．

ゆえに，π が無理数であることが示された．

5　東大理系

5.1　6 番問題

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ．

5.1.1　解答

以下の各解において円周率を π とする．

解 1

半径 1 の円の円周は円周率の定義から 2π である．

この円に内接する正八角形を考える．この正八角形の周は円の周より小さい．

円の中心と隣り合う各頂点を結ぶ二つの線分がなす角は $\dfrac{\pi}{4}$ である．ゆえにこの正八角形の 1 辺の長さ a は余弦定理から

$$a^2 = 1 + 1 - 2\cos\frac{\pi}{4} = 2 - \sqrt{2}$$

$2\pi > 8a$ より

$$\begin{aligned} \pi^2 &> (4a)^2 = 16(2-\sqrt{2}) \\ &> 16(2-1.415) = 9.360 > (3.05)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \pi > 3.05$$

解 2

関数 $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ を考える．グラフは xy 平面の $y \geqq 0$ にある半円である．その面積を $x = \sin\theta$ の置換で求める．

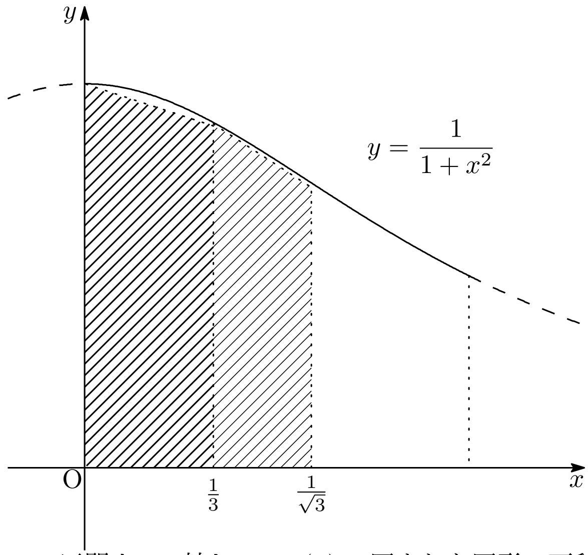
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

一方 $f(x)$ は上に凸なグラフになるので，半円の弦の一部と原点で作られる三角形はこの円の内部にある．半円の弧を 12 等分して 12 の三角形を作る．その面積の和は，この半円の面積より小さい．その和は

$$\begin{aligned} 12 \times \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12} &= 12 \times \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &> 3(1.414 \cdot 1.732 - 1.4143) = 3.104244 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \pi > 3.104244 > 3.05$$

解 3



関数 $y = g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ を考える．

$$g''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

となるので $g(x)$ は区間 $\left[0,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ で上に凸である．

この区間上，x 軸と $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を求める．$x = \tan\theta$ と置換することにより

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\,d\theta = \frac{\pi}{6}$$

である．

区間を $\left[0,\ \dfrac{1}{3}\right]$ と $\left[\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ にわけ，点 $\left(\dfrac{1}{3},\ g\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$ をひとつの頂点とする 2 つの台形をとる．$g(x)$ が上に凸なので 2 つの台形は $y = g(x)$ に内接し，その面積の和は上に求めた図形の面積より小さい．

$$g(0) = 1,\ g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10},\ g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4},$$

なので，面積の和 S は

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{9}{10}\right)\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10} + \frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{19}{60} + \frac{11}{40}(\sqrt{3}-1)$$

$$\therefore\quad \pi > 6S = \frac{5+33\sqrt{3}}{20} > \frac{5+33\cdot 1.73}{20} = 3.1045 > 3.05$$

解 4

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおく．

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\sin x\,dx \\ &= \left[\sin^{n-1} x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\cos^2 x\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

$$\therefore\quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

ここで

$$I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1$$

より

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{\pi}{2},\quad I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $|\sin x|<1$ なので $I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$ である．

$$\therefore\quad 1<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}<\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}\\&>\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\cdot\frac{12\cdot 12}{11\cdot 13}\cdot\frac{14\cdot 14}{13\cdot 15}\cdot\frac{16\cdot 16}{15\cdot 17}\\&=\frac{2^{30}}{9\cdot 11\cdot 11\cdot 13\cdot 13\cdot 15\cdot 15\cdot 17\cdot}>1.52529\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \pi>3.05058>3.05$$

解 5

$|x|<1$ に対して

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{1}{1+x^2}&=\sum_{j=0}^{11}(-x^2)^j+x^{24}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(-x^2)^j\\&>\sum_{j=0}^{11}(-x^2)^j\end{aligned}$$

両辺を 0 から 1 まで積分する．

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&>\sum_{j=0}^{10}\left(\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{2j+3}\right)\\\therefore\quad\pi&>\frac{8}{1\cdot 3}+\frac{8}{5\cdot 7}+\frac{8}{9\cdot 11}+\frac{8}{13\cdot 15}+\frac{8}{17\cdot 19}+\frac{8}{21\cdot 23}=3.0584\cdots>3.05\end{aligned}$$

こらは余りに収束が遅い．解 3 のグラフの形状をみると区間 $\left[0,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ では

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots>1-x^2$$

からでる $y=1-x^2$ が $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ とほぼ重なっている．それで

$$\frac{\pi}{6}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+x^2}\,dx>\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1-x^2)\,dx=\frac{8\sqrt{3}}{27}=0.513200$$

$$\therefore\quad \pi>6\cdot 0.513200=3.0792>3.05$$

5.2 後期 2 番問題

$p,\ q,\ N,\ M$ を自然数とする．ただし $\sqrt{p}$ は自然数ではないとする．このとき次の問に答えよ．

(1) 自然数 l に対してある整数 $A,\ B$ があって

$$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^l = A\sqrt{p}+B$$

と表せることを示せ．ただし $[\sqrt{p}]$ は $\sqrt{p}$ より小さい整数のうちで最大のものを表す．

(2) xy 平面において，x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という．このとき，直線 $y=\sqrt{p}x$ との距離が $\dfrac{1}{N}$ 以下で x 座標が N 以上であるような格子点が存在することを示せ．

(3) 双曲線 $y^2-px^2=q$ の上の点 P と格子点 Q で，線分 PQ の長さが $\dfrac{1}{M}$ 以下であるようなものが存在することを示せ．

(4) $p=5,\ q=2,\ M=100$ として (3) の条件をみたすような格予点 Q を一つ求めよ．すなわち，格子点 Q であって，双曲線 $y^2-5x^2=2$ の上の点 P を適当にとれば PQ の長さを $\dfrac{1}{100}$ 以下にすることができるようなものを一っ求めよ．ただし $2.23606<\sqrt{5}<2.23607$ を用いてよい．

5.2.1 解答

(1) l に関する数学的帰納法で示す．$l=1$ のとき．$A=1,\ B=-[\sqrt{p}]$ ととる．l で成立するとして $(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^l=A\sqrt{p}+B$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^{l+1} &= (A\sqrt{p}+B)(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])\\ &= (B-A[\sqrt{p}])\sqrt{p}+(Ap-B[\sqrt{p}])\end{aligned}$$

より $l+1$ でも成立．よって題意が示された．

(2) $\sqrt{p}$ が自然数ではないので $0<\sqrt{p}-[\sqrt{p}]<1$ である．

$$\lim_{l\to\infty}(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^l=0$$

である．(1) で $A>0>B$ なら $B-A[\sqrt{p}]<0<Ap-B[\sqrt{p}]$，$A<0<B$ なら $B-A[\sqrt{p}]>0>Ap-B[\sqrt{p}]$ となる．ゆえに A と B はつねに異符号であり $|A|$ と $|B|$ は l が増加すれば単調に増加する．

したがって $(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^l=A\sqrt{p}+B$ とおくと

$$0<A\sqrt{p}+B<\frac{1}{N},\quad |A|>N$$

となる自然数 l が存在する．

$A>0$ のとき直線 $L: y=\sqrt{p}x$ 上の点 $\mathrm{P}(A,\ A\sqrt{p})$ と格子点 $\mathrm{Q}(A,\ -B)$ に対して

$$点\ \mathrm{Q}\ と\ L\ との距離 < \overline{\mathrm{PQ}} = A\sqrt{p}+B<\frac{1}{N}$$

が成り立つ．

$A<0$ のときは $\mathrm{P}(-A,\ -A\sqrt{p})$ と格子点 $\mathrm{Q}(-A,\ B)$ ととれば同様に点 Q と直線 L の距離は $\dfrac{1}{N}$ より小さい．

この点 Q の x 座標は N 以上なので，題意が示された．

(3) N を $N \geqq 2M$ であるように十分大きくとり，$m>N$ である m に対する双曲線 $y^2-px^2=q$ の点 $\mathrm{P}(m,\ \sqrt{pm^2+q})$ と漸近線 L 上の点 $\mathrm{R}(m,\ \sqrt{p}m)$ との距離が $\dfrac{1}{2M}$ より小さいようにとる．

(2) から格子点 $\mathrm{Q}(m,\ n)$ で Q で L 上の点 R との距離が $\dfrac{1}{N}$ より小さく，かつ $m>N$ であるようなものが存在する．

このとき
$$\overline{\mathrm{PQ}} \leqq \overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{QR}}<\frac{1}{2M}+\frac{1}{N} \leqq \frac{1}{2M}+\frac{1}{2M}=\frac{1}{M}$$
なので，この双曲線 $y^2-px^2=q$ の上の点 P と格子点 Q が題意を満たしている．

(4) $M=100$ なので $N=200$ にとる．
$$(\sqrt{5}-2)^5<\frac{1}{4^5}=\frac{1}{1024}<\frac{1}{200}$$
で
$$(\sqrt{5}-2)^5=305\sqrt{5}-682$$
なので，$\mathrm{Q}(305,\ 682)$ が題意を満たす．

［注意］「N より x が座標が大きい」ようにとるため $l=5$ でとった．これなら検算はいらない．

実際は，$l=4$ のとき
$$(\sqrt{5}-2)^4=-72\sqrt{5}+161$$
でこれから Q を作る．

$\mathrm{Q}(-A,\ B)=(72,\ 161)$ および，その上に双曲線上の点 $\mathrm{P}(72,\ \sqrt{5\cdot 72^2+2})$ をとると，
$$\sqrt{5\cdot 72^2+2}-161=\frac{5\cdot 72^2+2-161}{\sqrt{5\cdot 72^2+2}+161}<\frac{1}{161+2.23606\cdot 72}<\frac{1}{321}<\frac{1}{100}$$
より $\mathrm{Q}(72,\ 161)$ で十分である．

ただしこれを解答にするには，検算が必要である．

5.3 後期 3 番問題

(1) すべての n について $a_n \geqq 2$ であるような数列 $\{a_n\}$ が与えられたとして，数列 $\{x_n\}$ に関する漸化式
$$\text{(A)} \qquad x_{n+2}-an+1x_{n+1}+x_n=0\ (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$
を考える．このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式 (A) をみたし，$x_0=0,\ x_m=1$ であるような数列 $\{x_n\}$ がただ一つ存在することを示せ．また，この数列について
$$0<x_n<1\ (n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$
が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ と正の定数 b が与えられ，すべての n について $a_n \geqq 1+b$ が成り立つと仮定して，数列 $\{y_n\}$ に関する漸化式

$$\text{(B)} \qquad y_{n+2} - an + 1y_{n+1} + y_n = 0 \ (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える．このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式漸化式 (B) をみたし，$y_0 = 0,\ y_m = 1$ であるような数列 $\{y_n\}$ がただ一つ存在して

$$0 < y_n < 1 \ (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

が成り立つことを示せ．

(3) c を 2 より大きな定数として，すべての n について $a_n \geqq c$ が成り立つと仮定する．このとき，c から決まる m によらない正の定数 r で $r < 1$ をみたすものが存在し，(1) で得られた数列 $\{x_n\}$ は

$$x_n < r^{n-m} \ (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

をみたすことを示せ．

5.3.1　解答

(1) (1) は (2) で $b = 1$ の場合であるから，(2) を示せばよい．

(2) $n \geqq 1$ に対して

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

である．ゆえに

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

である．ここで

$$\begin{pmatrix} a_n & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ R_n & S_n \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ R_n & S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} & Q_{n-1} \\ R_{n-1} & S_{n-1} \end{pmatrix}$$

これから $R_n = P_{n-1},\ S_n = Q_{n-1}$ となる． したがって

$$\begin{pmatrix} a_n & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ P_{n-1} & Q_{n-1} \end{pmatrix}$$

と表される．ただし，$P_0 = 1,\ Q_0 = 0$ である．

$n \geqq 0$ に対して $P_n > 0$ を数学的帰納法で示す．$n = 0$ なら $P_0 = 1$ より成立．

$P_n > 0$ とする．

$$P_{n+1} = a_nP_n - bP_{n-1}$$

より

$$P_{n+1}-P_n=(a_n-1)P_n-bP_{n-1}\geqq b(P_n-P_{n-1})$$

$$\therefore\quad P_{n+1}-P_n\geqq b^n(P_1-P_0)=b^n(a_1-1)\geqq b^{n+1}>0$$

したがって帰納法の仮定より $P_{n+1}>0$．よってつねに $P_n>0$．

$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{n-1} & Q_{n-1} \\ P_{n-2} & Q_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

より $y_n=P_{n-1}y_1$ である．したがって，$m\geqq 2$ のとき $y_m=1$ とするためには $y_m=P_{m-1}y_1=1$，つまり $y_1=\dfrac{1}{P_{m-1}}$ にとればよい．

y_0，y_1 を定めれば数列は漸化式によって一意に定まるので，$y_m=1$ となるものはただ一つである．

$m=1$ のときは $y_1=1$ にすればよく，この他にはない．

つぎにこのとき $y_1>0$ であるから，P_n の場合と同様に

$$y_{n+1}-y_n\geqq b^n(y_1-y_0)=b^ny_1>0$$

となり，y_n は n に関して単調に増加する．したがって $y_0=0,\ y_m=1$ より $1\leqq n\leqq m-1$ に関して $0<y_m<1$ が成り立つ．

(3) $a_n\geqq c>2$ かつ $1\leqq n\leqq m-1$ に関して x_n が正で単調増加であることに注意する．この範囲の n について

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= a_{n+1}x_{n+1}-x_n \\ &> cx_{n+1}-x_{n+1}=(c-1)x_{n+1} \end{aligned}$$

ここで $r=\dfrac{1}{c-1}$ とおく．$c>2$ より $0<r<1$ である．そして

$$x_n<rx_{n+1}<\cdots<r^{m-n}x_m=r^{m-n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

より題意を満たす.

6　東大文系

6.1　4 番問題

さいころを振り, 出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする．ただし，1 で割った余りは 0 である．

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする．以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする．

このようにして，X_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$ を定める．

(1) $X_3=0$ となる確率を求めよ．

(2) 各 n に対し，$X_n=5$ となる確率を求めよ．

(3) 各 n に対し，$X_n=1$ となる確率を求めよ．

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

6.1.1 解答

(1) 17 を 1, 2, 3, 4, 5, 6 で割った余りはそれぞれ 0, 1, 2, 1, 2, 5 である．

0 を 1 から 6 の数で割った余りはつねに 0，
1 を 1 で割れば余りは 0，2 から 6 の数で割った余りは 1，
2 を 1 か 2 で割れば余りは 0，3 から 6 の数で割った余りは 2，
5 を 1 から 6 の数で割った余りは順に 0, 1, 2, 1, 0, 5 である．

$X_n=0$ となる確率を a_n，$X_n=1$ となる確率を b_n，$X_n=2$ となる確率を c_n，$X_n=5$ となる確率を d_n と置く．

上のことから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{2}{6}c_n+\frac{2}{6}d_n \\ b_{n+1} &= \frac{5}{6}b_n+\frac{2}{6}d_n \\ c_{n+1} &= \frac{4}{6}c_n+\frac{1}{6}d_n \\ d_{n+1} &= \frac{1}{6}d_n \end{aligned}$$

また．

$$a_1=\frac{1}{6},\ b_1=\frac{2}{6},\ c_1=\frac{2}{6},\ d_1=\frac{1}{6}$$

である．$n=2$ のときの確率を上記漸化式によって計算すると

$$a_2=\frac{14}{36},\ b_2=\frac{12}{36},\ c_2=\frac{9}{36},\ d_2=\frac{1}{36}$$

求める確率は a_3 である．

$$\therefore\quad a_3=\frac{14}{36}+\frac{1}{6}\cdot\frac{12}{36}+\frac{2}{6}\cdot\frac{9}{36}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{36}=\frac{29}{54}$$

(2) 求める確率は d_n である．

$$d_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}d_1=\frac{1}{6^n}$$

(3) 求める確率は b_n である．(2) から

$$b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6^n}$$

つまり

$$6^{n+1}b_{n+1} = 5(6^n b_n) + 2$$

これから

$$6^{n+1}b_{n+1} + \frac{1}{2} = 5\left\{6^n b_n + \frac{1}{2}\right\}$$

$$\therefore \quad 6^n b_n + \frac{1}{2} = 5^{n-1}\left\{6 \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}5^n$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

7 早稲田大

7.1 理工 1 番問題

$a,\ b$ を正の整数とし，

$$f(x)=x^4+ax^3+(a+b)x^2+(2-a)x+1$$

とおく．4 次方程式 $f(x)=0$ の解がすべて絶対値 1 の複素数であるとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x)=0$ のどの解も実数ではないことを示せ．

(2) $a,\ b$ を求めよ．

(3) $f(x)=0$ の 4 つの解を頂点とする，複素数平面上の四角形の面積を求めよ．

7.1.1 解答

(1) $f(x)=0$ に実数解があるとすれば，絶対値が 1 なので ±1 である．ところが，a，b は正なので

$$\begin{aligned} f(1) &= 1+a+a+b+2-a+1=a+b+4>0 \\ f(-1) &= 1-a+a+b-2+a+1=a+b>0 \end{aligned}$$

となり，±1 は解ではあり得ない．よって実数解はない．

(2) 4 つの解を α，$\bar{\alpha}$，β，$\bar{\beta}$ とする．$\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=1$ である．解と係数の関係から

$$\begin{aligned} &\alpha+\bar{\alpha}+\beta+\bar{\beta}=-a \\ &\alpha\bar{\alpha}+\alpha\beta+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\bar{\alpha}\bar{\beta}+\beta\bar{\beta} \\ &\qquad 2+(\alpha+\bar{\alpha})(\beta+\bar{\beta})=b+1 \\ &\alpha\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}+\alpha\beta\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} \\ &\qquad \alpha+\bar{\alpha}+\beta+\bar{\beta}=-2+a \end{aligned}$$

よってまず $-a=-2+a$ より $a=1$．またこの結果

$$\begin{aligned} &(\alpha+\bar{\alpha})+(\beta+\bar{\beta})=-1 \\ &(\alpha+\bar{\alpha})(\beta+\bar{\beta})=b-1 \end{aligned}$$

となるので，2 つの実数 $\alpha+\bar{\alpha}$，$\beta+\bar{\beta}$ は 2 次方程式

$$t^2+t+b-1=0$$

の 2 つの解である．よってその判別式より

$$D=1-4b+4\geqq 0$$

が得られる．つまり $0<b\leqq\dfrac{5}{4}$．b は正整数なので，$b=1$．

(3) $b=1$ のとき $t=0,\ 1$ なので $\alpha+\bar{\alpha}=0,\ \beta+\bar{\beta}=-1$ である．

4 つの複素数は 2 つずつ互いに共役なので，これらが作る複素数平面上の四角形は台形である．

高さは実部の差なので

$$\left|\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}-\frac{\beta+\bar{\beta}}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

上底と下底は

$$\begin{aligned}|\alpha-\bar{\alpha}| &= |\sqrt{(\alpha+\bar{\alpha})^2-4\alpha\bar{\alpha}}|=|\sqrt{0-4}|=2\\ |\beta-\bar{\beta}| &= |\sqrt{(\beta+\bar{\beta})^2-4\beta\bar{\beta}}|=|\sqrt{1-4}|=\sqrt{3}\end{aligned}$$

ゆえに面積は $\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ である．

7.2 理工 2 番問題

0，1，2 をいくつか並べてできる配列に対して，次の変換を考える：

左から順に調べ，初めて 11 が現れたとき，それを 02 に置きかえる．

n 桁の配列 P に対して，この変換を可能な限り繰り返し，最終的に得られる配列を $\bar{P}$ とする．たとえば，8 桁の配列 $P=00111110$ に対しては

$$00111110\to 00021110\to 00020210$$

のようにして，2 回の変換で $\bar{P}=00020210$ が得られる．0 と 1 のみからなる n 桁の配列 P のうち，$\bar{P}$ の右端の桁が 2 となるものの個数を a_n とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $a_4-a_2,\ a_5-a_3$ を求めよ．

(2) $n\geqq 4$ のとき，a_n-a_{n-2} を求めよ．

(3) a_{2m} を求めよ．

7.2.1 解答

(1) 2 以上の自然数 n に対して，長さ n の配列 P で，$\bar{P}$ の右端の桁が 2 であるものは，$n=2,\ 3,\ 4,\ 5$ に対して，次の表のようになる．

n	P
2	11
3	011
4	1111, 0011, 1011
5	01111, 00011, 01011, 10011, 11011

$$\therefore\quad a_4-a_2=2,\ a_5-a_3=4$$

(2) $n \geqq 4$ のとき，長さ n の配列 P で，$\bar{P}$ の右端の桁が 2 であるものを

$$P = p_1 p_2 \cdots p_{n-2} p_{n-1} p_n$$

とおく．この総数が a_n である．まず $p_{n-1}p_n = 11$ が必要である．

次に $p_{n-2} = 1$ であるとする．変換の後，$\bar{P}$ の $n-2$ の桁の数は 1 以外，つまり 2 になっていなければならない．ゆえにこのような配列は a_{n-2} 個ある．

次に $p_{n-2} = 0$ であるなら，$p_1 p_2 \cdots p_{n-3}$ の部分は 0 でも 1 でもよい．これは 2^{n-3} 個ある．

$$\therefore \quad a_n = a_{n-2} + 2^{n-3}$$

(3) (2) から $m \geqq 2$ に対して

$$a_{2m} = a_{2(m-1)} + 2^{2m-3}$$

である．

$$\begin{aligned} \therefore \quad a_{2m} &= a_2 + 2 + 2^3 + \cdots + 2^{2m-3} \\ &= 1 + \frac{2(4^{m-1} - 1)}{4 - 1} = \frac{2^{2m-1} + 1}{3} \end{aligned}$$

7.3 理工 5 番問題

放物線 $y = \dfrac{x^2}{2}$ のうち，$0 \leqq x \leqq 1$ の部分を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し，原点 O から P までの C の部分の長さを s で表す．x と y を s の関数とみなして $x = f(s),\ y = g(s)$ とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) $\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2$ の値を求めよ．

(2) 次の等式を示せ．

$$f''(s) = -\frac{1}{(1 + \{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}} g'(s),\ g''(s) = -\frac{1}{(1 + \{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}} f'(s)$$

(3) P における C の法線上にあり，P との距離が正の定数 a である 2 点のうち，C の下側にあるものを $\mathrm{Q}(v,\ w)$ とする．$v,\ w$ を $f(s),\ g(s),\ f'(s),\ g'(s)$ を用いて表せ．

(4) C の長さを L とし，P が C 全体を動くときの，Q の描く曲線の長さを M とする．$M - L$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ を用いてもよい．

7.3.1 解答

(1) $y = \dfrac{x^2}{2}$ より $y' = x$ なので，

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\,dt, \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\therefore \quad f'(s) = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$g'(s) = \frac{dy}{ds} = x \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

したがって

$$\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2 = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$$

［別解］実は次のことから明らかである．s の定め方から

$$s = \int_0^s \sqrt{\{f'(u)\}^2 + \{g'(u)\}^2}\, du$$

両辺 s で微分して

$$1 = \sqrt{\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2}$$

(2)

$$\begin{aligned} f''(s) &= \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= -\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}} g'(s) \\ g''(s) &= \frac{d}{ds}\left(x \cdot \frac{dx}{ds}\right) = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + x\frac{d^2x}{ds^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}} f'(s) \end{aligned}$$

(3) P における C の接線方向のベクトルが

$$(f'(s),\ g'(s))$$

で，しかもこのベクトルは大きさが 1 である．これと直交し C の下側にある法線方向は

$$(g'(s),\ -f'(s))$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = a(g'(s),\ -f'(s))$$
$$\therefore \quad \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} g'(s) \\ -f'(s) \end{pmatrix}$$

つまり

$$v = f(s) + ag'(s), \quad w = g(s) - af'(s)$$

(4)

$$L = \int_0^L ds,\ M = \int_0^L \sqrt{\{v'(s)\}^2 + \{w'(s)\}^2}\, ds$$

である．ここで

$$
\begin{aligned}
v'(s) &= f'(s) + ag''(s) = \left(1 + \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\right) f'(s) \\
w'(s) &= g'(s) - af''(s) = \left(1 + \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\right) g'(s) \\
\therefore \quad \sqrt{\{v'(s)\}^2 + \{w'(s)\}^2} &= \left(1 + \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \sqrt{\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2} \\
&= \left(1 + \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
M - L &= \int_0^L \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\, ds = \int_0^1 \frac{a}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds}{dx}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{a}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{a}{1+x^2}\, dx = \frac{a\pi}{4}
\end{aligned}
$$

8　千葉大

8.1　11 番問題

　p を素数とする．x に関する 2 次方程式

$$px^2+(5-p^2)x-3p=0$$

が整数の解を持つのは $p=2$ のときに限ることを示せ.

8.1.1　解答

　2 次方程式の判別式は

$$D=(5-p)^2+12p^2=(p^2+1)^2+24$$

である．整数を持つためには判別式 D が平方数となることが必要である．つまり

$$(p^2+1)^2+24=N^2$$

と表されなければならない．これから

$$\{N+(p^2+1)\}\{N-(p^2+1)\}=24$$

　ここで $N+(p^2+1),\ N-(p^2+1)$ の偶数奇数は一致するので，あり得るのは

$$(N+p^2+1,\ N-p^2-1)=(2,\ 12),\ (4,\ 6),\ (6,\ 4),\ (12,\ 2)$$

のみ．したがって $N=7,\ 5$
　$N=7$ のとき，$(p^2+1)^2=25$ より $p=2$．$N=5$ のとき，$(p^2+1)^2=1$ より $p=0$.
　ゆえに $p=2$ が必要で，このとき方程式は

$$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)=0$$

となり確かに整数解 $x=-2$ を持つ.

［別解］整数解を α とする.

$$p\alpha^2+(5-p^2)\alpha-3p=0$$

より，

$$3p=\alpha(p\alpha+5-p^2)$$

p は素数なので

$$\alpha=\pm1,\ \pm3,\ \pm p,\ \pm3p$$

$\alpha=\pm1$ のとき．$3p=\pm1(\pm p+5-p^2)$．これから $p=-1\pm\sqrt{6}$，不適.
$\alpha=\pm3$ のとき．$3p=\pm3(\pm3p+5-p^2)$．これから $p=1\pm\sqrt{6}$，不適.
$\alpha=p$ のとき．$3p=5p$．これから $p=0$，不適.
$\alpha=-p$ のとき．$3p=p^3-5p+p^3$．これから $2p^3=8p$，$\therefore\quad p=2$
$\alpha=3p$ のとき．$3p=3p(3p^2+5-p^2)$．これから $2p^2+4=0$，p なし.
$\alpha=-3p$ のとき．$3p=-3p(-3p^2+5-p^2)$．これから $4p^3=6p$，p が素数でなくなる.

ゆえに整数の解を持つのは $p=2$ のときに限る.

9　広大

9.1　理系 4 番問題

F 君は G 君の投げるボールを確率 p $(0 < p < 1)$ でヒットにする．自然数 n に対して，1 から n までの数字を 1 つずつ記入した n 枚のカードが入った箱 B_n がある．G 君が箱 B_n から勝手にカード' を 1 枚引いて，カードに書かれている数字の回数だけ F 君にボールを投げる試行を考える．

(1) 箱 B_k を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を q_k，また箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を r_k とするとき，$(k+1)r_k - q_k$ を p, k を用いて表せ．

(2) 箱 B_k を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を q_j $(0 \leqq j \leqq k)$，箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を r_j $(0 \leqq j \leqq k+1)$ とするとき，$(k+1)r_j - kq_j$ $(0 \leqq j \leqq k)$ を p, k, j を用いて表せ．

(3) 箱 B_n を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を p_j $(0 \leqq j \leqq n)$ とし，$\alpha = pt + 1 - p$ とすると，変数 t に関して次の等式が成り立つことを示せ．

$$p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n = \frac{1}{n}(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)$$

(4) 箱 B_n を用いた試行において，F 君が打つヒットの数の期待値 E を n, p を用いて表せ．

9.1.1　解答

(1) 箱 B_k を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つのは，カード k を引き，すべてヒットを打つときである．その確率は $q_k = \dfrac{1}{k}p^k$ である．

また箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つのは，カード k を引き，すべてヒットを打つか，カード $k+1$ を引き，そのうち k 回ヒットを打つかである．その確率は $r_k = \dfrac{1}{k+1}p^k + \dfrac{1}{k+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_k p^k(1-k)$ である．

$$\therefore \quad (k+1)r_k - q_k = (k+1)p^k(1-p)$$

(2) $j > 0$ のとき，箱 B_k を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つのは，カード j からカード k のいずれかを引き，そのうち j 本ヒット打つときである．

$$q_j = \frac{1}{k}\left\{{}_k\mathrm{C}_j p^j(1-p)^{k-j} + {}_{k-1}\mathrm{C}_j p^j(1-p)^{k-1-j} + \cdots {}_j\mathrm{C}_j p^j\right\}$$

同様に

$$r_j = \frac{1}{k+1}\left\{{}_{k+1}\mathrm{C}_j p^j(1-p)^{k+1-j} + {}_k\mathrm{C}_j p^j(1-p)^{k-j} + \cdots {}_j\mathrm{C}_j p^j\right\}$$

$j = 0$ のとき，箱 B_k を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つのは，カード 1 からカード k のいずれかを引き，そのうち 0 本ヒット打つときである．

$$q_0 = \frac{1}{k}\left\{(1-p)^k + (1-p)^{k-1}) + \cdots + (1-p)\right\}$$

$$r_0 = \frac{1}{k+1}\left\{(1-p)^{k+1} + (1-p)^k + \cdots + (1-p)\right\}$$

ゆえに，いずれの場合も

$$(k+1)r_j - kq_j = {}_{k+1}\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{k+1-j}$$

(3) (2) を $k=n$ で用いると，$p_j=q_j$ である．

$$\begin{aligned}
& n(p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots+p_nt^n) \\
= & (1-p)^n+(1-p)^{n-1})+\cdots+(1-p) \\
& +{}_n\mathrm{C}_1(pt)^1(1-p)^{n-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_1(pt)^1(1-p)^{n-1-1}+\cdots{}_1\mathrm{C}_1p^1 \\
& +\cdots+{}_n\mathrm{C}_j(pt)^j(1-p)^{n-j}+{}_{n-1}\mathrm{C}_j(pt)^j(1-p)^{n-1-j}+\cdots{}_j\mathrm{C}_jp^j \\
& +\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(pt)^n \\
= & \{{}_n\mathrm{C}_n(pt)^n+\cdots+{}_n\mathrm{C}_j(pt)^j(1-p)^{n-j}+\cdots+(1-p)^n\} \\
& +\cdots+\{{}_k\mathrm{C}_k(pt)^k+\cdots+{}_k\mathrm{C}_j(pt)^j(1-p)^{k-j}+\cdots+(1-p)^k\} \\
& +\cdots+pt+(1-p) \\
= & \alpha^n+\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots+p_nt^n=\frac{1}{n}(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)\quad\cdots①$$

(4) ① の両辺を t で微分する．$\dfrac{d}{dt}\alpha^j=jp\alpha^{j-1}$ なので

$$p_1+2p_2t+\cdots+np_nt^{n-1}=\frac{1}{n}(p+2p\alpha+\cdots+np\alpha^{n-1})\quad\cdots②$$

ここで $t=1$ を代入する．② の左辺は求める期待値 E になる．$t=1$ のとき $\alpha=1$ なので

$$E=p_1+2p_2+\cdots+np_n=\frac{1}{n}(p+2p+\cdots+np)=\frac{n+1}{2}p$$

9.2 理系 5 番問題

$a,\ b$ を $a^2-4b<0$ を満たす実数とする．

(1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が等式 $(*)$ $X^2-aX+bE=O$ を満たすならば，$x+w=a$，$xw-yz=b$ が成り立つことを示せ．ただし，O は 2 次の零行列であり，E は 2 次の単位行列である．

(2) 等式 $(*)$ を満たす実数を成分とする 2 次の正方行列全体の集合を S とする．S に属する行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．　$(**)$ $x^2+y^2+z^2+w^2\geqq 2b$

また，等号が成り立つときの X を $a,\ c$ を用いて表せ．ただし，$c=\sqrt{b-\dfrac{a^2}{4}}$ とする．

(3) $A,\ B$ を不等式 $(**)$ において等号が成り立つ S に属する 2 つの相異なる行列とする．このとき，$(X-A)(X-B)=O$ を満たす S に属する行列 X は A または B であることを示せ．

9.2.1　解答

(1) ハミルトン・ケイレイの定理から $X^2-(x+w)X+(xw-yz)E=O$ である．ゆえに $(*)$ のとき

$$-\{a-(x+w)\}X+\{b-(xw-yz)\}E=O$$

となる．$a-(x+w)\neq 0$ と仮定する．このとき $k=\dfrac{b-(xw-yz)}{a-(x+w)}$ とおけば，行列 X は実数 k を用いて $X=kE$ と表される．条件 $(*)$ より

$$\begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix}-a\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=O$$

より，$k^2-ak+b=0$．ところが $a^2-4b<0$ より

$$k^2-ak+b=\left(k-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2-4b}{4}>0$$

となり，矛盾である．ゆえに $a-(x+w)=0$ となりその結果 $b-(xw-yz)=0$ である．つまり $x+w=a$，$xw-yz=b$ が成り立つことが示された．

(2) 行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が S に属するので $b=xw-yz$ である．

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+w^2-2b &= x^2+y^2+z^2+w^2-2(xw-yz) \\ &= (x-w)^2+(y+z)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

また，等号が成り立つのは $x-w=0,\ y+z=0$ のとき．$\therefore\quad x=w=\dfrac{a}{2}$．またこのとき $b=\dfrac{a^2}{4}-yz$ で $y=-z$ なので，$y=-z=\pm c$ である．

$$\therefore\quad X=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} & \pm c \\ \mp c & \dfrac{a}{2} \end{pmatrix}\ (\text{複合同順})$$

(3) $A,\ B$ が不等式 $(**)$ において等号が成り立つ S に属する 2 つの相異なる行列であれば $b > \dfrac{a^2}{4} \geqq 0$ に注意して

$$A+B=aE,\quad AB=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} & \pm c \\ \mp c & \dfrac{a}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} & \mp c \\ \pm c & \dfrac{a}{2} \end{pmatrix}=bE$$

つまり，条件 $(*)$ は

$$X^2-(A+B)X+AB=O$$

と同値である．一方 X は $(X-A)(X-B)=O$ を満たすので

$$X^2-AX-XB+AB=O$$

したがって

$$BX=XB \quad \cdots ①$$

を満たさなければならない．

① より

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} & \pm c \\ \mp c & \dfrac{a}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} & \pm c \\ \mp c & \dfrac{a}{2} \end{pmatrix}$$

つまり

$$\frac{a}{2}x-yc=\frac{a}{2}x+zc,\ xc+\frac{a}{2}y=\frac{a}{2}y+cw$$

$a^2-4b<0$ より $c \neq 0$ である．ゆえに $x=w,\ y=-z$ でなければならない．つまり X は A または B である．

9.3 後期 1 番問題

複素数平面上の原点 O(0) を中心とする半径が 1 の円周上に相異なる 3 点 A(a)，B(b)，C(c) を取る．△ABC の外接円上に任意の点 P(z) を取り，直線 AB に関して P に対称な点を Q(β)，直線 AC に関して P に対称な点を R(γ) とする．次の問いに答えよ．

(1) β を $a,\ b,\ z$ を用いて表せ．

(2) △ABC の垂心を H(w) とするとき，w を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ．

(3) 3 点 H, Q, R は 1 直線上にあることを示せ．

9.3.1 解答

(1) 4 点 A，B，P，Q を点 A が原点に来るように平行移動する．移動後の各点を表す複素数は

$$0,\ b-a,\ 0,\ z-a,\ \beta-a$$

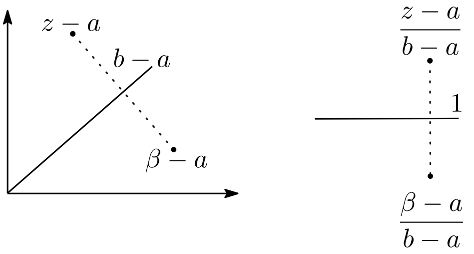
である．これらを $b-a$ で割ると

$$0,\ 1,\ \frac{z-a}{b-a},\ \frac{\beta-a}{b-a}$$

となる．$b-a$ で割ると図形的には回転と相似変形がなされるだけなので，$\dfrac{z-a}{b-a}$ と $\dfrac{\beta-a}{b-a}$ は実軸に関して対称である．つまり

$$\frac{\beta-a}{b-a}=\overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \beta &= \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}(\overline{z}-\overline{a})+a=\frac{b-a}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)+a\\ &= -ab\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)+a=-\frac{ab}{z}+a+b\end{aligned}$$



(2) 複素数 w を $w=a+b+c$ で定める．

$$\frac{w-a}{b-c}=\frac{b+c}{b-c}$$

なので，$b\bar{b}=1,\ c\bar{c}=1$ より

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{w-a}{b-c}\right)} &= \overline{\left(\frac{b+c}{b-c}\right)}=\frac{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}}\\ &= -\frac{b+c}{b-c}=-\frac{w-a}{b-c}\end{aligned}$$

つまり $\dfrac{w-a}{b-c}$ は純虚数である．したがって w が定める点と点 A を結ぶ直線が，直線 BC と直交している．他の組合せも同様なので，垂心 H に対応する複素数が $w=a+b+c$ である．

(3) (1) と同様に

$$\gamma=-\frac{ac}{z}+a+c$$

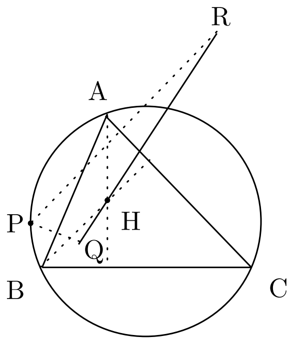
$$\begin{aligned}\beta-w &= -\frac{ab}{z}+a+b-(a+b+c)\\ &= -\frac{ab+zc}{z}\end{aligned}$$

同様に $\gamma - w = -\dfrac{ac+zb}{z}$

$$\therefore \quad \frac{\beta - w}{\gamma - w} = \frac{ab+zc}{ac+zb}$$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{\beta - w}{\gamma - w}\right)} &= \overline{\left(\frac{ab+zc}{ac+zb}\right)} = \frac{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{zc}}{\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{zb}} \\ &= \frac{ab+zc}{ac+zb} = \frac{\beta - w}{\gamma - w}\end{aligned}$$

これは H, Q, R が 1 直線上にあることを示している．



9.4　後期 5 番問題

壺の中に赤玉が a 個，黒玉が b 個入っている．壺の中から戻すことなく 1 個ずつ玉を取り出す試行を壺が空になるまで繰り返す．次の問いに答えよ．

(1) 赤玉の方が先に全部取り出される確率を求めよ．

(2) 自然数 $r(1 \leqq r \leqq a)$ に対し，丁度 N_r 回目の試行で，取り出された赤玉の総数が r 個になるとする．自然数 k が範囲 $r \leqq k \leqq r+b$ にあるとき，N_r の値が k である確率を求めよ．

(3) 自然数 $r(1 \leqq r \leqq a)$ に対し，等式 $\displaystyle\sum_{i=r}^{r+b} {}_i\mathrm{C}_r \cdot {}_{a+b-i}\mathrm{C}_{a-r} = {}_{a+1+b}\mathrm{C}_{a+1}$ を示せ．

(4) N_r の期待値 E を求めよ．

9.4.1　解答

(1) 赤玉の方が先に全部取り出されることは，いいかえれば最後に取り出される玉が黒玉ということである．k 回目の試行を行うときに赤玉が a_0 個，黒玉が b_0 個あったとする．

$$B_{k+1} = B_k \times \frac{b_0 - 1}{a_0 + b_0 - 1} + (1 - B_k) \times \frac{b_0}{a_0 + b_0 - 1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b_0}{a_0+b_0}\times\frac{b_0-1}{a_0+b_0-1}+\left(1-\frac{b_0}{a_0+b_0}\right)\times\frac{b_0}{a_0+b_0-1}\\
&= \frac{b_0(a_0+b_0-1)}{(a_0+b_0)(a_0+b_0-1)}=\frac{b_0}{a_0+b_0}=B_k
\end{aligned}
$$

したがって $B_{a+b}=B_1=\dfrac{b}{a+b}$ が求める確率である．

(2) 求める確率を $p_r(k)$ とおく．玉のとり出し方は，取りだした球の並べ方だけあるから，${}_{a+b}\mathrm{C}_a$ 通りある．これはすべて同様に確かである．このうち，ちょうど k 回目が赤玉であるとり出し方は ${}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}\cdot{}_{a+b-k}\mathrm{C}_{a-r}$ 通りである．

$$\therefore\quad p_r(k)=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}\cdot{}_{a+b-k}\mathrm{C}_{a-r}}{{}_{a+b}\mathrm{C}_a}$$

(3) (2) の結果を a にかえて $a+1$，r にかえて $r+1$ で用いる．k は $r+1\leqq k\leqq r+1+b$ を動く．$\displaystyle\sum_{k=r+1}^{r+1+b}p_{r+1}(k)=1$ であるから

$$\sum_{k=r+1}^{r+1+b}\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_r\cdot{}_{a+1+b-k}\mathrm{C}_{a-r}}{{}_{a+1+b}\mathrm{C}_{a+1}}=1$$

ここで $k-1=i$ とおくと

$$\sum_{i=r}^{r+b}\frac{{}_i\mathrm{C}_r\cdot{}_{a+b-i}\mathrm{C}_{a-r}}{{}_{a+1+b}\mathrm{C}_{a+1}}=1$$

$$\therefore\quad \sum_{i=r}^{r+b}{}_i\mathrm{C}_r\cdot{}_{a+b-i}\mathrm{C}_{a-r}={}_{a+1+b}\mathrm{C}_{a+1}$$

(4) k 人から 1 人選び，その人を除く $k-1$ 人から $r-1$ 人選ぶと，r 人の委員会と 1 人の委員長が決まる．これは先に r 人の委員会を選びその中から 1 人委員長を決めても同じ結果になる．

$$\therefore\quad k\,{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}=r\,{}_k\mathrm{C}_r$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad E &= \sum_{k=r}^{r+b}kp_r(k)=\sum_{k=r}^{r+b}\frac{k\,{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}\cdot{}_{a+b-k}\mathrm{C}_{a-r}}{{}_{a+b}\mathrm{C}_a}=\sum_{k=r}^{r+b}\frac{r\,{}_k\mathrm{C}_r\cdot{}_{a+b-k}\mathrm{C}_{a-r}}{{}_{a+b}\mathrm{C}_a}\\
&= \frac{r}{{}_{a+b}\mathrm{C}_a}\sum_{k=r}^{r+b}{}_k\mathrm{C}_r\cdot{}_{a+b-k}\mathrm{C}_{a-r}=\frac{{}_{a+1+b}\mathrm{C}_{a+1}}{{}_{a+b}\mathrm{C}_a}r=\frac{a+b+1}{a+b}r
\end{aligned}
$$

10 一橋大

10.1 4番問題

$f(x)=x^3-x^2-x-1$，$g(x)=x^2-x-1$ とする．

(1) 方程式 $f(x)=0$ はただひとつの実数解 α をもつことを示せ．また，$1<\alpha<2$ であることを示せ．

(2) 方程式 $g(x)=0$ の正の解を β とする．α と β の大小を比較せよ．

(3) α^2 と β^3 の大小を比較せよ．

10.1.1　解答

(1) $f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$ であるから $f(x)$ は $x=-\dfrac{1}{3}$ で極大，$x=1$ で極小である．

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-1<0 \\ f(1) &= 1-1-1-1<0 \\ f(2) &= 8-4-2-1=1>0 \end{aligned}$$

したがって $f(x)$ は $x\leqq 1$ での最大値が負で，かつ $1<x$ では単調増加なので，方程式 $f(x)=0$ はただひとつの実数解 α をもち，その解は $1<\alpha<2$ であることが示された．

(2) $g(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ を軸とする二次関数で $g(1)=-1<0$ である．$\dfrac{1}{2}<x$ で単調増加，かつ $g(2)=4-2-1=1>0$, $g(0)=-1<0$ より $g(x)=0$ の解は $x<0$ と $1<x<2$ にある．
β は正で $g(\beta)=\beta^2-\beta-1=0$ なので

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \beta^3-\beta^2-\beta-1=\beta(\beta^2-\beta-1)-1 \\ &= -1<0=f(\alpha) \end{aligned}$$

$f(x)$ は $1<x<2$ で単調増加なので $\beta<\alpha$ である．

(3) 次に

$$\begin{aligned} g(x^3) &= (x^2-x-1)(x^4+x^3+2x^2+2x+4)+6x+3 \\ g(x^2) &= (x^3-x^2-x-1)(x+1)+x^2+2x \\ \therefore \quad & g(\beta^3)=6\beta+3>9 \\ & g(\alpha^2)=\alpha^2+2\alpha<4+2=6 \end{aligned}$$

$g(x)$ は $x\geqq\dfrac{1}{2}$ で単調増加で $1<\alpha^2$, β^3 ，かつ

$$g(\alpha^2)<g(\beta^3)$$

であるから $\alpha^2<\beta^3$ である．

10.2　後期 2 番問題

z を 1 でない複素数とし，$w=\dfrac{iz}{z-1}$ とおく．

(1) w が実数であるような z の全体を複素数平面上に図示せよ．

(2) a を正の実数とする．$|w|\leqq a$ であるような z の全体を複素数平面上に図示せよ．

10.2.1　解答

(1)

条件より

$$
\begin{aligned}
& \frac{iz}{z-1} = \overline{\left(\frac{iz}{z-1}\right)} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}-1} \\
\Longleftrightarrow\quad & z(\bar{z}-1) = -\bar{z}(z-1),\ z \neq 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & z\bar{z} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\bar{z} = 0,\ z \neq 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},\ z \neq 1
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad \left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},\ z \neq 1
$$

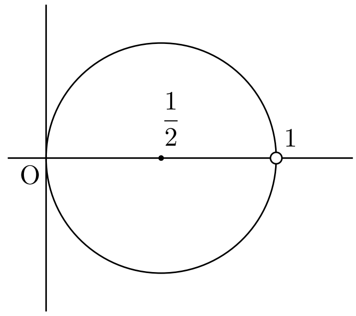


図 1

(2) 条件より

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{iz}{z-1}\right|^2 \leqq a^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{iz}{z-1}\cdot\frac{-i\bar{z}}{\bar{z}-1} \leqq a^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & z\bar{z} \leqq a^2(z-1)(\bar{z}-1),\ z \neq 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & (a^2-1)z\bar{z} - a^2 z - a^2\bar{z} + a^2 \geqq 0,\ z \neq 1
\end{aligned}
$$

不等式は $z=1$ では成立しない．よって条件は

$$
(a^2-1)z\bar{z} - a^2 z - a^2\bar{z} + a^2 \geqq 0
$$

である．

$a \neq 1$ のとき．

$$
\begin{aligned}
& (a^2-1)z\bar{z} - a^2 z - a^2\bar{z} + a^2 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & (a^2-1)\left(z\bar{z} - \frac{a^2}{a^2-1}z - \frac{a^2}{a^2-1}\bar{z} + \frac{a^2}{a^2-1}\right) \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & (a^2-1)\left(\left|z-\frac{a^2}{a^2-1}\right|^2 - \frac{a^2}{(a^2-1)^2}\right) \geqq 0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad
\begin{aligned}
& \left|z-\frac{a^2}{a^2-1}\right| \leqq \frac{a}{1-a^2} \quad (a<1) \\
& \left|z-\frac{a^2}{a^2-1}\right| \geqq \frac{a}{a^2-1} \quad (a>1)
\end{aligned}
$$

$a = 1$ のとき．

$$
-z - \bar{z} + 1 \geqq 0
$$

$z = x + iy$ とおくと $-x - iy - x + iy + 1 \geqq 0$ となるので

$$
\frac{1}{2} \geqq x
$$

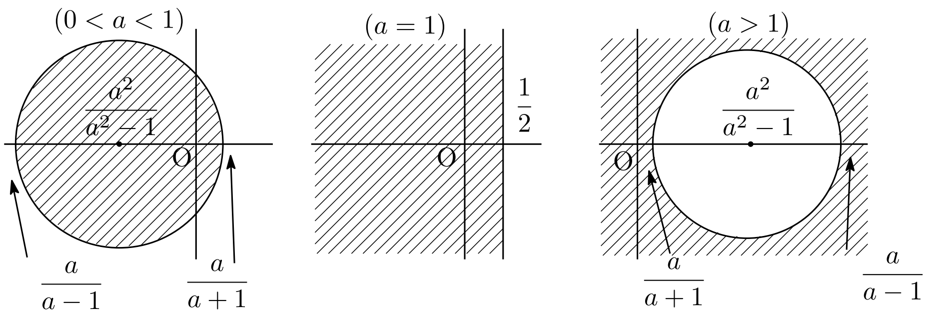


図 2

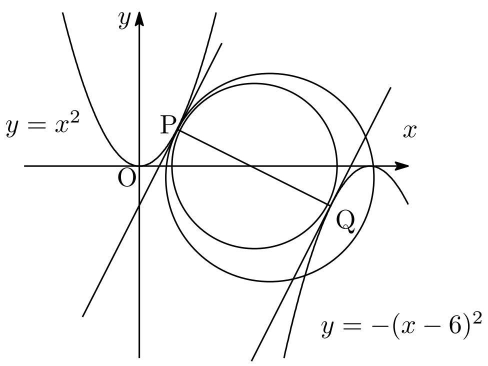
10.3　後期 4 番問題

半径 r の円は，連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq x^2 \\ y \geqq -(x-6)^2 \end{cases}$$

の表す平面上の領域の中を自由に動かすことができる．r の最大値を求めよ．

10.3.1　解答



図のように，2 つの放物線 $y = x^2$ と $y = -(x-6)^2$ に平行な接線を引く．接点を適当にとり，接点と接点を結ぶ直線がこれらの接線に直交しているようにする．

このとき 2 つの接線の接点を P，Q とする．

円の直径が 2 点 P，Q の距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ より小さければ，明らかに，連立不等式の表す平面上の領域の中を自由に動かすことができる．

逆に大きければ，円を点 P で $y = x^2$ の接する位置に持ってきたとき，円の直径が線分 PQ に重なりかつそれより大きいので，円の一部が $y = -(x-6)^2$ で定まる領域の境界の外に出る．

したがって求める半径の最大値は，$\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{2}$ である．

$\mathrm{P}(s,\ s^2)$，$\mathrm{Q}(t,\ -(t-6)^2)$ とする．

$$\begin{array}{ll} 2 \text{ 接線平行より} & 2s = -2(t-6) \\ \text{接線と PQ が直交より} & 2s \cdot \dfrac{s^2 + (t-6)^2}{s-t} = -1 \end{array}$$

第 1 式から $s+t=6$，第 2 式に代入して，$2s\cdot\dfrac{s^2+s^2}{2s-6}=-1$．つまり

$$2s^3+s-3=(s-1)(2s^2+2s+3)=0$$

第 2 因子からは実数解が得られない．ゆえに $s=1,\ t=5$．この結果 $\mathrm{P}(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(5,\ -1)$．

$$\therefore\quad \text{半径の最大値}\ =\frac{\sqrt{(1-5)^2+(1+1)^2}}{2}=\sqrt{5}$$

11　九大

11.1　3 番問題

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする．$p,\ n$ を自然数とし，領域

$$D_n=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x,\ x^p\leqq y\leqq n\}$$

を考え，その面積を S_n とする．L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする．

(1) グラフ $y=x^p\ (0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ．

(2) 不等式 $M_n<S_n<M_n+n$ を示せ．また，面積 S_n を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n$ を求めよ．

11.1.1　解答

(1) $h,\ k$ を自然数とする，2 つの格子点 $(h,\ k)$, $(h,\ k+1)$ を結ぶ線分で隣りあう 2 つの単位正方形の両方とグラフ $y=x^p\ (0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}})$ が図 1 のように交わるとする．

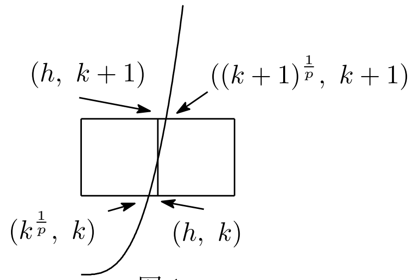


図 1

このとき

$$k^{\frac{1}{p}}<h<(k+1)^{\frac{1}{p}}$$

つまり

$$k<h^p<k+1$$

でなければならない．$h,\ k,\ p$ が自然数なのでこれはあり得ない．

よってグラフ $y=x^p\ (0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}})$ は $k\leqq y\leqq k+1$ にある単位正方形のただ 1 つとのみ交わる．ゆえにこのグラフと交わる単位正方形の個数は n である．

(2) D_n に含まれる単位正方形とその周の面積は M_m であるから不等式 $M_n < S_n$ は明らかである．(1) からグラフ $y = x^p$ $(0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ が交わる単位正方形の個数が n なので，D_n に含まれる単位正方形とこれら n 個の単位正方形およびその周をあわせた領域に D_n は含まれ，一致することはない．

よって $S_n < M_n + n$ が成り立つ．

$$S_n = n \cdot n^{\frac{1}{p}} - \int_0^{n^{\frac{1}{p}}} x^p\,dx = n^{\frac{p+1}{p}} - \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_0^{n^{\frac{1}{p}}} = \frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}$$

(3) D_n の形状に注意して，単位正方形とその左上の格子点を対応させる．すると，領域 D_n 内の格子点でグラフ $y = x^p$ $(0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ 上にはないものは，図 2 の黒丸のように D_n 内およびグラフと交わる単位正方形と一対一に対応している．

これらは $M_n + n$ 個ある．

グラフ $y = x^p$ $(0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ 上の格子点は図 2 の白丸のように 1 個以上 $n+1$ 個以下である．

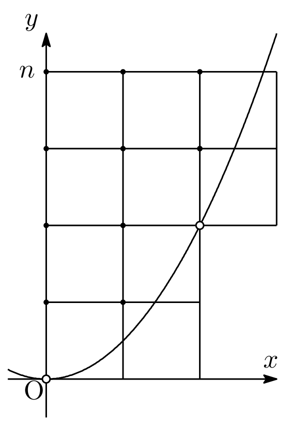


図 2

$$\therefore \quad (M_n + n) + 1 \leqq L_n \leqq (M_n + n) + n + 1$$

(2) より

$$S_n + 1 < M_n + n + 1,\ M_n + n + n + 1 < S_n + n + n + 1$$

なので，

$$S_n + 1 < L_n < S_n + n + n + 1$$

を得る．$S_n = \dfrac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}$ より

$$\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}} + 1 < L_n < \frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}} + 2n + 1$$

つまり

$$\frac{p}{p+1} + n^{-\frac{p+1}{p}} < n^{-\frac{p+1}{p}}L_n < \frac{p}{p+1} + (2n+1) \cdot n^{-\frac{p+1}{p}}$$

$(2n+1) \cdot n^{-\frac{p+1}{p}} = \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{n^{\frac{1}{p}}}$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n+1) \cdot n^{-\frac{p+1}{p}} = 0$．

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}}L_n = \frac{p}{p+1}$$

11.2　5F 番問題

n を 2 以上の自然数とする．数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$ で与えられている．

(1) 不等式

$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$$

が成り立つことを示せ．

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ．

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ．

11.2.1　解答

12　都立大

12.1　3 番問題

以下において，二つの曲線が直交するとは，交点においてそれぞれの曲線の接線どうしが直交することをいう．ただし，交点が二つ以上ある場合は，どの交点においても接線どうしが直交することとする．L を原点 O を通らない直線とする．L 上の点 P に対して，点 Q を

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overline{\mathrm{OP}}|^2}$$

により定める．ここで $|\overline{\mathrm{OP}}|$ は線分 OP の長さを表す．点 P が直線 L 上を動くとき，対応する点 Q の軌跡を $T(L)$ で表す．次の問いに答えよ．

(1) 積 $|\overline{\mathrm{OP}}| \times |\overline{\mathrm{OQ}}|$ を求めよ．

(2) 直線 L_1: $x = 1$ に対して $T(L_1)$ の方程式を求めよ．

(3) 直線 L_2: $y = 2$ に対する $T(L_2)$ は $T(L_1)$ と直交することを示せ．

12.1.1　解答

(1)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \left|-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overline{\mathrm{OP}}|^2}\right|$$

より $|\overline{\mathrm{OP}}| \times |\overline{\mathrm{OQ}}| = 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1,\ t)$ t 実数 とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\frac{(1,\ t)}{1+t^2}$$

つまり $T(L_1)$ は媒介変数 t を用いて

$$x = -\frac{1}{1+t^2},\ y = -\frac{t}{1+t^2}$$

と表される．これから $x \neq 0$ で，$t = \dfrac{y}{x}$ であるから

$$x = -\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$$

これから $x^2 + x + y^2 = 0$.

$$\therefore\quad T(L_1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},\ (x,\ y) \neq (0,\ 0)$$

(3) 同様に $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (s,\ 2)$ s 実数 とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\frac{(s,\ 2)}{s^2+4}$$

つまり $T(L_2)$ は媒介変数 s を用いて

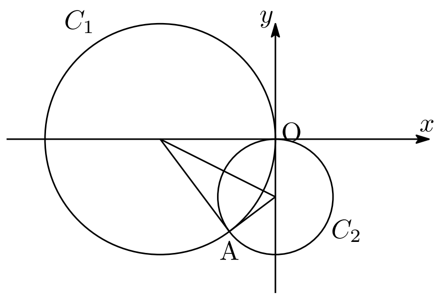
$$x = -\frac{s}{s^2+4},\ y = -\frac{2}{s^2+4}$$

と表される．これから $y \neq 0$ で，$s = \dfrac{2x}{y}$ であるから

$$y = -\frac{2}{\left(\dfrac{2x}{y}\right)^2 + 4}$$

これから $x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2}y = 0$.

$$\therefore\quad T(L_2) : x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},\ (x,\ y) \neq (0,\ 0)$$



軌跡 $T(L_1)$ に原点を付け加えた円を C_1，軌跡 $T(L_2)$ に原点を付け加えた円を C_2 とする．C_1，C_2 はともに原点を通り，C_1 の中心は x 軸上にあり，C_2 の中心は y 軸上にあるので，2円は原点では直交している．もう一つの交点を A とする．2 円は中心を結ぶ直線に関して対称であるから，点 A でも直交している．

2 円の交点は他にないので $T(L_2)$ は $T(L_1)$ と直交することが示された．

13　東北大

13.1　後期 3 番問題

平面において，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあり，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円周上にある．

P と Q が $\mathrm{PQ}=1$ を保ちながら動くとき，次の問いに答えよ．

(1) $s \neq 1$ のとき，$u,\ v$ を $s,\ t$ の式で表せ．

(2) 線分 PQ の中点の軌跡を求めよ．

13.1.1　解答

(1) $u,\ v,\ s,\ t$ の間の関係式は次の 3 つである．

$$s^2+t^2=1 \quad \cdots ①$$
$$(u-1)^2+v^2=1 \quad \cdots ②$$
$$(u-s)^2+(v-t)^2=1 \quad \cdots ③$$

① ＋② －③ より

$$-2u+2su+2tv=0$$

$s \neq 1$ なので $u=\dfrac{t}{1-s}v$．これ ② の展開式に代入する．

$$\left(\frac{t}{1-s}v\right)^2-2\left(\frac{t}{1-s}v\right)+v^2=\left\{\frac{t^2}{(1-s)^2}+1\right\}v^2-2\left(\frac{t}{1-s}v\right)=0$$

これから $v=0$，または

$$\left\{\frac{t^2}{(1-s)^2}+1\right\}v-\frac{2t}{1-s}=0$$

ここで
$$\frac{t^2}{(1-s)^2}+1=\frac{1-s^2}{(1-s)^2}+1=\frac{1+s}{1-s}+1=\frac{2}{1-s}$$
ゆえに
$$\frac{2}{1-s}v-\frac{2t}{1-s}=0$$
より，$v=t$．

$v=0$ のとき $u=0$．$v=t$ のとき $u=\dfrac{t}{1-s}v=\dfrac{t^2}{1-s}=1+s$

$$\therefore\quad (u,\ v)=(0,\ 0),\ (1+s,\ t)$$

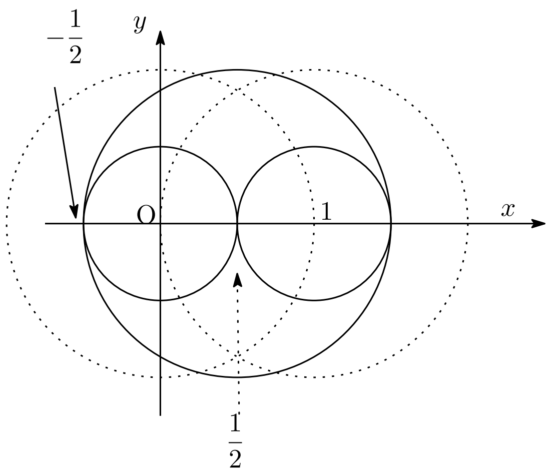
$(u,\ v)=(0,\ 0)$ は s と t の値に関係なく定数になるということである．

(2) $s=1$ のとき．① から $t=0$．このとき ②，③ は同一の条件となり，$(u,\ v)$ はもとの円周上の全体になる．したがって中点の軌跡は $(1,\ 0)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円．

$s\neq 1$ のとき．

$(u,\ v)=(0,\ 0)$ なら，$(s,\ t)$ がもとの円周上の全体になる．したがって中点の軌跡は $(0,\ 0)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円．

$(u,\ v)=(1+s,\ t)$ のとき．中点を $(X,\ Y)$ とすると
$$X=\frac{u+s}{2}=s+\frac{1}{2},\ Y=\frac{v+t}{2}=t$$
$$\therefore\quad \left(X-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=1$$
ゆえに求める軌跡は次の図の実線部分である．



14　千葉大

14.1　3 番問題

正の整数 $x,\ y,\ z,\ n$ に対して $x^2=7^{2n}(y^2+10z^2)$ が成立しているとする．

(1) 整数の 2 乗を 3 でわった余りは 0 か 1 であることを示せ．

(2) yz は 3 の倍数であることを示せ．

(3) $y,\ z$ がともに素数のとき x を n を用いて表せ．

14.2　3 番解答

(1) 整数 n を 3 で割ると商が q で余りが r とする．$r=0,\ 1,\ 2$ である．

$$n^2=(3q+r)^2=3(3q^2+2qr)+r^2$$

なので，n^2 と r^2 は 3 で割った余りが等しい．

$$r^2=0,\ 1,\ 4=3+1$$

なので，整数の 2 乗を 3 でわった余りは 0 か 1 であることを示された．また，n^2 を 3 で割った余りが 0 になるのは，n が 3 の倍数であるときにかぎることも示された．

(2) y も z も 3 の倍数でないとする．このとき (1) から $y^2=3k+1,\ z^2=3l+1$ とおける．また 2 項定理から

$$7^{2n}=(6+1)^{2n}=\sum_{i=0}^{2n-1}{}_{2n}\mathrm{C}_i6^{2n-i}+1$$

なので，$7^{2n}=3m+1$ とおける．ここで $k,\ l,\ m$ は整数である．このとき

$$\begin{aligned}7^{2n}(y^2+10z^2) &= (3m+1)\{3k+1+10(3l+1)\}\\ &= (3m+1)\{(3(10l+k+3)+2\}\end{aligned}$$

なので，$7^{2n}(y^2+10z^2)$ を 3 で割ると 2 余る．

一方 x^2 を 3 で割ると 0 か 1 余る．ゆえに条件式の両辺を 3 で割った余りが右辺と左辺で異なり矛盾である．

したがって少なくとも y または z が 3 の倍数で，yz が 3 の倍数であることが示された．

(3) yz が 3 の倍数で $y,\ z$ がともに素数なので，$y=3$ または $z=3$ である．

$y=3$ のとき．条件式は

$$x^2=7^{2n}(9+10z^2)$$

となる．7^{2n} も平方数なので，$9+10z^2$ は平方数でなければならない．これを N^2 とおく．つまり $10z^2=(N+3)(N-3)$ となる整数 N が存在しなければならない．

$N+3=N-3+6$ なので，$N+3$ と $N-3$ の偶数・奇数は一致する．ゆえに可能性があるのは

$$(N+3,\ N-3)=(5z^2,\ 2),\ (z^2,\ 10),\ (10z,\ z),\ (5z,\ 2z),\ (10,\ z^2)$$

このうち z が素数になるのは最後の 2 つの場合のみ．いずれも $z=2$

$z=3$ のとき．y^2+90 が平方数．同様に $y^2+90=N^2$ とおく．

$$(N+y)(N-y)=90$$

である．$N+y=N-y+2y$ より $N+y$ と $N-y$ の偶数・奇数は一致し，積は奇数かまたは 4 の倍数である．90 はそのいずれでもないので，この場合 y はない．

したがって $y=3,\ z=2$．

$$x^2=7^{2n}(9+40)=7^{2n+2}$$

$$\therefore \quad x=7^{n+1}$$

14.3　11 番問題

p を素数とする．x に関する 2 次方程式

$$px^2+(5-p^2)x-3p=0$$

が整数の解を持つのは $p=2$ のときに限ることを示せ．

14.4　11 番解答

2 次方程式の判別式は

$$D=(5-p)^2+12p^2=(p^2+1)^2+24$$

である．整数を持つためには判別式 D が平方数となることが必要である．つまり

$$(p^2+1)^2+24=N^2$$

と表されなければならない．これから

$$\{N+(p^2+1)\}\{N-(p^2+1)\}=24$$

ここで $N+(p^2+1),\ N-(p^2+1)$ の偶数奇数は一致するので，あり得るのは

$$(N+p^2+1,\ N-p^2-1)=(2,\ 12),\ (4,\ 6),\ (6,\ 4),\ (12,\ 2)$$

のみ．したがって $N=7,\ 5$

$N=7$ のとき，$(p^2+1)^2=25$ より $p=2$．$N=5$ のとき，$(p^2+1)^2=1$ より $p=0$．

ゆえに $p=2$ が必要で，このとき方程式は

$$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)=0$$

となり確かに整数解 $x=-2$ を持つ．

［別解］整数解を α とする．

$$p\alpha^2+(5-p^2)\alpha-3p=0$$

より，

$$3p=\alpha(p\alpha+5-p^2)$$

p は素数なので

$$\alpha=\pm1,\ \pm3,\ \pm p,\ \pm3p$$

$\alpha=\pm 1$ のとき．$3p=\pm 1(\pm p+5-p^2)$．これから $p=-1\pm\sqrt{6}$，不適．
$\alpha=\pm 3$ のとき．$3p=\pm 3(\pm 3p+5-p^2)$．これから $p=1\pm\sqrt{6}$，不適．
$\alpha=p$ のとき．$3p=5p$．これから $p=0$，不適．
$\alpha=-p$ のとき．$3p=p^3-5p+p^3$．これから $2p^3=8p$，$\therefore\quad p=2$
$\alpha=3p$ のとき．$3p=3p(3p^2+5-p^2)$．これから $2p^2+4=0$，p なし．
$\alpha=-3p$ のとき．$3p=-3p(-3p^2+5-p^2)$．これから $4p^3=6p$，p が素数でなくなる．

ゆえに整数の解を持つのは $p=2$ のときに限る．

15　高知医大

15.1　3番問題

n を負でない整数とする．関数 $P_n(x)$ は次の条件を満たしているとする．
$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$
$(n+2)P_{n+2}(x)=(2n+3)xP_{n+1}(x)-(n+1)P_n(x)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

(1) $P_2(x)$ および $P_3(x)$ を求めよ．

(2) $P_n(1)=1$ および $P_n(-1)=(-1)^n$ を示せ．

(3) $P_n(x)$ は次の条件を満たすことがわかっている (証明しなくてよい)．

$$(n+1)P_{n+1}(x)+P_n'(x)=xP_{n+1}'(x)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

これを用いて $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)\,dx$ を求めよ．

(4) $n>0$ とする．整数 k が $0<k\leqq n$ を満たすとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1}x^kP_{n+1}(x)\,dx$ を求めよ．

15.1.1　解答

(1)

$$\begin{aligned}2P_2(x)&=3xP_1(x)-P_0(x)=3x^2-1\qquad\therefore\quad P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\\3P_3(x)&=5xP_2(x)-2P_1(x)=\frac{15}{2}x^3-\frac{9}{2}x\qquad\therefore\quad P_3(x)=\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(2) $P_n(1)=a_n$ とおく．条件式に $x=1$ を代入して

$$(n+2)a_{n+2}=(2n+3)a_{n+1}-(n+1)a_n$$

ここで $a_0=1,\ a_1=1$ である．$a_n=a_{n+1}=1$ とすると

$$(n+2)a_{n+2}=(2n+3)-(n+1)=n+2\quad\therefore\quad a_{n+2}=1$$

よって数学的帰納法によって $P_n(1)=1$ が示された．

同様に $P_n(-1)=b_n$ とおく．条件式に $x=-1$ を代入して

$$(n+2)b_{n+2}=-(2n+3)b_{n+1}-(n+1)b_n$$

$b_0=1,\ b_1=-1$ である．$b_n=(-1)^n,\ b_{n+1}=(-1)^{n+1}$ とすると

$(n{+}2)b_{n+2}=-(2n{+}3)(-1)^{n+1}-(n{+}1)(-1)^n=(n{+}2)(-1)^n \quad \therefore \quad b_{n+2}=(-1)^n=(-1)^{n+2}$

よって数学的帰納法によって $P_n(-1)=(-1)^n$ が示された．

(3)

$$\begin{aligned}(n+1)\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)\,dx &= \int_{-1}^{1}xP'_{n+1}(x)\,dx-\int_{-1}^{1}P'_n(x)\,dx\\ &= [xP_{n+1}(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)\,dx-[P_n(x)]_{-1}^{1}\\ &= 1-(-1)^n-\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)\,dx-\{1-(-1)^n\}=\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)\,dx\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)\,dx=0$ である．

(4) 同様に

$$(n+1)\int_{-1}^{1}x^kP_{n+1}(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x^{k+1}P'_{n+1}(x)\,dx-\int_{-1}^{1}x^kP'_n(x)\,dx$$
$$=\left[x^{k+1}P_{n+1}(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(k+1)x^kP_{n+1}(x)\,dx-\left[x^kP_n(x)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}kx^{k-1}P_n(x)\,dx$$
$$=1-(-1)^{k+1+n+1}-(k+1)\int_{-1}^{1}x^kP_{n+1}(x)\,dx-\{1-(-1)^{k+n}\}+k\int_{-1}^{1}x^{k-1}P_n(x)\,dx$$

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1}x^kP_{n+1}(x)\,dx=\frac{k}{n+k+2}\int_{-1}^{1}x^{k-1}P_n(x)\,dx$$

この等式が k にかえて $k-1,\ \cdots,\ 1$ でも成立するので

$$\int_{-1}^{1}x^kP_{n+1}(x)\,dx=\frac{k!(n+2)!}{(n+k+2)!}\int_{-1}^{1}P_{n-k+1}(x)\,dx=0$$

16　長崎大

16.1　長崎大問題

平面上に三角形 ABC と点 P があり，

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$$
$$\alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0,\ \gamma\geqq 0,\ \alpha+\beta+\gamma=1$$

という関係が成り立っている．次の問に答えよ．

(1) 点 P は三角形 ABC の周または内部にあることを示せ．

(2) 三角形 ABC が辺の長さ 1 の正三角形であるとき，その内心を I として，$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2$ を β, γ で表せ．

(3) (2) において，点 P が点 I を中心とする三角形 ABC の内接円上にあるための必要十分条件は

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{4}$$

であることを示せ．

16.1.1　解答

(1)

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}\quad\Longleftrightarrow\quad-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+\beta(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\overrightarrow{0}$$

$$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\alpha+\beta+\gamma}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ここで $\alpha=1-(\beta+\gamma)\geqq 0$ より $0\leqq\beta+\gamma\leqq 1$ である．
$\beta+\gamma=0$，つまり $\beta=\gamma=0$ のとき点 P は点 A．
$0<\beta+\gamma\leqq 1$ なら

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\beta+\gamma)\left\{\frac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}$$

と変形できる．$\dfrac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で定まる点は辺 BC 上にあり，$0<\beta+\gamma\leqq 1$ のなで点 P は確かに $\triangle$ABC の周か内部にある．

(2) 内接円の中心は各頂角の二等分線の交点である．重心は頂点と対辺の中点を結ぶ三線分の交点である．正三角形ではこれは一致する．

$$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$

また $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ なので

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right|^2\\
&=\left|\left(\beta-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\gamma-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\
&=\left(\beta-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\beta-\frac{1}{3}\right)\left(\gamma-\frac{1}{3}\right)+\left(\gamma-\frac{1}{3}\right)^2\\
&=\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma-\beta-\gamma+\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(3) (2) と同様の理由から，内接円の半径は正三角形の高さの $\dfrac{1}{3}$ である．つまり $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．よって，点 P が内接円上にあることと $|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2=\dfrac{1}{12}$ は同値である．

一方，(2) と同様に始点を B，C にとることによって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2 &= \gamma^2+\alpha^2+\gamma\alpha-\gamma-\alpha+\frac{1}{3} \\ &= \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

を得る．(2) の結果とあわせてこれら 3 式を加えると

$$\begin{aligned} 3|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2 &= 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+1 \\ &= 2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+1 \\ &= -3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+1 \end{aligned}$$

ゆえに点 P が内接円上にあることと

$$\frac{3}{12}=-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+1$$

と同値．これから点 P が点 I を中心とする三角形 ABC の内接円上にあるための必要十分条件は

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{4}$$

である．

17　信州大

17.1　2 番問題

原点 O を出発して x 軸上を動く点 P がある．P は 1 つのさいころを投げるごとに右 (正方向) か左 (負方向) へ 1 進む．

出発点 O を P_0 とし，さいころを k 回投げるときに点 P が動いた点を順に P_1，P_2，$\cdots$，P_k とする．このとき，P_1，P_2，$\cdots$，P_k を点 P が通った点と呼ぶことにする．

点 P が座標 α の点にいるとき，P は次の規則に従って動くものとする．

(ア) 点 P が座標　$\alpha+1$ と $\alpha-1$ の 2 点とも通ったことがあるか，または一度も通ったことがなければ，1，2，3 の目で左へ 1 動き，4，5，6 の目で右へ 1 動く．

(イ) 点 P が座標 $\alpha-1$ の点のみ通ったことがあり $\alpha+1$ の点は通ったことがないときには，1，2，3，4 の目で左へ 1 動き，5，6 の目で右へ 1 動く．

(ウ) 点 P が座標 $\alpha+1$ の点のみ通ったことがあり $\alpha-1$ の点は通ったことがないときには，1，2 の目で左へ 1 動き，3，4，5，6 の目で右へ 1 動く．

たとえば，1 回目にさいころを投げたときには，点 P は座標が 1 と -1 のどちらの点も通ったことがないので，(ア) の規則から左右どちらかに同じ確率で 1 動く．その結果右に動いたとすれば，次にさいころを投げるときには (イ) の規則によって 1，2，3，4 の目で左へ 1 動き，5，6 の目で右へ 1 動く．

このとき，次の問に答えよ．

(1) さいころを 2 回投げたあとで，点 P が原点 O にいる確率を求めよ．

(2) さいころを 6 回投げたあとで，点 P が原点 O にいる確率を求めよ．

17.1.1 解答

(1) 点 P_k の座標を x_k とする．$(x_1,\ x_2)=(1,\ 0)$ となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

$(x_1,\ x_2)=(-1,\ 0)$ となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ である．

$x_2=0$ となるのはこれ以外にはなく，これらは互いに排反である．

$$\therefore\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

(2) 同様に $x_6=0$ となる事象は，$x_1=1$ からはじまる場合と，$x_1=-1$ からはじまる場合とがあり，これは条件の右への動きと左への動きの対称性によって互いに等しい．

$x_1=1$ からはじまる場合を x_2 以降について辞書式に場合分けしてその確率を書き出す．これらは互いに排反である．

$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6)$	その確率
$(1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\cdot\frac{9}{2^2\cdot 3^5}$
$(1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\cdot\frac{18}{2^2\cdot 3^5}$
$(1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\cdot\frac{18}{2^2\cdot 3^5}$
$(1,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\cdot\frac{12}{2^2\cdot 3^5}$
$(1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\cdot\frac{24}{2^2\cdot 3^5}$
$(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\cdot\frac{64}{2^2\cdot 3^5}$
$(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\cdot\frac{32}{2^2\cdot 3^5}$
$(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\cdot\frac{24}{2^2\cdot 3^5}$
$(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\cdot\frac{24}{2^2\cdot 3^5}$
$(1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -1,\ 0)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\cdot\frac{12}{2^2\cdot 3^5}$

したがって $x_1=1,\ x_6=0$ となる確率は $\dfrac{237}{2^2\cdot 3^5}=\dfrac{79}{324}$.

$x_1=-1,\ x_6=0$ となる確率も $\dfrac{79}{324}$ である．

$$\therefore\quad \frac{79}{324}+\frac{79}{324}=\frac{79}{162}$$

18 奈良女大

18.1 4 番問題

a,b,c,d,e,f,g,h を実数の定数とする．4 つの不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $ax+by\leqq e$, $cx+dy\leqq f$ を同時にみたす xy 平面の領域を D とする．また，4 つの不等式 $u\geqq 0$, $v\geqq 0$, $au+cv\geqq g$, $bu+dv\geqq h$ を同時にみたす uv 平面の領域を E とする．次の問 (1)，(2) に答えよ．

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D を動き，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ が領域 E を動くとき，不等式 $gx+hy \leqq eu+fv$ が成り立つことを示せ．

(2) 問 (1) の不等式で等号が成立するような領域 D の点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ と領域 E の点 $\mathrm{Q}_0(u_0,\ v_0)$ があるとする．このとき，領域 D を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$gx+hy \leqq gx_0+hy_0$ が成り立つこと，および領域 E を動く点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ に対して，$eu_0+fv_0 \leqq eu+fv$ が成り立つことを示せ．

18.1.1 解答

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D を動き，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ が領域 E を動くので，

$$ax+by \leqq e,\ cx+dy \leqq f$$

が成り立っている．したがって $u \geqq 0,\ v \geqq 0$ に対して

$$(ax+by)u \leqq eu,\ (cx+dy)v \leqq fv$$

辺々加えて

$$(ax+by)u+(cx+dy)v \leqq eu+fv \quad \cdots ①$$

同様に

$$au+cv \geqq g,\ bu+dv \geqq h$$

より

$$(au+cv)x+(bu+dv)y \geqq gx+hy \quad \cdots ②$$

$$(ax+by)u+(cx+dy)v = (au+cv)x+(bu+dv)y$$

であるから ①，② より

$$gx+hy \leqq eu+fv$$

が示された．

(2) 点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ と点 $\mathrm{Q}_0(u_0,\ v_0)$ に関して

$$gx_0+hy_0 = eu_0+fv_0$$

が成立する．

$$\begin{aligned} gx+hy &\leqq (au_0+cv_0)x+(bu_0+dv_0)y \quad (\because ②) \\ &= (ax+by)u_0+(cx+dy)v_0 \\ &\leqq eu_0+fv_0 = gx_0+hy_0 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} eu+fv &\geqq (ax_0+by_0)u+(cx_0+dy_0)v \quad (\because ①) \\ &= (au+cv)x_0+(bu+dv)y_0 \\ &\geqq gx_0+hy_0 = eu_0+fv_0 \end{aligned}$$

よって題意が示された．

19　日本女子大

19.1　理問題

n を正の整数または 0 とする．次の (1)〜(7) に答えよ．

(1) 次の式を示せ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

(2) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ とおく．次の式を示せ．

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}\ (n \geqq 2)$$

(3) 次の式を示せ．

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(4) $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\,dx$ とおく．次の式を示せ．

$$S_{n-1} - \frac{2n}{2n-1} S_n = \frac{2}{2n(2n-1)} I_{2n}\ (n \geqq 1)$$

(5) 次の式を示せ．ただし，N は整数で $N \geqq 1$ とする．

$$S_N = \frac{(2N-1)(2N-3) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2N)(2N-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right)$$

(6) 次の式を示せ．ただし，N は整数で $N \geqq 1$ とする．

$$S_N \leqq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{(2N-1)(2N-3) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2N)(2N-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3$$

なお，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ で $x < \frac{\pi}{2} \sin x$ であることを用いてよい．

(7) 次の式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

19.1.1　解答

(1) $t = \frac{\pi}{2} - x$ とおく．

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(-\cos x)' \, dx \\
&= \left[-\sin^{n-1}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\cos^2 x \, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(1-\sin^2 x)\, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ (n \geqq 2) \quad \cdots ①
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \, dx = \frac{\pi}{2} \\
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1
\end{aligned}
$$

である．したがって ① より

$$
I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}
$$

となる．

(4)

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(x^2\cos^{2n-1} x)\, dx \\
&= \left[\sin x(x^2\cos^{2n-1} x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\qquad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\{2x\cos^{2n-1} x + (2n-1)x^2\cos^{2n-2} x(-\sin x)\}\, dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\cos^{2n-1} x \, dx + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n-2} x(\sin^2 x)\}\, dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\cos^{2n-1} x \, dx + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n-2} x(1-\cos^2 x)\}\, dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\cos^{2n-1} x \, dx + (2n-1)(S_{n-1} - S_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad 2nS_n - (2n-1)S_{n-1} &= \frac{2}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^{2n} x)'\, dx \\
&= \frac{2}{2n}\left[x\cos^{2n} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{2n} I_{2n}
\end{aligned}
$$

これから

$$
S_{n-1} - \frac{2n}{2n-1}S_n = \frac{2}{2n(2n-1)} I_{2n} \ (n \geqq 1)
$$

を得る．

(5) N に関する数学的帰納法で示す．$N=1$ のとき．(4) より

$$S_0 - 2S_1 = I_2$$

である．

$$S_0 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

また

$$I_2 = \frac{\pi}{4}$$

より

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^3}{6} - 1\right)$$

ゆえに $N=1$ では成立した．$N-1$ での成立を仮定する．このとき (4) から

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{2N-1}{2N}S_{N-1} - \frac{1}{2N^2}I_{2N} \\ &= \frac{(2N-1)(2N-3)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^2}\right) \\ &\qquad -\frac{1}{N^2}\cdot\frac{(2N-1)(2N-3)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{(2N-1)(2N-3)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

したがって N で成立し，$N \geqq 1$ のすべての N で成立する．

(6) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で $x < \dfrac{\pi}{2}\sin x$ であるから

$$\begin{aligned} S_N &\leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\cdot\frac{\pi^2}{4}\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}(I_{2n} - I_{2N+2}) \\ &= \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{2N+1}{2N+2}\right)I_{2N} = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2N+2}I_{2N} \\ &= \frac{1}{2N+2}\cdot\frac{(2N-1)(2N-3)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

(7)

$$0 < \frac{(2N-1)(2N-3)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2} < 1$$

なので，$S_N \geqq 0$ と (6) から

$$0 \leqq \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right) \leqq \frac{1}{2N+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

が成立する．

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+2} = 0$$

なので，

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right)=0$$

となり，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

が示された．

20　お茶大

20.1　理問題

(1) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．

(2) ω が無理数，$a,\ b$ が有理数で a が 0 でないとき，$a\omega+b$ が無理数であることを証明せよ．

(3) 座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(p,\ q)$，$\mathrm{B}(r,\ s)$ をとり，原点を O とする．$\triangle\mathrm{OBC}$ が正三角形となるとき，$p,\ q,\ r,\ s$ のうち少なくとも 1 つは有理数とならないことを証明せよ．

20.1.1　解答

(1) 「$\sqrt{3}$ が無理数である」ということは，$\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$ となる整数 $p,\ q$ が存在しない，ということである．

したがって $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$ となる整数 $p,\ q$ が存在したとして矛盾を示すのだ．その矛盾の示し方がいくつかある．

以下特に断らなければ文字は整数を表す．

証明法 1

$\sqrt{3}$ が無理数でない，つまり有理数とする．$\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$ とおく．ここで分数を約分し p と q は互いに素であるとする．

$$\therefore\quad 3p^2=q^2$$

$(3k\pm1)^2=k^2\pm6k+1$ より 3 の倍数でない数の平方は 3 の倍数でない．ところが左辺が 3 の倍数なので q は 3 の倍数でなければならない．$q=3q'$ とおける．すると

$$3p^2=(3q')^2\quad\Rightarrow\quad p^2=3{q'}^2$$

これから p も 3 の倍数となり，p と q が互いに素であることと矛盾した．

ゆえに $\sqrt{3}$ は無理数である．

証明法 2

$\sqrt{3}$ が無理数でない，つまり有理数とする． $\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$ とおく．

$$\therefore\quad 3p^2=q^2$$

左辺の因数分解における因数 3 の個数は奇数である．右辺の因数分解における因数 3 の個数は偶数である

これは矛盾である．ゆえに $\sqrt{3}$ は無理数である．

証明法 3

$\sqrt{3}$ が無理数でない，つまり有理数とする． $\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$ とおく．

$$\therefore\quad 3p^2=q^2$$

証明法 1 と同様に 3 の倍数でない数の平方は 3 の倍数でない．ところが左辺が 3 の倍数なので q は 3 の倍数でなければならない．$q=3q'$ とおける．すると

$$2p^2=(2q')^2\quad\Rightarrow\quad p^2=2{q'}^2$$

これから p も 3 の倍数となり $p=3p'$ とおける．これから再び

$$3{p'}^2={q'}^2$$

となる．再び p', q' とも 3 の倍数である．これは何回でも繰り返される．

つまり p も q も 3 で無限回割れる．これは $p=q=0$ 以外では不可能である．

ゆえに $\sqrt{3}$ は無理数である．

(2) $a\omega+b$ が有理数 q であるとする．$a\omega+b=q$ において $a\neq 0$ なので

$$\omega=\frac{q-b}{a}$$

有理数の和差積商は再び有理数なので，これは ω が無理数であることに矛盾した．

よって $a\omega+b$ は無理数である．

(3) $p,\ q,\ r,\ s$ がすべて有理数として矛盾が起こることを示す．

$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を二通りの方法で求める．

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(p^2+q^2)$$

一方

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|ps-qr|$$

ゆえに

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(p^2+q^2)=\frac{1}{2}|ps-qr|$$

つまり

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(p^2+q^2)-\frac{1}{2}|ps-qr|=0$$

(2) から左辺は無理数，右辺 0 は有理数で矛盾である．

よって $p,\ q,\ r,\ s$ のうち少なくとも 1 つは有理数とならない．