2017年入試問題研究

2018 年 2 月 11 日

目 次

1　京大特色

1.1　1 番問題

r を $0 < r \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす有理数とする．xy 平面上の点列 P_1, P_2, P_3, $\cdots$ を

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} & = & (1,\ 0)\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} & = & (0,\ 1)\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}} & = & \{2\cos(\pi r)\}\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\end{array}$$

で定める．以下の条件（A）を満たすような r をすべて求めよ．

（A）　すべての自然数 n について，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right| \geqq 1$ が成立する．

1.1.1　解答

複素数平面で考え，点 P_n に対応する複素数を z_n とおく．$z_1 = 1$, $z_2 = i$ である．また複素数 α を $\alpha = \cos(\pi r) + i\sin(\pi r)$ とする．$\alpha\bar{\alpha} = 1$ で，$\alpha + \bar{\alpha} = 2\cos(\pi r)$ である．このとき漸化式は

$$z_{n+2} = (\alpha + \bar{\alpha})z_{n+1} - \alpha\bar{\alpha}z_n$$

となる．これより

$$z_{n+2} - \alpha z_{n+1} = \bar{\alpha}\left(z_{n+1} - \alpha z_n\right)$$

となり

$$z_{n+1} - \alpha z_n = \bar{\alpha}^{n-1}(z_2 - \alpha z_1) = \bar{\alpha}^{n-1}(i - \alpha)$$

となる．同様に

$$z_{n+1} - \bar{\alpha} z_n = \alpha^{n-1}(z_2 - \bar{\alpha} z_1) = \alpha^{n-1}(i - \bar{\alpha})$$

も成り立つ．辺々引いて

$$\begin{array}{rcl}(\alpha - \bar{\alpha})\,z_n & = & \alpha^{n-1}(i - \bar{\alpha}) - \bar{\alpha}^{n-1}(i - \alpha)\\ & = & \left(\alpha^{n-1} - \bar{\alpha}^{n-1}\right)i - \left(\alpha^{n-2} - \bar{\alpha}^{n-2}\right)\end{array}$$

よって

$$2i\sin(\pi r)z_n = 2i\sin((n-1)\pi r)i - 2i\sin((n-2)\pi r)$$

より

$$z_n = \frac{\sin((n-1)\pi r)i - \sin((n-2)\pi r)}{\sin(\pi r)}$$

したがって条件 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right| \geqq 1$ は，$|z_n|^2 \geqq 1$，つまり

$$\sin^2((n-1)\pi r) + \sin^2((n-2)\pi r) \geqq \sin^2(\pi r)$$

となる．これより

$$1 - \cos((2n-2)\pi r) + 1 - \cos((2n-4)\pi r) \geqq 1 - \cos(2\pi r)$$

となる．

$$\cos((2n-2)\pi r)+\cos((2n-4)\pi r)=2\cos((2n-3)\pi r)\cos(\pi r)$$

なので，

$$1-2\cos(2n-3)\pi r\cos\pi r \geqq -\cos(2\pi r)=1-2\cos^2\pi r$$

つまり

$$\cos((2n-3)\pi r)\cos(\pi r)\leqq\cos^2(\pi r)$$

である．$r=\dfrac{1}{2}$ なら両辺 0 ですべての n で成立する．

$0<r<\dfrac{1}{2}$ のとき $1>\cos\pi r>0$ なので，

$$\cos((2n-3)\pi r)\leqq\cos(\pi r)$$

となる．

$$\cos(\pi r)-\cos((2n-3)\pi r)=2\sin((n-1)\pi r)\sin((n-2)\pi r)$$

なので，

$$\sin((n-1)\pi r)\sin((n-2)\pi r)\geqq 0$$

がすべての n で成立することが条件である．

$r=\dfrac{q}{p}$ とおく．$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ より $2\leqq\dfrac{p}{q}$ である．

$q\geqq 2$ のとき．p を q で割った商を Q，余りを R とする．p と q は互いに素なので，

$$\frac{p}{q}=Q+\frac{R}{q},\ 1\leqq R\leqq q-1$$

である．この結果，

$$Q<\frac{p}{q}<Q+1$$

なので，

$$\frac{qQ}{p}<1<\frac{q(Q+1)}{p}$$

となり，$n-2=Q$ となる n をとると，

$$(n-2)\pi r<\pi<(n-1)\pi r$$

となる．よって，このときは

$$\sin((n-1)\pi r)\sin((n-2)\pi r)<0$$

となり，条件を満たさない n が存在する．

$q=1$ のとき．

$$(n-2)r=\frac{n-2}{p}<\text{整数}=l<(n-1)r=\frac{n-1}{p}$$

となる n は存在しない．もし存在すれば，

$$n-2<pl<n-1$$

となり，矛盾である．よってこの場合は，すべての n に対して条件が成立する．

条件を満たす r は

$$r=\frac{1}{p},\quad (p\geqq 2\text{ の整数})$$

である．

1.2　2番問題

n を自然数とする．実数 a_n を

$$a_n = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

で定める．

以下の設問に答えよ．

(1) a_1 と a_2 を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対し，a_n は正の有理数であることを示せ．さらに，a_n を互いに素な自然数 b_n と c_n を用いて $a_n = \dfrac{c_n}{b_n}$ と表すとき，b_n は奇数であることを示せ．

1.2.1　解答

(1)

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

なので，

$$a_1 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} = 3-2 = 1$$

である．同様に

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{x^2+1}\right)' x^{2n}\,dx \\ &= \left[\sqrt{x^2+1}x^{2n}\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} - \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2+1}(2n)x^{2n-1}\,dx \\ &= 3\cdot 8^n - 2\cdot 3^n - 2n\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}x^{2n-1}\,dx \\ &= 3\cdot 8^n - 2\cdot 3^n - 2n(a_{n+1}+a_n) \end{aligned}$$

よって漸化式

$$(2n+1)a_{n+1} = 3\cdot 8^n - 2\cdot 3^n - 2na_n \quad \cdots ①$$

が成り立つ．これから

$$3a_2 = 3\cdot 8 - 2\cdot 3 - 2a_1$$

となり $a_2 = \dfrac{16}{3}$ である．

(2)　区間 $[\sqrt{3},\ 2\sqrt{2}]$ で $\dfrac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ なので，$a_n > 0$ である．

a_n が有理数とすれば，漸化式 ① から a_{n+1} も有理数である．$a_1 = 1$ なので，数学的帰納法からすべての n に対して a_n は有理数である．

あわせて，すべての自然数 n に対し，a_n は正の有理数であることが示された．

次に $b_1 = 1$ である．b_n が奇数であるとする．このとき，

$$a_{n+1} = \frac{(3\cdot 8^n - 2\cdot 3^n)b_n - 2nc_n}{(2n+1)b_n}$$

となり，右辺の分子と分母をその最大公約数で約しても，やはり分母は奇数のままである．よって b_{n+1} も奇数となり，数学的帰納法からすべての n に対して b_n は奇数である．

1.3　3 番問題

A，B のの 2 人が次のゲームを行う．初期状態として，台の上に n 個の石が置いてある．最初に A，次に B の順で交互に，台から 1 個以上の石を取り除いていく．ただし一度に取り除くく個数は自然数の 2 乗でなければならない．台の上に石がない状態にした方を勝者として，そこでゲームを終了する．

このゲームが先手必勝であるとは，A が自分の番で取り除く石の個数を適切に選択していけば，B がいかなる選択を行っても，必ず A が勝利できることとする．同様に，このゲームが後手必勝であるとは，B が自分の番で適切に選択を行っていけば，A がいかなる選択を行っても必ず B が勝利できることとする．

例えば，$n = 10$ のとき，最初に A が取り除ける石の個数は 1，4，9 のいずれかである．

- A が 1 個取り除くならば，残りの石の個数は 9 となる．この状態において B が取り除ける石の個数は 1，4，9 のいずれかである．B が 9 個取り除くという選択を行うと B が勝利する．
- A が 9 個取り除くならば，残りの石の個数は 1 となる．次にBが 1 個取り除いて B が勝利する．
- A が 4 個取り除くならば，残りの石の個数は 6 となる．この状態において B が取り除ける石の個数は l，4 のいずれかである．B が 4 個取り除くという選択を行うと，残りの石の個数は 2 となる．この状態において A が取り除ける石の個数は 1 のみであり，その次に B が 1 個取り除いて B が勝利する．

したがって，B が自分の番で取り除く石の個数を適切に選択していけば，必ず B が勝利できるので，$n = 10$ のときのゲームは後手必勝である．

以下の設問に答えよ．

(1) どの自然数 n に対しても，このゲームは先手必勝または後手必勝のいずれか一方であることを示せ.

(2) $n = 456$ のとき，このゲームは先手必勝であることを示せ.

(3) このゲームが後手必勝となる n は無限に多く存在することを示せ．

1.3.1　解答

(1)　命題

どの自然数 n に対しても，このゲームは先手必勝または後手必勝のいずれか一方である．

を n についての数学的帰納法で示す．$n = 1$ のときは先手必勝で確定する．

n より小さい自然数に対して成立するとする．

n のときを考える．

n 以下の平方数は有限個なので，n からそれら平方数を引いた数も有限個である．

それらの数に対しては，帰納法の仮定から，先手必勝または後手必勝のいずれかが確定する．その中に，後手必勝の数があれば，n のときはそれに対応する平方数を除くことで，先手必勝となる．その中に，後手必勝の数が存在しなければ，後手必勝となる．n のときも先手必勝または後手必勝が確定し，命題が成立する．

よってすべての自然数 n に対して命題が成立する．

(2)　$n=456$ のとき．先手は，456 に含まれる最大の平方数 $21^2=441$ をとる．$n-441=15$ である．15 は後手必勝であることが示されれば，456 は先手必勝である．

15 のとき，先手は 1，4，9 をとることができる．その結果，14，11，6 となる．後手はここで 5，2，2 とすることができる．ここから後手必勝はすでに示されている．

よって，15 は後手必勝であることが示され，その結果 $n=456$ は先手必勝であることが示された．

(3)　背理法で示す．後手必勝となる n が有限個であるとし，その最大値を N とする．$N+1$ 以上の n に対してはすべて先手必勝である．

$n=(N+1)^2-1$ を考える．ここに含まれる最大の平方数は N^2 でこれを除くと $2N$ となり，$2N>N+1$ である．よってこの n からいかなる平方数を取り除いても N より大きい．

ところがこれはすべて，ここからはじめて先手必勝となるので，$n=(N+1)^2-1$ は後手必勝である．

$n=N$ が後手必勝の最大値であるという仮定と矛盾した．

よって，後手必勝となる n は無限個ある．

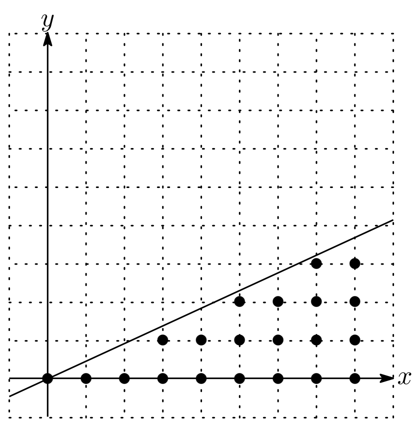
1.4　4 番問題

xy 平面上の格子点とは，その点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことをいう．n を 2 以上の整数とする．xy 平面上で不等式

$$0 \leqq x \leqq n-1, \quad 0 \leqq y, \quad \sqrt{5}y \leqq x$$

で表される領域を D_n とする．D_n に属する格子点の個数を S_n とおく．

例えば，$n=5$ のとき，D_5 に属する格子点は (0, 0)，(1, 0)，(2, 0)，(3, 0)，(4, 0)，(3, 1)，(4, 1) の 7 個であるから，$S_5=7$ となる．また $n=9$ のときは，以下のように領域 D_9 に属する格子点は全部で 21 個存在するから，$S_9=21$ である．



以下の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\sqrt{5}}{10}$ を示せ．

(2) 以下の条件（H）を満たすような実数 C は存在しないことを示せ．

$$\text{（H）}\quad \text{すべての自然数 } n \text{ について，} \left| S_n - \frac{\sqrt{5}n^2}{10} \right| < C \text{ が成立する．}$$

1.4.1　解答

(1)　実数 x に対して $[x]$ で x を超えない最大の整数を表す．つまり $[x] \leqq x < [x]+1$ となる整数を表す．したがって

$$x-1 < [x] \leqq x$$

が成り立つ．

領域 D_n に属し，かつ直線 $x=k$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ 上にある格子点の個数は，

$$\left[\frac{k}{\sqrt{5}}\right]+1$$

である．したがって

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\left[\frac{k}{\sqrt{5}}\right]+1\right)$$

となる．これから

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\sqrt{5}} < S_n \leqq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{\sqrt{5}}+1\right)$$

が成り立つ．これを計算して

$$\frac{n(n-1)\sqrt{5}}{10} < S_n \leqq \frac{n(n-1)\sqrt{5}}{10}+n$$

よって

$$\frac{n(n-1)\sqrt{5}}{10n^2} < \frac{S_n}{n^2} \leqq \frac{n(n-1)\sqrt{5}}{10n^2}+\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2}=1$ なので，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

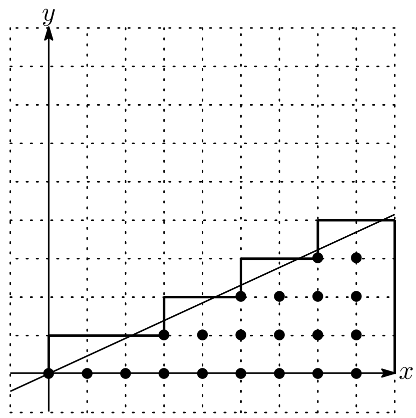
である．

(2)　D_n 内の格子点に対して，その点を左下の頂点にもつ 1 辺 1 の正方形を対応させると，S_n の値は，対応する正方形の面積の和になる．S_9 は図の太線で囲まれた図形の面積である．

これに対して $\dfrac{\sqrt{5}n^2}{10}$ は

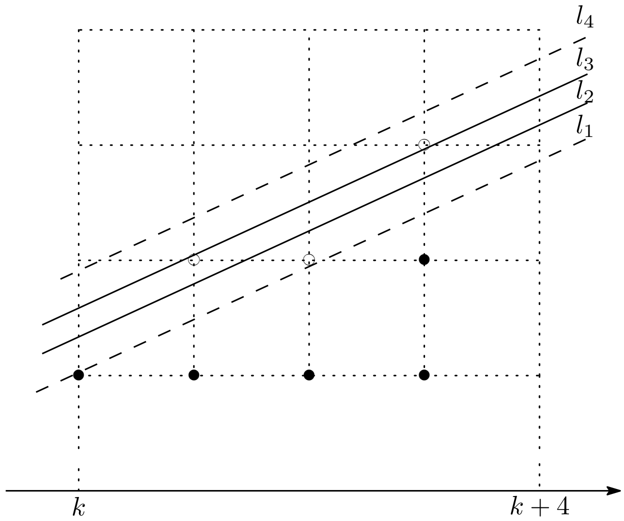
$$0 \leqq x \leqq n, \quad 0 \leqq y, \quad \sqrt{5}y \leqq x$$

で定まる領域，つまり D_{n+1} の面積である．



したがって，S_n は D_{n+1} の面積から，対応する正方形の D_{n+1} の外にある部分の面積を加え，内にある面積を減じた値である．

図のように x 座標が k から $k+4$ までの間を考える．直線 $l:\sqrt{5}y=x$ が，そこに含まれる格子点の状態で分けると，l_1 から l_4 のいずれかである．それぞれの直線が，x 座標が k で，4 つの状態のすべてに含まれる左下の格子点から，y 軸方向に s 平行移動しているとする．



直線 l は $\sqrt{5}$ が無理数であることより，原点以外の格子点は通らない．それを考え，s の範囲を確定し，この区間内で，該当正方形から直線で囲まれる領域の面積を引いた値を A とする．これは該当する正方形の個数から，対応する台形の面積

$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{5}}\times 4+4s=\frac{8}{\sqrt{5}}+4s$$

を引けばよい．

直線の状態	格子点の状態	s の範囲	A	A の下の範囲
l_1	$0 < s,\ s+\dfrac{2}{\sqrt{5}} < 1$	$0 < s < 1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	$5-\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}+4s\right)$	$1 < A$
l_2	$s+\dfrac{1}{\sqrt{5}} < 1,\ 2 < s+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	$1-\dfrac{2}{\sqrt{5}} < s < 1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	$6-\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}+4s\right)$	$2-\dfrac{4}{\sqrt{5}} < A$
l_3	$1 < s+\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ s+\dfrac{3}{\sqrt{5}} < 2$	$1-\dfrac{1}{\sqrt{5}} < s < 1-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$	$7-\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}+4s\right)$	$3+\dfrac{4}{\sqrt{5}} < A$
l_4	$2 < s+\dfrac{3}{\sqrt{5}},\ s < 1$	$1-\dfrac{3}{\sqrt{5}} < s < 1$	$8-\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}+4s\right)$	$4-\dfrac{8}{\sqrt{5}} < A$

となる．したがっていずれの場合でも

$$A > 2-\frac{4}{\sqrt{5}} = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) > 0$$

である．$k=0$ でもこれが成り立つので，

$$S_{4n}-\frac{\sqrt{5}(4n)^2}{10} > 4n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{4n}-\frac{\sqrt{5}(4n)^2}{10}\right) = +\infty$$

となり，条件を満たす定数 C は存在しない．

1.5　4 番一般化問題

xy 平面上の格子点とは，その点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことをいう．n を 2 以上の整数とする．α を正の実数の定数とし，xy 平面上で不等式

$$0 \leqq x \leqq n-1, \quad 0 \leqq y, \quad y \leqq \alpha x$$

で表される領域を D_n とする．D_n に属する格子点の個数を S_n とおく．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} = \frac{\alpha}{2}$ を示せ．

(2) 以下の条件（H）を満たすような実数 C が存在するための α の条件を求めよ．

（H）　すべての自然数 n について，$\left|S_n-\dfrac{n^2\alpha}{2}\right| < C$ が成立する．

1.5.1　解答

解答の準備として，1 つの命題と 1 つの入試問題を証明する．

まず，実数 x に対して $[x]$ で x を超えない最大の整数を表す．つまり $[x] \leqq x < [x]+1$ となる整数を表す．したがって

$$x-1 < [x] \leqq x$$

が成り立つ．また，

$$\{x\} = x-[x]$$

とおく．$0 \leqq \{x\} < 1$ であり，x の小数部分を意味する．

命題　x を実数，m を正整数，n を整数とする．m, n の最大公約数を d とすると，等式

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{kn+x}{m}\right]=\frac{(m-1)(n-1)}{2}+\frac{d-1}{2}+d\left[\frac{x}{d}\right]\quad\cdots①$$

が成り立つ．

証明　$m=dm'$，$n=dn'$ とおく．

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{kn+x}{m}\right] &= \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\left(\frac{kn+x}{m}\right)-\left\{\frac{kn+x}{m}\right\}\right\}\\ &= \frac{(m-1)n}{2}+x-\sum_{k=0}^{dm'-1}\left\{\frac{kn'+\dfrac{x}{d}}{m'}\right\}\end{aligned}$$

である．

一般に整数 p と q が互いに素なとき，整数 $a,\ b$ に対して，

$$\text{条件：}\ a\equiv b \pmod{p}\quad,\quad \text{条件：}\ qa\equiv qb \pmod{p}$$

は同値である．

m' と n' が互いに素なので，k が 0 から $dm'-1$ まで dm' 個の整数を動くとき，kn' を m' で割った余りを，順に m' 個ずつとって一つの集合とし，あわせて d 個の集合を作ると，いずれもが相異なる m' 個よりなる m' で割った余りの集合となる．よってそれはつねに集合

$$\{0,1,\cdots,m'-1\}$$

と一致する．kn' を m' で割った商が q，余りが r で $kn'=m'q+r$ のとき，

$$\left\{\frac{kn'+\dfrac{x}{d}}{m'}\right\}=\left\{\frac{m'q+r+\dfrac{x}{d}}{m'}\right\}=\left\{\frac{r+\dfrac{x}{d}}{m'}\right\}$$

なので，

$$\sum_{k=0}^{dm'-1}\left\{\frac{kn'+\dfrac{x}{d}}{m'}\right\}=d\sum_{j=0}^{m'-1}\left\{\frac{j+\dfrac{x}{d}}{m'}\right\}$$

である．さらに，$\gamma=\left\{\dfrac{x}{d}\right\}$ とし，

$$\frac{x}{d}=m's+l+\gamma$$

とおく．ここに s と l は整数で $0\leqq l\leqq m'-1$ とする．すると，

$$\left\{\frac{j+\dfrac{x}{d}}{m'}\right\}=\left\{\frac{j+l+\gamma}{m'}\right\}$$

であるが，$j=0,1,\cdots,m'-1$ について分子 $j+l+\gamma$ が m' より小さいか大きいかを調べ，上段に m' より小さいもの，下段に m' 以上のものに対する $\dfrac{j+l+\gamma}{m'}$ を書くと，

$$\begin{array}{l}\dfrac{l+\gamma}{m'},\ \dfrac{l+1+\gamma}{m'},\cdots,\ \dfrac{m'-1+\gamma}{m'}\\ \dfrac{m'+\gamma}{m'},\ \dfrac{m'+1+\gamma}{m'},\cdots,\ \dfrac{m'-1+l+\gamma}{m'}\end{array}$$

となる．よって，その小数部分は

$$\frac{l+\gamma}{m'},\ \frac{l+1+\gamma}{m'},\cdots,\ \frac{m'-1+\gamma}{m'},\ \frac{\gamma}{m'},\ \frac{1+\gamma}{m'},\cdots,\ \frac{l-1+\gamma}{m'}$$

つまり

$$\frac{\gamma}{m'},\ \frac{1+\gamma}{m'},\cdots,\ \frac{l-1+\gamma}{m'},\ \frac{l+\gamma}{m'},\ \frac{l+1+\gamma}{m'},\cdots,\ \frac{m'-1+\gamma}{m'}$$

である．この結果，

$$\sum_{j=0}^{m'-1}\left\{\frac{j+\dfrac{x}{d}}{m'}\right\}=\frac{(m'-1+2\gamma)m'}{2m'}=\frac{m'-1+2\gamma}{2}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{kn+x}{m}\right] &= \frac{(m-1)n}{2}+x-d\cdot\frac{m'-1+2\gamma}{2}\\ &= \frac{(m-1)n}{2}+d\cdot\frac{x}{d}-\frac{m-1+1-d}{2}-d\gamma\\ &= \frac{(m-1)(n-1)}{2}+\frac{d-1}{2}+d\cdot\left(\frac{x}{d}-\gamma\right)\\ &= \frac{(m-1)(n-1)}{2}+\frac{d-1}{2}+d\left[\frac{x}{d}\right]\end{aligned}$$

である．

2000 年上智大学後期　a を正の無理数とする．$a_0=a$ とおく．a_0 に対して，a_0 を超えない最大の整数を k_0 とおき，

$$a_0=k_0+\frac{1}{a_1}$$

によって a_1 を決める．このようにして a_n まで決めたとき，この a_n に対して，a_n を超えない最大の整数を k_n とおき，

$$a_n=k_n+\frac{1}{a_{n+1}}$$

によって a_{n+1} を決める．

また， 数列 $\{P_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots,)$，$\{Q_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots,)$ を次の漸化式で定義する．

$$\begin{array}{l}P_0=1,\ P_1=k_0,\ P_{n+1}=P_{n-1}+k_nP_n\ (n=1,2,\cdots)\\ Q_0=0,\ Q_1=1,\ Q_{n+1}=Q_{n-1}+k_nQ_n\ (n=1,2,\cdots)\end{array}$$

このとき次のことが成り立つことを示せ．

(1) $P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^n$ $(n=1,2,\cdots)$

(2) $n\geqq 1$ のとき，P_n と Q_n の最大公約数は 1 である．

(3) $a=\dfrac{P_{n-1}+P_na_n}{Q_{n-1}+Q_na_n}$ $(n=1,2,\cdots)$

(4) $\left|a-\dfrac{P_n}{Q_n}\right|<\dfrac{1}{Q_n^2}$ $(n=1,2,\cdots)$

解答

(1) 条件から

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1} &= (P_{n-1}+k_nP_n)Q_n-p_n(Q_{n-1}+k_nQ_n)\\
&= -(P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n)\\
\therefore \quad & P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^{n-1}(P_1Q_0-P_0Q_1)=(-1)^n
\end{aligned}
$$

(2) P_n と Q_n の最大公約数を d とし $P_n=dP'_n,\ Q_n=dQ'_n$ とする．

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=d(P'_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q'_n)=(-1)^n$$

$$\therefore \quad d=1$$

つまり $n\geqq 1$ のとき，P_n と Q_n の最大公約数は 1 である．

(3)

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{n-1}+P_na_n}{Q_{n-1}+Q_na_n} &= \frac{P_{n-1}+P_n\left(k_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)}{Q_{n-1}+Q_n\left(k_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)}\\
&= \frac{P_{n+1}+\dfrac{P_n}{a_{n+1}}}{Q_{n+1}+\dfrac{Q_n}{a_{n+1}}}=\frac{P_n+P_{n+1}a_{n+1}}{Q_n+Q_{n+1}a_{n+1}}\\
\therefore \quad & \frac{P_{n-1}+P_na_n}{Q_{n-1}+Q_na_n}=\frac{P_0+P_1a_1}{Q_0+Q_1a_1}=\frac{1+k_0a_1}{a_1}=k_0+\frac{1}{a_1}=a_0=a
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
a-\frac{P_n}{Q_n} &= \frac{P_{n-1}+P_na_n}{Q_{n-1}+Q_na_n}-\frac{P_n}{Q_n}\\
&= \frac{(P_{n-1}+P_na_n)Q_n-P_n(Q_{n-1}+Q_na_n)}{(Q_{n-1}+Q_na_n)Q_n}\\
&= \frac{(P_{n-1}Q_n-P_nQ_{n-1}}{(Q_{n-1}+Q_na_n)Q_n}=\frac{-(-1)^n}{(Q_{n-1}+Q_na_n)Q_n}\\
\therefore \quad & \left|a-\frac{P_n}{Q_n}\right|=\frac{1}{|(Q_{n-1}+Q_na_n)Q_n|}
\end{aligned}
$$

ここで $0<a_{n-1}-k_{n-1}=\dfrac{1}{a_n}<1$ から $a_n>1$ である．定め方から $Q_n>0$ $(n\geqq 1)$ なので

$$|(Q_{n-1}+Q_na_n)Q_n| = (Q_{n-1}+Q_na_n)Q_n \geqq a_nQ_n^2>Q_n^2$$

$$\therefore \quad \left|a-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{Q_n^2}$$

注意：　P_n，Q_n は単調に増加する．よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=a$$

である．さらに詳しくは,『数論初歩』「二次行列と実数の連分数展開」を参照のこと．

一般化問題の解答　(1)　領域 D_n に属し，かつ直線 $x=k\ (0\leqq k\leqq n-1)$ 上にある格子点の個数は,

$$[k\alpha]+1$$

である．したがって

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}([k\alpha]+1)$$

となる．これから

$$\sum_{k=0}^{n-1}k\alpha<S_n\leqq\sum_{k=0}^{n-1}(k\alpha+1)$$

が成り立つ．これを計算して

$$\frac{n(n-1)\alpha}{2}<S_n\leqq\frac{n(n-1)\alpha}{2}+n$$

よって

$$\frac{n(n-1)\alpha}{2n^2}<\frac{S_n}{n^2}\leqq\frac{n(n-1)\alpha}{2n^2}+\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2}=1$ なので，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\alpha}{2}$$

である．

(2) (i)　α が有理数のとき．$\alpha=\dfrac{p}{q}$ (p, q 互いに素) とおく．l を自然数として和 S_{ql} を考える．等式 ① を $m=ql$，$n=pl$，$d=l$，$x=0$ で用いて

$$\begin{aligned}S_{ql}&=\sum_{k=0}^{ql-1}([k\alpha]+1)=\sum_{k=0}^{ql-1}\left(\left[\frac{kp}{q}\right]+1\right)\\&=\sum_{k=0}^{ql-1}\left(\left[\frac{kpl}{ql}\right]+1\right)=\frac{(pl-1)(ql-1)}{2}+\frac{l-1}{2}+ql\\&=\frac{\alpha}{2}(ql)^2+\frac{(q-p+1)l}{2}\end{aligned}$$

したがって

$$S_{ql}-\frac{\alpha}{2}(ql)^2=\frac{(q-p+1)l}{2}$$

となるので，$q-p+1\neq0$ のとき

$$\lim_{l\to\infty}\left|S_{ql}-\frac{\alpha}{2}(ql)^2\right|=\infty$$

となる．つまりこのとき条件（H）が成立する C は存在しない．
$q-p+1=0$ のとき．
自然数 n に対して

$$S_{n+q}-\frac{\alpha}{2}(n+q)^2=S_n-\frac{\alpha}{2}(n)^2+\sum_{k=0}^{q-1}\left(\left[\frac{p(n+k)}{q}\right]+1\right)-\frac{p}{2q}(2nq+q^2)$$

であるが，等式 ① を $m=q$，$n=p$，$x=pn$，$d=1$ で用いて

$$\sum_{k=0}^{q-1}\left(\left[\frac{p(n+k)}{q}\right]+1\right)-\frac{p}{2q}(2nq+q^2)=\sum_{k=0}^{q-1}\left(\left[\frac{kp+pn}{q}\right]+1\right)-\frac{p}{2}(2n+q)$$
$$=\quad\frac{(p-1)(q-1)}{2}+[pn]+q-\frac{p}{2}(2n+q)=\frac{q-p+1}{2}=0$$

したがって，$S_n-\dfrac{\alpha}{2}(n)^2$ は n に関して周期 q で同じ値を繰り返す．よって，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ q-1$ に対して，

$$\left|S_n-\frac{\alpha}{2}(n)^2\right|<C$$

となる正の定数 C をとれば，これは条件（H）を満たす．
(ii)　α が無理数のとき．上記入試問題の a として α をとると，その (4) より，α に収束する有理数列 $\left\{\dfrac{P_m}{Q_m}\right\}$ で

$$\left|\alpha-\frac{P_m}{Q_m}\right|<\frac{1}{Q_m^2}$$

を満たすがもの存在する．$\epsilon_m=\alpha-\dfrac{P_m}{Q_m}$ とおく．

$$k\alpha=k\left(\frac{P_m}{Q_m}+\epsilon_m\right)=\left[\frac{kP_m}{Q_m}\right]+\left\{\frac{kP_m}{Q_m}\right\}+k\epsilon_m$$

であるが，$1\leqq k\leqq Q_m-1$ の k に対し，

$$\frac{1}{Q_m}\leqq\left\{\frac{kP_m}{Q_m}\right\}\leqq\frac{Q_m-1}{Q_m},\ |k\epsilon_m|<\frac{k}{Q_m^2}<\frac{1}{Q_m}$$

であるから，

$$0<\left\{\frac{kP_m}{Q_m}\right\}+k\epsilon_m<1$$

よって

$$[k\alpha]=\left[\frac{kP_m}{Q_m}\right]$$

である．ここで，

$$S_{Q_m}=\sum_{k=0}^{Q_m-1}([k\alpha]+1)$$

を考える．等式 ① を $m=Q_m$，$n=P_m$，$d=1$，$x=0$ で用いて

$$S_{Q_m}=\sum_{k=0}^{Q_m-1}\left(\left[\frac{kP_m}{Q_m}\right]+1\right)=\frac{(P_m-1)(Q_m-1)}{2}+Q_m$$

である．一方，

$$\frac{{Q_m}^2\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(P_mQ_m + \epsilon_m{Q_m}^2\right)$$

となるので，

$$\begin{aligned} S_{Q_m} - \frac{{Q_m}^2\alpha}{2} &= \frac{(P_m-1)(Q_m-1)}{2} + Q_m - \frac{1}{2}\left(P_mQ_m + \epsilon_m{Q_m}^2\right) \\ &= \frac{Q_m - P_m}{2} + \frac{1-\epsilon_m{Q_m}^2}{2} \end{aligned}$$

である．ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{P_m}{Q_m}\right) = 1-\alpha$$

と有限確定なので

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{Q_m-P_m}{2}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{Q_m}{2}\left(1-\frac{P_m}{Q_m}\right)\right| = +\infty$$

である．さらに $\left|\epsilon_m{Q_m}^2\right| < 1$ より

$$0 < \frac{1-\epsilon_m{Q_m}^2}{2} < 1$$

である．よって

$$\lim_{m\to\infty}\left|S_{Q_m} - \frac{{Q_m}^2\alpha}{2}\right| = \infty$$

となるので，条件（H）が成立する C は存在しない．

以上から条件（H）が成立する C が存在する α の条件は，α が正整数 q を用いて $\alpha = \dfrac{q+1}{q} = 1+\dfrac{1}{q}$ と表されることである．

2　京大特色総人理系

2.1　1 番問題

n を正の整数とする．表に○か×が描かれた n 枚のカードが裏を上にして横一列に置かれており，カードには左端から順に $1, 2, \cdots, n$ と番号が振られている．0 以上 n 以下のある整数 m に対し，左から m 枚が○であり残りが×であることは分かっているが，m の値は分かっていないとする．例えば $m = 0$ なら全てのカードは×である．×が高々 2 回現れるまでカードを 1 枚ずつ裏返すことにより m の値を知る方法を考える．

$n = 3$ のときには,「最初に番号 2 のカードを裏返し，それが○なら次に番号 3 のカードを，×なら番号 1 のカードを裏返すという方法により，どのような場合でも確実に m の値を知ることができる．このような，それまでに裏返したカードから得られた情報に基づいて次に裏返すカードを決めるような裏返す順番の決め方で，×が高々 2 回現れるまで裏返すことにより，どのような場今でも確実に m の値を知ることができるものを，大きさ n の問題を解く手順と呼ぶことにする．上記の手順を図 1 のように表すことにする．また，図 2 は大きさ 3 の問題を解く手順の別の例である．

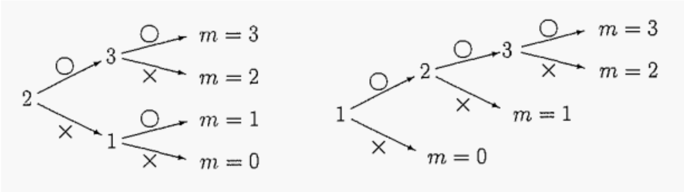


図 1　　図 2

それぞれの手順において，裏返す必要のある回数の最大値をその手順の効率と呼ぶことにする，図 1 の手順の効率は 2 であり，図 2 の手順の効率は 3 である．大きさ n の問題を解く手順の効率の最小値を $P(n)$ とおく．

問 1　$P(n+1) \leqq P(n)+1$ であることを示せ．

問 2　$n < n'$ ならば $P(n) \leqq P(n')$ であることを示せ．

問 3　n を大きくすると，$P(n)$ はいくらでも大きな値をとることを示せ．

問 1〜問 3 と $P(1)=1$ より，1 以上の整数 p に対し，$P(n)=p$ となる整数 n のうち最大のものが存在することがわかる．このような n を $N(p)$ とおく．

問 4　$N(1)$ および $N(2)$ を求めよ．

問 5　$p \geqq 2$ のとき，$N(p)$ を p と $N(p-1)$ で表せ．

問 6　大きさ 10 の問題を解く手順のうち，効率が $P(10)$ であるものの例を 1 つ，図で表せ．

2.2　2 番問題

双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の $x>0$ の部分を C，$P(X,\ Y)$ を第 1 象限の点とする．点 P から C へ接線が 2 本引けて，それらの接点を $Q\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$，$R\left(\beta,\ \dfrac{1}{\beta}\right)$ $(0<\alpha<\beta)$ とすると $\angle QPR=\dfrac{3}{4}\pi$ となるという．このような点 P 全体の軌跡を γ とする．

問 1　軌跡 γ の方程式を求めよ．

問 2　軌跡 γ，x 軸の $x \geqq 0$ なる部分，y 軸の $y \geqq 0$ なる部分の 3 つで囲まれる図形の面積を S とすると

$$4(\sqrt{2}-1) < S < 2$$

が成り立つことを示せ．

2.2.1　解答

問 1　$y=\dfrac{1}{x}$ のとき，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ なので，点 $Q\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$ での接線は

$$y=-\frac{1}{\alpha^2}(x-\alpha)+\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha^2}x+\frac{2}{\alpha}$$

である．点 R についても同様で，それぞれ点 P を通るので，

$$Y=-\frac{1}{\alpha^2}X+\frac{2}{\alpha}$$
$$Y=-\frac{1}{\beta^2}X+\frac{2}{\beta}$$

が成り立つ．これより

$$Y=\frac{2}{\beta+\alpha},\ X=\frac{2\alpha\beta}{\beta+\alpha}$$

つまり，

$$\alpha+\beta=\frac{2}{Y},\ \alpha\beta=\frac{X}{Y}$$

である．$\tan\theta_1=-\frac{1}{\alpha^2}$，$\tan\theta_2=-\frac{1}{\beta^2}$ とおくと，$0<\alpha<\beta$ より $\theta_1>\theta_2$ で，$\angle QPR=\frac{3}{4}\pi$ より，

$$\tan\frac{3}{4}\pi=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}{1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}}$$

より

$$(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=\alpha^2\beta^2+1 \quad \cdots ①$$

ここで

$$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=\frac{4}{Y^2}-\frac{4X}{Y}=\frac{4(1-XY)}{Y^2}$$

より，$0<\alpha<\beta$ とあわせて

$$\beta-\alpha=\frac{2}{Y}\sqrt{1-XY}$$

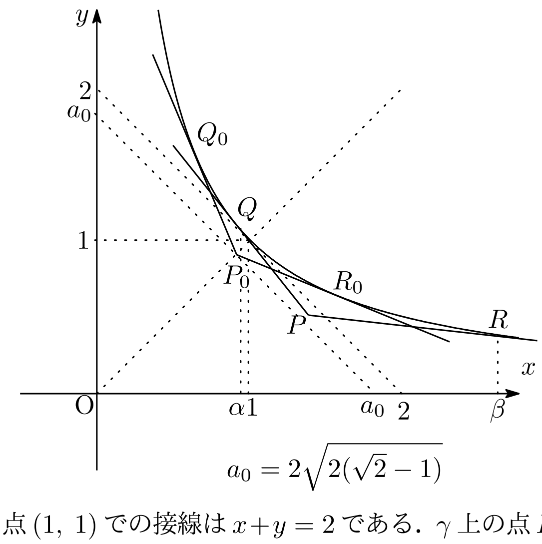
なので，① から，

$$\frac{4}{Y^2}\sqrt{1-XY}=\frac{X^2}{Y^2}+1$$

である．つまり

$$4\sqrt{1-XY}=X^2+Y^2 \quad \cdots ②$$

これが軌跡 γ の方程式である．



$$a_0=2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$$

問2　図のように C 上の点 $(1,\ 1)$ での接線は $x+y=2$ である．γ 上の点 $P(X,\ Y)$ は $x+y<2$ で定まる領域内にある．なぜなら，接線の傾きは $-1=\tan\frac{3}{4}\pi$ であるから，点 P が領域 $x+y\geqq 2$ にあれば，直線 PQ の傾きは -1 より大きい負の値をとり，直線 PR の傾きも負となるので，$\angle QPR>\frac{3}{4}\pi$ となるからである．

次に，γ 上の点 $P(X,\ Y)$ で $X=Y$ であるものを P_0 とする．② より，

$$4\sqrt{1-X^2}=2X^2$$

$X>0$ でこれを解いて $X=Y=\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ となる．P_0 を通る傾き -1 の直線は $x+y=2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ である．

次に，軌跡 γ は不等式 $x+y \geqq 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ で定まる領域内にあることを示す．

そのために，軌跡 γ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転する．γ 上の点 $(X,\ Y)$ がこの回転で $(s,\ t)$ に移るとする．$(s,\ t)$ を $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点が $(X,\ Y)$ なので，これを複素数平面で考えて，

$$X+iY=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(s+it)=\frac{1-i}{\sqrt{2}}(s+it)$$

である．これから，$X=\dfrac{s+t}{\sqrt{2}}$，$Y=\dfrac{-s+t}{\sqrt{2}}$ である．これを γ の方程式 ② に代入して，

$$4\left(1-\frac{t^2-s^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=s^2+t^2$$

これから

$$2\sqrt{2}\left(2-t^2+s^2\right)^{\frac{1}{2}}=s^2+t^2$$

この t を s の関数と見て，s に対する t の増減を調べる．そのために両辺を s で微分する．$\dfrac{dt}{ds}=t'$ と表す．

$$\sqrt{2}\left(2-t^2+s^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2tt'+2s)=2s+2tt'$$

これより，

$$tt'=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-t^2+s^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-t^2+s^2}}\cdot s$$

である．γ を回転した曲線は $X>0,\ Y>0$ より $-t<s<t$，つまり $s^2<t^2$ である．よって $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2-t^2+s^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-t^2+s^2}}>0$ でかつ $t>0$ なので，t' は $s=0$ でのみ 0 となり，ここで負から正に変わる．つまりここで極小で最小である．

これは，もとの軌跡 γ についてみれば，γ が不等式 $x+y \geqq 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ で定まる領域内にあることを示している．

よって γ は 2 つの直線で定まる領域

$$2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} \leqq x+y<2 \quad \text{（等号は } X=Y \text{ のときのみ）}$$

にある．この結果，軌跡 γ，x 軸の $x \geqq 0$ なる部分，y 軸の $y \geqq 0$ なる部分の 3 つで囲まれる図形の面積を S は x 軸の $x \geqq 0$ なる部分，y 軸の $y \geqq 0$ なる部分とこれらの 2 直線でできる 2 つの三角形の面積に挟まれることを示している．

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\right\}^2=4(\sqrt{2}-1)$$

なので，

$$4(\sqrt{2}-1)<S<2$$

が成り立つ．

3　東大理科

3.1　4 番問題

$p = 2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい．

(1) $a_1,\ a_2$ の値を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ とする．積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．

(3) a_n は自然数であることを示せ．

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

3.1.1　解答

(1)　$q = -\dfrac{1}{p}$ とおく．

$$q = -\frac{1}{2+\sqrt{5}} = 2-\sqrt{5}$$

である．$p+q=4,\ pq=-1$ であり，$a_n = p^n+q^n$ である．

$$\begin{aligned} a_1 &= p+q=4 \\ a_2 &= p^2+q^2 = (p+q)^2-2pq = 16+2 = 18 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_1a_n &= (p+q)(p^n+q^n) = p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1}) \\ &= a_{n+1}-a_{n-1} \end{aligned}$$

(3)　(2) より，

$$a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1} \quad \cdots ①$$

である．

a_n，a_{n-1} が自然数なら ① より，a_{n+1} は自然数である．(1) から a_1，a_2 が自然数なので，数学的帰納法によって，a_n は自然数である．

(4)　整数 $a,\ b$ の最大公約数を $(a,\ b)$ と表す．

$(a_{n+1},\ a_n) = 2$ を数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき，(1) から $(a_2,\ a_1) = 2$ である．

$(a_k,\ a_{k-1}) = 2$ と仮定し，$(a_{k+1},\ a_k) = d$ とおく．

$a_k \equiv a_{k-1} \equiv 0 \pmod 2$ なので，① を $n=k$ で用いて，$a_{k+1} \equiv 0 \pmod 2$ となり，2 は a_k と a_{k+1} の公約数である．d が a_{k+1} と a_k の最大公約数なので，$d \geqq 2$ である．

$a_{k+1} \equiv a_k \equiv 0 \pmod d$ なので，同様に ① より，$a_{k-1} \equiv 0 \pmod d$ となり，d は a_k と a_{k-1} の公約数である．2 が a_k と a_{k-1} の最大公約数なので，$d \leqq 2$ である．

これより $d=2$ となり，$(a_{k+1},\ a_k) = 2$ である．

よってすべての自然数 n に対し，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である．

4　京大理系

4.1　2 番問題

四面体 OABC を考える．点 D，E，F，G，H，I は，それぞれ辺 OA，AB，BC，CO，OB，AC 上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$ であることを示せ．

(2) D，E，F，G，H，I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ．

4.1.1　解答

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$$

とする．この 3 ベクトルは一次独立である．0 と 1 の間の数 $p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u$ を用いて

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{\mathrm{OD}}=p\overrightarrow{a}, & \overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-q)\overrightarrow{a}+q\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-r)\overrightarrow{b}+r\overrightarrow{c}, & \overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-s)\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{b}, & \overrightarrow{\mathrm{OI}}=(1-u)\overrightarrow{a}+u\overrightarrow{c} \end{array}$$

とおく．

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=q:1-q,\quad \mathrm{CF}:\mathrm{FB}=1-r:r$$

となる．

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathrm{DG}} & = & \overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-p\overrightarrow{a}+(1-s)\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{\mathrm{EF}} & = & \overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-(1-q)\overrightarrow{a}+(1-r-q)\overrightarrow{b}+r\overrightarrow{c} \end{array}$$

これが平行なので，

$$1-r-q=0,\ pr=(1-q)(1-s)\quad\cdots①$$

である．この第 1 式から $q=1-r$ である．よって

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$$

が成立する．

(2)　① からさらに，$p=1-s$ も成立する．D，E，F，G，H，I が正八面体の頂点なので，対辺がすべて平行である．同様にして，

$$\begin{array}{llll} \overrightarrow{\mathrm{DG}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{EF}} & :q=1-r,\ p=1-s, & \overrightarrow{\mathrm{DE}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{GF}} & :q=1-p,\ s=1-r \\ \overrightarrow{\mathrm{GH}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{IE}} & :t=1-s,\ q=u, & \overrightarrow{\mathrm{DH}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{IF}} & :p=t,\ 1-u=1-r \\ \overrightarrow{\mathrm{HE}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{IG}} & :1-t=1-q,\ s=1-u, & \overrightarrow{\mathrm{DI}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{HF}} & :r=1-t,\ u=1-p \end{array}$$

となる．これから

$$p=q=r=s=t=u=\frac{1}{2}$$

となり，この 6 点は OABC の各辺の中点である．

そしてこのとき，中線定理から

$$\mathrm{OA}=2\mathrm{EH}=2\mathrm{DE}=\mathrm{OB}$$

などが成り立ち，OABC は正四面体である．

4.2　3 番問題

$p,\ q$ を自然数，$\alpha,\ \beta$ を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p},\quad \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

4.2.1　解答

$q = 1$ のとき．ある整数 k を用いて，$\beta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ となる．このとき，

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -p$$

である．よって $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ となる自然数 p は存在しない．

以下，$q \geqq 2$ とする．

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan\alpha\tan 2\beta} = 2$$

で，

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{2q}{q^2 - 1}$$

なので，条件式は

$$\frac{1}{p} + \frac{2q}{q^2 - 1} = 2 - \frac{4q}{p(q^2 - 1)}$$

となる．これより，

$$q^2 - 1 + 2pq = 2p(q^2 - 1) - 4q \quad \cdots ①$$

つまり

$$p = \frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)}$$

である．$p \geqq 1$ が必要である．$q \geqq 2$ なので，$q^2 - q - 1 > 0$ である．よって $\dfrac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)} \geqq 1$ より

$$q^2 + 4q - 1 \geqq 2(q^2 - q - 1)$$

これより，

$$2 \leqq q \leqq 3 + \sqrt{10}$$

つまり

$$2 \leqq q \leqq 6$$

さらに ① から $q^2 - 1$ は偶数なので，

$$q = 3,\ 5$$

である．

(i) $q = 3$ のとき．$p = 2$ となる．

(ii) $q = 5$ のとき．$p = \dfrac{44}{38}$ となり不適である．

よって，条件を満たす $p,\ q$ の組は $(p,\ q) = (2,\ 3)$ である．

4.3　6 番問題

n を自然数とする．n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている．各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る．このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ．

4.3.1　解答

$X \equiv 0 \pmod 3$ となる確率を p_n，$X \equiv 1 \pmod 3$ となる確率を q_n，$X \equiv 2 \pmod 3$ となる確率を r_n とする．$p_n + q_n + r_n = 1$ である．

0 以上の整数 n に対して，$10^n \equiv 1 \pmod 3$ であるから，X と，X の各桁の数の合計とは，3 を法として合同である．したがって，試行の条件から漸化式

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}q_n + \frac{2}{5}r_n = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}(1 - p_n) = -\frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$$

が成り立つ．これから

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

となる．また $p_1 = \dfrac{1}{5}$ なので，

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

よって

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

5　京大文系

5.1　2 番問題

次の問に答えよ．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

(1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たないものの個数を求めよ．

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たないものの個数を求めよ．

5.1.1　解答

(1)　101 桁の自然数で最小のものが 10^{100} であるあるから，100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たないものの個数は

$$1 \leqq 2^n < 10^{100}$$

となる n の個数である．これより

$$0 \leqq n \log 2 < 100 \quad \text{つまり}\ 0 \leqq n < \frac{100}{\log 2}$$

となる．ここで

$$\frac{100}{0.3011}=332.1\cdots<\frac{100}{\log 2}<\frac{100}{0.3010}=332.2\cdots$$

なので $0 \leqq n \leqq 332$ となり，333 個である．

(2)　(i)　0 以上の自然数 n を

$$1 \leqq 2^n < 10^{100}$$

となるようにとる．2^n が k 桁であるとする．つまり

$$10^{k-1} \leqq 2^n < 10^k$$

となる．これより，

$$10^{99} \leqq 2^n \cdot 10^{100-k} < 10^{100}$$

ここで，$2^n \cdot 10^{100-k}=2^{n+100-k}\cdot 5^{100-k}$ なので，n に対して，100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たないものが 1 個定まる．そして

$$\text{素因数 2 の個数}=n+100-k \geqq 100-k=\text{素因数 5 の個数}$$

である．

(ii)　次に，0 以上の自然数 m を

$$1 \leqq 5^m < 10^{100}$$

となるようにとる．5^m が k 桁であるとする．つまり

$$10^{k-1} \leqq 5^m < 10^k$$

となる．これより，

$$10^{99} \leqq 5^m \cdot 10^{100-k} < 10^{100}$$

ここで，$5^m \cdot 10^{100-k}=2^{100-k}\cdot 5^{m+100-k}$ なので，m に対して，100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たないものが 1 個定まる．そして

$$\text{素因数 2 の個数}=100-k \leqq m+100-k=\text{素因数 5 の個数}$$

である．

(i) の n は (1) から 333 個ある．(ii) の m は (1) と同様にして

$$0 \leqq n < \frac{100}{\log 5}=\frac{100}{1-\log 2}$$

で

$$\frac{100}{1-0.3010}=143.061\cdots<\frac{100}{\log 5}<\frac{100}{1-0.3011}=143.08\cdots$$

なので $0 \leqq m \leqq 143$ より，m は 144 個である．

(i) と (ii) で重なる可能性があるのは，素因数 2 の個数と素因数 5 の個数が一致する場合で，$n=m=0$，$k=1$，つまり，2 が 99 個と 5 が 99 個の場合の 1 個である．

よって，100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たないものの個数は

$$333+144-1=476\ (\text{個})$$

である．

(2) の別解　(1) と同様に考え

$$10^{99} \leqq 2^n 5^m < 10^{100}$$

をみたす $(n,\ m)$ の個数が求める個数である．これから，

$$99 \leqq n \log 2 + m \log 5 < 100$$

(i)　$n \geqq m$ のとき．

$$n \log 2 + m \log 5 = n \log 2 + m(1 - \log 2) = (n - m) \log 2 + m$$

より，

$$99 - m \leqq (n - m) \log 2 < 100 - m$$

ここで $n - m$ の値を決めると，$(n - m) \log 2$ の整数部分が $99 - m$ となるように m が決まり，それから n も決まる．$(n - m) \log 2$ の値のとりうる範囲は，m が $0 \leqq m$ かつ $0 < 100 - m$ にとれる範囲であり，

$$0 \leqq (n - m) \log 2 < 100$$

である．(1) から 333 個ある．

(ii)　$n \leqq m$ のとき．

$$n \log 2 + m \log 5 = n(1 - \log 5) + m \log 5 = (m - n) \log 5 + n$$

より，同様に $m - n$ を決めればすべて決まる．その範囲は

$$0 \leqq (m - n) \log 5 < 100$$

である．

$$0 \leqq m - n < \frac{100}{\log 5} = \frac{100}{1 - \log 2}$$

で

$$\frac{100}{1 - 0.3010} = 143.061 \cdots < \frac{100}{\log 5} < \frac{100}{1 - 0.3011} = 143.08 \cdots$$

なので $0 \leqq m - n \leqq 143$ より，$m - n$ は 144 個である．

i)，ii) で重なるのは $n = m$ のときで，このときは，

$$10^{99} \leqq (2 \cdot 5)^n < 10^{100}$$

より $m = n = 99$ の場合の 1 個りである．

よって，100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たないものの個数は

$$333 + 144 - 1 = 476\ (\text{個})$$

である．

6　阪大理系

6.1　1 番問題

双曲線 $H: x^2-y^2=1$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ $(t\neq 0)$ を考える．

(1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いてあらわせ．

(2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いてあらわせ．

(3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ．

6.1.1　解答

(1)　点 A における H の接線は $x=-1$ である．$t\neq 0$ より $s\neq\pm 1$ であるから，直線 BC の方程式は

$$y=\frac{t}{s-1}(x-1)$$

である．よって，P の座標は

$$\left(-1,\ \frac{-2t}{s-1}\right)$$

である．
(2)　点 C における H の接線の方程式は

$$sx-ty=1$$

である．C は H 上の点なので $s\neq 0$ である．直線 AB は x 軸なので，Q の座標は

$$\left(\frac{1}{s},\ 0\right)$$

である．
(3)　点 B における H の接線は $x=1$ である．直線 BC の方程式は

$$y=\frac{t}{s+1}(x+1)$$

であるので，R の座標は

$$\left(1,\ \frac{2t}{s+1}\right)$$

である．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}} &= \left(-1-\frac{1}{s},\ \frac{-2t}{s-1}\right)=\left(-\frac{s+1}{s},\ \frac{-2t}{s-1}\right)\\ \overrightarrow{\mathrm{QR}} &= \left(1-\frac{1}{s},\ \frac{2t}{s+1}\right)=\left(\frac{s-1}{s},\ \frac{2t}{s+1}\right)\end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
& -\frac{s+1}{s}\cdot\frac{2t}{s+1}-\frac{-2t}{s-1}\cdot\frac{s-1}{s} \\
= \quad & -\frac{-2t}{s(s+1)(s-1)}\{(s+1)(s-1)-(s-1)(s+1)\}=0
\end{aligned}
$$

より，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{QR}}$ である．つまり 3 点 P，Q，R は一直編上にある．

研究課題

双曲線 H 上に 3 点 A，B，C がある。点 A での H の接線を l_{A}，点 B での H の接線を l_{B}，点 C での H の接線を l_{C} とする．l_{A} と直線 BC が交わるとし，交点を P とする．l_{C} と直線 AB が交わるとし，交点を Q とする．l_{B} と直線 AC が交わるとし，交点を R とする．このとき 3 点 P，Q，R は一直線上にある．これは楕円、放物線でも成り立つ，二次曲線の定理である．

これは**パスカルの定理**の特別な場合である．詳しくは,『数学対話』のなかの「パスカルの定理」，とくに「特別な場合の演習問題」を参照のこと．

6.2　3 番問題

$a,\ b$ を自然数とし，不等式

$$
\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\frac{2}{b^4} \qquad \text{(A)}
$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，$2.645<\sqrt{7}<2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい．

(1) 不等式 (A) を満たし $b \geqq 2$ である自然数 $a,\ b$ に対して

$$
\left|\frac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6
$$

であることを示せ．

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 $a,\ b$ の組のうち，$b \geqq 2$ であるものをすべて求めよ．

6.2.1　解答

(1)　不等式 (A) より

$$
-\frac{2}{b^4}<\frac{a}{b}-\sqrt{7}<\frac{2}{b^4}
$$

である．よって

$$
2\sqrt{7}-\frac{2}{b^4}<\frac{a}{b}+\sqrt{7}<\frac{2}{b^4}+2\sqrt{7}
$$

ここで，$b \geqq 2$ なので，

$$
\frac{2}{b^4}+2\sqrt{7}<\frac{2}{2^4}+2\cdot 2.646=5.417<6
$$

である．$\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}>0$ なので，

$$\left|\frac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$$

である．

(2)　不等式 (A) と (1) より

$$\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|\cdot\left|\frac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<\frac{12}{b^4}$$

つまり

$$\left|\frac{a^2}{b^2}-7\right|<\frac{12}{b^4}$$

より

$$\left|a^2-7b^2\right|<\frac{12}{b^2}$$

ここで $a^2-7b^2=0$ とすると，$\sqrt{7}=\dfrac{a}{b}$ となり，$\sqrt{7}$ が無理数であることに反する．よって a^2-7b^2 は 0 でない整数である．この結果，

$$1\leqq\left|a^2-7b^2\right|<\frac{12}{b^2}\quad\cdots①$$

となり，b は

$$b^2<12$$

が必要である．つまり

$$b=2,\ 3$$

が必要である．

$b=2$ のとき．① から

$$\left|a^2-28\right|<3$$

つまり

$$-3+28<a^2<3+28$$

これを満たす a はない．

$b=3$ のとき．① から

$$\left|a^2-63\right|<\frac{4}{3}$$

これを満たすのは $a=8$ である．$2.666<\dfrac{8}{3}<2.667$ なので，

$$2.666-2.646<\frac{8}{3}-\sqrt{7}<2.667-2.645$$

つまり

$$0.020<\frac{8}{3}-\sqrt{7}<0.022$$

であるが，$0.0246<\dfrac{2}{81}<0.0247$ なので，

$$-\frac{2}{81}<\frac{a}{3}-\sqrt{7}<\frac{2}{81}$$

となり，不等式 (A) を満たす．求める a と b は以下の組である．

$$(a,\ b)=(8,\ 3)$$

7　東北大理系

7.1　5 番問題

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とし，

$$z\bar{z}+\alpha z+\beta\bar{z}+\gamma=0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を満たす複素数 z を考える．以下の問いに答えよ．

(1) z は

$$(\alpha-\bar{\beta})z-(\bar{\alpha}-\beta)\bar{z}+\gamma-\bar{\gamma}=0$$

を満たすことを示せ．

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ と仮定し，また γ は負の実数であると仮定する．このとき，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を $\alpha,\ \beta$ を用いて表せ。

7.1.1　解答

(1)　条件式 $(*)$ の両辺の共役をとる．

$$z\bar{z}+\bar{\alpha}\bar{z}+\bar{\beta}z+\bar{\gamma}=0$$

これを $(*)$ から辺々引くことにより，

$$(\alpha-\bar{\beta})z-(\bar{\alpha}-\beta)\bar{z}+\gamma-\bar{\gamma}=0$$

となる．

(2)　γ が実数なので $\gamma-\bar{\gamma}=0$ である．この結果，

$$(\alpha-\bar{\beta})z-(\bar{\alpha}-\beta)\bar{z}=(\alpha-\bar{\beta})z-\overline{(\alpha-\bar{\beta})z}=0$$

となり，$(\alpha-\bar{\beta})z$ は実数である．

i)　$\alpha-\bar{\beta}=0$ のとき．もとの方程式は，

$$z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0$$

となる．これを変形して

$$|z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma>0$$

となる．$-\beta$ を中心とする半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の z すべてがこれをみたし，解は無数にある．

ii)　$\alpha-\bar{\beta}\neq 0$ のとき．$(\alpha-\bar{\beta})z=X$ とおく．$z=\dfrac{X}{\alpha-\bar{\beta}}$，$\bar{z}=\dfrac{X}{\bar{\alpha}-\beta}$ をもとの方程式に代入して，

$$\frac{1}{(\alpha-\bar{\beta})(\bar{\alpha}-\beta)}X^2+\frac{\alpha}{\alpha-\bar{\beta}}X+\frac{\beta}{\bar{\alpha}-\beta}X+\gamma=0$$

となる実数 X の 2 次方程式となる．$(\alpha-\bar{\beta})(\bar{\alpha}-\beta)$ を乗じて整理すると，

$$X^2-(|\alpha|^2-|\beta|^2)X+\gamma|\alpha-\bar{\beta}|^2=0$$

となる．さらに $|\alpha|=|\beta|$ で γ が負の実数であるので，

$$X^2=-\gamma|\alpha-\bar{\beta}|^2>0$$

となり，これをみたす X はちょうど 2 個ある．

よって，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件は $\alpha-\bar{\beta}\neq 0$ である．

7.2　6 番問題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx,\quad J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\,\sin cx\,dx$$

とおく．ただし，$a\neq 0$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ．

(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ．

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\,\sin 2tx\,\cos 3tx\,\cos 4tx\,dx$$

7.2.1　解答

(1)

$$\begin{aligned}
I(a,\ b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)'\cos bx\,dx=\left[\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{ax}\cdot b\sin bx\,dx\\
I(a,\ b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx\right)' dx=\left[e^{ax}\cdot\frac{1}{b}\sin bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} ae^{ax}\cdot\frac{1}{b}\sin bx\,dx
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}I(a,\ b)+\frac{b}{a}I(a,\ b) &= \frac{a}{b}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{b}{a}\left[e^{ax}\cdot\frac{1}{b}\sin bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{1}{ab}\left(ae^{\frac{a\pi}{2}}\cos\frac{b\pi}{2}-a+be^{\frac{a\pi}{2}}\sin\frac{b\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

これより，

$$I(a,\ b)=\frac{1}{a^2+b^2}\left\{e^{\frac{a\pi}{2}}\left(a\cos\frac{b\pi}{2}+b\sin\frac{b\pi}{2}\right)-a\right\}$$

(2)

$$\sin bx\sin cx=\frac{1}{2}\{\cos(b-c)x-\cos(b+c)x\}$$

なので，

$$\begin{aligned}
J(a,\ b,\ c) &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b-c)x-\cos(b+c)x\}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos(b-c)x\,dx\right)-\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos(b+c)x\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}I(a,\ b-c)-\frac{1}{2}I(a,\ b+c)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
2\sin tx\cos 4tx &= \sin(tx+4tx)+\sin(tx-4tx)=\sin 5tx-\sin 3tx\\
2\sin 2tx\cos 3tx &= \sin(2tx+3tx)+\sin(2tx-3tx)=\sin 5tx-\sin tx\\
4\sin tx\ \sin 2tx\ \cos 3tx\ \cos 4tx &= (\sin 5tx-\sin 3tx)(\sin 5tx-\sin tx)\\
&= \sin 5tx\ \sin 5tx-\sin 5tx\sin 3tx-\sin 5tx\sin tx+\sin 3tx\sin tx
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\ \sin 2tx\ \cos 3tx\ \cos 4tx\,dx\\
=\ &2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left\{\sin 5tx\ \sin 5tx-\sin 5tx\sin 3tx-\sin 5tx\sin tx+\sin 3tx\sin tx\right\}\,dx\\
=\ &2J(1,\ 5t,\ 5t)-2J(1,\ 5t,\ 3t)-2J(1,\ 5t,\ t)+2J(1,\ 3t,\ t)\\
=\ &I(1,\ 0)-I(1,\ 10t)-I(1,\ 2t)+I(1,\ 8t)-I(1,\ 4t)+I(1,\ 6t)+I(1,\ 2t)-I(1,\ 4t)\\
=\ &I(1,\ 0)-I(1,\ 10t)+I(1,\ 8t)-2I(1,\ 4t)+I(1,\ 6t)
\end{aligned}$$

となる．ここで (1) から

$$\begin{aligned}
|I(a,\ b)| &= \frac{1}{a^2+b^2}\left|e^{\frac{a\pi}{2}}\left(a\cos\frac{b\pi}{2}+b\sin\frac{b\pi}{2}\right)-a\right|\\
&\leqq \frac{1}{a^2+b^2}\left(\left|e^{\frac{a\pi}{2}}a\cos\frac{b\pi}{2}\right|+\left|e^{\frac{a\pi}{2}}b\sin\frac{b\pi}{2}\right|+|a|\right)\\
&\leqq \frac{1}{a^2+b^2}\left\{e^{\frac{a\pi}{2}}(|a|+|b|)+|a|\right\}
\end{aligned}$$

なので，a を固定して $b\to\infty$ とすると，

$$\lim_{t\to\infty} I(a,\ b)=0$$

となる．また

$$I(1,\ 0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-1$$

なので，

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\ \sin 2tx\ \cos 3tx\ \cos 4tx\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-1$$

である．

8　東北大文系

8.1　3 番問題

a を 3 で割り切れない正の整数とする．a を 3 で割ったときの商を b，余りを c とする．次の問いに答えよ．

(1) $c=2$ のとき，$2a+1=as+3t$ を満たす負でない整数 $s,\ t$ を b を用いて表せ．

(2) n を $n\geqq 2a-2$ を満たす整数とする．このとき $n=as+3t$ を満たす負でない整数 $s,\ t$ が存在することを示せ．

8.1.1 解答

(1)　$c=2$ なので，$a=3b+2$ である．よって，s と t の方程式は

$$(3b+2)s+3t=6b+5$$

となる．ここで

$$(3b+2)\cdot 1+3\cdot(b+1)=6b+5$$

なので，辺々引いて，

$$(3b+2)(s-1)+3\{t-(b+1)\}=0$$

$3b+2$ と 3 は互いに素なので，これを満たす s と t は，整数 k を用いて

$$s-1=3k,\ t-(b+1)=-(3b+2)k$$

と表される．$s\geqq 0,\ t\geqq 0$ となるのは，$k=0$ のときにかぎる．よって，求める s と t は

$$(s,\ t)=(1,\ b+1)$$

である．

(2)　$n=as+3t$ を満たす負でない整数 $s_0,\ t_0$ が存在すれば，$n+3=as_0+3(t_0+1)$ なので，$n+3=as+3t$ となる負でない整数 $s,\ t$ が存在する．

よって，$n\geqq 2a-2$ のとき $n=as+3t$ を満たす負でない整数 $s,\ t$ が存在することを示すためには，$n=2a-2,\ 2a-1,\ 2a$ のときに，$n=as+3t$ を満たす負でない整数 $s,\ t$ が存在することを示せばよい．

(1) と同様に求めることで，次のような負でない解が存在する．

$c=2$ のとき．$a=3b+2$ で

$$2a-2=6b+2,\ 2a-1=6b+3,\ 2a=6b+4$$

である．方程式は次のようになり，それぞれの負でない解が次のように存在する．

$6b+2=(3b+2)s+3t$	$6b+3=(3b+2)s+3t$	$6b+4=(3b+2)s+3t$
$(1,\ b)$	$(0,\ 2b+1)$	$(2,\ 0)$

$c=1$ のとき．$a=3b+1$ で

$$2a-2=6b,\ 2a-1=6b+1,\ 2a=6b+2$$

である．同様に考える．

$6b=(3b+1)s+3t$	$6b+1=(3b+1)s+3t$	$6b+2=(3b+1)s+3t$
$(0,\ 2b)$	$(1,\ b)$	$(2,\ 0)$

よって，$n\geqq 2a-2$ のとき，$n=as+3t$ を満たす負でない整数 $s,\ t$ が存在することが示された．

9　東北大後期理系

9.1　4番問題

1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH の辺の上を次の規則に従って動く点 M がある．

(i) 時刻 0 において M は頂点 A の上にある．

(ii) 各辺上での M の速さは 1 である．ただし，辺の途中で後戻りしない．

(iii) 各頂点において M はとどまらず，その頂点を端点とする 3 本の辺の中から確率 $\dfrac{1}{3}$ で 1 つを選んで次の頂点まで移動し続ける．

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 4，5 において M が頂点 A の上にある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 時刻 n において M が頂点 A の上にある確率を n を用いて表せ．ただし，n は負でない整数とする．

(3) 時刻 8 において M が頂点 A の上にあるとき，その時刻までに M が立方体のすべての頂点を通る条件付き確率を求めよ．

9.1.1　解答

(1)　時刻 n において M が頂点 A にある確率を p_n，時刻 n において M が頂点 B，D，E のいずれかにある確率を q_n，時刻 n において M が頂点 C，F，H のいずれかにある確率を r_n，時刻 n において M が頂点 G にある確率を s_n とおく．このとき，試行の条件から次の漸化式が成り立つ．

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{3}q_n \\ q_{n+1} = p_n + \dfrac{2}{3}r_n \\ r_{n+1} = \dfrac{2}{3}q_n + s_n \\ s_{n+1} = \dfrac{1}{3}r_n \end{cases}$$

そして

$$p_0 = 1,\ q_0 = r_0 = s_0 = 0$$

である．$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ で，

n が偶数なら M は頂点 A か頂点 C，F，H のいずれかにあり，$q_n = s_n = 0$ であるから，$p_n + r_n = 1$ となる．また，

n が奇数なら M は頂点 B，D，E か頂点 C のいずれかにあり，$p_n = r_n = 0$ であるから，$q_n + s_n = 1$ となる．

そこで，n が偶数のとき，

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= \frac{1}{3}q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}r_n \\ &= \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}(1 - p_n) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}p_n \end{aligned}$$

したがって

$$p_{n+2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

より

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\left(p_0-\frac{1}{4}\right)$$

よって，

$$p_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

これから $p_4=\dfrac{7}{27}$ なので時刻 4，5 において M が頂点 A の上にある確率はそれぞれ

$$\frac{7}{27},\ 0$$

である．

(2)　(1) の計算から，時刻 n において M が頂点 A の上にある確率は

$$\begin{cases} 0 & (n:\text{奇数}) \\ \dfrac{1}{4}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} & (n:\text{偶数}) \end{cases}$$

である．

(3)　時刻 8 までに M が立方体のすべての頂点を通るのは，M が各頂点を 1 回づつ通るときにかぎる．$U=\{\mathrm{B},\ \mathrm{D},\ \mathrm{E}\}$，$V=\{\mathrm{C},\ \mathrm{F},\ \mathrm{H}\}$ とすると，

$$\begin{gathered}\mathrm{A}\to U\to V\to U\to V\to \mathrm{G}\to V\to U\to \mathrm{A}\\ \mathrm{A}\to U\to V\to \mathrm{G}\to V\to U\to V\to U\to \mathrm{A}\end{gathered}$$

のいずれかである．U の点，V の点をどの順に通るかは，時刻 1，時刻 2 にどの頂点にあるかを決めれば 1 通りなので，それぞれ 3! 通りある．よってその確率は $2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{8}\cdot 3!=\dfrac{4}{3^7}$ である．

一方，$p_8=\dfrac{547}{3^7}$ なので，求める条件付き確率は，$\dfrac{\frac{4}{3^7}}{\frac{547}{3^7}}=\dfrac{4}{547}$ である．

9.2　5 番問題

n を負でない整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $2x+2y+z=n$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組の総数を，$n=4$ と $n=5$ のそれぞれの場合に求めよ．

(2) $2x+2y+z=n$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組の総数を，n を用いて表せ．

(3) $2x+2y+z\leqq n$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組の総数を，n を用いて表せ．

9.2.1　解答

(1)　$2x+2y+z=n$ において，

　n が奇数のとき，$n=2m+1$ とおく．このとき z は奇数であり，$z=2k+1$ とおくと，k は $0 \leqq k \leqq m$ の範囲にあり，

$$x+y=m-k$$

となる．これをみたす $(x,\ y)$ の組は $m-k+1$ 組みある．よって，この場合

$$\sum_{k=0}^{m}(m-k+1)=\frac{(m+1)(m+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+3)}{8}$$

　n が偶数のとき，$n=2m$ とおく．このとき z は偶数であり，$z=2k$ とおくと，k は $0 \leqq k \leqq m$ の範囲にあり，

$$x+y=m-k$$

となる．同様にして

$$\sum_{k=0}^{m}(m-k+1)=\frac{(m+1)(m+2)}{2}=\frac{(n+2)(n+4)}{8}$$

　これより $n=4$ と $n=5$ の場合の総数はともに $m=2$ のときなので，

$$6,\quad 6$$

である．

(2)　$2x+2y+z=n$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組の総数は

$$\begin{array}{ll} \dfrac{(n+1)(n+3)}{8} & (n:\text{奇数}) \\ \dfrac{(n+2)(n+4)}{8} & (n:\text{偶数}) \end{array}$$

である．

(3)　$2x+2y+z=2m,\ 2m+1$ とおく．満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組の総数は

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)-m(m+1)(m+2)}{6}$$

である．

　n が偶数なら，m はそれぞれ $0 \leqq m \leqq \dfrac{n}{2}$ と $0 \leqq m \leqq \dfrac{n}{2}-1$ を動く．n が奇数なら，m はそれぞれ $0 \leqq m \leqq \dfrac{n-1}{2}$ と $0 \leqq m \leqq \dfrac{n-1}{2}$ を動く．したがって，$2x+2y+z \leqq n$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組の総数は，

$$\begin{aligned} n:\text{偶数}\quad & \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(m+1)(m+2)}{2}+\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ =\quad & \frac{(\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2}+2)(\frac{n}{2}+3)}{6}+\frac{(\frac{n}{2})(\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2}+2)}{6}=\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{24} \\ n:\text{奇数}\quad & 2\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ =\quad & \frac{(\frac{n-1}{2}+1)(\frac{n-1}{2}+2)(\frac{n-1}{2}+3)}{3}=\frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{24} \end{aligned}$$

である．

10　名大理系

10.1　4番問題

n を自然数とする．0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (I)，(II)，(III) を満たしている．

(I) 集合 M は n 個の要素からなる．

(II) 集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である．

(III) 集合 M の要素 $z,\ w$ に対して，その積 zw は集合 M の要素である．ただし，$z=w$ の場合も含める．

このとき，次の問に答えよ．

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ．

(2) n は偶数であることを示せ．

(3) $n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

(4) $n=6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

10.1.1　解答

(1)　$z\in M$ なら $\dfrac{1}{z}\in M$ なので，その積 $z\cdot\dfrac{1}{z}=1\in M$．これから $-1\in M$ である．

(2)　M の要素 z と $-z$ を組にする．この組の個数を l とする．条件 (II) から $0\notin M$ なので，$z\neq -z$ である．したがって，$n=2l$ となり，n は偶数である．

別解

$$M=\{z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n\}$$

とする．(1) より -1 は M の要素である．よって，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，$-z_k$ はすべて異なり，かつ $-z_k\in M$ であるから，それらの積は，z_k の積と一致する．つまり

$$(-z_1)\cdots(-z_n)=z_1z_2\cdots z_n$$

これより $(-1)^n=1$ となり，n は偶数である．

(3)　$1,\ -1\in M$ である．この 2 要素以外の要素 α をとる．このとき $-\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\in M$ で，$-\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\neq 1,\ -1,\ \alpha$ である．従って $-\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$ でなければならず，$\alpha^2=-1$ である．よって，

$$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$$

ただし，i は虚数単位である．

(4)

$$M=\{z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6\}$$

とする．M の任意の要素 w をとる．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ に対して wz_k はすべて異なり，かつ，$wz_k\in M$ であるから，それらの積は，z_k の積と一致する．

$$w^6z_1z_2\cdots z_6=z_1z_2\cdots z_6$$

ここで $z_1z_2\cdots z_6\neq 0$ より，$w^6=1$ である．つまり $n=6$ のとき，M の要素はすべて 1 の 6 乗根である．相異なる 1 の 6 乗根はちょうど 6 個なので，M はこれら 6 個の要素より成る．1 の 6 乗根の符号逆の数，逆数，6 乗根の積はすべて 1 の 6 乗根なので条件を満たす．

$$z^6-1=(z-1)(z+1)(z^2-z+1)(z^2+z+1)$$

なので，

$$M=\left\{1,\ -1,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

である．

11　名大文系

11.1　3 番問題

次の問に答えよ．

(1) 次の条件 $(*)$ を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

$$(*)\qquad a<b<c \text{ かつ } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \text{ である．}$$

(2) 偶数 $2n$ $(n\geqq 1)$ の 3 つの正の約数 $p,\ q,\ r$ で，$p>q>r$ と $p+q+r=n$ を満たす組 $(p,\ q,\ r)$ の個数を $f(n)$ とする．ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$ とする．n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ．また，$f(n)=M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ．

11.1.1　解答

(1)　$a<b<c$ なので，$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ である．よって

$$\frac{3}{a}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

が必要である．つまり，$6>a\geqq 1$ より $a=2,\ 3,\ 4,\ 5$．

$a=2$ のとき．$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$ となり，これをみたす自然数 $b,\ c$ はない．

$a=3$ のとき．$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}$．これより $6b+6c=bc$．これを変形して

$$(b-6)(c-6)=36$$

$-6<b-6<c-6$ でこれを満たすのは

$$(b-6,\ c-6)=(4,\ 9),\ (3,\ 12),\ (2,\ 18),\ (1,\ 36)$$

これから

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 10,\ 15),\ (3,\ 9,\ 28),\ (3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 7,\ 42)$$

$a=4$ のとき．$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$．これより $4b+4c=bc$．これを変形して

$$(b-4)(c-4)=16$$

同様に考え，

$$(b-4,\ c-4)=(2,\ 8),\ (1,\ 16)$$

これから

$$(a,\ b,\ c)=(4,\ 6,\ 12),\ (4,\ 5,\ 20)$$

$a=5$ のとき．$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{10}$．これより $10b+10c=3bc$．つまり $10(3b)+10(3c)=(3b)(3c)$．これを変形して

$$(3b-10)(3c-10)=100$$

$a=5<b<c$ なので $5<3b-10<3c-10$ である．5 より大きい 100 の約数は，10 が最小なので，$b<c$ を満たすものはない．

以上より，

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 10,\ 15),\ (3,\ 9,\ 28),\ (3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 7,\ 42),\ (4,\ 6,\ 12),\ (4,\ 5,\ 20)$$

(2)

$$2n=pa=qb=rc$$

とおく．$p>q>r$ のとき $a<b<c$ である．$p+q+r=n$ より

$$\frac{p}{2n}+\frac{q}{2n}+\frac{r}{2n}=\frac{1}{2}$$

つまり，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

これをみたし $a<b<c$ である自然数の組は (1) で求めた 6 組である．

この $a,\ b,\ c$ の最小公倍数を m とし，$m=ap_0=bq_0=cr_0$ とおく．このとき，

$$p_0+q_0+r_0=\frac{m}{2}$$

となる．(1) で求めた 6 組の最小公倍数は偶数なので，$\dfrac{m}{2}$ は整数である．これを n_0 とおく．このとき，$p_0,\ q_0,\ r_0$ は $m=2n_0$ の約数である．

l を任意の自然数とする．

$$p_0l+q_0l+r_0l=n_0l$$

であるから，$p=p_0l$，$q=q_0l$，$r=q_0l$ は $2n=2n_0l$ の約数となる．

(1) で求めた 6 組について，関係式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ に，$a,\ b,\ c$ の最小公倍数をかけた等式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&10+3+2=15=3\cdot 5\\
&84+28+9=126=2\cdot 3^2\cdot 7\\
&8+3+1=12=2^2\cdot 3\\
&14+6+1=21=3\cdot 7\\
&3+2+1=6=2\cdot 3\\
&5+4+1=10=2\cdot 5
\end{aligned}$$

これらの両辺を l 倍した組もまた，それに対応する n に対して条件をみたす組となる．したがって，$f(n)$ の最大値 M は 6 で，6 組の解があるのは，n が上記の右辺の最小公倍数の倍数であるときであり，その最小値は右辺の最小公倍数である．それは

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$$

である．

12　九大理系

12.1　3 番問題

初項 $a_1 = 1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ．

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ．

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ．

12.1.1　解答

(1)　$a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3 = 4(n+1) - 7$ である．よって

$$a_n \equiv 4(n+1) \pmod 7$$

となり，4 と 7 は互いに素なので，$a_n \equiv 0 \pmod 7$ であるのは $n+1 \equiv 0 \pmod 7$ となることと同値である．$1 \leqq n \leqq 600$ の範囲では

$$n + 1 = 7,\ 14,\ \cdots,\ 595 = 7 \cdot 85$$

のときであるから，$\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数は 85 個である．
(2)　同様に

$$a_n = 4n - 3 = 4(n-13) + 49 \equiv 4(n-13) \pmod{7^2}$$

となり，4 と 7^2 は互いに素なので，$a_n \equiv 0 \pmod{7^2}$ であるのは $n - 13 \equiv 0 \pmod{7^2}$ となることと同値である．

$$n - 13 = 0,\ 49,\ 2 \cdot 49,\ \cdots,\ 539 = 7^2 \cdot 11$$

であるから，$\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数は 12 個である．
(3)　a_n が 7 の倍数になるのは $n = 7k - 1$ $(k = 1,\ 2,\ 3 \cdots)$ のときであり，a_n が 7^2 の倍数になるのは $n = 49l + 13$ $(l = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \cdots)$ のときである．同様にして，$7^3 = 343$ なので，

$$a_n = 4n - 3 = 4(n+85) - 343 \equiv 4(n+85) \pmod{7^3}$$

となり，a_n が最初に 7^3 の倍数になるのは $n = 343 - 85 = 258$ のときである．

$1 \leqq n \leqq 258$ で a_n が 7 の倍数であるのは，$1 \leqq n = 7k - 1 \leqq 258$ より，$1 \leqq k \leqq 37$ の範囲であり，37 個ある．a_n が 7^2 の倍数であるのは $1 \leqq 49l + 13 \leqq 258$ より，$0 \leqq l \leqq 5$ の範囲であり，6 個ある．したがって，$a_1 a_2 \cdots a_{258}$ の因数分解における素因数 7 の個数は $37 + 6 + 1 = 44$ 個あり，

積 $a_1a_2\cdots a_{258}$ は 7^{44} の倍数であるが，7^{45} の倍数ではない．258 より大きい n で最初に a_n が 7 の倍数になるのは $258+7=265$ のときである．このときはじめて積の因数分解における素因数 7 の個数が 45 個以上となる．初項から第 n 項までの積が 7^{45} の倍数となる最小の自然数は $n=265$ である．

※「45 個以上」としたのは，7^2 について確認していないからである．確認すると，a_{265} は 7^2 の倍数ではない．よってここまでの積に含まれる素因数 7 の個数は 45 個である．

13　九大後期理系

13.1　4 番問題

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 2 以上の自然数 n に対して，$a_{n+2}>2a_n$ が成り立つことを示せ．

(2) 2 以上の自然数 m は，数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 $(k\geqq 2)$ の項の和で表されることを，数学的帰納法によって示せ．

(3) (2) における項の個数 k は，$k<2\log_2 m+2$ をみたすことを示せ．

13.1.1　解答

(1)　$a_{n+1}>0$，$a_n>0$ なら $a_{n+2}>0$ で $a_1>0$，$a_2>0$ なので数学的帰納法から $a_n>0$ である．
よって $a_{n+2}-a_{n+1}=a_n>0$ となり，2 以上の自然数 n に対して $a_{n+1}>a_n$ である．したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n>a_n+a_n=2a_n$$

がなりたつ．

(2)　$m=2$ のとき $2=a_3=a_1+a_2$ であり，互いに異なる項の和で表される．
m より小さい 2 以上の自然数は数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる項の和で表されるとする．
m のとき．m が a_n のいずれか a_l と一致するとき．$m=a_l=a_{l-1}+a_{l-2}$ と，互いに異なる項の和で表される．
一致する項がないとき．m を越えない最大の項を a_l とする．$m-a_l<m$ なので帰納法の仮定から，$m-a_l$ は数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる項の和で表され，その中に a_l はない．もしあれば，

$$m>a_l+a_l>a_l+a_{l-1}=a_{l+1}$$

となり，m を越えない最大の項が a_l であることに矛盾する．
よって，$m-a_l$ を数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる項の和で表し，それに a_l を加えたものが m となり，m の場合も数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる項の和で表された．
よって，数学的帰納法から，2 以上の任意の自然数 m は数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる項の和で表される．

(3)　m は数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 $(k \geqq 2)$ の項の和で表されるとする．k 個の項の和で最小のものが $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j$ で，$a_{n+2} > 2a_n$ なので，

$$\begin{aligned} m &\geqq \sum_{j=1}^{k} a_j = \sum_{j=1}^{k}(a_{j+2} - a_{j+1}) = a_{k+2} - a_2 = a_{k+2} - 1 \\ &> \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} a_2 - 1 & (k : \text{偶数}) \\ 2^{\frac{k+1}{2}} a_1 - 1 & (k : \text{奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

したがってつねに

$$2^{\frac{k}{2}} \leqq m$$

が成り立つ．これから

$$\frac{k}{2} \leqq \log_2 m < \log_2 m + 1$$

つまり，k は

$$k < 2\log_2 m + 2$$

をみたす．

14　神戸大理系

14.1　4 番問題

$\overrightarrow{v_1} = (1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2} = (1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3} = (-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4} = (-1,\ -1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ (1，2，3，4 の目がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{4}$ で出る) をふるごとに，出た目が k $(k = 1, 2, 3, 4)$ のときは $\overrightarrow{v_k}$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \overrightarrow{v_k}$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0 = \mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ．

(4) n を 6 以下の自然数とする．$\mathrm{P}_n = \mathrm{O}$ となる確率を求めよ．

14.1.1　解答

(1)　1 回目と 2 回目あわせて $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ がそれぞれ a 回，b 回，c 回，d 回出るとする．
$a + b + c + d = 2$ である．このとき点 P_2 の座標は

$$(a + b - c - d,\ a - b + c - d,\ a - b - c + d)$$

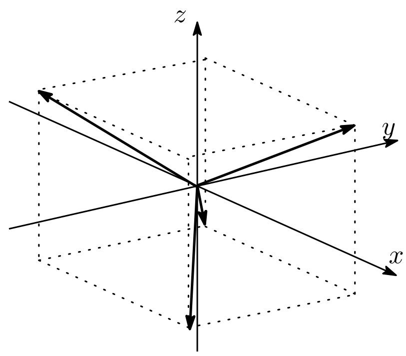
である．これが x 軸上にあるのは

$$a-b+c-d=0, \quad a-b-c+d=0$$

これから $a=b,\ c=d$ となり，$a+b+c+d=2$ より，$a=b=1,\ c=d=0$ または $a=b=0,\ c=d=1$ である．よって点 P_2 が x 軸上にある確率は

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$$

別解　図のように，4 点
$(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1),\ (-1,\ -1,\ 1)$
は，たがいの距離がいずれも $2\sqrt{2}$ で等しく，原点を中心とする正四面体の 4 頂点をなす．
従って，これら 4 点は原点の周りに対称である．



1 回目は 1 が出たとする．この場合，

$$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_1}=(2,\ 2,\ 2),\ \overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=(2,\ 0,\ 0),$$
$$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_3}=(0,\ 2,\ 0),\ \overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_4}=(0,\ 0,\ 2)$$

なので，2 回目に 2 が出るときのみ，点 P_2 が x 軸上にある．対称性から，点 P_2 が x 軸上にある確率は

$$4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(2)　同様に 1 回目は 1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ は，(1) 別解の 4 通りである．

3 回目と 4 回目あわせて $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ がそれぞれ p 回，q 回，r 回，s 回出るとする．$p+q+r+s=2$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}=(p+q-r-s,\ p-q+r-s,\ p-q-r+s)$$

なので，その内積は $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ はそれぞれ，順に，

$$2(3p-q-r-s),\ 2(p+q-r-s),\ 2(p-q+r-s),\ 2(p-q-r+s)$$

$p+q+r+s=2$ のもとで，これらが 0 になり得るのは，第 2，第 3，第 4 の場合で，第 2 の場合，

$$p+q=r+s=1$$

が条件である．これは p と q が 0 と 1，r と s が 0 と 1 なので，4 通りある．3 回目と 4 回目のいずれで出るかの決め方が 2 通り．第 3，第 4 の場合も同様．よって求める確率は

$$4\cdot3\cdot2\cdot4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{3}{8}$$

である．

(3)　4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にあることは，$\overrightarrow{v_k}$ から選ばれた 3 ベクトルが同一平面上にあることと同値である．対称性から 1 回目と 2 回目が 1 と 1 の場合，1 と 2 の場合で考える．それぞれ 4 倍と ${}_4\mathrm{P}_2=12$ 倍すればよい．

1 回目と 2 回目が 1 と 1 の場合，3 回目がいずれであっても，4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある．よって 4 通りある．1 回目と 2 回目が 1 と 2 の場合，$\overrightarrow{v_1}$ と $\overrightarrow{v_2}$ で定まる平面上に，$\overrightarrow{v_k}$ が来るのは，$k=1,\ 2$ のときにかぎる．よって 2 通りある．

従って 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率は

$$(4\cdot 4+12\cdot 2)\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{5}{8}$$

である．

別解　$\overrightarrow{v_k}$ のうちいずれの 3 ベクトルも 1 次独立で同一平面上にない．よって，4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある事象の余事象は，$\overrightarrow{v_k}$ から異なる 3 つのベクトルを選ぶ事象である．

従って 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率は

$$1-{}_4\mathrm{P}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{5}{8}$$

である．

(4)　$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ となるのは，選ばれたベクトルの和が 0 ベクトルということである．いずれの 3 ベクトルも 1 次独立なので $n\leqq 3$ ではありえない．

$n=4$ のとき．$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_4}=\overrightarrow{O}$ なので，これら 4 つが選ばれる場合である．

$n=5,\ 6$ のとき．いずれの 3 ベクトルも 1 次独立なので，4 ベクトルがすべて選ばれなければならないが，$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_4}=\overrightarrow{O}$ なので，さらに残るベクトルの和が 0 でなければならな．それはありえない．よって，$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ となる確率は

$$\begin{cases} 0 & (n\neq 4)\\ \dfrac{4!}{4^4}=\dfrac{3}{32} & (n=4)\end{cases}$$

である．

14.2　5 番問題

$r,\ c,\ \omega$ は正の定数とする．座標平面上の動点 P は時刻 $t=0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする．また，動点 Q は時刻 $t=0$ のとき点 $(0,\ -r)$ にあるとする．点 P から見て，動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問に答えよ．

(1) 時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ．

(2) 動点 Q の描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1\neq t_2$ ならば $(x(t_1),\ y(t_1))\neq(x(t_2),\ y(t_2))$ であるための必要十分条件を $r,\ c,\ \omega$ を用いて与えよ．

14.2.1　解答

(1)　時刻 t において

$$\mathrm{P}(ct,\ 0)$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(r\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\omega t\right),\ r\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\omega t\right)\right)=(r\sin\omega t,\ -r\cos\omega t)$$

である．従って

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x(t),\ y(t))=(ct+r\sin\omega t,\ -r\cos\omega t)$$

である．

(2)

$$x(t)=ct+r\sin\omega t,\ y(t)=-r\cos\omega t$$

において

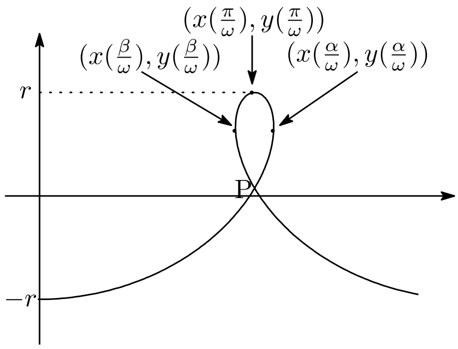
$$x'(t)=c+r\omega\cos\omega t,\ y'(t)=r\omega\sin\omega t$$

である．

ここで $\dfrac{c}{r\omega}<1$ と仮定する．このとき，$c+r\omega\cos\omega t=0$，つまり，$\cos\omega t=-\dfrac{c}{r\omega}$ となる ωt の値は 2 つある．それを α と β とする．$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<2\pi$ である．このとき，$0\leqq\omega t\leqq 2\pi$ の増減は次のようになる．

ωt	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
$x'(t)$	$c+r\omega$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$c+r\omega$
$y'(t)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0

したがって，そのグラフは右図のようになり，動点 Q の描く曲線は交差する．つまり，交点 P を与える t の値が区間 $(0,\ \pi)$ と区間 $(\pi,\ 2\pi)$ のそれぞれにある．



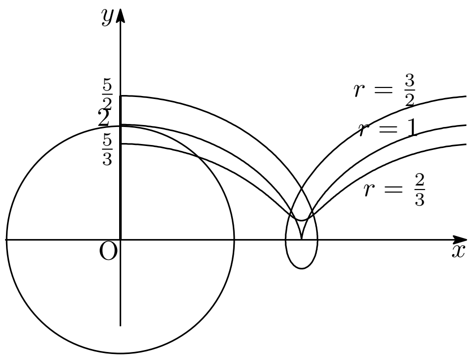
$\dfrac{c}{r\omega}\geqq 1$ のとき．$x'(t)\geqq 0$ となり，$x(t_1)=x(t_2)$ となる異なる t の値は存在しない．

求める条件は，$\dfrac{c}{r\omega}\geqq 1$，つまり $\dfrac{r\omega}{c}\leqq 1$ である．

解説　この曲線は，サイクロイドの 1 種である．

$$x(s)=s+r\sin s,\ y(s)=1+r\cos s$$

とし，$r=\dfrac{2}{3}$，$r=1$，$r=\dfrac{3}{2}$ のときの曲線を描くと右図になる．このように $r\leqq 1$ のとき交差しない．



本問の場合，

$$x(t)=\frac{c}{\omega}\left(\omega t+\frac{r\omega}{c}\sin\omega t\right)$$

と変形できるので，同様に，$\dfrac{r\omega}{c}\leqq 1$ のとき交差しない．

15　神戸大後期理系

15.1　3 番問題

　A(α) を原点と異なる複素数平面上の点とし，正の実数 r は $r \neq |\alpha|$ をみたすとする．等式 $\left|\dfrac{1}{z} - \bar{\alpha}\right| = r$ をみたす複素数平面上の点 P(z) の描く図形を C で表す．ただし，$\bar{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．以下の問に答えよ．

(1) C が円であることを示し，その中心と半径を求めよ．

(2) 原点 O を中心とする半径 1 の円を S で表す．C の中心が A，半径が r になるとき，C と S の共有点が存在することを示せ．さらに，このとき C と S の任意の共有点 Q に対して，OQ⊥AQ が成り立つことを示せ．

15.1.1　解答

(1)　等式 $\left|\dfrac{1}{z} - \bar{\alpha}\right| = r$ より，

$$\left|\frac{1}{z} - \bar{\alpha}\right|^2 = \left(\frac{1}{z} - \bar{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\bar{z}} - \alpha\right) = \frac{1}{z\bar{z}} - \frac{\alpha}{z} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{z}} + |\alpha|^2 = r^2$$

この両辺に $z\bar{z}$ を乗じ，

$$1 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + (|\alpha|^2 - r^2)z\bar{z} = 0$$

よって

$$\left(z - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right) = -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} + \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} = \frac{r^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2}$$

つまり

$$\left|z - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right| = \frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$$

　C は中心が $\dfrac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}$ で，半径が $\dfrac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$ の円である．

(2)　C の中心が A，半径が r になるので，

$$|\alpha|^2 - r^2 = 1$$

である．

　円 S と円 C の中心間の距離は $|\alpha|$ であり，半径の和は $1 + r$ である．

$$(1 + r)^2 > 1 + r^2 = |\alpha|^2 > 1 + r^2 - 2r = (r - 1)^2$$

より，

$$1 + r > |\alpha| > |r - 1|$$

となり，C と S に共有点が存在する．さらに，

$$\mathrm{OQ}^2 + \mathrm{AQ}^2 = 1 + r^2 = |\alpha|^2 = \mathrm{OA}^2$$

となるので，△OQA は直角三角形となり，OQ⊥AQ が成り立つ．

15.2　4番問題

n を正の整数とする．A さんは 1 から n までの整数が書かれたカードを 1 枚ずつもち，B さんは 0 から n までの整数が書かれたカードを 1 枚ずつもっているとする．A さんと B さんが，次の試行を交互にくり返し行う．

・相手のカードから 1 枚のカードをランダムに引く．引いたカードに書かれた整数と同じ整数のカードが自分のカードの中にある場合は，そのカードと引いたカードを一組みにして捨てる．そうでない場合は，引いたカードを自分のカードに加える．

試行の回数を，2 人のうちのどちらか一方が試行を行ったときに 1 回の試行を行ったものとして数える．試行の総回数が 100 回になった時点，もしくは，2 人のうちのどちらか一方のもっているカードがなくなった時点で試行を続けることをやめる．k が $1 \leqq k \leqq 99$ をみたす正の整数であるとき，以下の問に答えよ．

(1) $n=1$ とする．A さんから上の試行を始めるとき，試行の総回数が k となる確率 p_k を求めよ．

(2) $n=2$ とする．A さんから上の試行を始めるとき，試行の総回数が k となる確率 q_k を求めよ．

(3) $n=3$ とする．A さんから上の試行を始めるとき，試行の総回数が k となる確率 r_k を求めよ．

15.2.1　解答

(1)　$n=1$ のとき．$k \geqq 2$ とする．試行の総回数が k となる事象は，$k-1$ 回は 0 を引き，k 回目に 1 を引く事象である．よって，

$$p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$$

これは $k=1$ でも成立する．

(2)　$n=2$ のとき．$k \geqq 3$ とする．試行の総回数が k となる事象は，$k-2$ 回は 0 を引き，$k-1$ 回目に 1 か 2 を引く，このとき k 回目は 2 か 1 を引いて試行が終わる．

$$q_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{k-1}}$$

これは $k=2$ でもあてはまるが，1 回で終わることはない．

$$q_k = \begin{cases} 0 & (k=1) \\ \dfrac{2}{3^{k-1}} & (k \geqq 2) \end{cases}$$

(3)　$n=3$ のとき．$k \geqq 3$ のとき最初に 0 を引くか，0 でないものを引くかで場合に分ける．0 でないものを引くとそこで 1 枚減り，次も 0 でないものを引くのでもう 1 枚減る．つまり 2 回の試行をおこなって，0 ともう 1 枚が残る．よって，

$$r_k = \frac{1}{4}r_{k-1} + \frac{3}{4}p_{k-2}$$

となる．これから

$$4^k r_k = 4^{k-1}r_{k-1} + 3 \cdot 4^{k-1}\frac{1}{2^{k-2}}$$

なので，

$$4^k r_k - 4^{k-1} r_{k-1} = 12 \cdot 2^{k-2}$$

よって，

$$4^k r_k = 4^3 r_3 + \sum_{l=3}^{k-1} 12 \cdot 2^{l-1}$$

$$r_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

なので，

$$4^k r_k = 24 + 12 \cdot 4 \cdot \frac{2^{k-3} - 1}{2 - 1} = 3(2^{k+1} - 8)$$

これから，

$$r_k = \frac{3(2^{k+1} - 8)}{4^k} = \frac{3}{2^{k-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{k-2}}\right)$$

である．

※　n のとき，試行の総回数が k となる確率を $P(n,\ k)$ とおくと，$n \geqq 3$，$k \geqq 3$ のとき，

$$P(n,\ k) = \frac{1}{n+1} P(n,\ k-1) + \frac{n}{n+1} P(n-2,\ k-2)$$

が成り立つ．

※　本問は，試行が終わる確率を問うている．A が勝つか B が勝つかとすると,「ばば抜き」になる． そして本問では「100 回で終わる」となっているが，いわゆる「ばば抜き」は一方がなくなるまでやる． 関連入試問題として,「1995 年京大理系 5 番」がある．

16　東工大

16.1　1 番問題

次の条件 (i)，(ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ．

(i) N の正の約数は 12 個.

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12.

ただし，N の約数には 1 と N も含める．

16.1.1　解答

12 の因数分解は

$$12 = (1+1)(5+1) = (2+1)(3+1) = (2+1)(1+1)(1+1) = (1+11)$$

なので，条件 (i) より，N は異なる素数 $p,\ q,\ r\ (p < q < r)$ を用いて

$$N = pq^5 = p^5 q = p^2 q^3 = p^3 q^2 = p^2 qr = pq^2 r = pqr^2 = p^{11}$$

一方，条件 (ii) より N は 12 の倍数である．$12 = 2^2 \cdot 3$ なので，最小の素因子の巾は 2 以上であり，素因子は 2 個以上である．よって，$pq^5,\ pq^2r,\ pqr^2,\ p^{11}$ は除かれる．したがって

$$N = 2^5 3 = 2^2 3^3 = 2^3 3^2 = 2^2 3r$$

のいずれかである．

$N = 2^2 3r$ の型のとき．約数に

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$$

がある．12 が 7 番目の約数なので，r は $5 \leqq r < 12$ の範囲になければならない．$r = 5$ のときは 12 未満の約数として 5 と 10 が入るので，12 は 8 番目になる．$r = 7,\ 11$ のときは 12 未満の約数として r のみが入り，12 は 7 番目になる．よって $N = 2^2 3 \cdot 7 = 84$ と $N = 2^2 3 \cdot 11 = 132$ は条件をみたす．他の 3 つについて，それぞれ約数を小さい方から 7 個並べる．

$$\begin{array}{rl} 2^5 3: & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12 \\ 2^2 3^3: & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12 \\ 2^3 3^2: & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9 \end{array}$$

この場合は $N = 2^5 3 = 96$ と $N = 2^2 3^3 = 108$ が条件をみたす．以上から，条件をみたすのは次の 4 数である．

$$84,\ 96,\ 108,\ 132$$

16.2　4 番問題

n は正の整数とし，文字 $a,\ b,\ c$ を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする．A_n の要素に対し次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$　文字 c が 2 つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件 $(*)$ を満たす確率 $P(n)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 12$ とする．A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件 $(*)$ を満たし，その 7 番目の文字は c であった．このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ．

16.2.1　解答

(1)　A_n の要素の個数は，n 個並んでいる文字を，$a,\ b,\ c$ のどれにするかの場合だけあり，3^n 個である．そのうち，文字 c が連続して現れない並べ方の総数を a_n とする．

文字 c が連続して現れない $n+2$ 個の文字列を，最初の文字で場合分けする．それが a か b なら，2 番目からの $n+1$ 個は，そのなかで c が連続しなければよい．それが c ならその次は a か b で，3 番目からの n 個は，そのなかで c が連続しなければよい．よって，

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n$$

が成り立つ．$n=1$ のときは，$a,\ b,\ c$ なので $a_1=3$，$n=2$ のときは，cc 以外なので $a_2=3^2-1=8$ である．

ここで，漸化式を

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$$

と変形する．$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-2$ なので，

$$\alpha=1-\sqrt{3},\ \beta=1+\sqrt{3}$$

である．このとき漸化式は

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

と変形されるので，

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

ここで，

$$a_2-\alpha a_1=5+3\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}{2}$$

なので，

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\frac{\beta^{n+2}}{2}$$

同様に

$$a_{n+1}-\beta a_n=\frac{\alpha^{n+2}}{2}$$

なので，この 2 式を辺々引いて，

$$(\beta-\alpha)a_n=\frac{\beta^{n+2}}{2}-\frac{\alpha^{n+2}}{2}$$

$\beta-\alpha=2\sqrt{3}$ より

$$a_n=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}\right)$$

よって，

$$P(n)=\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{4\sqrt{3}\cdot 3^n}\left(\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}\right)$$

ここで，α と β は上記のものである．

(2)　条件 $(*)$ を満たし，その 7 番目の文字は c であるので，6 番目と 8 番目は a か b であり，このとき，1〜5 番と 9〜n 番はそのなかで c が連続しなければよい．その文字列の総数は $4\cdot a_5\cdot a_{n-8}$ である．

この条件の下でさらに，10 番目の文字が c であるのは，9 番目と 11 番目は a か b であり，このとき，1〜5 番と 12〜n 番はそのなかで c が連続しなければよい．その文字列の総数は $4^2\cdot a_5\cdot a_{n-11}$ である．総数はいずれも 3^n なので，

$$\begin{aligned}Q(n)&=\frac{4^2\cdot a_5\cdot a_{n-11}}{4\cdot a_5\cdot a_{n-8}}\\&=\frac{4\cdot a_{n-11}}{a_{n-8}}=4\cdot\frac{\beta^{n-9}-\alpha^{n-9}}{\beta^{n-6}-\alpha^{n-6}}\\&=4\cdot\frac{1-(\alpha/\beta)^{n-9}}{\beta^3-\alpha^3(\alpha/\beta)^{n-9}}\end{aligned}$$

$|\alpha/\beta|<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}Q(n)=\frac{4}{\beta^3}=\frac{2}{5+3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-5$$

16.3　5 番問題

実数，$a,\ b,\ c$ に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく．また，複素数平面内の単位円周から 2 点 1，-1 を除いたものを T とする．

(1) $f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ．

(2) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$$

を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ．

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

16.3.1　解答

(1)　$f(x)=0$ の 2 解が T 上にあれば，それは絶対値 1 の虚数解である．逆に，$f(x)=0$ の 2 解が虚数解 α と $\bar{\alpha}$ をもてば，その積 $\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2=1$ より，それは T 上にある．よって，$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は，

$$f(x) \text{ の判別式} = c^2-4<0$$

である．つまり

$$-2<c<2$$

(2)　$F(x)$ の係数はすべて実数なので，T 上の解は

$$\alpha,\ \bar{\alpha},\ \beta,\ \bar{\beta}$$

と書け，$\alpha\bar{\alpha}=1$，$\beta\bar{\beta}=1$ である．

$$c_1=-(\alpha+\bar{\alpha}),\ c_2=-(\beta+\bar{\beta})$$

とおくと，c_1，c_2 は実数で，

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$$

となる．

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるなら，$F(x)=0$ は (2) のように分解される．ここで，

$$(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)=x^4+(c_1+c_2)x^3+(c_1c_2+2)x^2+(c_1+c_2)x+1$$

なので，$a=c_1+c_2$，$b=c_1c_2+2$ である．つまり，c_1，c_2 は X の 2 次方程式

$$g(X)=X^2-aX+b-2=0$$

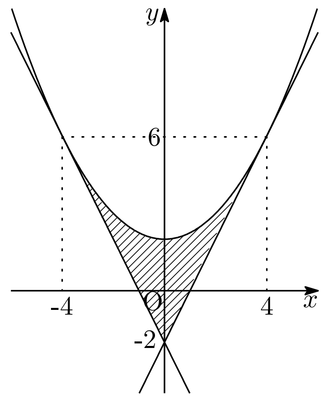
の 2 解である．$F(x)=0$ の解がすべて異なり，かつ T 上にある十分条件は，c_1，c_2 が (1) をみたす異なる数であること，つまり $g(X)=0$ が異なる 2 解をもち，ともに $-2<X<2$ あることである．この条件は

$$g(\pm 2)>0,\ -2<\frac{a}{2}<2,\ a^2-4(b-2)>0$$

つまり

$$\begin{aligned}&4\pm 2a+b-2>0,\ -4<a<4\\&a^2-4b+8>0\end{aligned}$$

これを図示する．



17　千葉大

17.1　11 番問題

数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める．

$$a_1=2,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_5 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ が収束することを示し，その和を求めよ．

17.1.1　解答

(1)，(2)　漸化式から $a_{n+1}-1\neq 0$ で

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

よってまた $n\geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{a_n-1}=1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k}$$

辺々引いて，

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=-\frac{1}{a_n}$$

これから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}$$

となり，

$$a_{n+1}=a_n(a_n-1)+1$$

である．これから

$$a_2=2(2-1)+1=3,\ a_3=3(3-1)+1=7,$$
$$a_4=7(7-1)+1=43,\ a_3=43(43-1)+1=1807$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} &= \frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{a_{k+1}-1}+\frac{1}{a_k-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}-1}+\frac{1}{a_2-1}=1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\end{aligned}$$

ここで，$a_1=2>1$ かつ

$$a_{n+1}-a_n=a_n(a_n-1)+1-a_n=(a_n-1)^2$$

より，$a_n>1$ なら $a_{n+1}>a_n>1$ となり，つねに $a_n>1$．これからまた，数列 $\{a_n\}$ は単調に増加する自然数列である．よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ である．この結果，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=1$$

つまり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ は収束し，その和は 1 である．

18　順天堂大学

18.1　問題

関数 $f(x)$ にについて，区間 I における次の性質 (A) を考える．

性質 (A)　区間 I に含まれる任意の 2 点 $a,\ b$ に対して

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

が成り立つ．

(1) 関数 $f(x)=-x^2$ は区間 $-\infty<x<\infty$ において性質 (A) を持つことを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ が区間 I において性質 (A) を持つとき，区間 I に含まれる n 個の任意の数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ に対して

(B) $$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \geqq \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}$$

が成り立つことが知られている．

このことを $n=2^k$ (k は自然数) の場合について証明せよ．

(3) 連続関数 $f(x)$ が区間 $[0,\ 1]$ において性質 (A) を持つとき，

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つことを示せ．

18.1.1 解答

(1) $-\infty < a,\ b < \infty$ の実数 a と b に対して，

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} = -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{-a^2-b^2}{2} \\ = \quad & -\frac{1}{4}\left(-a^2-2ab-b^2+2a^2+2b^2\right) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

である．よって $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqq \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ が成立し，この $f(x)$ は性質 (A) を持つ．また $a=b$ のとき等号が成立する．

(2) k に関し，2^k 個の文字の個数に関する数学的帰納法で示す．

$k=1$ のときは関数 $f(x)$ が区間 I において性質 (A) を持つことより成立する．

k のとき成立するとする．つまり 2^k 個なら成立とする．$k+1$ のとき

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) \\ = \quad & f\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right\} \\ (\text{性質 (A) より}) \quad \geqq \quad & \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right\} \\ (\text{帰納法の仮定より}) \quad \geqq \quad & \frac{1}{2}\left(\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2^k})}{2^k}\right. \\ & \left. +\frac{f(a_{2^k+1})+f(a_{2^k+2})+\cdots+f(a_{2^{k+1}})}{2^k}\right) \\ = \quad & \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2^{k+1}})}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

よって $k+1$ のときも成立し，すべての自然数 k に対して $n=2^k$ のとき (B) が成立する．

(3) $i=1,\ \cdots,\ n$ に対して $\dfrac{i}{n} \in [0,\ 1]$ なので，$n=2^k$ のとき (2) から，

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \leqq f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n}\right) = f\left(\frac{n+1}{2n}\right) \quad \cdots ①$$

が成り立つ．

関数 $f(x)$ は連続であるから，自然数 n に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{n+1}{2n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

がそれぞれ成り立つ．

① において，$k\to\infty$ とする．このとき $n\to\infty$ である．従って，不等式

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ．

別解　$x\in[0,\ 1]$ とすると $1-x\in[0,\ 1]$ である．したがって，

$$\frac{f(x)+f(1-x)}{2} \leqq f\left(\frac{x+1-x}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ．これから

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \{f(x)+f(1-x)\}\,dx \leqq \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right)\,dx = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ．ここで $t=1-x$ と置換すると，

$$\int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_1^0 f(t)\,(-1)dt = \int_0^1 f(t)\,dt$$

なので，不等式

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ．

19　早稲田教育学部

19.1　問題 1

次の各問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) 座標平面上で，点 O$(0,0)$，A$(0,1)$，B$(1,0)$，C$(1,1)$ を考える．点 P が点 B から点 C まで動くとき，正方形 AOBC の辺および内部において，線分 OP の垂直 2 等分線が通る範囲の面積を求めよ。

(2) n を 2 以上の自然数とする．1 から n までの自然数の順列

$$a_1a_2\cdots a_n$$

のうち，$a_k < a_{k+1}$ を満たさないような k がただ 1 つだけある順列の総数を P_n とする．例えば $n=3$ の場合，条件を満たす順列全体は $\{132, 213, 231, 312\}$ であるので，$P_3=4$ である．P_{n+1} と P_n の関係式を求めよ．

(3) 整数係数の 3 次多項式 $f(x)$ が $f(0)=1$ かつ $f\left(\cos\dfrac{\pi}{7}\right)=0$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ．

(4) 定数 c は $-1<c<1$ を満たすとする．すべての実数 x に対して，関係式

$$f(x)+f(cx)=x^2$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

19.1.1　解答

(1)　P(1, t) $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおく．OP の垂直二等分線上の点を $(X,\ Y)$ とおくと，

$$X^2+Y^2=(X-1)^2+(Y-t)^2$$

より，

$$2X+2tY-1-t^2=0$$

これが，線分 OP の垂直 2 等分線の方程式である．点 $(X,\ Y)$ が垂直 2 等分線が通る範囲にあるための必要十分条件は

t の 2 次方程式 : $t^2-2Yt-2X+1=0$ が $0 \leqq t \leqq 1$ に解をもつ．　$\cdots$①
$(X,\ Y)$ は正方形 $AOBC$ の辺および内部にある．　$\cdots$②

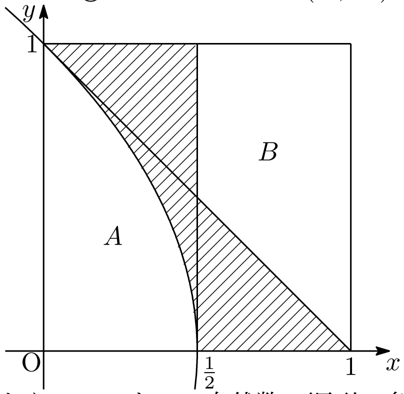
である．$f(t)=t^2-2Yt-2X+1$ とおくと，tu 平面上の放物線 $u=f(t)$ の軸が $t=Y$ で $f(t)$ の判別式 D が $D/4=Y^2+2X-1$ なので，条件 ① は，次のいずれかが成立することと同値である．ただし「,」は「かつ」を意味する．

$$\begin{cases} f(0) \geqq 0,\ f(1) \leqq 0 \\ f(0) \leqq 0,\ f(1) \geqq 0 \\ f(0) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0,\ 0 \leqq Y \leqq 1,\ Y^2+2X-1 \geqq 0 \end{cases}$$

つまり，

$$\begin{cases} -2X+1 \geqq 0,\ 1-X-Y \leqq 0 \\ -2X+1 \leqq 0,\ 1-X-Y \geqq 0 \\ -2X+1 \geqq 0,\ 1-X-Y \geqq 0,\ 0 \leqq Y \leqq 1,\ Y^2+2X-1 \geqq 0 \end{cases}$$

これと条件 ② の両方を満たす $(X,\ Y)$ の存在する領域を xy 平面に図示する．



その面積 S は，正方形から放物線と正方形で囲まれる領域 A と台形 B を除いた領域の面積である．よって

$$\begin{aligned} S &= 1-\int_0^1\left(-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\right)dy-\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ &= 1-\left[-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y\right]_0^1-\frac{3}{8}=\frac{7}{24} \end{aligned}$$

(2)　1 から $n+1$ までの自然数の順列で条件を満たすものを考える．その順列から $n+1$ を除いた，1 から n までの順列は次のいずれかである．

(i) 1 から n までの順列はすべて $a_k < a_{k+1}$ を満たしている．この場合は，1 から n まで順に並んでいるなかに $n+1$ を戻す方法だけあり，その位置は，右端を除く 1 から n までの数の間であり，n 通りある．

(ii) 1 から n までの順列が条件を満たしている．$n+1$ を戻す位置は，右端か，または $a_k > a_{k+1}$ なっている間である．つまり $a_k < n+1 > a_{k+1}$ である．よってこれらは $2P_n$ 通りある．

(i)，(ii) は排反であるから P_{n+1} と P_n の関係式は次のようになる．

$$P_{n+1}=2P_n+n$$

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ とし，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく．$\alpha^7=-1$，つまり α は

$$\alpha^7+1=(\alpha+1)(\alpha^6-\alpha^5+\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\alpha^1+1)=0$$

を満たす．$\alpha+1\neq 0$ であるから

$$\alpha^6-\alpha^5+\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\alpha^1+1=0$$

である．これに α^{-3} をかけ同値変形すると，

$$\begin{aligned} & \alpha^3-\alpha^2+\alpha^1-1+\alpha^{-1}-\alpha^{-2}+\alpha^{-3}=0 \\ \iff\quad & (\alpha+\alpha^{-1})^3-3(\alpha+\alpha^{-1})-(\alpha+\alpha^{-1})^2+2+(\alpha+\alpha^{-1})-1=0 \end{aligned}$$

ここで $\alpha+\alpha^{-1}=2\cos\theta$ なので，これを代入して，

$$\begin{aligned} & (2\cos\theta)^3-3(2\cos\theta)-(2\cos\theta)^2+2+(2\cos\theta)-1=0 \\ \iff\quad & 8\cos^3\theta-4\cos^2\theta-4\cos\theta+1=0 \end{aligned}$$

となる．よって求める $f(x)$ は次式である．

$$f(x)=8x^3-4x^2-4x+1$$

(4)　$x=0$ を代入して $f(0)+f(0)=0$ より $f(0)=0$ である．

k を 0 以上の整数として，関係式の x に $c^k x$ を代入すると

$$f(c^k x) + f(c^{k+1} x) = c^{2k} x^2$$

が成り立つ．これから

$$(-1)^k f(c^k x) - (-1)^{k+1} f(c^{k+1} x) = (-c^2)^k x^2$$

k についての和をとる．

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{(-1)^k f(c^k x) - (-1)^{k+1} f(c^{k+1} x)\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} (-c^2)^k x^2$$

つまり

$$f(x) - (-1)^n f(c^n x) = \frac{1 - (-c^2)^n}{1 + c^2} x^2$$

がすべての自然数 n で成りたつ．

$f(x)$ は連続で，$|c| < 1$ なので，

$$\lim_{n \to \infty} |(-1)^n f(c^n x)| = \left| f\left(\lim_{n \to \infty} c^n x\right) \right| = |f(0)| = 0$$

であるから，

$$\lim_{n \to \infty} \{f(x) - (-1)^n f(c^n x)\} = f(x) - \lim_{n \to \infty} \{(-1)^n f(c^n x)\} = f(x)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - (-c^2)^n}{1 + c^2} x^2 = \frac{1}{1 + c^2} x^2$$

となる．よって

$$f(x) = \frac{1}{1 + c^2} x^2$$

である．

19.2　問題 4

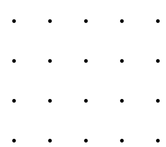
平面全体に縦横同じ間隔で電球が置かれていて，次の規則で点滅を繰り返すとする．

初めはすべての電球が消えている．

ある 1 個の電球が 1 秒後に点灯し，2 秒後にその周りに隣接する 8 個の電球が点灯する．3 秒後には，さらにその外側に隣接する電球が点灯する．一般に $n + 1$ 秒後には，n 秒目に初めて点灯した電球の外側に隣接する電球が点灯する．

一度点灯した電球は「2 秒間点灯して次の 1 秒間消灯」を繰り返す．

下の図は電球の配置の一部分を示している．



$n \geqq 1$ とする．n 秒後に初めて点灯する電球の個数を a_n とし，n 秒後に点灯している電球の個数を b_n として，次の問に答えよ．

(1) a_n を n を用いた式で表せ.

(2) b_n を n を用いた式で表せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$ を求めよ.

19.2.1　解答

(1)　点灯する電球は，上下と左右に 2 列ずつ広がってゆく．したがって，n 秒後は，$2n-1$ 個の電球の連続した一列の並びを 1 辺とする正方形の辺上の電球が点灯する．よって，$a_1=1$ で，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=(2n-1)^2-(2n-3)^2=8(n-1)$$

である．

(2)　すでに点灯している電球は，3 秒ごとに同じ動作を繰り返す．そして，$n+3$ 秒後には，n 秒後の状態から，$n+1$ 秒後に点灯した電球が消え，$n+2$ 秒後，$n+3$ 秒後の電球が点灯状態にある．よって，

$$b_{n+3}-b_n=a_{n+3}+a_{n+2}=8(2n+3)$$

が成り立つ．そして

$$b_1=1,\ b_2=9,\ b_3=25-1=24$$

である．$n=3m-2$ のとき．

$$b_{3m+1}-b_{3m-2}=b_{3(m+1)-2}-b_{3m-2}=8(6m-1)$$

なので，

$$\begin{aligned}b_{3m-2}&=b_1+\sum_{k=1}^{m-1}8(6k-1)=1+8(m-1)(3m-1)\\&=1+8\left(\frac{n+2}{3}-1\right)(n+2-1)=\frac{8n^2-5}{3}\end{aligned}$$

$n=3m-1$ のとき．

$$b_{3m+2}-b_{3m-1}=b_{3(m+1)-1}-b_{3m-1}=8(6m+1)$$

なので，

$$\begin{aligned}b_{3m-2}&=b_2+\sum_{k=1}^{m-1}8(6k+1)=9+8(m-1)(3m+1)\\&=9+8\left(\frac{n+1}{3}-1\right)(n+1+1)=\frac{8n^2-5}{3}\end{aligned}$$

$n=3m$ のとき．

$$b_{3m+3}-b_{3m}=b_{3(m+1)}-b_{3m}=8(6m+3)=24(2m+1)$$

なので，

$$b_{3m}=b_3+\sum_{k=1}^{m-1}24(2k+1)=24+24(m-1)(m+1)=24m^2=\frac{8n^2}{3}$$

つまり

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{8n^2-5}{3} & (n \not\equiv 0 \pmod 3) \\ \dfrac{8n^2}{3} & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases}$$

(3)

$$\frac{b_n}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{8}{3} - \dfrac{8}{3n^2} & (n \not\equiv 0 \pmod 3) \\ \dfrac{8}{3} & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases}$$

なので，いずれも $n \to \infty$ の極限は同じである．よって，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{8}{3}.$$

20　奈良医大（後）

20.1　問題

S を $a + b\sqrt{2}$（但し a，b は整数）の形に表される数すべての集合とする．S に属する任意の数 $z = a + b\sqrt{2}$（但し a，b は整数）に対して，$N(z) = a^2 - 2b^2$ とおく．

(1) S に属する任意の数 z，w に対して，$z + w \in S$，$zw \in S$ かつ $N(zw) = N(z)N(w)$ が成り立つことを証明せよ．

(2) S に属する零でない数 $z = x + y\sqrt{2}$（x，y は整数）の逆数 z^{-1} が S に属するための必要十分条件は，$x^2 - 2y^2 = 1,\ -1$ であることを証明せよ．

(3) $1 < z < 1 + \sqrt{2}$ を満たすような S の数 z で，その逆数 z^{-1} も S に属するものは存在しないことを証明せよ．

(4) S に属する零でない数 z で，その逆数 z^{-1} も S に属するものはすべて $(1+\sqrt{2})^n$，$-(1+\sqrt{2})^n$（n は整数）によって与えられることを証明せよ．

20.1.1　解答

(1) $z = x + y\sqrt{2}$，$w = s + t\sqrt{2}$ とおく．x，y，s，t が整数のとき，$x+s$，$y+t$，$xs+2yt$，$xt+ys$ も整数なので，

$$z + w = x + s + (y+t)\sqrt{2} \in S$$
$$zw = xs + 2yt + (xt+ys)\sqrt{2} \in S$$

である．

$$\begin{aligned} N(zw) &= (xs+2yt)^2 - 2(xt+ys)^2 = x^2s^2 + 4y^2t^2 - 2x^2t^2 - 2y^2s^2 \\ &= (x^2-2y^2)(s^2-2t^2) = N(z)N(w) \end{aligned}$$

である．

(2)

$$z^{-1} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2}$$

が S に属するための必要十分条件は，$a=\dfrac{x}{x^2-2y^2}$，$b=\dfrac{y}{x^2-2y^2}$ がともに整数である．$x^2-2y^2=1,\ -1$ なら成立．逆に，a と b が整数とする．このとき

$$a^2-2b^2=\frac{1}{x^2-2y^2}$$

が整数より，$x^2-2y^2=1,\ -1$ である．

（3）$z=x+y\sqrt{2}$ とおく．逆数 z^{-1} も S に属するとする．このとき $|x^2-2y^2|=1$ なので，

$$\left|\left(x+y\sqrt{2}\right)\left(x-y\sqrt{2}\right)\right|=\left|x^2-2y^2\right|=1$$

よって $1<z=x+y\sqrt{2}$ なら

$$\left|x-y\sqrt{2}\right|<1$$

つまり

$$-1<x-y\sqrt{2}<1$$

$1<x+y\sqrt{2}$ と，辺々の和と差を取ることにより，$0<x,\ y$ を得る．つまり $x\geqq 1$，$y\geqq 1$ となり，$x+y\sqrt{2}<1+\sqrt{2}$ と矛盾する．

つまり，$1<z<1+\sqrt{2}$ を満たすような S の数 z で，その逆数 z^{-1} も S に属するものは存在しない．

（4）S に属する零でない数 z で，その逆数 z^{-1} も S に属するなかで，1 より大きいものを考える．(3) から，このような z で最小のものは $\alpha=1+\sqrt{2}$ であり，$N(\alpha)=1$ である．(1) から

$$N(\alpha^n)=N(\alpha)^n=1$$

なので，$(1+\sqrt{2})^n$ の逆数もまた S に属する．

z もその逆数も S に属する 1 より大きい正の任意の数 z を取る．α^m は α に関して単調増加なので，

$$\alpha^m\leqq z<\alpha^{m+1}$$

となる正整数 m がある．(1) より，$z\alpha^{-m}\in S$ で，その逆数も S に属するが，

$$1\leqq z\alpha^{-m}<\alpha=1+\sqrt{2}$$

なので，(3) から，$1=z\alpha^{-m}$ でなければならない．よって，$z=\alpha^m$ である．

z が 1 以下の正の数のときは $z^{-1}>1$ なので，$z^{-1}=\alpha^m$，つまり $z=\alpha^{-m}$ である．

また $z=1=1+0\cdot\sqrt{2}\in S$ で，その逆数も S に属するが，$1=(1+\sqrt{2})^0$ である．

よって，z が正なら $z=(1+\sqrt{2})^n$ となる整数 n がある．

$z<0$ のときは $-z>0$ なので，$-z=\alpha^n$，つまり，$z=-(1+\sqrt{2})^n$ と表す整数 n がある．

よって，z とその逆数 z^{-1} も S に属するものはすべて $(1+\sqrt{2})^n$，$-(1+\sqrt{2})^n$（n は整数）によって与えられる．

『数論初歩』の「ペル方程式の解の構造」にある，例 6.1.3［東工大 85 年］を参照のこと．

21　昭和大医

21.1　問題

次の問いに答えよ．

公平なサイコロを 1 回振るごとに，偶数の目が出たら 1(万円) 獲得し，奇数の目が出たら 1(万円) 損失するという賭けを行う．所持金 0 でこの賭けを n 回繰り返した際の損益額の合計を Z_n(万円) とする．ただし，$Z_0 = 0$ とする．

(1) $M_n = \max\limits_{0 \leqq i \leqq n} Z_i$ とするとき，確率 $P(M_4 = k)$，$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$\max\limits_{0 \leqq i \leqq n} Z_i$ は $0 \leqq i \leqq n$ における Z_i の最大値を表す．

(2) $T_n = \#\{i | i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ (Z_i = 0 \cap Z_{i+1} = 1) \cup (Z_i = 1 \cap Z_{i+1} = 0)\}$ とするとき，確率 $P(T_4 = k)$，$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$\#A$ は集合 A の要素の個数を表す．

(3) 任意の k に対して $P(M_5 = k)$ と $P(T_5 = k)$ の間に成り立つ関係を求めよ．

21.1.1　解答

(1)　1 と -1 の値をとる確率変数 X_i は，$0 \leqq i$ に対し、

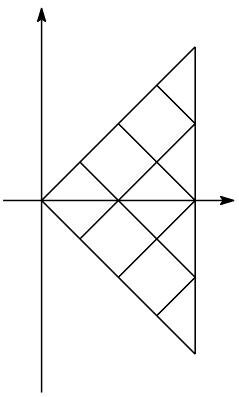
$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

であるとする．このとき

$$Z_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_i$$

である．$0 \leqq i \leqq n$ に対し，$(i,\ Z_i)$ を座標平面上にとる．

$n = 4$ のとき．試行の総数は 2^4 である．左図をもとに，条件を満たす $(0,\ 0)$ からの経路の総数を数えることにより，次の結果を得る．



$$\begin{aligned}
M_4 = 4 \quad &: \quad \nearrow\nearrow\nearrow\nearrow \\
P(M_4 = 4) \quad &= \quad \frac{1}{16} \\
M_4 = 3 \quad &: \quad \nearrow\nearrow\nearrow\searrow \\
P(M_4 = 3) \quad &= \quad \frac{1}{16} \\
M_4 = 2 \quad &: \quad \nearrow\nearrow\searrow\nearrow,\ \nearrow\nearrow\searrow\searrow,\ \nearrow\searrow\nearrow\nearrow,\ \searrow\nearrow\nearrow\nearrow \\
P(M_4 = 2) \quad &= \quad \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \\
M_4 = 1 \quad &: \quad \nearrow\searrow\searrow\searrow,\ \nearrow\searrow\searrow\nearrow,\ \nearrow\searrow\nearrow\searrow,\ \searrow\nearrow\nearrow\searrow \\
P(M_4 = 1) \quad &= \quad \frac{4}{16} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

そして，

$$\sum_{k=0}^{4} P(M_4 = k) = 1$$

より，

$$P(M_4=0)=1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$$

(2)　同様に考える．

$$\begin{aligned}
T_4=4 &: \nearrow\searrow\nearrow\searrow \\
P(T_4=4) &= \frac{1}{16} \\
T_4=3 &: \nearrow\searrow\nearrow\nearrow \\
P(T_4=3) &= \frac{1}{16} \\
T_4=2 &: \nearrow\searrow\searrow\searrow,\ \nearrow\searrow\searrow\nearrow,\ \nearrow\nearrow\searrow\searrow,\ \searrow\nearrow\nearrow\searrow \\
P(T_4=2) &= \frac{4}{16}=\frac{1}{4} \\
T_4=1 &: \nearrow\nearrow\nearrow\nearrow,\ \nearrow\nearrow\nearrow\searrow,\ \nearrow\nearrow\searrow\nearrow,\ \searrow\nearrow\nearrow\nearrow \\
P(T_4=1) &= \frac{4}{16}=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

そして，

$$\sum_{k=0}^{4}P(T_4=k)=1$$

より，

$$P(T_4=0)=1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$$

(3)　(2) と同様に，$P(M_5=5)=1$，$P(T_5=5)=1$ である．また，$P(M_5=0)$ と $P(T_5=0)$ が他の事象の和の余事象であることも同様である．

そこで，$1\leqq k\leqq 4$ に対して，$P(M_5=k)$ と $P(T_5=k)$ をそれぞれ，$P(M_4=k-1)$，$P(M_4=k+1)$ と $P(T_4=k-1)$，$P(T_4=k+1)$ で表す．

$P(M_5=k)$ について．$M_5=k$ となる事象は，

$X_1=1$ なら，そこからはじめて残る 4 回の試行で $y=1$ からの正方向の最大偏位が $k-1$ となり，

$X_1=-1$ なら，そこからはじめて残る 4 回の試行で $y=-1$ からの正方向の最大偏位が $k+1$ となるような事象である．

よって，

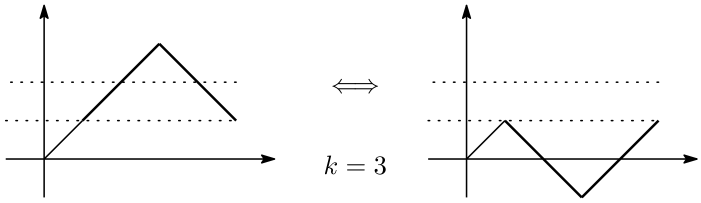
$$P(M_5=k)=\frac{1}{2}P(M_4=k-1)+\frac{1}{2}P(M_4=k+1)$$

が成り立つ．

$P(T_5=k)$ について．$T_5=k$ となる事象は，

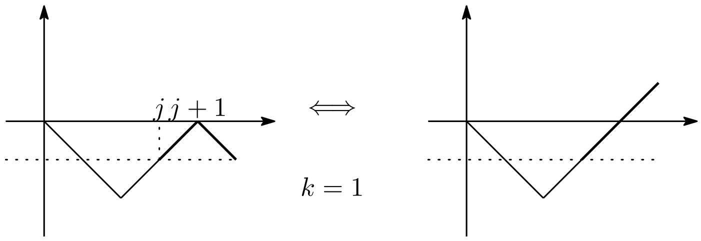
$X_1=1$ のとき．2 回目からはじめて残る 4 回の試行で，$(Z_i=1)\cap(Z_{i+1}=2)$ か $(Z_i=2)\cap(Z_{i+1}=1)$ が $k-1$ 回起こるとする．このとき，その $n\geqq 1$ の部分での $X_i=\pm1$ を $X_i=\mp1$ に置きかえて得られる試行を考えると，1 回目の試行とあわせて $T_5=k$ となる事象が得られる．

逆に，$X_1=1$ で $T_5=k$ となる事象から逆の置きかえで，$(Z_i=1)\cap(Z_{i+1}=2)$ か $(Z_i=2)\cap(Z_{i+1}=1)$ が $k-1$ 回起こる事象が得られる．



$X_1 = -1$ なら，2 回目からはじめて残る 4 回の試行で，$(Z_i = -1) \cap (Z_{i+1} = 0)$ か $(Z_i = 0) \cap (Z_{i+1} = -1)$ が $k+1$ 回起こるとする．最初に $(Z_j = -1) \cap (Z_{j+1} = 0)$ となる $j+1$ に対し，$n \geqq j+1$ の部分での $X_i = \pm 1$ を $X_i = \mp 1$ に置きかえて得られる試行を考えると，これによって $T_5 = k$ となる事象が 1 つ得られる．

逆に，$X_1 = -1$ で $T_5 = k$ となる事象から逆の置きかえで，$(Z_i = -1) \cap (Z_{i+1} = 0)$ か $(Z_i = 0) \cap (Z_{i+1} = -1)$ が $k+1$ 回起こる事象が得られる．



したがって，

$$P(T_5 = k) = \frac{1}{2}P(T_4 = k-1) + \frac{1}{2}P(T_4 = k+1)$$

が成り立つ．

$n = 4$ のときは

$$P(M_4 = k) = P(T_4 = k)$$

であったので，この漸化式と $k = 0,\ 5$ のときの考察から

$$P(M_5 = k) = P(T_5 = k)$$

が任意の k に対して成り立つ．

注意 1　同様の考察で

$$P(M_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(M_n = k-1) + \frac{1}{2}P(M_n = k+1)$$
$$P(T_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(T_n = k-1) + \frac{1}{2}P(T_n = k+1)$$

が成り立ち，$n = 2$ のときの考察とあわせて，任意の n と k に対して

$$P(M_n = k) = P(T_n = k)$$

が成り立つ．

注意 2

$$P(M_n = k) = {}_n\mathrm{C}_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]} \cdot 2^{-n}$$

が成り立つ．この結論が分かっているときは，右辺が上記漸化式を満たすことを示し，さらに $k=0,\ n$ のときの同様の考察と，$n=1$ のときの成立の確認で，数学的帰納法により，この等式の成立が示される．

結論が分かっていないときでも，高校範囲でこの等式を示すことができる．これについては宿題とする．

22 早稲田理工

22.1 問題

3 次の整式 $f(x)=x^3+x^2+px+q$ (ただし，$p\neq q,\ q\neq 0$)，および $g(x)=\dfrac{-1}{x+1}$ が次の条件 $(*)$ をみたすとする．

$$(*)\quad f(x)=0 \text{ の任意の解 } \alpha \text{ に対して } g(\alpha) \text{ も } f(x)=0 \text{ の解である．}$$

次の問に答えよ．

(1) $p,\ q$ の値を求めよ．

(2) $f(x)=0$ は $-2<x<2$ の範囲に 3 つの実数解をもつことを示せ．

(3) $f(x)=0$ の任意の解を $2\cos\theta$ とするとき，$2\cos 2\theta,\ 2\cos 3\theta$ も解であることを示せ．

(4) $2\cos\theta\ (0<\theta<\pi)$ が $f(x)=0$ の解であるとき，θ の値を求めよ．

22.1.1 解答

(1) 3 次方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする．

1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ がすべて異なるとき．

解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-1 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p \qquad \cdots ① \\ \alpha\beta\gamma=-q \end{cases}$$

である．$\dfrac{-1}{\alpha+1},\ \dfrac{-1}{\beta+1},\ \dfrac{-1}{\gamma+1}$ も，3 つの解である．よって同様に

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{\alpha+1}+\dfrac{-1}{\beta+1}+\dfrac{-1}{\gamma+1}=-1 \\ \dfrac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}+\dfrac{-1}{(\beta+1)(\gamma+1)}+\dfrac{-1}{(\gamma+1)(\alpha+1)}=p \qquad \cdots ② \\ \dfrac{-1}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}=-q \end{cases}$$

② の第 1 式を変形して

$$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

これに ① を代入する．

$$p+(-1)+(-1)+3=-q+p-1+1$$

よって $q=-1$．② の第 3 式より

$$-q+p-1+1=q$$

よって $p=-2$ である．

注意　$p=-2$，$q=-1$ を導いたが，これはあくまで必要条件である．

問題文が「$(*)$ を満たすとする」とあるときは必要条件でよい．

小問構成が変わり，問題文に「$(*)$ を満たすための $p,\ q$ の値を求めよ」とあるときは，② の第 2 式の成立，つまり十分性の確認までが必要である．

2）　$\gamma=\beta$ のとき．$g(\alpha)$ と $g(\beta)$ のとりうる値は α と β である．

$g(\alpha)=\alpha$ のとき．これより

$$\alpha^2+\alpha+1=0$$

つまり，$\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$．この一方を ω とする．

$g(\alpha)=\beta$，$g(\beta)=\alpha$ のとき．$\alpha=\beta$ となる．以上から，

$$(\alpha,\ \beta)=(\omega,\ \bar{\omega}),\ (\bar{\omega},\ \omega),\ (\omega,\ \omega),\ (\bar{\omega},\ \bar{\omega})$$

解と係数の関係から、3 数の和は -1 であるがこれを満たすものはない．

(2) $f(-2)=-1<0$，$f(-1)=1>0$，$f(1)=-1<0$，$f(2)=7>0$ より，$f(x)=0$ は $-2<x<-1,\ -1<x<1,\ 1<x<2$ に解をもち，3 次方程式なので，これらが解のすべてである．つまり，$-2<x<2$ の範囲に 3 つの実数解をもつ．

(3)

$$\begin{aligned}
f(2\cos\theta) &= 8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta-1\\
&= 4\cos\theta(2\cos^2\theta-1)+2(2\cos^2\theta-1)+1\\
&= 4\cos\theta(\cos 2\theta)+2(\cos 2\theta)+1=0
\end{aligned}$$

よって

$$2\cos 2\theta=\frac{-1}{2\cos\theta+1}=g(2\cos\theta)\quad\cdots ③$$

α が $f(x)=0$ の解のとき，

$$\frac{1}{\alpha}=\alpha^2+\alpha-2$$

であるから，

$$g(g(\alpha))=\frac{-1}{\dfrac{-1}{\alpha+1}+1}=-1-\frac{1}{\alpha}=-\alpha^2-\alpha+1$$

となる．ここで $8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta-1=0$ より，

$$2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$$

つまり

$$2\cos 3\theta = -(2\cos\theta)^2 - (2\cos\theta) + 1 = g(g(2\cos\theta)) \quad \cdots ④$$

である．$g(2\cos\theta)$ が $f(x)=0$ の解なので，$g(g(2\cos\theta))$ も解である．

(4) $2\cos\theta$ が解のとき ③ がなりたつので，$2\cos 2\theta$ が解のとき，③ の θ を 2θ で用いて

$$2\cos 4\theta = g(2\cos 2\theta)$$

がなりたつ．一方，④ から

$$2\cos 3\theta = g(2\cos 2\theta)$$

である．よって，

$$\cos 3\theta = \cos 4\theta$$

が必要である．これより

$$\cos 4\theta - \cos 3\theta = -2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2} = 0$$

である．$0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\dfrac{\theta}{2} = 0$ となる θ は存在しない．$0 < \dfrac{7\theta}{2} < \dfrac{7\pi}{2}$ より $\sin\dfrac{7\theta}{2} = 0$ となるのは

$$\frac{7\theta}{2} = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$$

つまり，$x = 2\cos\theta$ が解のとき，

$$\theta = \frac{2\pi}{7},\ \theta = \frac{4\pi}{7},\ \theta = \frac{6\pi}{7}$$

が必要である．

(2) より，$f(x)=0$ の解は 3 個あり，すべて $-2<x<2$ にあるので，その解は $2\cos\theta$ と表せる．必要条件で絞られた 3 個の θ に対する $x = 2\cos\theta$ の値はすべて異なるので，これらが，$2\cos\theta$ が $f(x)=0$ の解であるような θ $(0<\theta<\pi)$ の値のすべてである．

注意

十分性は次のように直接示すこともできる．

$\theta = \dfrac{2\pi}{7}$ のとき，(3) の冒頭の変形より

$$\begin{aligned} f\left(2\cos\frac{2\pi}{7}\right) &= 4\cos\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right) + 2\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right) + 1 \\ &= 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right) + 2\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right) + 1 \end{aligned}$$

$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$ より

$$f\left(2\cos\frac{2\pi}{7}\right) = \sum_{k=0}^{6}\cos\frac{2k\pi}{7}$$

である．ここで，

$$\sum_{k=0}^{6}\left(\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)=\frac{\left(\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)^7-1}{\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}-1}=0$$

なので，

$$f\left(2\cos\frac{2\pi}{7}\right)=0$$

となり，$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ は条件を満たす．この結果，$\theta=\dfrac{4\pi}{7},\ \dfrac{6\pi}{7}$ も条件を満たす．

23　滋賀医

23.1　問題

さいころを n 回投げるとき，1 の目が続けて m 回以上出る確率を $P(n,\ m)$ とする．さいころを $n+1$ 回投げるとき，同じ目が続けて $m+1$ 回以上出る確率を $Q(n,\ m)$ とする．

(1) $P(3,\ 2)$ と $Q(3,\ 2)$ を求めよ．

(2) $P(n,\ 1)$ を n を用いて表せ．

(3) $P(n+2,\ 2)$ を $P(n+1,\ 2)$ と $P(n,\ 2)$ を用いて表せ．

(4) $P(n,\ m)$ と $Q(n,\ m)$ の大小を比較せよ．

23.1.1　解答

(1)　3 回投げて 1 の目が 2 回続くのは $(1,\ 1,\ \triangle)$，$(\triangle,\ 1,\ 1)$ のいずれか．ただし，△は 1 以外の目を表す．1 の目が 3 回続くのは $(1,\ 1,\ 1)$ のみ．よって

$$P(3,\ 2)=\frac{5+5+1}{6^3}=\frac{11}{216}$$

4 回投げて同じ目が 3 回続くのは $(\bigcirc,\ \bigcirc,\ \bigcirc,\ \triangle)$，$(\triangle,\ \bigcirc,\ \bigcirc,\ \bigcirc)$ のいずれか．ただし，△は○以外の目を表す．1 の目が 4 回続くのは $(\bigcirc,\ \bigcirc,\ \bigcirc,\ \bigcirc)$ のみ．よって

$$Q(3,\ 2)=\frac{6\cdot5+6\cdot5+6}{6^4}=\frac{11}{216}$$

(2)　n 回投げて 1 が 1 回以上続いて出る事象は，1 が 1 回も出ない事象の余事象である．よって，

$$P(n,\ 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(3)　n 回投げて 1 が 2 回以上続いて出る事象は，n 回投げて 1 が続いては出ない事象の余事象である．

$n+2$ 回投げて 1 が続いては出ない事象は，次の排反事象の和である．

(i) 1 回目が 1 以外で，2 回目以降の $n+1$ 回で 1 が続いては出ない事象．

(ii) 1 回目が 1 で，2 回目はそれ以外が出，そして 3 回目以降の n 回で 1 が続いては出ない事象．

よって，

$$1-P(n+2,\ 2)=\frac{5}{6}\left\{1-P(n+1,\ 2)\right\}+\frac{5}{6^2}\left\{1-P(n,\ 2)\right\}$$

これから，

$$P(n+2,\ 2)=\frac{5}{6}P(n+1,\ 2)+\frac{5}{36}P(n,\ 2)+\frac{1}{36}$$

である．

(4)　さいころを n 回投げるとき，1 の目が続けて m 回以上出る事象を，n 項よりなる出た目の数列の集合で表し，その集合を A とする．

$$A=\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\mid 1\text{ が続けて } m \text{ 回以上並ぶ}\}$$

さいころを $n+1$ 回投げるとき，同じ目が続けて $m+1$ 回以上出る事象を，$n+1$ 項よりなる出た目の数列の集合で表し，その集合を B とする．

$$B=\{(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n+1})\mid \text{同じ数が続けて } m+1 \text{ 回以上並ぶ}\}$$

事象 B はさらに，その初項が p $(1\leqq p\leqq 6)$ である要素の部分集合を B_p として，

$$B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_6$$

と，6 個の部分事象に分けることが出来る．

A の要素と B_p の要素の間に一対一の対応があることを示す．

A の要素に対し B_p の要素を次のように構成する．

i) A の要素 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ をとる．$c_k=a_k-1$ とする．

ii) $(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$ は 0 の目が続けて m 回以上出る 0 から 5 よりなる数列である．

iii) 数列 $(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{n+1})$ を $d_1=p,\ d_{j+1}=d_j+c_j$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ で定める．これは同じ数字が $m+1$ 以上続いて並んでいる．ただし 7 以上の数を含んでいるかも知れない．

iv) b_j $(1\leqq j\leqq n+1)$ を $1\leqq b_j\leqq 6$ で $b_j\equiv d_j \pmod 6$ であるようにとる．このとき，$(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n+1})\in B_p$ である．

逆に，B_p の要素に対し A の要素を次のように構成する．

i) B_p の要素 $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n+1})$ をとる．$e_j=b_{j+1}-b_j$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ で定める．ただし，負の数を含んでいるかも知れない．

ii) f_j $(1\leqq j\leqq n)$ を $0\leqq b_j\leqq 5$ で $f_j\equiv e_j \pmod 6$ であるようにとる．$(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)$ は 0 の目が続けて m 回以上出る 0 から 5 よりなる数列である．

iii) 数列 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を $a_j=f_j+1$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ で定める．このとき，$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\in A$ である．

この対応は互いに逆であり，一対一対応である．よって，$n(A)$ などで集合の要素の個数を表すと，

$$n(A)=n(B_p)$$

である．この結果

$$6n(A)=n(B)$$

である．

$$P(n,\ m)=\frac{n(A)}{6^n},\quad Q(n,\ m)=\frac{n(B)}{6^{n+1}}$$

であるから，

$$P(n,\ m)=Q(n,\ m)$$

である．