2016年入試問題研究

2018 年 6 月 26 日

目 次

1　京大特色

1.1　1 番問題

n を 2 以上の整数とする．原点 O を中心とした半径 1 の円周を n 等分する点を，時計回りに P_0，P_1，$\cdots$，P_n とする．これら n 点から無作為に 1 点を選ぶ試行を独立に 3 回繰り返し，3 点 P，Q，R を順に選ぶ．ただし，P，Q，R は重複を許して選び，どの n 点も同じ確からしさで選ぶものとする．$0 \leqq j,\ k,\ l \leqq n-1$ に対し，P，Q，R がそれぞれ P_j，P_k，P_l である確率を p_{jkl} とする．3 点 P_j，P_k，P_l が異なるとき，三角形 $\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l$ の面積を S_{jkl} とおく．また，3 点に重複があると，は $S_{jkl}=0$ とおく．

$$E_n = \sum_{j=0}^{n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{n-1} p_{jkl}S_{jkl}\right)\right\}$$

とおく．E_n を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_n$ を求めよ．

考え方

三角形の面積の期待値が E_n である．対称性をもとに和を簡単にしたうえで，計算する．

角が等差数列である三角関数の和は，ドモアブルの定理を用いて複素数の等比数列の和で計算すると，比較的簡明である．

あるいははじめから複素平面で考えてもよい．その場合，三角形の面積を複素数で表す方法を工夫したい．

1.1.1　解答

点の取り方を反時計回りにしても同じことであるので，$0 \leqq m \leqq n-1$ に対して $\mathrm{P}_m\left(\cos\dfrac{2\pi m}{n},\ \sin\dfrac{2\pi m}{n}\right)$ とおく．

試行の条件から $p_{jkl} = \dfrac{1}{n^3}$ であり，対称性から

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} S_{jk0}\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} S_{jk1}\right) = \cdots = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} S_{jk(n-1)}\right)$$

なので

$$E_n = \frac{1}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{n-1} S_{jkl}\right)\right\} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} S_{jk0}\right)$$

となる．さらに，$S_{jk0} = S_{kj0}$ で，$j,\ k,\ l$ に重なりがあれば面積は 0 なので，

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} S_{jk0}\right) = 2\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{j} S_{jk0}\right)$$

である．三角形 $\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}_0$ に面積公式を適用して，

$$S_{jk0} = \frac{1}{2}\left|\left(\cos\frac{2\pi k}{n}-1\right)\sin\frac{2\pi j}{n} - \left(\cos\frac{2\pi j}{n}-1\right)\sin\frac{2\pi k}{n}\right|$$

である．ここで絶対値記号内は

$$
\begin{aligned}
&\left(\cos\frac{2\pi k}{n}-1\right)\sin\frac{2\pi j}{n}-\left(\cos\frac{2\pi j}{n}-1\right)\sin\frac{2\pi k}{n}\\
=\;&\sin\frac{2\pi(j-k)}{n}-\left(\sin\frac{2\pi j}{n}-\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\\
=\;&\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\pi(j-k)}{n}\cos\frac{\pi(j-k)}{n}-\cos\frac{\pi(j+k)}{n}\sin\frac{\pi(j-k)}{n}\right\}
\end{aligned}
$$

であるから，$0 \leqq k \leqq j$ のときは負でない．よってこのとき

$$
S_{jk0}=\frac{1}{2}\left\{\left(\cos\frac{2\pi k}{n}-1\right)\sin\frac{2\pi j}{n}-\left(\cos\frac{2\pi j}{n}-1\right)\sin\frac{2\pi k}{n}\right\}
$$

である．ここで，

$$
C_j=\sum_{k=0}^{j}\cos\frac{2\pi k}{n},\quad S_j=\sum_{k=0}^{j}\sin\frac{2\pi k}{n}
$$

とおく．また $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とする．

$$
\begin{aligned}
C_j+iS_j &= 1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^j\\
&= \frac{1-\alpha^{j+1}}{1-\alpha}=\frac{1-\cos\dfrac{2\pi(j+1)}{n}-i\sin\dfrac{2\pi(j+1)}{n}}{1-\cos\dfrac{2\pi}{n}-i\sin\dfrac{2\pi}{n}}\\
&= \frac{2\sin^2\dfrac{\pi(j+1)}{n}-2i\sin\dfrac{\pi(j+1)}{n}\cos\dfrac{\pi(j+1)}{n}}{2\sin^2\dfrac{\pi}{n}-2i\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}}\\
&= \frac{\sin\dfrac{\pi(j+1)}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi(j+1)}{n}-i\cos\dfrac{\pi(j+1)}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}-i\cos\dfrac{\pi}{n}}\\
&= \frac{\sin\dfrac{\pi(j+1)}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi(j+1)}{n}+i\sin\dfrac{\pi(j+1)}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n}}\\
&= \frac{\sin\dfrac{\pi(j+1)}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\cdot\left(\cos\frac{\pi j}{n}+i\sin\frac{\pi j}{n}\right)
\end{aligned}
$$

よって

$$
C_j=\frac{\sin\dfrac{\pi(j+1)}{n}\cdot\cos\dfrac{\pi j}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}},\quad S_j=\frac{\sin\dfrac{\pi(j+1)}{n}\cdot\sin\dfrac{\pi j}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}
$$

である．これから，

$$
\sum_{k=0}^{j}S_{jk0} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j}\left\{\left(\cos\frac{2\pi k}{n}-1\right)\sin\frac{2\pi j}{n}-\left(\cos\frac{2\pi j}{n}-1\right)\sin\frac{2\pi k}{n}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left\{\left(\sin\frac{\pi(j+1)}{n}\cdot\cos\frac{\pi j}{n}-(j+1)\sin\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{2\pi j}{n}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\cos\frac{2\pi j}{n}-1\right)\cdot\sin\frac{\pi(j+1)}{n}\cdot\sin\frac{\pi j}{n}\right\}\\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left\{\sin\frac{\pi(j+1)}{n}\left(\sin\frac{2\pi j}{n}\cos\frac{\pi j}{n}-\cos\frac{2\pi j}{n}\sin\frac{\pi j}{n}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\left((j+1)\sin\frac{2\pi j}{n}\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi(j+1)}{n}\sin\frac{\pi j}{n}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left\{2\sin\frac{\pi(j+1)}{n}\sin\frac{\pi j}{n}-(j+1)\sin\frac{2\pi j}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right\}\\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left\{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi(2j+1)}{n}-(j+1)\sin\frac{2\pi j}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right\}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
E_n = \frac{1}{n^2\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi(2j+1)}{n}-(j+1)\sin\frac{2\pi j}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right\}
$$

$\beta=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$ とする．$\beta^{2n}=1$ であるから

$$
\sum_{j=0}^{n-1}\left(\cos\frac{\pi(2j+1)}{n}+i\sin\frac{\pi(2j+1)}{n}\right)=\beta+\beta^3+\cdots+\beta^{2n-1}=\frac{\beta(1-\beta^{2n})}{1-\beta^2}=0
$$

また

$$
\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\left(\cos\frac{2\pi j}{n}+i\sin\frac{2\pi j}{n}\right)=1+2\alpha+3\alpha^2+\cdots+n\alpha^{n-1}
$$

であるが

$$
\begin{aligned}
&1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right)'\\
&= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
&1+2\alpha+3\alpha^2+\cdots+n\alpha^{n-1}=\frac{-(n+1)\alpha^n(1-\alpha)+(1-\alpha^{n+1})}{(1-\alpha)^2}\\
&= \frac{-(n+1)(1-\alpha)+(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2}=-\frac{n}{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\frac{n}{1-\alpha}=\frac{n}{2\sin^2\frac{\pi}{n}-2i\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{n}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\sin\frac{\pi}{n}+i\cos\frac{\pi}{n}\right)
$$

以上から

$$E_n = \frac{1}{n^2\sin\frac{\pi}{n}}\left(n\cos\frac{\pi}{n} + \frac{n\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right) = \frac{3\cos\frac{\pi}{n}}{2n\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$E_n = \frac{3\cos\frac{\pi}{n}}{2\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

と変形できるので，

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \frac{3}{2\pi}$$

である．

別解 1　まず次の入試問題を解く．

2000 年横浜市大問題　以下の設問に答えよ．ただし，複素数 z の虚部を $\mathrm{Im}(z)$ で表す．

(1) 複素平面上の 3 点 O，z_1，z_2 を頂点にもつ三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2)$$

の絶対値により与えられることを示せ．また，この式の値は，三角形の頂点 O，z_1，z_2 が時計の回る向きと逆に並んでいるときには正，同じのときは負であることを示せ．

(2) 複素平面上の 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点にもつ三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1)$$

の絶対値により与えられることを示せ．

(3) 複素平面上の 4 点 z_1，z_2，z_3，z_4 をこの順に結ぶと四角形が得られるとする．この四角形の面積を (2) にならって表し，それが正しいことを示せ．

解答

それぞれ三角形の面積を S とする．

(1) $\arg\frac{z_2}{z_1} = \theta$ とおく． O ， z_1 ， z_2 が反時計回りにあれば角 θ は正であり，時計回りのあれば角 θ は負である．

$$\sin\theta = \mathrm{Im}\left(\frac{\frac{z_2}{z_1}}{\left|\frac{z_2}{z_1}\right|}\right) = \mathrm{Im}\frac{|z_1|z_2}{|z_2|z_1}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S &= \frac{1}{2}|z_1||z_2||\sin\theta| = \frac{1}{2}|z_1||z_2|\left|\mathrm{Im}\frac{|z_1|z_2}{|z_2|z_1}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\frac{|z_1|^2|z_2|z_2}{|z_2|z_1}\right| = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}\overline{z_1}z_2|\end{aligned}$$

$\mathrm{Im}\overline{z_1}z_2$ の正負は角 θ の正負に等しい．つまり，三角形の頂点 O，z_1，z_2 が時計の回る向きと逆に並んでいるときには正，同じのときは負である．

(2) (1) より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\mathrm{Im}\overline{(z_1-z_3)}(z_2-z_3)| \\ &= \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2 - z_2\overline{z_3} - \overline{z_1}z_3 + z_3\overline{z_3})| \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}\dfrac{z_3}{z_2} = -\mathrm{Im}\overline{\left(\dfrac{z_3}{z_2}\right)}$ であるが，この両辺に実数 $z_2\overline{z_2} > 0$ をかける．

$$\mathrm{Im}\overline{z_2}z_3 = -\mathrm{Im}z_2\overline{z_3}$$

同じく $\mathrm{Im}z_1\overline{z_3} = -\mathrm{Im}\overline{z_1}z_3$ である．さらに $\mathrm{Im}z_3\overline{z_3} = 0$ である．

$$\therefore \quad S = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1)|$$

(1) と同様に絶対値のなかは，三角形の頂点 z_1，z_2，z_3 が時計の回る向きと逆に並んでいるときには正，同じのときは負である．

(3) z_1, z_2, z_3 と z_1, z_3, z_4 はつねに時計回りか反時計回りかが同じである．したがって $\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1)$ と $\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_3 + \overline{z_3}z_4 + \overline{z_4}z_1)$ は同符号である．

$$\begin{aligned} \therefore \quad S &= \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1)| + \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_3 + \overline{z_3}z_4 + \overline{z_4}z_1)| \\ &= \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1 + \overline{z_1}z_3 + \overline{z_3}z_4 + \overline{z_4}z_1)| \\ &\quad \mathrm{Im}(\overline{z_3}z_1 + \overline{z_1}z_3) = 0 \text{ なので} \\ &= \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_4 + \overline{z_4}z_1)| \end{aligned}$$

※　この入試問題の解答にもとづき，複素平面で考える．
$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおき，$0 \leqq m \leqq n-1$ に対して $\mathrm{P}_m(\alpha^m)$ とする．
$z_1 = 1$，$z_2 = \alpha^k$，$z_3 = \alpha^j$ で上記問題の (2) を用いると，$j \geqq k$ のとき，

$$S_{jk0} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\alpha^k + \overline{\alpha}^k\alpha^j + \overline{\alpha}^j)$$

となる．よって

$$E_n = \frac{2}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} S_{jk0} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}\mathrm{Im}(\alpha^k + \overline{\alpha}^k\alpha^j + \overline{\alpha}^j)$$

ここで解答の複素数列の計算と同様の計算を，一部はその結果を用いて行う．

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}(\alpha^k + \overline{\alpha}^k\alpha^j + \overline{\alpha}^j) \\ =\ & \sum_{j=0}^{n-1}\left\{\frac{1-\alpha^{j+1}}{1-\alpha} + \frac{\alpha^j(1-\overline{\alpha}^{j+1})}{1-\overline{\alpha}} + (j+1)\overline{\alpha}^j\right\} \\ =\ & \sum_{j=0}^{n-1}\left\{\frac{2}{1-\alpha} - \frac{2\alpha^j}{1-\overline{\alpha}} + (j+1)\overline{\alpha}^j\right\} \\ =\ & \frac{2n}{1-\alpha} - \frac{n}{1-\overline{\alpha}} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Im}\left(\frac{2n}{1-\alpha}-\frac{n}{1-\overline{\alpha}}\right)\\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{n}-i\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}}-\frac{1}{2\sin^2\dfrac{\pi}{n}+i2\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)=\frac{3}{2n}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

となり，同様の結果を得る．

別解 2

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{n-1}S_{jkl}\right)\right\}$$

は面積の総和なので，$j,\ k,\ l$ に等しいものがあり面積が 0 となる場合は重複していてもよい．

三角形 $\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l$ の面積は，$\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_l$，$\triangle\mathrm{OP}_j\mathrm{P}_l$，$\triangle\mathrm{OP}_j\mathrm{P}_k$ の面積で定まり，符号を除くと

$$S_{jkl}=\pm\triangle\,\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_l\pm\triangle\mathrm{OP}_j\mathrm{P}_l\pm\triangle\mathrm{OP}_j\mathrm{P}_k$$

となる．$\pm\triangle\,\mathrm{OP}_j\mathrm{P}_k$ の符号は，2 点 P_j，P_k に対して，点 P_l が優弧 $\overset{\frown}{\mathrm{P_jP_k}}$ の側にあれば＋であり，劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{P_jP_k}}$ の側にあればーである．

2 点 P，Q に対して，劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ が中心 O に対してなす角を $\dfrac{2\pi m}{n}$ とおくと，$0\leqq m\leqq\left[\dfrac{n}{2}\right]$ で（ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す），三角形 OPQ の面積は $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi m}{n}$ である．

P，Q を固定し第 3 の頂点 R を n 通りにとった △PQR の和を考える．これを，△OPQ，△OQR，△ORP の面積で表した場合，△OPQ の面積の符号は m 個が負，$n-m$ 個で現れる．よって，△OPQ に関する和の部分は

$$(n-2m)\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi m}{n}$$

となる．$j,\ k,\ l$ を異なるように動かした場合，三角形 OPQ と合同な三角形は $6n$ 個できる．よって面積の総和は

$$6n\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n-2m}{2}\cdot\sin\frac{2\pi m}{n}$$

となり

$$E_n=\frac{3}{n^2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n-2m)\sin\frac{2\pi m}{n}$$

である．$(n-2m)\sin\dfrac{2\pi m}{n}$ において，m を $n-m$ に置きかえると

$$\{n-2(n-m)\}\sin\frac{2\pi(n-m)}{n}=(-n+2m)\sin\left(2\pi-\frac{2\pi m}{n}\right)=(n-2m)\sin\frac{2\pi m}{n}$$

なので，

$$E_n=\frac{3}{2n^2}\sum_{m=0}^{n-1}(n-2m)\sin\frac{2\pi m}{n}$$

となる．$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおく．

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1}(n-2m)\alpha^m &= n(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1})\\ &\qquad -2\alpha\{1+2\alpha+3\alpha^2+\cdots+(n-1)\alpha^{n-2}+n\alpha^{n-1}-n\alpha^{n-1}\}\\ &= \frac{n(1-\alpha^n)}{1-\alpha}+2\alpha\cdot\frac{n}{1-\alpha}+2n\alpha^n=\frac{2n}{1-\alpha}\end{aligned}$$

よって次のように，同様の結果を得る．

$$E_n=\frac{3}{2n^2}\mathrm{Im}\left(\frac{2n}{1-\alpha}\right)=\frac{3}{n}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2\sin^2\dfrac{\pi}{n}-2\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)=\frac{3}{2n}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$$

1.2　2 番問題

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で定義された連続関数 $f(x)$ に対し，x が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値を $\displaystyle\max_{0\leqq x\leqq 1} f(x)$ とおく．以下の問いに答よ．

(1) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で定義された狭義単調増加な関数 $f(x)$ に対し，以下の不等式が成立することを示せ．

$$\int_0^1|f(x)|\,dx\leqq 3\max_{0\leqq x\leqq 1}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

(2) 以下の条件 (A) を満たすような実数 C は存在しないことを示せ．

(A) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で定義されたどのような連続関数 $f(x)$ に対しても，不等式

$$\int_0^1|f(x)|\,dx\leqq C\max_{0\leqq x\leqq 1}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

が成立する．

1.2.1　解答

(1) x 軸と $y=f(x)$ のグラフ，および直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれた領域のうち，$y\leqq 0$ にある部分の面積を A，$y\geqq 0$ にある部分の面積を B とする．

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|\,dx &= A+B\\ \max_{0\leqq x\leqq 1}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right| &= \max\{A,\ B-A\}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|\,dx=A+B=B-A+2A &\leqq \begin{cases}3A & (A\geqq B-A)\\ 3(B-A) & (A\leqq B-A)\end{cases}\\ &= 3\max_{0\leqq x\leqq 1}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|\end{aligned}$$

なので，いずれの場合も成立する．

(2) $f(x)=\sin 2n\pi x$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,dx &= 2n\int_0^{\frac{1}{2n}} \sin 2n\pi x\,dx\\ &= 2n\left[-\frac{1}{2\pi n}\cos 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2n}} = \frac{2}{\pi}\\ \max_{0\leqq x\leqq 1}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right| &= \int_0^{\frac{1}{2n}} \sin 2n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\end{aligned}$$

なので，条件を満たす C は

$$2 \leqq C\cdot\frac{1}{n}$$

を満たさなければならない．ところが $n\to\infty$ のとき右辺は 0 に収束するので，このような C は存在しない．

1.3　3 番問題

n を 3 以上の整数とし，k を自然数とする．表裏の区別の付く n 枚のコインを用いて 1 人で以下のゲームを行う．

- まず，ゲームの初期状態として，n 枚のコインを円周上に等間隔に並べる．各コインは表または裏である．
- 以下の操作を何回か繰り返す．
  （操作）並べたコインの中から連続する k 枚を選び，選んだコインをすべてひコくり返す．
- この操作を何回か行った結果，すべてのコインを表にすることができれば，ゲームは終了する．

ゲームの初期状態の例（●：コインの表，○：コインの裏）

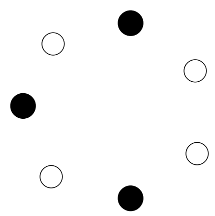


図 1 ($n=7$)

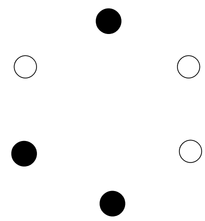


図 2 ($n=6$)

以下の設問に答えよ．

(1) $n=7,\ k=3$ とする．初期状態が図 1 のとき，このゲームを終了させることができることを示せ．また，すべてのコインを表にするまでに必要な操作の最小回数を求めよ．

(2) $n=6,\ k=3$ とする．初期状態が図 2 のとき，このゲームを終了させることはできないことを示せ．

(3) どのような初期状態であっても必ずこのゲームを終了させることができるための，$n,\ k$ に関する必要十分条件を求めよ．

考え方

(1) と (2) は実際に試行を行い規則性を見つけたい．型は有限個なので，できないということは，すべて表以外の型を行き来するということである．

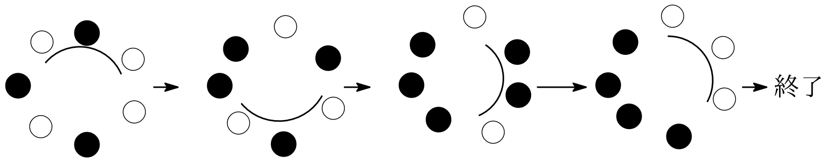
(3) は，任意に選んだ 1 枚のみを裏返す試行が構成可能である条件が必要十分条件である．

まず必要条件を考えよう．1 枚だけ裏で他が表の初期状態では，裏のみが奇数回の裏返し，他は偶数回の裏返しであり，裏返しの回数が異なる．

十分条件は，得られた必要条件の下で，任意に選んだ 1 枚のみを裏返す試行が構成できることを示す．

1.3.1　解答

(1) 次図のように 4 回の操作で終了できる．動かすコインを円弧で示している．



初期状態　1　2　3　4

3 回で終了するためには，2 回で 3 のように裏が 3 連続し，他は表である状態になることが必要である．そのためには，1 回で 2 のように裏表表裏で他は表になるか，裏の 3 連続が 2 つにならねばならないが，それはありえない．よって，最小回数は 4 である．

(2) 簡単のために，図 2 の初期状態を，表を 1，裏を 0 を用いて，中央最上の位置から反時計回りに書いて (1, 0, 1, 1, 0, 0) と表す．以下同様とする．これに 3 枚の裏返し 6 通りを行うと

$$\begin{array}{ccc} (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) & (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) & (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) \\ (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1) & (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) & (0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1) \end{array}$$

が得られる．これを A グループという．これらの各々に 3 枚の裏返し 6 通りを行うといずれもが

$$\begin{array}{ccc} (1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) & (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) & (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0) \\ (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1) & (1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1) & (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1) \end{array}$$

のどれかになる．これを B グループという．

また B グループの各々に 3 枚の裏返し 6 通りを行うといずれもが A グループのどれかになる．

つまり 3 枚の裏返しによって A グループと B グループを交互に移動するだけなので，このゲームを終了させることはできない．

別解

※　(3) を解いた後では次のような別解を作ることができる．

中央上の表のコインから右回りに番号を振り，1 番と 4 番，2 番と 5 番，3 番と 6 番のコインをそれぞれグループにする．

第 1 グループ = { ●，● }，第 2 グループ = { ○，● }，第 3 グループ = { ○，○ }

となる．3 枚連続するコインを裏返すと，どのグループも 1 枚ずつ裏返る．よって，どのグループも 2 枚のコインの裏返しの合計は同数である．

3 枚連続するコインの裏返しを繰り返して終了するとすると，第 2 グループの 2 枚のコインに裏返し回数の合計は奇数であり，第 1 グループ，第 3 グループ裏返し回数の合計は偶数で，矛盾している．よって，このゲームを終了させることはできない．

(3) 任意に選んだ 1 枚のみを裏返す試行が構成可能である条件が必要十分条件である．

(i) k が奇数であることが必要であることを示す．

n 枚のコインを順に 1 から n まで番号を振り，番号 1 のコインのみ裏で，他のすべてが表である初期状態を考える．

各コインが受ける裏返し操作の総数が ak であり，番号 1 のコインの裏返し操作は奇数回，他の $n-1$ 枚のコインの裏返し操作は偶数回である．よって，裏返し操作の総数 ak は奇数である．

これより k は奇数でなければならない．

(ii) n と k が互いに素であることが必要であることを示す．

n と k が互いに素でないとし，最大公約数を d，$n = n'd$，$k = k'd$ とおく．

番号を d で割った余りで分類して n' 枚ずつ d 個の組に分ける． 1 回の操作で，各組の k' 枚のコインが裏返されるので， ゲームを終了したとき，一つの組の裏返し回数の和は，いずれの組もすべて等しい．ところが番号 1 のコインをふくむ余り 1 の組の裏返し回数の和は奇数でなければならず，他の組の裏返し回数の和は偶数となり矛盾が起こる．よって，n と k が互いに素であり，k が奇数なのであることあわせて，k と $2n$ が互いに素でることが必要である．

(iii) (i)(ii) あわせて，k と $2n$ が互いに素であることが必要条件である．

これが十分条件であることを示す．このとき，1 次不定方程式

$$sk - t(2n) = 1$$

を満たす，正整数 s と t が存在する．

n 個のコインの 1 枚を任意に選び，そのコインからはじめて一定の方向に k 枚裏返し，続いてその次のコインから k 枚裏返す．これを s 回繰り返す．$sk - 1 = n \cdot 2t$ なので，最初に選んだコインのみ $2t + 1$ 回の裏返し操作を受け，他のコインは $2t$ 回の裏返し操作を受ける．

この結果，最初に選んだコインのみ裏返され，他のコインは操作をはじめる前の状態になる．

任意のコイン 1 枚のみを裏返せるので，どのような初期状態であっても必ずこのゲームを終了させることができる．

以上から，n, k に関する必要十分条件は,「k と 2n が互いに素」である．

1.4 4 番問題

以下の条件をすべて満たす数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は存在するか．

(条件 1)　すべての自然数 n に対して，x_n および y_n は自然数である．
(条件 2)　すべての自然数 $n,\ m$ に対して，不等式

$$|n-m| \leqq 100\,|x_n - x_m| + 100\,|y_n - y_m| + 100$$

が成立する．
(条件 3)　どのような自然数 $a,\ b$ に対しても，自然数 n を適切に選べば，不等式

$$|a-x_n| + |b-y_n| \leqq 100$$

が成立する．

考え方

平面上の第一象限にある格子点で考えるとよい．2 点 $\mathrm{P}_m(x_m,\ y_m)$, $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ の距離 $d(\mathrm{P}_m,\ \mathrm{P}_n)$ が

$$d(\mathrm{P}_m,\ \mathrm{P}_n) = 100\,|x_n - x_m| + 100\,|y_n - y_m|$$

で定まっていると考える．

条件 2 で，m を固定し n を動かす．$a = d(\mathrm{P}_m,\ \mathrm{P}_n)$ とおくと，$-(a+100) < n-m < a+100$ より，n の個数は $2a+200$ の範囲にあり，a の 1 次式以下である．

条件 3 は，点の個数が距離の 2 次式となること意味する．

よって大きい n をとれば矛盾が起こる．

一般化

k 次元空間の 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ \cdots,\ a_j,\ \cdots,\ a_k)$，$\mathrm{B}(b_1,\ \cdots,\ b_j,\ \cdots,\ b_k)$ に対して，その距離 $d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})$ を

$$d(\mathrm{A},\ \mathrm{B}) = \sum_{j=1}^{k} |a_j - b_j|$$

で定める．

$k \geqq 2$ とする．1 より大きい実数 a，b，実数 c が与えられたとき，以下の条件をすべて満たす k 次元空間内の点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ は存在するか．

(条件 1)　すべての自然数 n に対して，P_n の各座標成分は自然数である．
(条件 2)　すべての自然数 $n,\ m$ に対して，次の不等式が成立する．

$$|n-m| \leqq a \cdot d(\mathrm{P}_n,\ \mathrm{P}_m) + c$$

(条件 3)　各座標成分が自然数であるどのような点 Q に対しても，自然数 n を適切に選べば，次の不等式が成立する．

$$d(\mathrm{P}_n,\ \mathrm{Q}) \leqq b$$

1.4.1　解答

条件をすべて満たす数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が存在するとし，矛盾を導く．

2 つの数列 $\{a_N\}$, $\{b_N\}$ を次のように定める．$\mathrm{P}_N=(a_N,\ b_N)$ とおく．

$$\begin{cases} \mathrm{P}_1=(300,\ 300),\ \mathrm{P}_2=(600,\ 300),\ \mathrm{P}_3=(300,\ 600), \\ \mathrm{P}_4=(900,\ 300),\ \mathrm{P}_5=(600,\ 600),\ \mathrm{P}_6=(300,\ 900), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{P}_{\frac{N(N-1)}{2}+1}=(300N,\ 300),\ \cdots,\ \mathrm{P}_{\frac{N(N+1)}{2}}=(300,\ 300N) \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

この a_N, b_N に対して，条件 3 を満たす $(x_n,\ y_n)$ をとる．n は N によって定まるので $n=q(N)$ とおく．ここで P_1 と $\mathrm{P}_{\frac{N(N+1)}{2}}$ に対応する $q(1)$ と $q\left(\dfrac{N(N+1)}{2}\right)$ を考える．各 P_N は十分離れているので，$N\neq N'$ なら $q(N)\neq q(N')$ となり，

$$q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)\geqq\frac{N(N+1)}{2}$$

である．一方，条件 2 から

$$\begin{aligned} &\left|q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)-q(1)\right| \\ \leqq\ &100\left|x_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}-x_{q(1)}\right|+100\left|y_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}-y_{q(1)}\right|+100 \end{aligned}$$

また，条件 3 の不等式から

$$\begin{aligned} &\left|300-x_{q(1)}\right|+\left|300-y_{q(1)}\right|\leqq 100 \\ &\left|300-x_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}\right|+\left|300N-y_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}\right|\leqq 100 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} &100\left|x_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}-x_{q(1)}\right|+100\left|y_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}-y_{q(1)}\right| \\ =\ &100\left|x_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}-300+300-x_{q(1)}\right|+100\left|y_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}-300N+300N-y_{q(1)}\right| \\ \leqq\ &100\left|300-x_{q(1)}\right|+100\left|300N-y_{q(1)}\right| \\ &\quad+100\left|x_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}-300\right|+100\left|y_{q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}-300N\right| \end{aligned}$$

ここで

$$\left|300N-y_{q(1)}\right|\leqq 300(N-1)+\left|300-y_{q(1)}\right|$$

なので

$$\left|q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)-q(1)\right|\leqq 100^2+100^2+30000(N-1)+100=30000N-10000+100$$

である．ところがこの結果，

$$\frac{N(N+1)}{2}-q(1)\leqq\left|q\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)-q(1)\right|\leqq 30000N-10000+100$$

となり，N を大きくとれば矛盾である．

よって，条件をすべて満たす数列は存在しない．

2　京大特色総人理系

2.1　1 番問題

n を自然数とする．複素数 z が単位円 $|z|=1$ を一周するとき，

$$f(z)=z-\frac{1}{n+1}z^{n+1}$$

が描く曲線の長さを求めよ．

2.1.1　解答

複素数 z が単位円 $|z|=1$ を一周するので，$z=\cos\theta+i\sin\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とおく．また，$f(z)=x(\theta)+iy(\theta)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
x(\theta)+iy(\theta) &= \cos\theta+i\sin\theta-\frac{1}{n+1}\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{n+1} \\
&= \cos\theta-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta+i\left\{\sin\theta-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta\right\}
\end{aligned}$$

である．複素数 z が単位円 $|z|=1$ を一周するとき，$f(z)$ が描く曲線は，xy 平面で θ を媒介変数として，

$$\begin{cases} x(\theta)=\cos\theta-\dfrac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta \\ y(\theta)=\sin\theta-\dfrac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta \end{cases}\qquad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

と表される．よってその長さ l は，定積分

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

で与えられる．ここで

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \{\sin\theta+\sin(n+1)\theta\}^2+\{\cos\theta-\cos(n+1)\theta\}^2 \\
&= 2+2\sin\theta\sin(n+1)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta \\
&= 2-2\cos(n+2)\theta=4\sin^2\frac{n+2}{2}\theta
\end{aligned}$$

なので，

$$l=\int_0^{2\pi}2\left|\sin\frac{n+2}{2}\theta\right|\,d\theta$$

$t=\dfrac{n+2}{2}\theta$ と置換することにより l を求める．

$$\begin{aligned}
l &= 2\int_0^{(n+2)\pi}|\sin t|\ \frac{2}{n+2}dt=\frac{4}{n+2}\int_0^{(n+2)\pi}|\sin t|\ dt \\
&= \frac{4}{n+2}\cdot(n+2)\int_0^{\pi}\sin t\,dt=4\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi}=8
\end{aligned}$$

である．

この曲線は外サイクロイドである．

『数学対話』の中の「光線の包絡線」の「外サイクロイドと内サイクロイド」を参照のこと．

2.2 2番問題

関数 $f(x)$ は2回微分可能であり，$f(0) > 0 > f'(x)$ かつすべての x に対し $f''(x) < 0$ を満たすとする．

問1 $f(a) = 0$ を満たす正の数 a がただ1つ存在することを示せ．

問2 曲線 $y = f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ $(0 \leqq t \leqq a)$ における曲線の接線と x 軸, および y 軸で囲まれた三角形の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)$ の最小値を与える点が区間 $(0,\ a)$ 内にただ1つ存在することを示せ．

2.2.1 解答

問1　関数 $f(x)$ は微分可能なので，連続である．区間 $[0,\ x]$ で平均値の定理を用いると

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c)$$

となる c が $(0,\ x)$ に存在する．$f''(x) < 0$ より $f'(0) > f'(c)$ である．よって

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) < f'(0)$$

から，不等式

$$f(x) < f'(0)x + f(0)$$

が成り立つ．$f'(0) < 0$ なので，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

である．$f'(x) < 0$ より $f(x)$ は単調減少で，$f(0) > 0$ であるから，この結果， $f(a) = 0$ を満たす正の数 a がただ1つ存在する．

問2　曲線 $y = f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ $(0 \leqq t \leqq a)$ における曲線の接線の方程式は,

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

である．x 軸，y 軸との交点はそれぞれ,

$$\left(-\frac{f(t)}{f'(t)} + t,\ 0\right),\ (0,\ -tf'(t) + f(t))$$

であるから,

$$S(t) = \frac{1}{2}\left\{-\frac{f(t)}{f'(t)} + t\right\}\{-tf'(t) + f(t)\} = \frac{\{f(t) - tf'(t)\}^2}{-2f'(t)}$$

である．よって,

$$S'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\{f(t) - tf'(t)\}\{tf'(t) + f(t)\}f''(t)}{f'(t)^2}$$

区間 $(0,\ a)$ で $f(t) > 0$ で，$f'(t) < 0,\ f''(t) < 0$ より，$\{f(t) - tf'(t)\}f''(t) < 0$ である．

$$g(t) = tf'(t) + f(t)$$

とおく．

$$g'(t) = 2f'(t) + tf''(t) < 0$$

であり，
$$g(0)=f(0)>0,\ g(a)=af'(a)<0$$
であるから，$g(t)$ は区間 $(0,\ a)$ で正から負に変わり，$g(t)=0$ となる t がこの区間にただ 1 つ存在する．よって，$S'(t)$ は区間 $(0,\ a)$ で負から正に変わり，$S'(t)=0$ となる t がこの区間にただ 1 つ存在する．つまり，$S(t)$ の最小値を与える点が区間 $(0,\ a)$ 内にただ 1 つ存在する．

3　東大理科

3.1　5 番問題

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数
$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$
を 1 つとる．ここで，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ は 0 から 9 までの整数で，$a_k\neq 0$ とする．

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ．
$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ．
$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r\leqq x<r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す．$\sqrt{s}-[\sqrt{s}]=0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ．

3.1.1　解答

(1) $A=0.a_1a_2\cdots a_k$ とおく．
$$A+10^k\leqq\sqrt{n}<A+10^{-k}+10^k$$
より
$$10^{2k}+2A10^k+A^2\leqq n<10^{2k}+2A10^k+2+\left(A+10^{-k}\right)^2$$
ここで，
$$10^{2k}+2A10^k=10^{2k}+2\left(a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+\cdots+a_k\right)$$
は整数であり，$0<A^2,\ \left(A+10^{-k}\right)^2\leqq 1$ なので，この不等式を満たす整数 n は
$$10^{2k}+2\left(a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+\cdots+a_k\right)+1,\ 10^{2k}+2\left(a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+\cdots+a_k\right)+2$$
である．

(2) 同様に考える．

$$(A+p)^2 \leqq m < \left(A+p+10^{-k}\right)^2$$

ここで，

$$\begin{aligned} & \left(A+p+10^{-k}\right)^2-(A+p)^2 \\ = \;& 2(A+p)\cdot 10^{-k}+10^{-2k} \geqq 2\left(A+5\cdot 10^{k-1}\right)\cdot 10^{-k}+10^{-2k}=2A\cdot 10^{-k}+1+10^{-2k}>1 \end{aligned}$$

したがって条件を満たす整数 m が存在する．

(3) 条件を満たす整数 s が存在するとする．

$\sqrt{s}=[\sqrt{s}]+0.a_1a_2\cdots a_k$ かつ $a_k \neq 0$ なので $\sqrt{s}$ は整数でない．一方 $[\sqrt{s}]+0.a_1a_2\cdots a_k$ は有理数なので，$\sqrt{s}$ は整数でない有理数である．

$\sqrt{s}=\dfrac{v}{u}$ と互いに素な正整数 u と v を用いて表す．このとき，$s=\dfrac{v^2}{u^2}$ となり，左辺は整数で u^2 と v^2 は互いに素であるから，$u^2=1$ となる．これは $\sqrt{s}$ が整数であることを意味し，$\sqrt{s}$ が整数でないことに矛盾した．

よって，条件をみたす正の整数 s は存在しない．

4 京大理系

4.1 1 番問題

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，関数

$$f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$$

の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ．

4.1.1 解答

(1)

$$\begin{aligned} {f_n}'(\theta) &= -\sin\theta\sin^{n-1}\theta+(n-1)(1+\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\cos\theta \\ &= \sin^{n-2}\theta\left\{-\sin^2\theta+(n-1)(1+\cos\theta)\cos\theta\right\} \\ &= \sin^{n-2}\theta(n\cos\theta-1)(\cos\theta+1) \end{aligned}$$

したがって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos\alpha=\dfrac{1}{n}$ となる α がただ 1 つあり，そこでこの導関数は正から負にかわる．よってそこでのみ極大となり，最大となる．このとき $\sin\alpha=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$M_n=f(\alpha)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

である．

(2) (1) から

$$(M_n)^n = f(\alpha) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

となる．自然対数 e は

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

で定義される．

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ において $h=\dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

である．$\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ において $h=-\dfrac{1}{n^2}$ とおくと

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^{-\frac{n(n-1)}{2n^2}}$$

となり，$n\to\infty$ のとき $h\to 0$，$-\dfrac{n(n-1)}{2n^2}\to -\dfrac{1}{2}$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

である．よって，

$$\lim_{n\to\infty}(M_n)^n = e\cdot e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

となる．

4.2　2 番問題

素数 p，q を用いて

$$p^q + q^p$$

と表される素数をすべて求めよ．

4.3　3 番問題

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件： 頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る．

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう．

4.3.1　解答

条件 P_1 について．

頂点 A から対面に下ろした垂線が $\triangle$OBC の外心 P を通る．

$$\mathrm{AO}^2 = \mathrm{AP}^2 + \mathrm{PO}^2 = \mathrm{AP}^2 + \mathrm{PB}^2 = \mathrm{AB}^2$$

同様に考え，これより

$$\mathrm{AO} = \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$

始点を取りかえることで，同様に

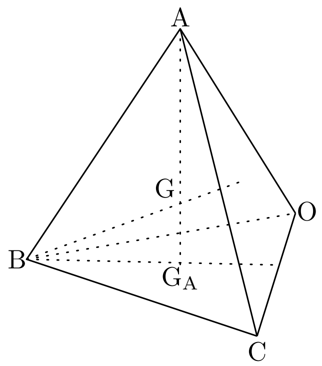
$$\mathrm{BO} = \mathrm{BC} = \mathrm{BA}, \quad \mathrm{CO} = \mathrm{CA} = \mathrm{CB}$$

よってすべての辺長が等しく，四面体 OABC は正四面体である．

条件 P_2 について．

四面体 OABC の重心を G とする．頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る．

その重心を $\mathrm{G_A}$，$\mathrm{G_B}$，$\mathrm{G_C}$ とする．各頂点と対面の三角形の重心を通る直線は四面体 OABC の重心を通る．よって頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は重心 G で交わる．



頂点 A，B からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線が交わるので，辺 AB とこの 2 本の垂線は同じ辺面 α 上にある．

頂点 A からその対面を含む平面へ下ろした垂線は $\triangle$OBC と直交し，特にそこに含まれる直線 OC と直交する．頂点 B についても同様なので，平面 α が OC と直交する．この結果 $\mathrm{BG_A} \perp \mathrm{OC}$，同様にこの結果 $\mathrm{CG_A} \perp \mathrm{OB}$ となるので，$\mathrm{G_A}$ は三角形 OBC の垂心でもある．

重心と垂心の一致する三角形は正三角形である．$\triangle$OAB，$\triangle$OBC，$\triangle$OCA が正三角形なので，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = \mathrm{OA}$ も成り立ち，四面体 OABC は正四面体である．

4.4　4 番問題

xyz 空間において，平面 $y = z$ の中で

$$|x| \leqq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leqq y \leqq \log a$$

で与えられる図形 D を考える．ただし a は 1 より大きい定数とする．

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

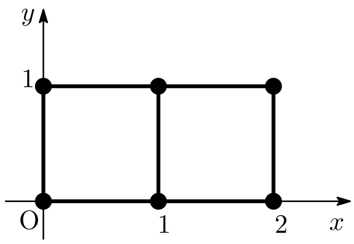
4.5　5 番問題

xy 平面上の 6 個の点 (0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1) が図のように長さ 1 の線分で結ばれている．動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する．

規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する．

例えば，X が (2,0) にいるときは，(1,0)(2,1) のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．また X が (1,1) にいるときは，(0,1),(1,0),(2,1) のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．

時刻 0 で動点 X が O=(0,0) から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が O である確率を求めよ．ただし n は 0 以上の整数とする．



4.5.1 解答

n 秒後に動点 X の x 座標が 0 である確率，1 である確率，2 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とする．規則によって漸化式

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{3}q_n \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{3}q_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{2}q_n + \dfrac{1}{3}r_n \end{cases}$$

が成り立ち，さらに初期条件から $p_0 = 1$，$q_0 = r_0 = 0$ である．

$p_n + q_n + r_n = 1$ なので，

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}q_n$$

これより，

$$q_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(q_n - \frac{3}{7}\right)$$

よって

$$q_n - \frac{3}{7} = \left(-\frac{1}{6}\right)^n \left(q_0 - \frac{3}{7}\right) = -\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

つまり，

$$q_n = -\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{7}$$

この結果，

$$p_n + r_n = 1 - q_n = \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{4}{7}$$

一方，

$$p_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - r_n)$$

なので

$$p_n - r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (p_0 - r_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これより，求める確率 p_n は

$$p_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{4}{7} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{2}{7}$$

である．

4.6　6 番問題

複素数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し，次の条件を考える．

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる．

(ロ) $f(x)$ の係数 a, b の少なくとも一方は虚数である．

この 2 つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ．

4.6.1　解答

$f(x) = x^2 + ax + b = 0$ の 2 解を (重解をふくむ)α と β とし $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ とする．
$a = -(\alpha+\beta)$，$b = \alpha\beta$ なので，条件（ロ）を満たすために，α と β の少なくとも一方は虚数でなければならない．
条件（イ）からある整式 $Q(x)$ を用いて

$$f(x^3) = f(x)Q(x)$$

とおくことができる．これより

$$(x^3-\alpha)(x^3-\beta) = (x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$$

よって

$$(\alpha^3-\alpha)(\alpha^3-\beta) = (\beta^3-\alpha)(\beta^3-\beta) = 0$$

組合せは

$$\begin{cases} \alpha^3-\alpha=0 \\ \beta^3-\beta=0 \end{cases} \cdots ① \qquad \begin{cases} \alpha^3-\alpha=0 \\ \beta^3-\alpha=0 \end{cases} \cdots ②$$
$$\begin{cases} \alpha^3-\beta=0 \\ \beta^3-\beta=0 \end{cases} \cdots ③ \qquad \begin{cases} \alpha^3-\beta=0 \\ \beta^3-\alpha=0 \end{cases} \cdots ④$$

このうち ① は α も β も実数となり条件を満たさない．
② のとき $\alpha=0$ なら $\beta=0$ となりともに実数．条件を満たすのは

$$\alpha = \pm 1 \quad \beta^3 = \alpha$$

のとき．③ は ② で α と β の入れ替えである．これを解いて虚数となる β を求める．

$\alpha=1$ のとき．$\beta^3-1=(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$ より

$$\beta=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$\alpha=-1$ のとき．$\beta^3+1=(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$ より

$$\beta=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

それぞれ a，b を求めると

$$(a,\ b)=\left(\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right),\ \left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)$$

④ は

$$\alpha^8=1,\ \beta=\alpha^3$$

または α と β の入れ替え．

$\gamma=\cos\dfrac{2\pi}{8}+i\sin\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とおく．

$$\gamma^3=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ \gamma^5=\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ \gamma^7=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

となる．α，β の両方が実数とはならないのは

$$(\alpha,\ \beta)=(\gamma,\ \gamma^3),(\gamma^3,\ \gamma),(\gamma^5,\ \gamma^7),(\gamma^7,\ \gamma^5)$$

である．それぞれ a，b を求めると，異なる組合せは

$$(a,\ b)=(\sqrt{2}i,\ -1),\ (-\sqrt{2}i,\ -1)$$

である．

以上から求める 2 次式は

$$\begin{aligned}&x^2+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}x+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\ (\text{複号同順})\\&x^2+\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}x+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\ (\text{複号同順})\\&x^2\pm\sqrt{2}ix-1\end{aligned}$$

の 6 個である．

別解

実際に割り算を実行すると

$$\begin{aligned}&x^6+ax^3+b\\=\ &(x^2+ax+b)\{x^4-ax^3+(a^2-b)x^2+(-a^3+2ab+a)x+a^4-3a^2b-a^2+b^2\}\\&\quad+(-a^5+4a^3b-3ab^2+a^3-ab)x-a^4b+3a^2b^2-b^3+a^2b+b\end{aligned}$$

となる．したがって条件（イ）から，

$$\begin{aligned}a(a^4-4a^2b+3b^2-a^2+b)=0\\b(a^4-3a^2b+b^2-a^2-1)=0\end{aligned}$$

となる．$a=0$ なら第 2 式から $b=0,\ \pm1$．$b=0$ なら第 1 式から $a=0,\ \pm1$ となり，条件（ロ）に反する．よって

$$\begin{aligned}a^4-4a^2b+3b^2-a^2+b&=3b^2+(1-4a^2)b+a^4-a^2=0\\a^4-3a^2b+b^2-a^2-1&=b^2-3a^2b+a^4-a^2-1=0\end{aligned}$$

となる．これから b を消去する．次のことが成り立つ．

> s に関する二つの二次式
>
> $$As^2+Bs+C=0,\ A's^2+B's+C'=0$$
>
> から s を消去すれば
>
> $$(AC'-A'C)^2=(BC'-B'C)(AB'-A'B)$$
>
> となる．

証明　$As^2+Bs=-C,\ A's^2+B's=-C'$ より，

$$AA's^2+BA's=-A'C,\ AA's^2+AB's=-AC'$$

$$\therefore\quad (BA'-B'A)s=AC'-A'C\cdots①$$

また，

$$AB's^2+BB's=-B'C,\ A'Bs^2+BB's=-BC'$$

$$\therefore\quad (AB'-A'B)s^2=BC'-B'C\cdots②$$

そこで，② の両辺に $AB'-A'B$ をかけると，① の左辺の 2 乗に一致する．すなわち，

$$(AB'-A'B)(BC'-B'C)=(AB'-A'B)^2s^2=(AC'-A'C)^2$$

である．□

これを用いると，

$$\begin{aligned}&\{3(a^4-a^2-1)-(a^4-a^2)\}^2\\=\ &\{(1-4a^2)(a^4-a^2-1)+3a^2(a^4-a^2)\}(-9a^2-1+4a^2)\end{aligned}$$

が得られる．これを整理して

$$\begin{aligned}&a^8-a^6-9a^4-10a^2-8\\=\ &(a^4+a^2+1)(a^4-2a^2-8)\\=\ &(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^2-4)(a^2+2)=0\end{aligned}$$

を得る．$a^2=4$ のときは b の 2 次方程式が

$$b^2-12b+16-4-1=(b-11)(b-1)=0$$

となり，条件（ロ）に反する．よって，

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \pm\sqrt{2}i$$

それぞれ b を求めると同じ結果を得る．

a と b の連立式から b^2 を消去する．

$$(5a^2+1)b-2a^4+2a^2+3=0$$

1)　$a^2+a+1=0$ のとき．$a^4+a^2+1=0$ で $a^3=1$ なので

$$\begin{aligned} b &= \frac{2a^4-2a^2-3}{5a^2+1}=\frac{-4a^2-5}{5a^2+1} \\ &= \frac{(-4a^2-5)(5a+1)}{(5a^2+1)(5a+1)}=\frac{-20a^3-4a^2-25a-5}{25a^3+5a^2+5a+1} \\ &= \frac{-25-25(a^2+a)+21a^2}{26+5(a^2+a)}=a^2 \end{aligned}$$

$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ に対して $a^2=\dfrac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}$ である．

$$(a,\ b)=\left(\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)$$

2)　$a^2-a+1=0$ のとき．$a^4+a^2+1=0$ で $a^3=-1,\ a^6=1$ なので

$$\begin{aligned} b &= \frac{2a^4-2a^2-3}{5a^2+1}=\frac{-4a^2-5}{5a^2+1} \\ &= \frac{(-4a^2-5)(5a^4+1)}{(5a^2+1)(5a^4+1)}=\frac{-20a^6-4a^2-25a^4-5}{25a^6+5a^2+5a^4+1} \\ &= \frac{-25-25(a^2+a^4)+21a^2}{26+5(a^2+a^4)}=a^2=-a^4-1=a-1 \end{aligned}$$

$a=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ に対して $a^2=\dfrac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}$ である．

$$(a,\ b)=\left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)$$

3)　$a^2=-2$ のとき．

$$b=\frac{2a^4-2a^2-3}{5a^2+1}=\frac{8+4-3}{-10+1}=-1$$

となる．

5　阪大理系

5.1　1 番問題

1 以上 6 以下の 2 つの整数 $a,\ b$ に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

$$\begin{aligned} &(\text{ア})\quad f_1(x)=\sin(\pi x) \\ &(\text{イ})\quad f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ &(\text{ウ})\quad f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) $a=1$，$b=6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ．

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ．

5.1.1 解答

(1)

$$\begin{aligned} f_5(0) &= f_4(0) = f_3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = f_3\left(\frac{5}{6}\right) \\ &= f_2\left(-\frac{5}{6}\right) = f_1\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\right) = \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(2)

$$f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{7}{6}-x\right) = f_{2(n-1)}\left(-\frac{7}{6}+x\right)$$

より

$$\begin{aligned} f_{2n}(x) &= f_2\left(-\frac{7}{6}(n-1)+x\right) \\ &= f_2\left(\frac{7}{6}+\frac{7}{6}(n-1)-x\right) = f_1\left(\frac{7}{6}n-x\right) \end{aligned}$$

よって

$$f_{2n}(0) = f_1\left(\frac{7}{6}n\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}n\right)$$

である．よって

$$(-1)^k f_{2k}(0) = \sin\left(k\pi+\frac{7k\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0) = \sum_{k=1}^{100}\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right) = \sum_{k=0}^{100}\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right) \\ =\ & \Im\left[\sum_{k=0}^{100}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^k\right] = \Im\left\{\frac{1-\cos\left(\frac{101\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{101\pi}{6}\right)}{1-\frac{\sqrt{3}+i}{2}}\right\} \\ =\ & \Im\left\{\frac{1+\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}+i}{2}}\right\} = \sqrt{3}+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
f_6(0) &= f_5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = f_4\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \\
&= f_3\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right) = f_2\left(-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}\right) \\
&= f_1\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right) = \sin\pi\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)
\end{aligned}$$

よって，$f_6(0)=0$ となる事象は，$\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}$ が整数となる事象である．$a \leqq b$ では

$$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (6,\ 6)$$

よって該当事象の総数は 8 通り．$f_6(0)=0$ となる確率は

$$\frac{8}{6^2}=\frac{2}{9}$$

である．

5.2　2 番問題

次の問いに答えよ．

(1) c を正の定数とする．正の実数 $x,\ y$ が $x+y=c$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ．

(2) 正の実数 $x,\ y,\ z$ が $x+y+z=1$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ．

5.3　3 番問題

座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 $(a,\ b)$) をもつとする．

1) $a,\ b,\ r$ の値をそれぞれ求めよ．

2) 連立不等式

$$a \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2,\ x^2+y^2 \geqq r^2$$

の表す領域を，z 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

5.4　4 番問題

正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする．

(1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ．

(2) $S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 $(n,\ m)$ をすべて求めよ．

(3) 整数 a と $0 \leqq b < 1$ をみたす実数 b を用いて，

$$A_{20}S_{20} = a + b$$

と表すとき，b の値を求めよ．

5.4.1　解答

(1) $2^N \leqq n < 2^{N+1}$ である．$k \leqq n$ で $k \neq 2^N$ のとき $k = 2^l \cdot b$ b : 奇数 とおくと，$l < N$ である．また $b < A_n$ で，b は A_n の約数であるから

$$2^N A_n \cdot \frac{1}{k}$$

は偶数である．$k = 2^N$ のときにかぎり

$$2^N A_n \cdot \frac{1}{k} = A_n$$

と奇数になる．1 個の奇数と他は偶数の和であるから $2^N A_n S_n$ は奇数の整数である．

(2) $S_3 < 2$ なので $n \geqq 4$ である．$N \geqq 3$ のとき

$$2^N A_n S_n = 2^N A_n S_n \frac{40+m}{2^2 \cdot 5} = 2^{N-2} A_n S_n \frac{40+m}{5}$$

が偶数となり (1) と矛盾する．よって $N \leqq 2$ であり，この結果 $4 \leqq n \leqq 7$ である．

$$\begin{aligned} &S_4 = 2 + \frac{1}{12},\ S_5 = 2 + \frac{17}{60}, \\ &S_6 = 2 + \frac{27}{60} = 2 + \frac{9}{20},\ S_7 = 2 + \frac{83}{140} \end{aligned}$$

なので，$S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ と表される正の整数の組 $(n,\ m)$ は $(6,\ 9)$ である．

(3) $n = 20$ のとき，$2^4 < 20 < 2^5$ なので $2^4 \cdot A_{20}S_{20}$ が奇数となる．この奇数を p とおくと

$$A_{20}S_{20} = \frac{p}{16}$$

である．

$$A_{20}S_{20} = A_{20} \cdot \sum_{l=1}^{l=10} \frac{1}{2l-1} + A_{20} \cdot \sum_{l=1}^{l=10} \frac{1}{2l}$$

のうち，$A_{20}\cdot\displaystyle\sum_{l=1}^{l=10}\frac{1}{2l-1}$ は整数である．

$$A_{20}\cdot\sum_{l=1}^{l=10}\frac{1}{2l}=\frac{1}{2}S_{10}=\frac{A_{20}}{2}\left(2+\frac{9}{20}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)$$

において $\dfrac{A_{20}}{7}$，$\dfrac{A_{20}}{9}$ はともに奇数．よって

$$\frac{A_{20}}{2}\left(2+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)$$

は整数である．よって b は

$$\frac{A_{20}}{2}\left(\frac{9}{20}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)=\frac{27}{16}\cdot 3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\cdot 19$$

の小数部分である．ここで

$$\begin{aligned}
&27\cdot 3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\cdot 19\\
\equiv\ &11\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot(-1)\cdot 3 \pmod{16}\\
\equiv\ &11\cdot 13\cdot 11\cdot 13\cdot(-1)\cdot 3 \pmod{16}\\
\equiv\ &(-5)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot 3 \pmod{16}\\
\equiv\ &(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 3\equiv 13 \pmod{16}
\end{aligned}$$

であるから $b=\dfrac{13}{16}$ である．

5.5　5 番問題

円上の 5 点 A，B，C，D，E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している．5 点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{c}$ とおき，$\overrightarrow{a}$ の大きさを x とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2=y(y-x)$ がなりたつことを示せ．

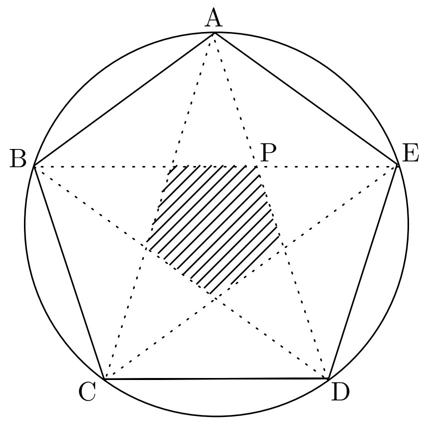
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}$ を用いて表せ．

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする．R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ．

(4) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$$

を求めよ．



斜線部分が R_2

5.5.1　解答

(1)　AD と BE の交点を P とする．

　正五角形の頂点の内角は 108° であり，$\triangle$ACD は頂角が 36°，底辺の 2 角が 2° の二等辺三角形である．この結果 $\triangle$BPA は $\triangle$ACD と相似である．

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BE} - \mathrm{BP} = y - x$$

である．相似比の相等より

$$\mathrm{AC} : \mathrm{CD} = \mathrm{BP} : \mathrm{PA}$$

なので，

$$y : x = x : (y - x)$$

これから $x^2 = y(y - x)$ がなりたつ．

(2)　(1) と同様に考え $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は平行である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

とおくと，$t = \dfrac{y}{x}$ である．(1) から t は

$$1 = t^2 - t$$

を満たす．$t > 0$ なので，これより

$$t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

より

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{c} = t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

なので，

$$(t - 1)\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$$

$\dfrac{1}{t-1}=t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$$

(3)　R_2 の一辺の長さを x_2 とおく．

$$\mathrm{AC}:\mathrm{CD}=\mathrm{EP}:x_2$$

より

$$y:x=(y-x):x_2$$

よって

$$x_2=\frac{x(y-x)}{y}=x-\frac{x^2}{y}=\frac{t-1}{t}x=(t-1)^2x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

(4)　同様に，R_n の一辺の長さを x_n とおくと，

$$x_{n+1}=(t-1)^2x_n$$

である．したがって面積比を考え，

$$S_{n+1}=(t-1)^4S_n$$

したがって，数列 $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}S_n}{S_1}\right\}$ は初項 1，公比 $-(t-1)^4$ の等比数列である．$|t-1|<1$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{1+(t-1)^4}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

5.6　挑戦枠問題 1

次の問いに答えよ．

(1) $r,\ s$ を $r<s$ である有理数とするとき，$r<c<s$ をみたす無理数 c が存在することを示せ．

(2) $\alpha,\ \beta$ を $\alpha<\beta$ である実数とするとき，$\alpha<q<\beta$ をみたす有理数 q が存在することを示せ．

(3) x を有理数の定数とする．このとき，不等式 $\left|x-\dfrac{n}{m}\right|<\dfrac{1}{m^2}$ をみたすような自然数 m と整数 n を用いて $\dfrac{n}{m}$ の形に表すことができる有理数は有限個であることを示せ．

(4) 条件式 $a_l\ =\ a_2=1$，$a_{n+2}\ =\ a_{n+1}+a_n\ (n\ =\ 1,\ 2,\ 3,\ ,\cdots)$ により数列 $\{a_n\}$ を定め，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする．不等式

$$\left|x-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{{a_n}^2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ ,\cdots)$$

を示せ．

5.6.1　解答

(1) n を

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < s - r$$

となるようにとる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n} = 0$ なので，これは可能である．このとき $c = r + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ は無理数で，$r < c < s$ をみたす．

(2) N を α を超えない最大の整数とし，α を十進表示して

$$\alpha = N + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$$

とする．ただし，ある k 以上の a_k は 0 であることもある．

$$\beta - \alpha > \frac{1}{10^l}$$

となる l をとり，

$$q = N + \sum_{k=1}^{l}\frac{a_k}{10^k}$$

とする．

$$q - \alpha = \beta - \alpha - \sum_{k=1+1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k} > \beta - \alpha - \frac{1}{10^l} > 0$$

なのでこの q は $\alpha < q < \beta$ をみたす有理数である．

(3) 互いに素な正整数 u と整数 v を用いて $x = \dfrac{v}{u}$ とおく．$\dfrac{n}{m} \neq \dfrac{v}{u}$ とする．不等式 $\left|x - \dfrac{n}{m}\right| < \dfrac{1}{m^2}$ より

$$1 \leqq |vm - un| < \frac{u}{m}$$

となり，$m < u$ が必要である．この結果 m は有限個．1 つの m に対して

$$-\frac{u}{m} < vm - un < \frac{u}{m}$$

より，n も有限個となり，条件を満たす m と n は有限個である．

(4) $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ おくと，x と y によって $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ は $a_{n+2} = (x+y)a_{n+1} - xya_n$ と表される．よって

$$a_{n+2} - xa_{n+1} = y(a_{n+1} - xa_n)$$

となり

$$a_{n+1} - xa_n = y^{n-1}(a_2 - xa_1) = y^n$$

である．よって

$$|a_{n+1} - xa_n| = |y|^n$$

$$a_{n+1} - ya_n = x^n$$

も成り立ち，

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x^n - y^n)$$

である．ここで

$$|y|^n < \frac{1}{a_n} \iff |y|^n < \frac{\sqrt{5}}{x^n - y^n} \iff 1 - y^{2n} < \sqrt{5}$$

$|y| < 1$ よりこれは成立し，

$$|a_{n+1} - xa_n| < \frac{1}{a_n}$$

つまり

$$\left|x - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{{a_n}^2}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ ,\cdots)$$

が示された．

5.7　挑戦枠問題 2

座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．

(1) 平行四辺形 ABCD の頂点のうち，A，B，C が格子点であるならば，D も格子点であることを示せ．

(2) r を正の実数とし，n を 5 以上の自然数とする．正 n 角形 P は，原点 O を中心とし半径が r の円 S に内接するとし，P の 1 つの頂点 B をとる．また，円周 S 上で B の両隣にある P の頂点をそれぞれ A，C とし，四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D をとる．OD の長さを r と n を用いて表せ．

(3) 実数 θ に対して，$\tan\theta$ が有理数であるならば，任意の整数 k に対して，$\cos(2k\theta)$ および $\sin(2k\theta)$ が有理数であることを示せ．

(4) $\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ が有理数となるような自然数 n をすべて求めよ．

5.7.1　解答

(1) ABCD が平行四辺形なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる．これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となり，点 D の x 座標と y 座標はともに整数である．

(2) 点 B を $(r,\ 0)$ にとる．$\angle\mathrm{BOA} = \dfrac{2\pi}{n}$ より

$$\mathrm{A}\left(r\cos\frac{2\pi}{n},\ r\sin\frac{2\pi}{n}\right),\ \mathrm{C}\left(r\cos\frac{2\pi}{n},\ -r\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

ととれる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= \left(r\cos\frac{2\pi}{n}-r,\ r\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\left(r\cos\frac{2\pi}{n}-r,\ -r\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\left(2r\cos\frac{2\pi}{n}-2r,\ 0\right)\end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\left(2r\cos\frac{2\pi}{n}-r,\ 0\right)$$

この結果，

$$\mathrm{OD}=r\left|2\cos\frac{2\pi}{n}-1\right|$$

である．

(3)

$$\tan(k\pm 1)\theta=\frac{\tan k\theta\pm\tan\theta}{1\mp\tan k\theta\tan\theta}$$

より，$\tan k\theta,\ \tan\theta$ が有理数なら $\tan(k\pm 1)\theta$ は有理数である．$\tan\theta$ が有理数であるので，数学的帰納法によって任意の整数 k に対して，$\tan k\theta$ は有理数である．

$$\begin{aligned}\cos(2k\theta) &= \cos^2 k\theta-\sin^2 k\theta=\frac{1-\tan^2 k\theta}{1+\tan^2 k\theta}\\ \sin(2k\theta) &= 2\cos k\theta\sin k\theta=\frac{2\tan k\theta}{1+\tan^2 k\theta}\end{aligned}$$

より，任意の整数 k に対して，$\cos(2k\theta)$ および $\sin(2k\theta)$ は有理数である．

(4) $n\leqq 4$ のとき，$\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ が有理数となるのは $n=4,\ 1$ である．$n\geqq 5$ のとき．$\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ が有理数とする．この P の n 個の頂点は

$$\left(r\cos\frac{2\pi k}{n},\ r\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

である．$\cos\dfrac{2\pi k}{n},\ \sin\dfrac{2\pi k}{n}$ はすべて有理数である．これらの有理数の分母の最小公倍数を r にとる．このとき，n 個の頂点はすべて格子点となる．

つまり $\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ が有理数であるとき，n 個の頂点が格子点である正 n 角形が存在する．

各頂点とそれの隣りあう 2 頂点の 3 点から，(2) と同様の方法で平行四辺形を構成する第 4 の点をとる．このようにして得られる n 個の点は，対称性から再び正 n 角形 Q を作り，(1) によってその頂点はすべて格子点である．

一方，この正 n 角形 Q の頂点の原点からの距離は (2) によって $r\left|2\cos\dfrac{2\pi}{n}-1\right|$ である．

正 n 角形 P から正 n 角形 Q を構成したのと同様の方法で，正 n 角形 Q から正 n 角形 R を構成する．再びその頂点はすべて格子点であり，正 n 角形 R の頂点の原点からの距離は $r\left|2\cos\dfrac{2\pi}{n}-1\right|^2$ である．

これは何度でも繰り返せる．l 回繰り返した後の正 n 角形を P_l とする．正 n 角形 P_l の頂点の原点からの距離は $r\left|2\cos\dfrac{2\pi}{n}-1\right|^{l-1}$ で，すべての頂点は格子点である．

$n \geqq 5$ のとき $\left|2\cos\dfrac{2\pi}{n}-1\right|<1$ であるから，l を十分大きくとると，正 n 角形 P_l の頂点の原点からの距離は 1 より小さく，かつ頂点が格子点であることになる．

原点にもっとも近い格子点は $(1,\ 0)$ でその距離は 1 なので矛盾である．よって，$n \geqq 5$ のときに $\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ が有理数となる n は存在せず，$n=4,\ 1$ である．

6　東北大理系

6.1　4 番問題

多項式 $P(x)$ を

$$P(x)=\frac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$$

により定める．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数 $a_0,\ \cdots,\ a_7$ をすべて求めよ．

(2) $0<\theta<\pi$ に対して，

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1) で求めた $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7$ を用いて，多項式 $Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ を考える．$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1,\ 2,\ 3$ について

$$x_k=\frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく．このとき，$Q(x_k)=0$ が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$ の値を求めよ．

6.1.1　解答

(1) 二項定理から

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}\{i^k-(-i)^k\}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left[{}_7\mathrm{C}_1x^6(2i)+{}_7\mathrm{C}_3x^4\{i^3-(-i)^3\}+{}_7\mathrm{C}_5x^2\{i^5-(-i)^5\}+\{i^7-(-i)^7\}\right] \\ &= {}_7\mathrm{C}_1x^6-{}_7\mathrm{C}_3x^4+{}_7\mathrm{C}_5x^2-1 \end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} &a_0=a_2=a_4=a_6=0 \\ &a_1=7,\ a_3=-35,\ a_5=21,\ a_7=-1 \end{aligned}$$

である．

(2) ド・モアブルの定理から，

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^7 - (\cos\theta - i\sin\theta)^7}{2i\sin^7\theta} \\ &= \frac{(\cos 7\theta + i\sin 7\theta) - (\cos 7\theta - i\sin 7\theta)}{2i\sin^7\theta} \\ &= \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta} \end{aligned}$$

である．

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{7}$ のとき，$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について $\sin 7k\theta = 0$ である．また，$\dfrac{\cos(7-k)\theta}{\sin(7-k)\theta} = -\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta}$ で，この 6 個はすべて値が異なる．よって，$\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta}$ は 6 次方程式

$$P(x) = 7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0$$

の 6 個の解である．$P(x)$ は x^2 の 3 次式なので，$k = 1,\ 2,\ 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

は，$Q(x_k) = 0$ を満たす．$x_1,\ x_2,\ x_3$ は異なるので，これが 3 次方程式 $Q(x) = 0$ の 3 個の解である．よって，解と係数の関係から

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{35}{7} = 5$$

である．

7 東北大後期理系

7.1 5 番問題

$z,\ w$ を相異なる複素数で z の虚部は正，w の虚部は負とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1，z，-1，w が複素数平面の同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)}$$

が負の実数となることであることを示せ．

(2) $z = x + iy$ が $x < 0$ と $y > 0$ を満たすとする．1，z，-1，$\dfrac{1+z^2}{2}$ が複素数平面の同一円周上にあるとき，複素数 z の軌跡を求めよ．

7.1.1 解答

(1) 1，z，-1，w が複素数平面の同一円周上にあることは，1 のまわりの w から z への角と，-1 のまわりの z から w への角の和が，0〜2π では π となることと同値である．

したがってこれはまた，整数 k を用いて

$$\arg\left(\frac{z-1}{w-1}\right)+\arg\left(\frac{w-(-1)}{z-(-1)}\right)=\arg\frac{z-1}{w-1}\cdot\frac{w+1}{z+1}=\pi+2k\pi$$

となること同値である．そして，この条件は，

$$\frac{z-1}{w-1}\cdot\frac{w+1}{z+1}=\frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)}$$

が負の実数であることと同値である．

(2) $z=1$ なら 3 点なので，同一円周上にある．

$z\neq 1$ とする．$z=x+iy$ とおくと

$$\frac{1+z^2}{2}=\frac{1+x^2-y^2+2ixy}{2}$$

なので，$x<0,\ y>0$ のとき，$\dfrac{1+z^2}{2}$ の虚部は負となり，1，z，-1，$\dfrac{1+z^2}{2}$ に（1）が適用できる．よって，この 4 点が複素数平面の同一円周上にあることは，

$$\frac{\left(1+\dfrac{1+z^2}{2}\right)(1-z)}{\left(1-\dfrac{1+z^2}{2}\right)(1+z)}=\frac{3+z^2}{(1+z)^2}\quad\cdots①$$

が負の実数となることと同値である．

実数となることが必要なので，

$$\frac{3+z^2}{(1+z)^2}=\frac{3+\overline{z}^2}{(1+\overline{z})^2}$$

これを整理して

$$(z-\overline{z})(z\overline{z}-z-\overline{z}-3)=0$$

を得る．$z-\overline{z}=0$，つまり z が実数のとき，① は正の実数となり条件を満たさない．

$z\overline{z}-z-\overline{z}-3=0$ のとき．これを変形して

$$(z-1)(\overline{z}-1)-4=0$$

つまり

$$|z-1|=2$$

となる．$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いて $z=2\alpha+1$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}\frac{3+z^2}{(1+z)^2} &= \frac{4+4\alpha^2+4\alpha}{4(1+\alpha)^2}=\frac{(1+\alpha)^2-\alpha}{(1+\alpha)^2}=1-\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}\\ &= 1-\frac{\alpha(1+\overline{\alpha})^2}{(1+\alpha)^2(1+\overline{\alpha})^2}=1-\frac{(1+\alpha)(1+\overline{\alpha})}{(2+\alpha+\overline{\alpha})^2}=1-\frac{2+\alpha+\overline{\alpha}}{(2+\alpha+\overline{\alpha})^2}<0\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&(2+\alpha+\overline{\alpha})^2-(2+\alpha+\overline{\alpha})\\ =\ &(2+2\cos\theta)^2-(2+2\cos\theta)=2(1+\cos\theta)(1+2\cos\theta)<0\end{aligned}$$

z は実数でなく $1+\cos\theta>0$ なので $\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$ である．$2\cos\theta=\alpha+\overline{\alpha}=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})-1$ であるから，$z=x+iy$ とおけば，この条件は $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})=x<0$ となる．さらに複素数 z の虚部 y は正なので，z の軌跡を，x と y の条件で書き表すと次のようになる．

$$(x-1)^2+y^2=4,\ x<0,\ y>0$$

8　名大理系

8.1　3番問題

玉が2個ずつ入った2つの袋A，Bがあるとき，袋Bから玉を1個取り出して袋Aに入れ，次に袋Aから玉を1個取り出して袋Bに入れる，という操作を1回の操作と数えることにする．Aに赤玉が2個，Bに白玉が2個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋Bに入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ．

(2) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ．

8.1.1　解答

Bの赤玉の個数の変化に対し，BからA，AからBに動かす色,（）内はその確率，は次のようになる．

$$\begin{aligned} 0\to0 &\quad:\quad \text{白}\,(1)\,\text{白}\left(\frac{1}{3}\right)\\ 1\to0 &\quad:\quad \text{赤}\left(\frac{1}{2}\right)\text{白}\left(\frac{1}{3}\right)\\ 2\to0 &\quad:\quad \text{事象なし}\end{aligned}$$

これから

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)$$

となり，赤と白を逆にすることで

$$P_{n+1}(2)=\frac{1}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}P_n(2)$$

も成り立つ．$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ の係数の和が1となることより，

$$P_{n+1}(1)=\frac{2}{3}P_n(0)+\frac{2}{3}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)$$

が成り立つ．この漸化式は $n=0$ でも成り立ち，$P_0(0)=1$，$P_0(1)=P_0(2)=0$ なので

$$P_1(0)=\frac{1}{3},\ P_1(1)=\frac{2}{3},\ P_1(2)=0$$

である．

$$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)=1$$

なので $n \geqq 1$ に対して $P_n(1)=\dfrac{2}{3}$ であり，

$$\begin{aligned} P_{n+1}(0) &= \frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{9} \\ P_{n+1}(2) &= \frac{1}{9}+\frac{1}{3}P_n(2) \end{aligned}$$

が成り立つ．それぞれ

$$\begin{aligned} P_{n+1}(0)-\frac{1}{6} &= \frac{1}{3}\left(P_n(0)-\frac{1}{6}\right) \\ P_{n+1}(2)-\frac{1}{6} &= \frac{1}{3}\left(P_n(2)-\frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} P_n(0)-\frac{1}{6} &= \frac{1}{3^{n-1}}\left(P_1(0)-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} \\ P_n(2)-\frac{1}{6} &= \frac{1}{3^{n-1}}\left(P_1(2)-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

よって $n \geqq 1$ に対して

$$P_n(0)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3^{n-1}}\right),\ P_n(1)=\frac{2}{3},\ P_n(2)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

である．

8.2 4番問題

次の問に答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える．

(1) 次の条件 $(*)$ を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ の組をすべて求めよ．

$$(*)\begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b= \text{の 2 つの解が } c,\ d \text{ である．} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d= \text{の 2 つの解が } e,\ f \text{ である．} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f= \text{の 2 つの解が } a,\ b \text{ である．} \end{cases}$$

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件 $(**)$ を満たすとする．

$(**)$ すべての正の整数 n について，$a_n,\ b_n$ は整数であり，2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が $a_{n+1},\ b_{n+1}$ である．

このとき，

(i) 正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ．

(ii) 条件 $(**)$ を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組をすべて求めよ．

8.2.1 解答

(1) 条件 $(*)$ は次の連立方程式と同値である．

$$(*)\begin{cases} c+d=-a,\ cd=b \\ e+f=-c,\ ef=d \\ a+b=-e,\ ab=f \end{cases}$$

第 2，第 4，第 6 式の両辺をかけて $abcdef = bdf$ より $bdf(ace-1)=0$.

$bdf=0$ のとき．$b=0$ とすると，第 4，第 6 式によって $d=f=0$．この結果，第 1，第 3，第 5 式より，$a+c=0$，$c+e=0$，$e+a=0$ となり，$a=c=e=0$.

$ace=1$ のとき．すべて整数なので，3 個のうち 1 個が 1 で 2 個が -1 であるか，すべて 1 である．$a=1$，$c=e=-1$ とする．第 1，第 3，第 5 式より $b=0$，$d=0$，$f=2$ となるが，第 4 式をみたさない．

$a=c=e=1$ とする．$b=d=f=-2$ となる．よって

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),(1,\ -2,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2)$$

(2) (i) 条件 $(**)$ は，

$$a_n,\ b_n \text{は整数},\ a_{n+1}+b_{n+1}=-a_n,\ a_{n+1}\cdot b_{n+1}=b_n$$

と同値である．

すべての n で $b_n=0$ なら $a_{n+1}=-a_n$ となる a_n は条件を満たす．

$b_{n+1}\neq 0$ の n があるとき，$a_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ である．a_{n+1} は整数なので，

$$|a_{n+1}|=\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|}\geqq 1$$

である．つまり $|b_n|\geqq|b_{n+1}|\geqq 1$ が成り立つ．

$|b_n|>N\geqq 1$ となる N は有限個であるから，$|b_n|>|b_{n+1}|$ となる $n+1$ は有限個である．したがって $n+1$ のなかで最大のものを m とすれば，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となる．

(ii) すべての n で $b_n=0$ のとき．

$a_{n+1}=-a_n$ であれば条件を満たす．よって $a_1=a$ とおくと，$a_n=(-1)^{n-1}a$ である．

$b_{n+1}\neq 0$ の n があるとき．

$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots=l$ とおく．$n\geqq m$ について $a_{n+1}\cdot b_{n+1}=b_n$ が成り立つので，$a_{n+1}=\pm 1$ となる．

$x^2+a_nx+b_n=0$ が実数解をもつので，$a_n^2-4b_n=1-4b_n\geqq 0$ が必要で，$n\geqq m+1$ なら，これから $b_n=-l$ である．このとき，$a_{n+1}=1$．つまり $n\geqq m+2$ について $a_n=1$ である．

したがって $n\geqq m+3$ について $b_n=-2$ である．つまり，

$$n\geqq m+3 \text{ のとき},\ a_n=1,\ b_n=-2$$

が成り立つ．

このとき，

$$a_n+b_n=-a_{n-1},\ a_n\cdot b_n=b_{n-1}$$

より $a_{n-1}=1,\ b_{n-1}=-2$ が成り立つ．よってすべての n で $a_n=1,\ b_n=-2$ である．

以上から，条件を満たすものは，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$\begin{aligned}&\text{整数 } a,\ a_n=(-1)^{n-1}a,\ b_n=0\\ &\text{または},\ a_n=1,\ b_n=-2\end{aligned}$$

である．

9　九大理系

9.1　1 番問題

座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
C_1 &: \quad y = \log x \quad (x > 0) \\
C_2 &: \quad y = (x-1)(x-a)
\end{aligned}
$$

とする。ただし，a は実数である。n を自然数とするとき，曲腺 C_1，C_2 が 2 点 P，Q で交わり，P，Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている．また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を T_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ．

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ．

9.1.1　解答

(1) C_1，C_2 はいずれも点 $(1,\ 0)$ を通る．これがさらに x 座標が $n+1$ の点で交わるので，a は

$$\log(n+1) = n(n+1-a)$$

を満たさなければならない．これより

$$n+1-a = \frac{\log(n+1)}{n}$$

よって

$$a = n+1-\frac{\log(n+1)}{n}$$

次に，$a > 1$ は $n+1-\dfrac{\log(n+1)}{n} > 1$ と同値となり，さらにこれは

$$n^2 > \log(n+1)$$

と同値になる．これから

$$e^{n^2} > n+1$$

と同値であるが，

$$e^{n^2} > (1+1)^{n^2} \geqq 1+n^2 \geqq 1+n$$

より，これは成立する．

(2) 直線 PQ は $(1,\ 0)$ と $(n+1,\ \log(n+1))$ を通るので，その方程式は

$$y = \frac{\log(n+1)}{n}(x-1)$$

である．よって

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_1^{n+1} \left\{ \log x - \frac{\log(n+1)}{n}(x-1) \right\} dx \\
&= \left[x\log x - x - \frac{\log(n+1)}{2n}(x-1)^2 \right]_1^{n+1} \\
&= (n+1)\log(n+1) - (n+1) - \frac{n\log(n+1)}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}\log(n+1) - n \\
T_n &= \int_1^{n+1} \left\{ \frac{\log(n+1)}{n}(x-1) - (x-1)(x-a) \right\} dx \\
&= \frac{(n+1-1)^3}{6} = \frac{n^3}{6}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{n\log T_n} &= \frac{\dfrac{n+2}{2}\log(n+1) - n}{n\log\dfrac{n^3}{6}} = \frac{\dfrac{n+2}{2n}\log n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1}{3\log n - \log 6} \\
&= \frac{\dfrac{n+2}{2n}\left\{1 + \dfrac{1}{\log n}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\} - \dfrac{1}{\log n}}{3 - \dfrac{\log 6}{\log n}}
\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\dfrac{1}{2}(1+0) - 1}{3-0} = \frac{1}{6}$$

である．

9.2　2 番問題

　t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB,BC,CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする．また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ．

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする．

(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ．

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ．

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ．

9.2.1　解答

(1) チェバの定理とその逆から，3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わることは

$$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BE}}\cdot\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CF}}=1$$

と同値である．これより

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t_0}{t_0}\cdot\frac{3}{1}=1$$

これより，$t_0=\dfrac{3}{5}$ である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\dfrac{1}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}=(1-t)k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4tk}{3}\overrightarrow{\mathrm{AF}}\\ \overrightarrow{\mathrm{CR}} &= l\overrightarrow{\mathrm{CD}}=l\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)=\frac{l}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{2l}{3(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{CE}}\end{aligned}$$

である．B，P，F および A，R，E が一直線上にあるので

$$(1-t)k+\frac{4tk}{3}=1,\ \frac{l}{3}+\frac{2l}{3(1-t)}=1$$

である．これから

$$k=\frac{3}{3+t},\ l=\frac{3-3t}{3-t}$$

(3) 同様に $\mathrm{BQ}=m\mathrm{BF}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{BF}}=m\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)=\frac{3m}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3m}{4}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

より $m=\dfrac{4}{6}$ である．よって

$$\triangle\mathrm{BCQ}=\triangle\mathrm{ABC}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$$

(4) 同様にして

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{CAR} &= \frac{2}{3}\cdot l=\frac{2-2t}{3-t}\\ \triangle\mathrm{ABP} &= t\cdot k=\frac{3t}{3+t}\end{aligned}$$

よって

$$\triangle\mathrm{PQR}=1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t}=\frac{(3-5t)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

9.3　3 番問題

座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $\mathrm{P}_0(1,0)$ を 1 つの頂点とするものを考える．この正六角形の頂点を $\mathrm{P}_0(1,0)$ から反時計まわりに順に P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 とする．ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し，1 つのサイコロを 1 回投げ，出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす．

(規則)　(i)　1 から 5 までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす．例えば，コインが P_4にあるときに 4 の目が出た場合は P_2まで動かす．

(ii)　6 の目が出た場合は, x 軸に関して対称な位置にコインを動かす．ただし，コインが x 軸上にあるときは動かさない．例えば，コインが P_5にあるときに 6 の目か出た場合は P_1 に動かす．

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き，1 つのサイコロを続けて何回か投げて，1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える．以下の問いに答えよ．

(1) 2 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ．

(2) 3 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ．

(3) n を自然数とする．n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ．

9.3.1　解答

l を整数とし，$\mathrm{P}_l\left(\cos\dfrac{2l\pi}{3},\ \sin\dfrac{2l\pi}{3}\right)$ とする．$0 \leqq l \leqq 5$ に対しては問題文の点 P_l と一致する．

$l \equiv m \pmod 6$ のとき，そしてそのときにかぎり $\mathrm{P}_l = \mathrm{P}_m$ である．

サイコロの出た目が $k\ (1 \leqq k \leqq 5)$ のとき，点 P_l は点 P_{l+k} に移り，サイコロの出た目が 6 のとき，点 P_l は点 P_{-l} に移る．ただし，$l=0,\ 3$ のときは，同一の点である．

n を 0 か自然数とし n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を p_n とする．

$p_0 = 1$ である．

$n+1$ 回目に P_0 の位置にあるのは,

(i) n 回の試行の後 P_0 の位置にあり，$n+1$ 回目に 6 の目が出る．

(ii) n 回の試行の後 P_l ($l \not\equiv 0 \pmod 6$) の位置にあり，$n+1$ 回目に，$l+k \equiv 0 \pmod 6$ となる k が出る．$k \equiv -l \pmod 6$ となるサイコロの目 k はただ一つある．

のいずれかである．よって $n \geqq 1$ に対して，漸化式

$$p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}(1-p_{n-1})$$

が成り立つ．これより

$$p_2 = p_3 = p_n = \frac{1}{6}$$

である．

9.4　4 番問題

自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく．a_n は 0 から 12 までの整数である．以下の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ．

(2) a_l，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ．

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ．

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる．

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる．

(iii) N は 13 で割り切れる．

9.4.1　解答

(1) $10^n \equiv a_n \pmod{13}$ より $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$ である．

一方，$10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$ なので $10a_n \equiv a_{n+1} \pmod{13}$ である．

(2)

$$\begin{array}{ll} 10^1 \equiv 10 \pmod{13} & \therefore\ a_1 = 10 \\ 10a_1 = 13 \cdot 7 + 9 & \therefore\ a_2 = 9 \\ 10a_2 = 90 = 13 \cdot 6 + 12 & \therefore\ a_3 = 12 \\ 10a_3 = 120 = 13 \cdot 9 + 3 & \therefore\ a_4 = 3 \\ 10a_4 = 30 = 13 \cdot 2 + 4 & \therefore\ a_5 = 4 \\ 10a_5 = 40 = 13 \cdot 3 + 1 & \therefore\ a_6 = 1 \end{array}$$

(3) $1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$ の整数を用いて $N = a \cdot 10^5 + 20160 + b$ とおく．$a_5 = 4$ で $20160 \equiv -3 (\bmod\ 13)$ なので，

$$N \equiv 4a - 3 + b \equiv 0 \pmod{13}$$

とならねばならない．これを満たすのは

$$(a,\ b) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

である．つまり

$$N = 220168,\ 320164,\ 420160,\ 520169,\ 620165,\ 720161,\ 920166$$

となる．

10　九大後期理系

10.1　4 番問題

正の実数 $a,\ b$ に対して $A(a,\ b)=\dfrac{a+b}{2}$，$G(a,\ b)=\sqrt{ab}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\min(a,\ b) \leqq G(a,\ b) \leqq A(a,\ b) \leqq \max(a,\ b)$ が成り立つことを示せ．ただし，$\min(a,\ b)$ は $a,\ b$ のうちの最小の数を表し，$\max(a,\ b)$ は $a,\ b$ のうちの最大の数を表す ($a=b$ の場合は $a,\ b$ のうちのどちらかの数を表すとする)．

(2) $a>b$，$a_0=a,\ b_0=b$ として，以下の数列を定義する．

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ c_{n+1}=\frac{a_n-b_n}{2},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

このとき数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は同じ極限値 (α とする) に収束することを示せ．

(3) a_{n+2} を a_n と b_n を用いて表せ．ただし，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は (2) で定義した数列とする．

(4) c_{n+2} と c_{n+1} の間に以下の関係が成り立つことを示せ．ただし $\{c_n\}$ と α はそれぞれ (2) で定義した数列と極限値とする．

$$c_{n+2}<\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}c_{n+1}\right)^2$$

10.1.1　解答

正の実数 $a,\ b$ に対して $A(a,\ b)=\dfrac{a+b}{2}$，$G(a,\ b)=\sqrt{ab}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)

$$A(a,\ b)-G(a,\ b)=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

より $G(a,\ b) \leqq A(a,\ b)$．等号は $a=b$ のときにかぎり成立する．また $a \geqq b$ とすると

$$\min(a,\ b)=b=\sqrt{b}\cdot\sqrt{b} \leqq \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=G(a,\ b)$$
$$A(a,\ b)=\frac{a+b}{2} \leqq \frac{a+a}{2}=a=\max(a,\ b)$$

である．よって $\min(a,\ b) \leqq G(a,\ b) \leqq A(a,\ b) \leqq \max(a,\ b)$ が成り立ち，等号はいずれも $a=b$ のときにかぎり成り立つ．

(2) (1) より

$$b_0<b_1<a_1<a_0$$

が成り立つ．$a_n>b_n$ とすると，同様に

$$b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n \quad \cdots ①$$

が成り立ち，数学的帰納法からすべての n で ① が成り立つ．

$b_n < b_{n+1} < a_0$ より数列 $\{b_n\}$ は単調増加で上に有界である．実数の連続性から B には最小値が存在する．それを β とする．$\lim_{n\to\infty}(\beta - b_n) = 0$ となる．よって数列 $\{b_n\}$ は β に収束する．

$b_0 < a_{n+1} < a_n$ より数列 $\{a_n\}$ は単調減少で下に有界である．同様に数列 $\{a_n\}$ はある実数 α に収束する．

この極限値に関して

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta = \sqrt{\alpha\beta}$$

が成り立つので，$\beta = \alpha$ であり，数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は同じ極限値 α に収束する．

(3)

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} = \frac{a_n + b_n + 2\sqrt{a_n b_n}}{4} = \left(\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}{2}\right)^2$$

(4)

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{2} = \frac{\dfrac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_n+b_n}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2}{4} = \frac{(a_n-b_n)^2}{4(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})^2} \end{aligned}$$

(3) から

$$(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})^2 = 4a_{n+2}$$

であり，$\alpha < a_{n+2}$ なので，

$$c_{n+2} = \frac{(a_n-b_n)^2}{4}\cdot\frac{1}{4a_{n+2}} < \frac{(a_n-b_n)^2}{4}\cdot\frac{1}{4\alpha} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}c_{n+1}\right)^2$$

である．

11　神戸大理系

11.1　6 番問題

極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1+\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dy}$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ．

(4) 曲線 C の長さを求めよ．

11.1.1　解答

(1) 曲線 C 上の点は直交座標 $(x,\ y)$ では，θ を媒介変数として，

$$x(\theta) = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta, \quad y(\theta) = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta$$

と表される．

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta(1+2\cos\theta) \\
\frac{dy}{d\theta} &= \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta = (1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)
\end{aligned}$$

より，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる θ は，$\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$ であり，対応する直交座標は

$$(2,\ 0),\ (0,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{4},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

である．また $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる θ は，$\theta = \pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}$ であり，対応する直交座標は

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{3}{4},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right),\ \left(\frac{3}{4},\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

である．

(2) $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} &= -\frac{(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)}{\sin\theta(1+2\cos\theta)} \\
&= -\frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)(-1+2\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)(1+2\cos\theta)} = -\frac{\sin\theta(-1+2\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1+2\cos\theta)}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dy} = 0$$

である．

(3)

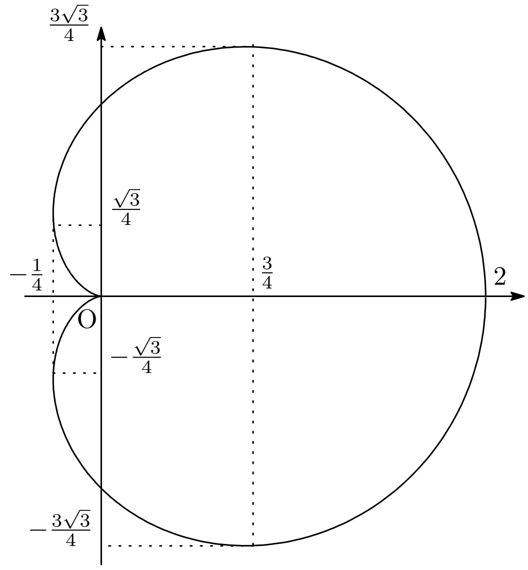
$x(\theta),\ y(\theta)$ に関して

$$\begin{aligned}
x(2\pi-\theta) &= (1+\cos\theta)\cos\theta = x(\theta) \\
y(2\pi-\theta) &= -(1+\cos\theta)\sin\theta = -y(\theta)
\end{aligned}$$

より，C は x 軸に関して対称である．
$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，xy 平面上での C 上の点の動く方向は右の表のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
(x,y)	$(2,0)$	$\nwarrow$	$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$	$\swarrow$	$\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$	$\searrow$	$(0,0)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき $y(\theta) \geqq 0$ で，その部分と，$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ のときの部分が x 軸対称なので，曲線 C の概形は次のようになる．



(4) 曲線 C の長さは，対称性から，定積分

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

で与えられる．ここで，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta=-\sin\theta-\sin 2\theta\\ \frac{dy}{d\theta} &= \cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos\theta+\cos 2\theta\end{aligned}$$

とも表せるので，

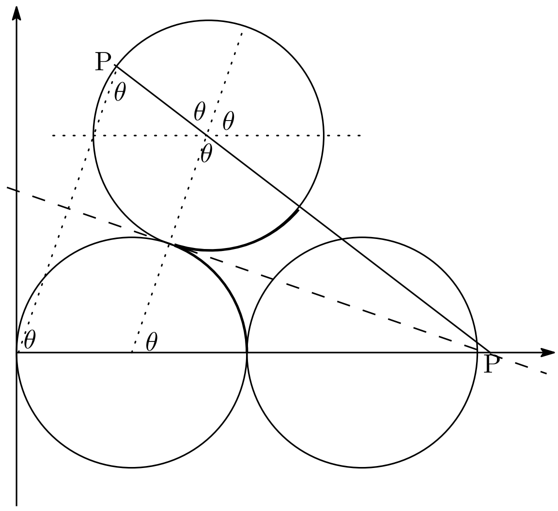
$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} &= \sqrt{\{\sin\theta+\sin 2\theta\}^2+\{\cos\theta+\cos 2\theta\}^2}\\ &= \sqrt{2+2\cos 2\theta\cos\theta+2\sin 2\theta\sin\theta}=\sqrt{2+2\cos\theta}\\ &= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

となる．よって求める長さは，

$$2\int_0^{\pi}\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|\,d\theta=2\left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8$$

である．

カージオイド　この曲線 C は，カージオイドといわれる．この曲線はまた，いわゆる外サイクロイドでもある．



図のように，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円 C_1 を中心が $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ にあるように置く．また同じく半径 $\dfrac{1}{2}$ の円 C_2 を中心が $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ にあるように置く．C_2 を C_1 のまわりに左回りにすべらないように回転させる．そのとき，はじめ $(2,\ 0)$ のあった C_2 上の点 P の軌跡を求める．

C_2 が C_1 の中心の周りに，x 軸の正の方向から θ 回転した状態を図示する．2 円の共通接線に関する対称性から，図のような角がすべて θ である．

そして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \left(\frac{1}{2},\ 0\right) + (\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{1}{2}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta) \\ &= \left(\cos\theta + \cos^2\theta,\ \sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = (1+\cos\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)\end{aligned}$$

となり，本問の曲線 C と一致する．

12　東工大

12.1　4 番問題

n を 2 以上の自然数とする．

(1) n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ．

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ．

12.1.1　解答

(1) n が素数のとき．n は $2 \leqq k \leqq n-1$ の範囲の k と互いに素である．よってそれらの積 $(n-1)!$ と n は互いに素で，$(n-1)!$ は n で割り切れない．

また $n=4$ のとき，$(n-1)! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ なので，$(n-1)!$ は $n=4$ で割り切れない．

(2) n が素数でなく，かつ 4 でもないとき，n は 2 以上の相異なる 2 数の積 ab となるか，3 以上の素数 p の平方 p^2 となるかである．

$n = ab$ $(a < b)$ と表されるとき．n と $n-1$ は互いに素なので $2 \leqq a < b < n-1$ となる．積 $(n-1)!$ を構成する数に a と b が含まれ，$(n-1)!$ は $n = ab$ で割り切れる．

$n = p^2$ $(p : 3$ 以上の素数$)$ と表されるとき．$2 \leqq p < 2p < n-1$ なので，積 $(n-1)!$ を構成する数に p と $2p$ が含まれ，$(n-1)!$ は $n = p^2$ で割り切れる．

13　千葉大

13.1　12 番問題

p を 2 でない素数とし，自然数 $m,\ n$ は

$$(m + n\sqrt{p})(m - n\sqrt{p}) = 1$$

を満たすとする．

(1) 互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ で

$$m + n\sqrt{p} = \frac{x + y\sqrt{p}}{x - y\sqrt{p}}$$

を満たすものが存在することを示せ．

(2) x は (1) の条件を満たす自然数とする．x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることが，同値であることを示せ．

13.1.1　解答

(1) $m^2 - 1 = n^2 p$ より $\sqrt{(m+1)(m-1)} = n\sqrt{p}$ である．よって

$$\begin{aligned}
m + n\sqrt{p} &= m + \sqrt{(m+1)(m-1)} = \frac{m + 1 + 2\sqrt{(m+1)(m-1)} + m - 1}{2} \\
&= \frac{(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})^2}{2} = \frac{(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})^2}{m + 1 - (m-1)} \\
&= \frac{(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})^2}{(\sqrt{m+1})^2 - (\sqrt{m-1})^2} = \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1}} \\
&= \frac{m + 1 + \sqrt{m^2 - 1}}{m + 1 - \sqrt{m^2 - 1}} = \frac{m + 1 + n\sqrt{p}}{m + 1 - n\sqrt{p}}
\end{aligned}$$

$m + 1$ と n の最大公約数を d とし，$m + 1 = dx$，$n = dy$ とおくと $(x,\ y)$ は互いに素な自然数の組で

$$m + n\sqrt{p} = \frac{x + y\sqrt{p}}{x - y\sqrt{p}}$$

を満たす．

(2) x と y が (1) の条件を満たすとする．

$$m+n\sqrt{p}=\frac{(x+y\sqrt{p})^2}{x^2-py^2}$$

より

$$(x^2-py^2)(m+n\sqrt{p})=x^2+py^2+2xy\sqrt{p}$$

で，$\sqrt{p}$ は無理数で他は整数なので，

$$m(x^2-py^2)=x^2+py^2$$

これより

$$(m-1)x^2=(m+1)py^2$$

x が p で割り切れないなら，右辺は p の倍数なので $m-1$ が p の倍数である．

x が p の倍数なら左辺は p^2 の倍数となり，x と y が互いに素なので，$m+1$ が p の倍数である．$m-1$ も p の倍数なら，差をとって 2 が p の倍数となり，p は 3 以上の奇素数であることに反する．よってこのとき $m-1$ は p の倍数ではない．

14　大教大

14.1　問題

自然数 m に対して

$$F_1(m)=\sum_{k=1}^{m}k,\quad F_{n+1}(m)=\sum_{k=1}^{m}F_n(k)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする．以下の等式が成り立つことを示せ．

(1) $F_2(m)={}_{m+2}\mathrm{C}_3$

(2) $F_3(m)={}_{m+3}\mathrm{C}_4$

(3) $F_n(m)={}_{m+n}\mathrm{C}_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

14.1.1　解答

(1) l と r を自然数とする．等式

$$(1+x)^{l+1}=(1+x)\cdot(1+x)^l$$

において x^{r+1} の項は，左辺では ${}_{l+1}\mathrm{C}_{r+1}x^{r+1}$．右辺では

$${}_{l}\mathrm{C}_{r+1}x^{r+1}+x\cdot{}_{l}\mathrm{C}_{r}x^{r}$$

なので，$0\leqq r\leqq l-1$ に対して

$${}_{l}\mathrm{C}_{r}={}_{l+1}\mathrm{C}_{r+1}-{}_{l}\mathrm{C}_{r+1}$$

が成り立つ（この関係式は教科書範囲なので証明なしに用いてよい）．次に，

$$F_1(m)=\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}={}_{m+1}\mathrm{C}_2$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
F_2(m) &= \sum_{k=1}^{m}F_1(k)=\sum_{k=1}^{m}{}_{k+1}\mathrm{C}_2\\
&= {}_2\mathrm{C}_2+\sum_{k=2}^{m}{}_{k+1}\mathrm{C}_2=1+\sum_{k=2}^{m}\left({}_{k+2}\mathrm{C}_3-{}_{k+1}\mathrm{C}_3\right)\\
&= 1+{}_{m+2}\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_3={}_{m+2}\mathrm{C}_3
\end{aligned}$$

(2) (1) より，

$$\begin{aligned}
F_3(m) &= \sum_{k=1}^{m}F_2(k)=\sum_{k=1}^{m}{}_{k+2}\mathrm{C}_3\\
&= {}_3\mathrm{C}_3+\sum_{k=2}^{m}{}_{k+2}\mathrm{C}_3=1+\sum_{k=2}^{m}\left({}_{k+3}\mathrm{C}_4-{}_{k+2}\mathrm{C}_4\right)\\
&= 1+{}_{m+3}\mathrm{C}_4-{}_4\mathrm{C}_4={}_{m+3}\mathrm{C}_4
\end{aligned}$$

(3) すべての自然数 m と n に対して

$$F_n(m)={}_{m+n}\mathrm{C}_{n+1}$$

が成り立つことを，n に関する数学的帰納法で示す．$n=1$ では成り立っている．n のときの成立を仮定する．

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(m) &= \sum_{k=1}^{m}F_n(k)=\sum_{k=1}^{m}{}_{k+n}\mathrm{C}_{n+1}\\
&= {}_{k+1}\mathrm{C}_{n+1}+\sum_{k=2}^{m}\left({}_{k+n+1}\mathrm{C}_{n+2}-{}_{k+n}\mathrm{C}_{n+2}\right)\\
&= 1+{}_{m+n+1}\mathrm{C}_{n+2}-{}_{2+n}\mathrm{C}_{n+2}={}_{m+n+1}\mathrm{C}_{n+2}
\end{aligned}$$

$n+1$ のときも成立し，すべての自然数 n で成立する．

別証明 1　(3) において，帰納法の仮定の下では，等式

$${}_{m+n+1}\mathrm{C}_{n+2}=\sum_{k=1}^{m}{}_{k+n}\mathrm{C}_{n+1}\quad\cdots①$$

が成立すること示せばよい．この等式を，次のように二項係数の意味から示す．

$m+n+1$ 個の集合から $n+2$ 個の要素を選ぶ選び方を次のように区別する．

m 個の部分集合 A を一つ定め，その要素に番号 k を打つ．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ である．

残る $n+1$ 個からなる集合に，A の $1,\ \cdots,\ k-1$ までの要素を付け加える．だたし $k=1$ のときは加えない．その $n+1+k-1=n+k$ 個の要素から $n+1$ 個選び，そこに A の k 番の要素を加える．この結果，$n+2$ 個の要素が選ばれている．この方法で選ぶとき，同じ選び方はない．

逆に，$m+n+1$ 個の集合から $n+2$ 個の要素を選ぶなら，その中にはつねに A の要素がある．その A の要素の中で最大の番号を k とする．このとき，この選び方は上の方法で作られた選び方の中にある．

別証明２　等式 ① は次のようにしても示される．

$$\sum_{k=1}^{m}(1+x)^{n+k}=(1+x)^{n+1}\cdot\frac{(1+x)^m-1}{1+x-1}$$

これより，

$$(1+x)^{n+m+1}-(1+x)^{n+1}=\sum k=1^m x(1+x)^{n+k}$$

左辺の x^{n+2} の係数は

$${}_{m+n+1}\mathrm{C}_{n+2}$$

である．右辺の x^{n+2} の項の係数は，

$$\sum_{k=1}^{m}{}_{k+n}\mathrm{C}_{n+1}$$

である．よって等式 ① が示された．

15　首都大

15.1　問題

a と b を $0\leqq a\leqq 1$，$0\leqq b<1$ を満たす定数とする．数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める．

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}\left({a_n}^2+b\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3\ \cdots)$$

$c=1-\sqrt{1-b}$ とおく．

(1)　$0\leqq a_n\leqq 1$ が成り立つことをしめせ．

(2)　$a_{n+1}-c=\dfrac{1}{2}(a_n+c)(a_n-c)$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=c$ が成り立つことを示せ．

15.1.1　解答

(1)　n についての数学的帰納法で示す．$n=1$ のときは $a_1=a$ で $0\leqq a\leqq 1$ より成立．

$0\leqq a_k\leqq 1$ とする．このとき，漸化式から

$$0\leqq a_{k+1}=\frac{1}{2}\left({a_k}^2+b\right)<\frac{1}{2}(1+1)=1$$

で成立．よって，自然数 n に対して，$0\leqq a_n\leqq 1$ が成立する．

(2)　$\sqrt{1-b}=1-c$ より，$b=1-(1-c)^2$ である．よって，

$$\begin{aligned}a_{n+1}-c &= \frac{1}{2}\left\{{a_n}^2+1-(1-c)^2\right\}-c\\ &= \frac{1}{2}\left\{{a_n}^2+1-(1-c)^2-2c\right\}=\frac{1}{2}\left({a_n}^2-c^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(a_n+c)(a_n-c)\end{aligned}$$

である．

(3)　(2) より

$$|a_{n+1}-c| = \frac{1}{2}\left|(a_n+c)(a_n-c)\right| = \frac{a_n+c}{2}\left|a_n-c\right|$$

ここで，

$$0 \leqq \frac{a_n+c}{2} \leqq \frac{1+c}{2}$$

より

$$|a_{n+1}-c| \leqq \frac{1+c}{2}\left|a_n-c\right|$$

がすべての n で成立する．よって，

$$|a_n-c| \leqq \left(\frac{1+c}{2}\right)^{n-1}|a_1-c|$$

$0 \leqq c < 1$ なので $0 \leqq \dfrac{1+c}{2} < 1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+c}{2}\right)^{n-1} = 0$ である．よって

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-c| = 0$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = c$ が成り立つことが示された．

16　福岡大

16.1　問題

(1)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{5^n}$ の和を求めよ．

(2)　$a>1$ のとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}$ の和を a を用いて表わせ．

16.1.1　解答

(1)　$0 < \dfrac{2}{5},\ \dfrac{3}{5} < 1$ より，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n}$ は収束する．よって，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{5^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n}\\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{3}{2}-\frac{2}{3} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

(2)

解法 1

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}$$

とおく．$m \geqq 1$ に対し，$n = 4m-3,\ 4m-2,\ 4m-1,\ 4m$ のとき，$\cos\dfrac{n\pi}{2}$ の値はそれぞれ $0,\ -1,\ 0,\ 1$ である．よって，

$$S_{4N} = -\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^{4m-2} + \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^{4m} = -\frac{1}{a^2}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^{4(m-1)} + \frac{1}{a^4}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^{4(m-1)}$$

となり，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{4N}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2} = \left(-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}\right)\frac{1}{1-\dfrac{1}{a^4}} = \frac{1-a^2}{a^4-1} = -\frac{1}{a^2+1}$$

$$S_{4N} = S_{4N+1} = S_{4N+2} - \frac{1}{a^{4N+2}} = S_{4N+3} - \frac{1}{a^{4N+2}}$$

なので，

$$\lim_{N\to\infty}S_{4N} = \lim_{N\to\infty}S_{4N+1} = \lim_{N\to\infty}S_{4N+2} = \lim_{N\to\infty}S_{4N+3}$$

である．よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2} = -\frac{1}{a^2+1}$$

解法 2

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2},\qquad T_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$$

とおく．

$$\begin{aligned} S_N + iT_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{i}{a}\right)^n = \frac{i}{a}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{i}{a}\right)^N}{1-\dfrac{i}{a}} \end{aligned}$$

ここで，$a > 1$ より

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{i}{a}\right|^N = 0$$

なので，

$$\lim_{N\to\infty}(S_N + iT_N) = \frac{i}{a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{i}{a}} = \frac{i}{a-i} = -\frac{1}{a^2+1} + \frac{a}{a^2+1}i$$

よって

$$\lim_{N\to\infty}S_N = -\frac{1}{a^2+1}$$

17　大分大

17.1　問題

　0 でない実数 r が $|r| < 1$ のとき，以下の問いに答えよ．ただし，自然数 n に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} nr^n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} n(n-1)r^n = 0$ である．

(1) $R_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$ と $S_n = \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1}$ を求めよ.

(2) $T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2}$ を求めよ.

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k$ を求めよ.

17.1.1 解答

(1)

$$\begin{aligned}
R_n - rR_n &= \sum_{k=0}^{n}(r^k - r^{k+1}) = 1 - r^{n+1} \\
S_n - rS_n &= \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} kr^k = 1 + \sum_{k=2}^{n} kr^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} kr^k - nr^n \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} kr^{k-1} - \sum_{k=2}^{n}(k-1)r^{k-1} - nr^n \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} r^{k-1} - nr^n = R_{n-1} - nr^n
\end{aligned}$$

$r \neq 1$ なので

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \\
S_n &= \frac{1}{1-r}\left(\frac{1 - r^n}{1 - r} - nr^n\right) = \frac{1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
T_n - rT_n &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)r^{k-2} - \sum_{k=2}^{n} k(k-1)r^{k-1} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n-1} k(k+1)r^{k-1} - \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)r^{k-1} - n(n-1)r^{n-1} \\
&= 2 + 2\sum_{k=2}^{n-1} kr^{k-1} - n(n-1)r^{n-1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} kr^{k-1} - n(n-1)r^{n-1} \\
&= 2S_{n-1} - n(n-1)r^{n-1}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{1-r}\left(2 \cdot \frac{1 - nr^{n-1} + (n-1)r^n}{(1-r)^2} - n(n-1)r^{n-1}\right) \\
&= \frac{2 - (n^2+n)r^{n-1} + 2(n^2-1)r^n - (n^2-n)r^n + 1}{(1-r)^3}
\end{aligned}$$

(3) ただし書きより

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{1-r}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{1}{(1-r)^2}\\ \lim_{n\to\infty} T_n &= \frac{2}{(1-r)^3}\end{aligned}$$

である．ここで

$$k^2=(k+2)(k+1)-3(k+1)+1$$

なので，

$$\sum_{k=0}^{N} k^2r^k=\sum_{k=0}^{N}\{(k+2)(k+1)r^k-3(k+1)r^k+r^k\}=T_{N+2}-3S_{n+1}+R_N$$

よって

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2r^k=\frac{2}{(1-r)^3}-\frac{3}{(1-r)^2}+\frac{1}{1-r}=\frac{r^2+r}{(1-r)^3}$$

S_n,T_n **の求め方 2**　 $x=\neq 1$ のとき，

$$1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

両辺を順次微分して，

$$\begin{aligned}0+1+2x+\cdots+kx^{k-1}+\cdots+nx^{n-1}&=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'\\ 0+0+2++\cdots+k(k-1)x^{k-2}+\cdots+n(n-1)x^{n-2}&=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)''\end{aligned}$$

これを計算して，$x=r$ を代入そてもよい．