2019年入試問題研究

2020 年 1 月 19 日

目 次

1　京大特色理学部

1.1　1番

1.1.1　問題

a を 2 以上の整数とし，有理数 b を $b=1+\dfrac{1}{a}$ により定める．自然数 n に対して，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{a}}$$

とおく．ただし，$k^{\frac{1}{a}}$ とは a 乗すると k になる正の実数のことである．以下の設問に答えよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^b}=\frac{1}{b}$ を示せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\frac{n^b}{b}\right)=\infty$ を示せ．

1.1.2　解答

(1)　$a>0$ なので，$x\geqq 0$ で定義された関数 $x^{\frac{1}{a}}$ は単調増加である．よって，正整数 k に対する区間 $[k,\ k+1]$ において

$$k^{\frac{1}{a}}\leqq x^{\frac{1}{a}}\leqq (k+1)^{\frac{1}{a}}$$

が成りたつ．これより

$$\int_k^{k+1} k^{\frac{1}{a}}\,dx\leqq\int_k^{k+1} x^{\frac{1}{a}}\,dx\leqq\int_k^{k+1}(k+1)^{\frac{1}{a}}\,dx$$

$\displaystyle\int x^{\frac{1}{a}}\,dx=\frac{x^{1+\frac{1}{a}}}{1+\frac{1}{a}}+C=\frac{x^b}{b}+C$ なので，

$$k^{\frac{1}{a}}\leqq\left[\frac{x^b}{b}\right]_k^{k+1}\leqq (k+1)^{\frac{1}{a}}$$

となる．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ で加えて，

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{\frac{1}{a}}\leqq\left[\frac{x^b}{b}\right]_1^{n}\leqq\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^{\frac{1}{a}}$$

これから，

$$S_n-n^{\frac{1}{a}}\leqq\frac{n^b}{b}-\frac{1}{b}\leqq S_n-1$$

を得る．つまり，

$$\frac{n^b}{b}-\frac{1}{b}+1\leqq S_n\leqq\frac{n^b}{b}-\frac{1}{b}+n^{\frac{1}{a}}$$

よって，

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{bn^b}+\frac{1}{n^b}\leqq\frac{S_n}{n^b}\leqq\frac{1}{b}-\frac{1}{bn^b}+n^{\frac{1}{a}-b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{bn^b}+\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^b}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ なので，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^b}=\frac{1}{b}$ である．

(2)

$$S_n - \frac{n^b}{b} = S_n - \int_0^n x^{\frac{1}{a}}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\left(k^{\frac{1}{a}} - \int_{k-1}^{k} x^{\frac{1}{a}}\,dx\right)$$

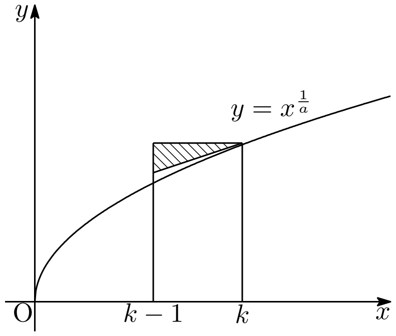


図 1

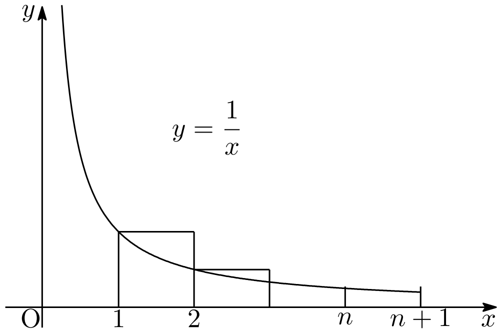


図 2

ここで，関数のグラフ関数 $y = x^{\frac{1}{a}}$ は上に凸であるから，点 $(k,\ k^{\frac{1}{a}})$ での接線は領域 $y \geqq x^{\frac{1}{a}}$ にある．この接線の傾きは $\dfrac{1}{a}k^{\frac{1}{a}-1}$ であるから，図 1 の斜線部分の面積は $\dfrac{1}{2a}k^{\frac{1}{a}-1}$ である．したがって，

$$k^{\frac{1}{a}} - \int_{k-1}^{k} x^{\frac{1}{a}}\,dx > \frac{1}{2a}k^{\frac{1}{a}-1}$$

が成りたつ．この結果，図 2 の領域の関係から

$$\begin{aligned} S_n - \frac{n^b}{b} \quad &> \quad \frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{a}-1} \\ &> \quad \frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{n} k^{-1} > \frac{1}{2a}\int_1^{n+1} x^{-1}\,dx = \frac{1}{2a}\cdot\log(n+1) \end{aligned}$$

が成りたつ．これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(S_n - \frac{n^b}{b}\right) = \infty$ が成立する．

注意 1　(2) の論証はもっと精密にもできるが，限られた時間の中で解くには，一定の直感的な論述も必要である．

注意 2　(1) は次のようにもできる．

$$\frac{S_n}{n^b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{\frac{1}{a}}}{n^{1+\frac{1}{a}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{a}}$$

したがって，いわゆる区分求積法といわれる定積分の定義から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^b} = \int_0^1 x^{\frac{1}{a}}\,dx = \left[\frac{x^b}{b}\right]_0^1 = \frac{1}{b}$$

である．

1.2　2 番

1.2.1　問題

以下の設問に答えよ．ただし，$0! = 1$ とする．

(1)　n を自然数とする．$F(x)$ は実数を係数とする x の n 次以下の多項式であって，m が整数のとき $F(m)$ がつねに整数となるものとする．このとき，次の性質（あ），（い）を満たす実数 c_0，c_1，c_2，$\cdots$，c_n が存在することを示せ．

（あ）次の式が x についての恒等式となる．

$$\begin{aligned}&\frac{F(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\\=\quad&c_0+\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{c_n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\end{aligned}$$

（い）　$0\leqq k\leqq n$ を満たすすべての整数 k について $(n-k)!c_k$ は整数である．

(2)　0 以上の整数 k に対して，x の k 次多項式 $P_k(x)$ を次のように定める．

$$\begin{aligned}P_0(x)\quad&=1,\\P_1(x)\quad&=x+1,\\P_2(x)\quad&=(x+1)(x+3),\\&\cdots\\P_k(x)\quad&=(x+1)(x+3)\cdots(x+2k-3)(x+2k-1),\\&\cdots\end{aligned}$$

また，a, b を $a\leqq b$ を満たす 0 以上の整数とする．このとき，x についての次の恒等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{P_{a+b}(x)}{a!b!P_a(x)P_b(x)}=\sum_{q=0}^{a}\frac{2^q}{q!(a-q)!(b-q)!P_q(x)}$$

1.2.2　解答

(1)　自然数 n を固定し，$1\leqq k\leqq n$ を満たすすべての整数 k について，$n-k$ 次整式 $f_k(x)$ を

$$f_k(x)=\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)}{(n-k)!(x+k)(x+k-1)\cdots(x+1)}$$

で定め，$f_0(x)=\dfrac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)}{n!}$ とする．$0\leqq k\leqq n$ に対して，$f_k(x)$ は最高次の係数が $\dfrac{1}{(n-k)!}$ の $n-k$ 次整式である．

$F(x)$ の n 次の係数を a_0 とし，$b_0=n!a_0$ とおく．$F(x)-b_0f_0(x)$ は $n-1$ 次以下の整式である．同様の操作をくりかえすことで，$F(x)-b_0f_0(x)-b_1f_1(x)-\cdots-b_{n-1}f_{n-1}(x)$ は定数となる．これを b_n とすることで，

$$F(x)=b_0f_0(x)+b_1f_1+\cdots+b_{n-1}f_{n-1}(x)+b_n$$

と表される．m が整数のとき $F(m)$ がつねに整数となるための必要十分条件は，b_i $(0\leqq i\leqq n)$ がすべて整数であること，を証明する．

$$\begin{aligned} F(-n) &= b_n \\ F(-n+1) &= b_{n-1}+b_n \\ F(-n+2) &= b_{n-2}+b_{n-1}+b_n \\ \cdots &= \cdots \\ F(-1) &= b_1+\cdots+b_{n-1}+b_n \\ \cdots &= \cdots \\ F(0) &= b_0+b_1+\cdots+b_{n-1}+b_n \end{aligned}$$

となり，これらがすべて整数であるから，順次 b_n，b_{n-1}，$\cdots$，b_0 が整数である．必要条件であることが示された．

任意の整数 m と $0 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$f_k(m) = \frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+k+1)}{(n-k)!}$$

であり，$(m+n)(m+n-1)\cdots(m+k+1)$ は 0 または正か負の $n-k$ 個の連続数の積である．この $n-k$ 個の連続数の積の絶対値を $(p+n)(p+n-1)(p+k+1)$ とすると，

$$\frac{(p+n)(p+n-1)(p+k+1)}{(n-k)!} = {}_{p+n}\mathrm{C}_{p+k}$$

なので，$f_k(m)$ はつねに整数となり，この結果，b_0，b_1，$\cdots$，b_n が整数なら，$F(m)$ はつねに整数である．十分条件であることが示された．

$$F(x) = \frac{b_0}{n!}(x+n)\cdots(x+1)+\cdots+b_{n-1}(x+1)+b_n$$

なので，

$$\begin{aligned} &\frac{F(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \\ = &\frac{b_0}{n!}+\cdots+\frac{b_k}{(n-k)!(x+1)\cdots(x+k)}+\cdots+\frac{b_n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \end{aligned}$$

となる．そこで $0 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$c_k = \frac{b_k}{(n-k)!}$$

とおけば，条件（あ）が成り立ち，また $(n-k)!c_k = b_k$ は整数なので，条件（い）も成りたつ．つまり,（あ）,（い）を満たす実数 c_0，c_1，c_2，$\cdots$，c_n が存在した．

(2)　m を非負の整数とする．

$$P_k(2m+1) = (2m+2)(2m+4)\cdots(2m+2k-2)(2m+2k) = \frac{2^k(m+k)!}{m!}$$

であることに注意する．

恒等式であることを証明すべき有理式の両辺に $a!P_b(x)$ をかける．

$$\frac{P_{a+b}(x)}{b!P_a(x)} = \sum_{q=0}^{a} \frac{2^q a! P_b(x)}{q!(a-q)!(b-q)!P_q(x)} \quad \cdots ①$$

$\dfrac{P_{a+b}(x)}{P_a(x)}$ は次数 b，$\dfrac{P_b(x)}{P_q(x)}$ は次数 $b-q$ の整式であるから，① の両辺とも次数 b の整式である．
$x=2m+1$ を代入する．

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{P_{a+b}(2m+1)}{b!P_a(2m+1)} = \frac{2^{a+b}(m+a+b)!}{2^a b!(m+a)!} = 2^b{}_{m+a+b}\mathrm{C}_b \\
\text{右辺} &= \sum_{q=0}^{a}\frac{2^q a!P_b(2m+1)}{q!(a-q)!(b-q)!P_q(2m+1)} = \sum_{q=0}^{a}\frac{2^q a!2^b(m+b)!}{q!(a-q)!(b-q)!2^q(m+q)!} \\
&= 2^b\sum_{q=0}^{a}\frac{a!}{q!(a-q)!}\cdot\frac{(m+b)!}{(b-q)!(m+q)!} = 2^b\sum_{q=0}^{a}{}_a\mathrm{C}_q\cdot{}_{m+b}\mathrm{C}_{b-q}
\end{aligned}$$

ここで，$(1+x)^{a+b+m}$ の二項展開を考える．

$$(1+x)^{a+b+m} = {}_{a+b+m}\mathrm{C}_0 + {}_{a+b+m}\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_{a+b+m}\mathrm{C}_b x^b + \cdots$$

であり，${}_{m+a+b}\mathrm{C}_b$ は $(1+x)^{a+b+m}$ の展開における x^b の係数である．また

$$\begin{aligned}
(1+x)^{a+b+m} &= (1+x)^a(1+x)^{b+m} \\
&= \left\{\cdots + {}_a\mathrm{C}_q x^q + \cdots\right\}\left\{\cdots + {}_{b+m}\mathrm{C}_{b-q}x^{b-q} + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

と考えると，$\displaystyle\sum_{q=0}^{a}{}_a\mathrm{C}_q\cdot{}_{m+b}\mathrm{C}_{b-q}$ は $(1+x)^a(1+x)^{b+m}$ の展開における x^b の係数である．

よってこれは相等しい．したがって，b 次整式の等式 ① が 1 以上のすべての奇数 $x=2m+1$ で成立するので，この等式は恒等式である．

1.3　3 番

1.3.1　問題

c を正の実数とする．このとき，実数 q に対して，次の条件により数列 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$ を定めることを考える．

$$(A)\ x_1 = q$$
$$(B)\ x_{n+1} = \frac{1}{2c-x_n}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

ここで，ある自然数 k に対して $x_k=2c$ となる場合，x_{k+1} の値を漸化式 (B) によって定義することはできないので，このときは上記の数列を第 k 番目の項 x_k で停止させ，これをこの数列の末項とする．このように，条件 (A), (B) により定まる数列に置いて，ある自然数 k について $x_k=2c$ となるとき，q を漸化式 (B) の不都合な初項と呼ぶことにする．例えば $q=2c$ のとき，$x_1=2c$ となるので，$2c$ は漸化式 (B) の不都合な初項である．以下の設問に答えよ．

(1)　$c>1$ ならば，漸化式 (B) の不都合な初項は無限に多く存在することを示せ．

(2)　$c>1$ とする．実数 q が漸化式 (B) の不都合な初項であるとき，次の不等式を示せ．

$$c+\sqrt{c^2-1} < q \leqq 2c$$

(3)　次の命題 (P) が成り立つような実数 c が $0<c<1$ の範囲に存在することを示せ．

(P) 任意に自然数 M を与えるとき，漸化式 (B) の不都合な初項 q であって，不等式

$$|q| > M$$

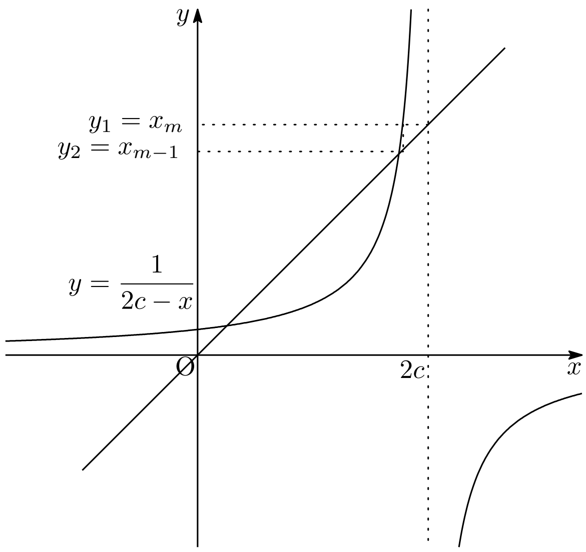
を満たすものが存在する．

1.3.2　解答

注意　$y = x$ と $y = \dfrac{1}{2c - x}$ の交点が

$$x = c \pm \sqrt{c^2 - 1}$$

なので，$2c$ から $\{x_n\}$ 数列を逆にたどり，いずれかをこの数列の初項にすることで，グラフの形状とあわせて，(1) と (2) は明らかである．



ただし論証は数列の論証として，行わねばならない．

(1)　条件 (B) は，

$$x_n = 2c - \frac{1}{x_{n+1}}$$

と書ける．そこで，数列 $\{x_n\}$ を逆にたどる数列 $\{y_n\}$ を

$$y_1 = 2c,\ y_{n+1} = 2c - \frac{1}{y_n}$$

で定義する．

$x_1 = y_m$ とおけば，$x_m = 2c$ となるので，y_m は不都合な初項である．

無限に多くあることを示すために，数列 $\{y_n\}$ は単調に減少し，相異なる項の値が無限個であることを示せばよい．

$n \geqq 2$ のとき，$1 < y_n < 2c$ であることを示す．

$c > 1$ なので，$y_2 = 2c - \dfrac{1}{2c}$ より，$1 < y_2 < 2c$ である．$1 < y_n < 2c$ とする．$\dfrac{1}{2c} < \dfrac{1}{y_n} < 1$ のなで，

$$2c - 1 < 2c - \frac{1}{y_n} < 2c - \frac{1}{2c}$$

となり，$1 < y_{n+1} < 2c$ である．よって $n \geqq 2$ のとき $1 < y_n < 2c$ である．

$y_1 > y_2$ である．$y_n > y_{n+1}$ とすれば，$-\dfrac{1}{y_n} > -\dfrac{1}{y_{n+1}}$ なので，$y_{n+1} > y_{n+2}$ となり，数学的帰納法から $y_n > y_{n+1}$ がつねに成立する．

よって (1) が示された．

(2)

(1) から $y_n \leqq 2c$ なので，いずれを初項にとっても $q \leqq 2c$ は成立する．

$c+\sqrt{c^2-1} < y_n$ を数学的帰納法で示す．

$c+\sqrt{c^2-1} < c+c = y_1$ である．$c+\sqrt{c^2-1} < y_n$ とする．

$$\begin{aligned} y_{n+1} &> 2c - \frac{1}{c+\sqrt{c^2-1}} = 2c - \frac{1}{c+\sqrt{c^2-1}} \\ &= 2c - \left(c - \sqrt{c^2-1}\right) = c+\sqrt{c^2-1} \end{aligned}$$

より成立し，この結果 (2) が示された．

(3)　c は $0 < c < 1$ にあるとする．このとき，数列 $\{y_n\}$ の一般項を求める．

$$t = 2c - \frac{1}{t}$$

を満たす t は $t = c \pm \sqrt{c^2-1}$ で $0 < c < 1$ から t は虚数である．これを $\beta = c+\sqrt{c^2-1}$，$\alpha = c-\sqrt{c^2-1}$ とする．$\alpha\beta = 1$ なので，$\cos\theta = c$ となる θ がとれ，$\beta = \cos\theta + i\sin\theta$，$\alpha = \cos\theta - i\sin\theta$ となる．また $\alpha+\beta = 2c$ である．これを用いて，数列 $\{s_n\}$ を

$$s_n = \frac{y_n - \beta}{y_n - \alpha}$$

で定義する．このとき，

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{y_{n+1}-\beta}{y_{n+1}-\alpha} = \frac{2c - \frac{1}{y_n} - \beta}{2c - \frac{1}{y_n} - \alpha} = \frac{\alpha - \frac{1}{y_n}}{\beta - \frac{1}{y_n}} \\ &= \frac{\alpha y_n - 1}{\beta y_n - 1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_n - \beta}{y_n - \alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot s_n \end{aligned}$$

となるので，

$$s_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} s_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \frac{2c-\beta}{2c-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n}$$

である．よって，

$$\frac{y_n-\beta}{y_n-\alpha} = \frac{\alpha^n}{\beta^n}$$

これを逆に解いて，

$$y_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta^n - \alpha^n}$$

である．ド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta - \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta}{\cos n\theta + i\sin n\theta - \cos n\theta + i\sin n\theta} \\ &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin n\theta} = \frac{\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta}{\sin n\theta} = \cos\theta + \frac{\sin\theta}{\tan n\theta} \end{aligned}$$

となる．ここで，$\theta = 1$(ラジアン) にとり，$c = \cos 1$ とする．このとき，与えられた M に対して

$$|y_N| = \left|\cos 1 + \frac{\sin 1}{\tan N}\right| > M \quad \cdots ①$$

となる N が存在することを示す．$0 < \cos 1 < 1$ なので，$\tan n$ の正負にかかわらず $\left|\dfrac{\sin 1}{\tan N}\right| > M+1$ であればよい．つまり

$$\frac{\sin 1}{M+1} > |\tan N|$$

となればよい．となればよい．$\tan\epsilon = \dfrac{\sin 1}{M+1}$ とおく．$0 < \epsilon < \dfrac{\pi}{2}$ にとる．

ここで，自然数 n $(n \geqq 4)$ に対して，

$$n = q_n\pi + r_n \ (0 < r_n < \pi)$$

となる正整数 q_n と実数 r_n をとる．π が無理数なので，数列 $\{r_n\}$ の項はすべて無理数でかつ異なり，区間 $(0,\ \pi)$ に属している．したがって少なくとも一組

$$|r_m - r_{m+l}| < \epsilon$$

となるものが存在する．

$$m = q_m\pi + r_m,\ m+l = q_{m+l}\pi + r_{m+l}$$

より

$$l = (q_{m+l} - q_m)\,\pi + r_{m+l} - r_m$$

である．$\tan(q_{m+l} - q_m)\,\pi = 0$ なので，

$$|\tan l| = \tan|l| = \tan|r_{m+l} - r_m| < \tan\epsilon|$$

したがって，$N = |l|$ が条件 ① を満たす．$q = y_N$ とおけば，q が条件を満たす不都合な初項である．つまり，命題 (P) が成り立つような実数 c が $0 < c < 1$ の範囲に存在した．

1.4　4 番

1.4.1　問題

n を自然数とする．整数 k に関する次の条件 (C), (D) を考える．

(C) $0 \leqq k < n$

(D) $\dfrac{k}{n} \leqq \dfrac{1}{m} < \dfrac{k+1}{n}$ を満たす自然数 m が存在する．

条件 (C), (D) を満たす整数 k の個数を T_n とする．以下の設問に答えよ．

(1)　T_{50} を求めよ．

(2)　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log T_n}{\log n}$$

1.4.2　解答

(1)　条件（D）は

$$k \leqq \frac{n}{m} < k+1$$

となる．実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[x]$ と表すと，この条件は

$$k = \left[\frac{n}{m}\right]$$

である．したがって，T_n，つまりある m が存在してこのように表される k の個数は，自然数 m に対して，$0 \leqq \left[\dfrac{n}{m}\right] < n$ の範囲で $\left[\dfrac{n}{m}\right]$ がとりうる値の個数である．$m=1$ のときは $\left[\dfrac{n}{m}\right] = n$ で条件を満たさない．$m > n$ ならすべて 0 である．したがって $2 \leqq m \leqq n+1$ の範囲で調べればよい．

$n=50$ のとき，この範囲の m を順に代入すると，とる値は，

$$25,\ 16,\ 12,\ 10,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0$$

の 13 個である．$T_{50} = 13$．

(2)

$$\frac{n}{m} - \frac{n}{m+1} \leqq 1$$

とする．これより

$$n \leqq m(m+1)$$

つまり，m が

$$\frac{-1+\sqrt{1+4n}}{2} \leqq m$$

を動くとき，$\left[\dfrac{n}{m}\right]$ の値は 2 以上離れることはない．$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{1+4n}}{2}$ とおく．この範囲から定まる $\left[\dfrac{n}{m}\right]$ の値は

$$\left[\frac{n}{[\alpha]+1}\right],\ \cdots,\ 0$$

なので，k の個数は

$$\left[\frac{n}{[\alpha]+1}\right]+1$$

である．逆に，m が

$$\frac{n}{m} - \frac{n}{m+1} > 1$$

の範囲を動くとき，$\left[\dfrac{n}{m}\right]$ に同じ値はない．したがって，この範囲から定まる k の個数は，この範囲の m の個数だけあり，2 からはじまるので，

$$[\alpha]-1$$

である．よって，T_n は

$$T_n = [\alpha] + \left[\frac{n}{[\alpha]+1}\right]$$

と表される．簡単のため，定数 $a=\dfrac{1}{4}$ と $b=-\dfrac{1}{2}$ を用いて $\alpha=\sqrt{n+a}+b$ と表す．

$$\sqrt{n+a}+b-1<[\alpha]\leqq\sqrt{n+a}+b$$

なので，

$$\sqrt{n+a}+b-1+\frac{n}{\sqrt{n+a}+b+1}-1<T_n<\sqrt{n+a}+b+\frac{n}{\sqrt{n+a}+b}$$

つまり

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\frac{b-1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b+1}{\sqrt{n}}}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<T_n<\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\frac{b}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{\sqrt{n}}}}\right)$$

$n\to\infty$ のとき，かっこ内はいずれも 2 に収束する．よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log T_n}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\sqrt{n}}{\log n}=\frac{1}{2}$$

2　京大特色総人理系

2.1　1 番

2.1.1　問題

曲線 $C:y=f(x)$ を，実数 $a,\ b,\ c$ に対し $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ で定める．このとき，

C 上に相異なる 2 点が存在し，各々の点における C の法線が一致する

ための必要十分条件を求めよ．

2.1.2　解答

C が条件を満たすとき，それを平行移動した曲線も条件を満たす．

$$\begin{aligned}&x^3+ax^2+bx+c\\=&\left(x+\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)x-\frac{a^3}{27}+c\\=&\left(x+\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\end{aligned}$$

であるから，$X=x+\dfrac{a}{3}$，$Y=y-\dfrac{2a^3}{27}+\dfrac{ab}{3}-c$ と平行移動し，$p=\dfrac{a^2}{3}-b$ とおくことにより，

$$Y=X^3-pX$$

となる．ここで $g(x)=x^3-px$ とする．曲線 $y=g(x)$ を C' とする．

C' 上の相異なる 2 点を $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ とする．ただし $\alpha\neq\beta$ である．条件をみたす法線は y 軸と平行ではないので，$g'(\alpha)\neq 0$，$g'(\beta)\neq 0$ である．これらの点におけるそれぞれの法線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{g'(\alpha)}(x-\alpha)+g(\alpha)$$
$$y=-\frac{1}{g'(\beta)}(x-\beta)+g(\beta)$$

である．2 つの法線が一致するので，

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= g'(\beta) & \cdots ① \\ \frac{\alpha}{g'(\alpha)} + g(\alpha) &= \frac{\beta}{g'(\beta)} + g(\beta) & \cdots ② \end{aligned}$$

である．逆にこれをみたす α と β が存在すれば，法線を共有する 2 点が存在する．

① 式から

$$3\alpha^2 - p = 3\beta^2 - p$$

$\alpha - \beta \neq 0$ より $\alpha + \beta = 0$ である．そして $\alpha \neq \beta$ より $\alpha \neq 0$ である．このとき

$$g'(\alpha) = g'(\beta) = 3\alpha^2 - p$$

② 式から

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{3\alpha^2 - p} + \alpha^3 - p\alpha &= \frac{\beta}{3\beta^2 - p} + \beta^3 - p\beta \\ &= -\frac{\alpha}{3\alpha^2 - p} - \alpha^3 + p\alpha \end{aligned}$$

$\alpha \neq 0$ なので，これより，

$$\frac{1}{3\alpha^2 - p} + \alpha^2 - p = 0$$

これから，

$$1 + (3\alpha^2 - p)(\alpha^2 - p) = 0$$

となり，$3\alpha^2 - p = 0$ となる α はこれを満たさない．この等式を整理して

$$3\alpha^4 - 4p\alpha^2 + p^2 + 1 = 0$$

ここで，$\alpha^2 = t$ とおく．

$$3t^2 - 4pt + p^2 + 1 = 0 \quad \cdots ③$$

となる．$\alpha \neq 0$ となる実数 α が存在する条件は，2 次方程式 ③ に $t > 0$ の解が存在することである．の 2 解の積は正で，和が $\dfrac{4p}{3}$ なので，この条件は

$$p > 0, \quad D/4 = 4p^2 - 3(p^2 + 1) = p^2 - 3 \geqq 0$$

と同値である．これより $p \geqq \sqrt{3}$ である．

したがって C が条件を満たすための $f(x)$ に関する必要十分条件は

$$\frac{a^2}{3} - b \geqq \sqrt{3}$$

である．

2.2　2 番

2.2.1　問題

$a<-2$ に対して，楕円 $C_a : x^2+\dfrac{(y-a)^2}{(a+1)^2}=1$ を考える．放物線 $P: y=x^2$ と楕円 C_a の共通接線のうち，P 上にある接点が第 1 象限内にある 2 本のみを考え，それら 2 本の接線と P で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．

問 1　$S(a)$ を，a を用いて表せ．

問 2　$\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^\beta}$ が正の数となるような実数 β を求めよ．また，その β に対して $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^\beta}$ を求めよ．

2.2.2　解答

問 1　楕円 C_a の方程式において $x=0$ のとき，y は $-1,\ 2a+1<-3$ である．よって，C_a は $y<0$ の領域にある．

P 上の点 $(t,\ t^2)$ での接線は

$$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$$

である．これと C_a との交点の x 座標は，C_a の方程式から y を消去して

$$\begin{aligned}&(a+1)^2x^2+(2tx-t^2-a)^2-(a+1)^2\\ =\ &\{(a+1)^2+4t^2\}x^2-4t(t^2+a)x+(t^2+a)^2-(a+1)^2=0\end{aligned}$$

で与えられる．この P の接線が C_a とも接するときは，この判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}D/4 &= 4t^2(t^2+a)^2-\{(a+1)^2+4t^2\}\{(t^2+a)^2-(a+1)^2\}\\ &= -(a+1)^2\{t^4+2(a-2)t^2-2a-1\}=0\end{aligned}$$

となるときである．$a+1\neq 0$ なので，

$$t^4+2(a-2)t^2-2a-1=0 \quad \cdots ①$$

これより

$$t^2=-(a-2)\pm\sqrt{(a-2)^2+2a+1}=2-a\pm\sqrt{(a-1)^2+4}$$

である．したがって，第 1 象限の 2 つの接点 $t_1,\ t_2\ (t_1<t_2)$ は

$$t_1=\sqrt{2-a-\sqrt{(a-1)^2+4}},\qquad t_2=\sqrt{2-a+\sqrt{(a-1)^2+4}}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_{t_1}^{\frac{t_1+t_2}{2}}(x^2-2t_1x+{t_1}^2)\,dx+\int_{\frac{t_1+t_2}{2}}^{t_2}(x^2-2t_2x+{t_2}^2)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{3}(x-t_1)^3\right]_{t_1}^{\frac{t_1+t_2}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-t_2)^3\right]_{\frac{t_1+t_2}{2}}^{t_2}\\ &= \frac{1}{24}(t_2-t_1)^3-\frac{1}{24}(t_1-t_2)^3=\frac{1}{12}(t_2-t_1)^3\\ &= \frac{1}{12}\left\{\sqrt{2-a+\sqrt{(a-1)^2+4}}-\sqrt{2-a-\sqrt{(a-1)^2+4}}\right\}^3\end{aligned}$$

問 2

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2-a+\sqrt{(a-1)^2+4}}-\sqrt{2-a-\sqrt{(a-1)^2+4}}\\
=&\quad \frac{2\sqrt{(a-1)^2+4}}{\sqrt{2-a+\sqrt{(a-1)^2+4}}+\sqrt{2-a-\sqrt{(a-1)^2+4}}}\\
=&\quad \frac{(-a)\times 2\sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a^2}}}{\sqrt{-a}\times\left\{\sqrt{\dfrac{2}{-a}+1+\sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a^2}}}+\sqrt{\dfrac{2}{-a}+1-\sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a^2}}}\right\}}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
S(a)=\frac{2(-a)^{\frac{3}{2}}}{3}\left\{\frac{\sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a^2}}}{\sqrt{\dfrac{2}{-a}+1+\sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a^2}}}+\sqrt{\dfrac{2}{-a}+1-\sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a^2}}}}\right\}^3
$$

ここで，

$$
\lim_{a\to-\infty}\frac{\sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a^2}}}{\sqrt{\dfrac{2}{-a}+1+\sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a^2}}}+\sqrt{\dfrac{2}{-a}+1-\sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a^2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}
$$

なので，

$$
\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{6}
$$

となる．つまり

$$
\beta=\frac{3}{2},\qquad \lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^{\beta}}=\frac{\sqrt{2}}{6}
$$

である．

3 東大理科

3.1 5 番

3.1.1 問題

(1) n を 1 以上の整数とする．x についての方程式

$$
x^{2n-1}=\cos x
$$

は，ただ 1 つの実数解 a_n をもつことを示せ．

(2) (1) で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ．

(3) (1) で定まる数列 a_1, a_2, a_3, ……, a_n, …… に対し，

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} {a_n}^n, \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ．

3.1.2　解答

(1)　$f(x) = x^{2n-1} - \cos x$ とおく．

区間 $x < -1$ において $x^{2n-1} < -1$ より $f(x) < 0$．$-1 \leqq x < 0$ において $x^{2n-1} < 0$, $\cos x > 0$ より，$f(x) < 0$．$1 < x$ において $f(x) > 0$ である．

そして $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$，$f(0) = -\cos 0 < 0$ であり，$0 < x < 1$ において $f'(x) = (2n-1)x^{2(n-1)} + \sin x > 0$ であるから，$f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ にただ 1 つの実数解 a_n をもつ．

(2)　$0 < a_n < 1$ であり，区間 $[0,\ \pi]$ で $\cos x$ は単調に減少するので，$\cos a_n > \cos 1$ である．

(3)　$\cos 1 < \cos a_n = {a_n}^{2n-1}$ より，

$$\cos^{\frac{1}{2n-1}} 1 < a_n < 1$$

$1 < \dfrac{\pi}{3}$ より $\cos 1 > \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \cos^{\frac{1}{2n-1}} = 1$$

よって，

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

である．

※　ある別方法

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2} < \cos x \ (0 < x < 1)$$

よって，単調性を考え

$$1 - \frac{1}{2n-1} < a_n < 1$$

より，

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

である．

次に，

$$\cos a_n = {a_n}^{2n-1} = ({a_n}^n)^{2-\frac{1}{n}}$$

より

$${a_n}^n = (\cos a_n)^{\frac{1}{2-\frac{1}{n}}}$$

よって，

$$b = \lim_{n\to\infty} {a_n}^n = \lim_{n\to\infty} (\cos a_n)^{\frac{1}{2-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\cos 1}$$

である．

$\cos a_n = {a_n}^{2n-1}$ より，

$$(a_n \cos a_n)^{\frac{1}{2}} = {a_n}^n$$

である．よって．

$$\frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} = \frac{(a_n \cos a_n)^{\frac{1}{2}} - (\cos 1)^{\frac{1}{2}}}{a_n - 1}$$

ここで，$g(x) = (x \cos x)^{\frac{1}{2}}$，$a_n = 1 + h_n$ とおくと，

$$\frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} = \frac{g(a_n) - g(1)}{a_n - 1} = \frac{g(1+h_n) - g(1)}{h_n}$$

$n \to \infty$ のとき，$h_n \to 0$ なので，

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} = \lim_{h_n \to 0} \frac{g(1+h_n) - g(1)}{h_n} = g'(1)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x \cos x)^{-\frac{1}{2}} (\cos x - x \sin x)$$

であるから，

$$c = g'(1) = \frac{1}{2} \cdot (\cos 1)^{-\frac{1}{2}} (\cos 1 - \sin 1) = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$$

である．

3.2　6番

3.2.1　問題

複素数 α, β, γ, δ および実数 a, b が，次の 3 条件をみたしながら動く．

条件 1：α, β, γ, δ は相異なる．
条件 2：α, β, γ, δ は 4 次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である．
条件 3：複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は 0 であり，虚部は 0 でない．

(1) α, β, γ, δ のうち，ちょうど 2 つが実数であり，残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ．

(2) b を a で表せ．

(3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

3.2.2　解答

(1)　$f(z) = z^4 - 2z^3 - 2az + b$ とおく．仮に α が虚数とすると，a と b が実数なので

$$\begin{aligned} f(\overline{\alpha}) &= \overline{\alpha}^4 - 2\overline{\alpha}^3 - 2a\overline{\alpha} + b \\ &= \overline{\alpha}^4 - 2\overline{\alpha}^3 - 2\overline{a}\overline{\alpha} + \overline{b} \\ &= \overline{\alpha^4 - 2\alpha^3 - 2a\alpha + b} = \overline{f(\alpha)} = 0 \end{aligned}$$

となり，$z = \overline{\alpha}$ も解となる．よって虚数解の個数は偶数個である．

すべて実数なら $\alpha\beta+\gamma\delta$ が実数であり，条件 3 に反する．
4 個とも虚数解のとき，

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha}=\beta,\ \overline{\gamma}=\delta \text{ なら} \quad \alpha\beta+\gamma\delta=|\alpha|^2+|\delta|^2 : \text{実数}\\
&\overline{\alpha}=\gamma,\ \overline{\beta}=\delta \text{ なら} \quad \alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\overline{\alpha\beta} : \text{実数}\\
&\overline{\alpha}=\delta,\ \overline{\beta}=\gamma \text{ なら} \quad \alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\overline{\alpha\beta} : \text{実数}
\end{aligned}$$

となり，条件 3 に反する．
よって，$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ のうち，ちょうど 2 つが実数であり，残りの 2 つは互いに共役な虚数である．
(2)　条件は α と β，γ と δ に関してそれぞれ対称で，$\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ に関しても対称である．よって α を虚数解としてよく，$\alpha\beta+\gamma\delta$ が虚数であるので，$\overline{\alpha}$ は，γ か δ である．対称性から $\overline{\alpha}=\delta$ とする．そして β と γ が実数であるとする．
$\alpha\beta+\gamma\delta$ が純虚数なので，

$$\alpha\beta+\gamma\delta+\overline{\alpha\beta+\gamma\delta}=0$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\alpha\beta+\gamma\delta+\overline{\alpha\beta+\gamma\delta}&=\alpha\beta+\gamma\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\gamma\alpha\\
&=(\alpha+\overline{\alpha})(\beta+\gamma)=0
\end{aligned}$$

i)　$\alpha+\overline{\alpha}=0$ のとき．
解と係数の関係から

$$\begin{aligned}
2&=\alpha+\beta+\gamma+\overline{\alpha}=\beta+\gamma\\
0&=(\alpha+\overline{\alpha})(\beta+\gamma)+\alpha\overline{\alpha}+\beta\gamma=\alpha\overline{\alpha}+\beta\gamma\\
2a&=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\overline{\alpha}+\alpha\gamma\overline{\alpha}+\beta\gamma\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}(\beta+\gamma)=2\alpha\overline{\alpha}
\end{aligned}$$

よって，

$$a=\alpha\overline{\alpha},\quad \beta\gamma=-\alpha\overline{\alpha}$$

となり，

$$b=\alpha\beta\gamma\overline{\alpha}=-a^2$$

ii)　$\beta+\gamma=0$ のとき．

$$\begin{aligned}
2&=\alpha+\beta+\gamma+\overline{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}\\
0&=(\alpha+\overline{\alpha})(\beta+\gamma)+\alpha\overline{\alpha}+\beta\gamma=\alpha\overline{\alpha}+\beta\gamma\\
2a&=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\overline{\alpha}+\alpha\gamma\overline{\alpha}+\beta\gamma\overline{\alpha}=(\alpha+\overline{\alpha})\beta\gamma=2\beta\gamma
\end{aligned}$$

よって，

$$a=\beta\gamma,\quad \alpha\overline{\alpha}=-\beta\gamma$$

となり，

$$b=\alpha\beta\gamma\overline{\alpha}=-a^2$$

である．
よって，つねに $b=-a^2$ である．

(3)　(2) より，

$$f(z)=z^4-2z^3-2az-a^2=(z^2+a)(z^2-2z-a)$$

となる．4 つの解は

$$\pm\sqrt{-a},\ 1\pm\sqrt{1+a}$$

である．重解がないという条件から

$$a\neq 0,\ -1$$

である．また $\alpha+\beta=x+iy$ とおく．

(2) の i) のとき．α は純虚数，β は実数なので，$a>0$ で $1+a>0$ であり，このとき

$$\begin{aligned}&\alpha,\ \overline{\alpha}=\pm\sqrt{a}i,\\ &\beta,\ \gamma=1\pm\sqrt{1+a}\end{aligned}$$

これより，

$$x=1\pm\sqrt{1+a},\ y=\pm\sqrt{a}$$

よって，

$$(x-1)^2-y^2=1,\ (x\neq 0,2,\ y\neq 0)$$

(2) の ii) のとき．

同様にして，$a<0$ で $1+a<0$ であり，

$$\begin{aligned}&\alpha,\ \overline{\alpha}=1\pm\sqrt{a+1}i,\\ &\beta,\ \gamma=\pm\sqrt{-a}\end{aligned}$$

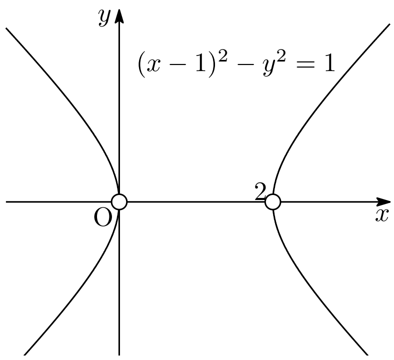
これより，

$$x=1\pm\sqrt{-a},\ y=\pm\sqrt{a+1}$$

よって，

$$(x-1)^2-y^2=1,\ (x\neq 0,2,\ y\neq 0)$$

以上から，複素数 $\alpha+\beta$ がとりうる範囲は双曲線 $(x-1)^2-y^2=1$ から 2 点 $(0,0),\ (2,0)$ を除いたものである．



4　京大理系

4.1　文理 4 番

4.1.1　問題

1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．このとき次の条件をみたす確率を n を用いて表せ．ただし $X_0 = 0$ としておく．

条件：$1 \leqq k \leqq n$ をみたす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような
k の値はただ 1 つである．

4.1.2　解答

A で 1 から 4 のいずれかの目が出る事象，B で 5 か 6 の目が出る事象を表す．$X_0 = 0$ であるので，条件を満たす事象は，何回か A が続き，何回か B が続き，何回か A が続くものである．ただし $X_0 = 0$ であるので最初の A はなくてもよく，後の A もなくてもよい．

途中の B が l 回続く事象を考える．l は $1 \leqq l \leqq n$ であり，この B の連続が 1 回目からはじまる場合から，$n - l + 1$ 回目からはじまる場合まで $n - l + 1$ 通りある．事象 A の確率は $\dfrac{2}{3}$，事象 B の確率は $\dfrac{1}{3}$ なので，条件をみたす事象の確率 p は，

$$\begin{aligned} p &= \sum_{l=1}^{n}(n-l+1)\left(\frac{1}{3}\right)^l\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l} \\ &= \sum_{l=1}^{n}(n-l+1)\left(\frac{1}{2}\right)^l\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\sum_{l=1}^{n}(n-l+1)\left(\frac{1}{2}\right)^l \end{aligned}$$

ここで，$S = \displaystyle\sum_{l=1}^{n}(n-l+1)\left(\frac{1}{2}\right)^l$ とおくと，

$$\begin{aligned} S &= n\cdot\frac{1}{2} + (n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{2}S &= \qquad\qquad n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

より，上下引いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S &= \frac{n}{2} - \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

よって，

$$S = n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これより

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left\{n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &= (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

である．

5　阪大理系

5.1　4 番

5.1.1　問題

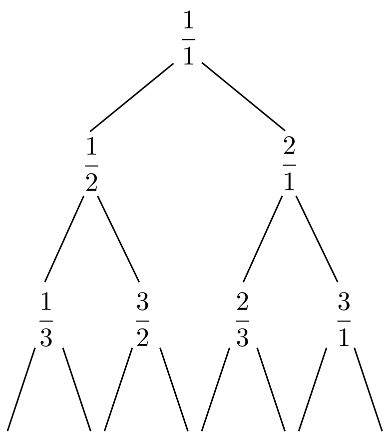
　下の図は，$\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$，右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ．ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす．

(2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ．

(3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ．

(4) $\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ．たとえば，$\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である．



5.1.2　解答

(1)　分数 $\dfrac{p}{q}$ が既約，つまり p と q の最大公約数が 1 とする．$p+q$ と p の最大公約数を d とすると，$p+q$ と p が d の倍数となり，その結果 q も d の倍数となる．つまり d は p と q の公約数である．よって $d=1$．つまり分数 $\dfrac{p}{p+q}$ は既約である．同様に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ も既約である．$\dfrac{1}{1}$ は既約なので，この構成方法で得られるすべての分数は既約である．

(2)　正の有理数でこの樹形図に現れないものが存在するとする．そのなかで,（分母）＋（分子）が最小であるものを $\dfrac{p}{q}$ とする．

$q>p$ のとき，$\dfrac{p}{q}=\dfrac{p}{q-p+p}$ なので，分数 $\dfrac{p}{q}$ は分数 $\dfrac{p}{q-p}$ から作られる．$\dfrac{p}{q}$ は存在しない有理数で $p+q$ が最小であったから，分数 $\dfrac{p}{q-p}$ は樹形図に存在する．この結果，$\dfrac{p}{q}$ も存在し，存在しないという仮定と矛盾した．

$q<p$ のとき，$\dfrac{p}{q}=\dfrac{p-q+q}{q}$ なので分数 $\dfrac{p-q}{q}$ から作られ，存在しないという仮定と矛盾した．

よって，すべての正の有理数がこの樹形図に現れる．

(3)　分数 $\dfrac{p}{q}$ が分数 $\dfrac{x}{y}$ から作られるとする．$q>p$ のときは分数 $\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{p}{q}$ となり，既約分数なので $p=x$，$q=x+y$ である．$q<p$ のときは分数 $\dfrac{x+y}{y}=\dfrac{p}{q}$ となり，既約分数なので $p=x+y$，$q=y$ である．それぞれ，$(x,\ y)$ は $(p,\ q-p)$ または $(p-q,\ q)$ と，分数 $\dfrac{p}{q}$ を作る分数は一意に定まる．

従って異なる分数からは異なる分数が作られる．n 段目までがすべて異なれば，$n+1$ 段目までもすべて異なり，2 段目まではすべて異なるので，数学的帰納法からこの樹形図に現れる有理数はすべて異なる．

(4)　$\dfrac{19}{44}$ を逆にたどると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{19}{44},\ \frac{19}{25},\\
&\frac{19}{6},\ \frac{13}{6},\ \frac{7}{6},\\
&\frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1}
\end{aligned}
$$

従って，$\dfrac{1}{1}$ からはじめて，左下に 5 回で $\dfrac{1}{6}$ になり，右下に 4 回で $\dfrac{19}{6}$，左下に 2 回で $\dfrac{19}{44}$ になる．よって 11 段目にある．

$\dfrac{1}{6}$ からはじまる樹形図の部分は，11 段目までに 5 段あり，11 段目のこの部分は分数が $2^5=32$ 個ある．左下に 2 回なので，$\dfrac{19}{44}$ はこの部分の右から 4 個目にある．つまり左からは $32-4+1=29$ 番目にある．

$\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から 11 段目の左から 29 番目に配置される．

6　東北大理系

6.1　3 番

6.1.1　問題

a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める．

$$x_1=a,\qquad x_{n+1}=x_n+x_n^2$$

(1) $a>0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ．

(2) $-1 < a < 0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $-1 < a < 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ．

6.1.2　解答

(1)　$x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geqq 0$ より，数列 $\{x_n\}$ は単調に増加する．$x_1 = a > 0$ なら $x_n > 0$ なので，x_n^2 も単調に増加する．よって，

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 \geqq x_n + x_1^2 = x_n + a^2$$

この結果，

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \geqq a + (n-1)a^2$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty}\left(a + (n-1)a^2\right) = +\infty$$

より，数列 $\{x_n\}$ は発散する．

(2)　すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

$x_1 = a$ で $-1 < a < 0$ なので，$n = 1$ で成立．

$-1 < x_n < 0$ とする．

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geqq -\frac{1}{4} > -1$$

で，$-\frac{1}{2} < x_n + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ より $\left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0$ なので，$-1 < x_{n+1} < 0$ が成立し，すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つ．

(3)　(2) から $-1 < x_n < 0$ なので，

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(x_n+1)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1}$$

であり，$0 < x_n + 1 < 1$ である．よって，

$$1 < \frac{1}{x_n+1}$$

となるので，

$$\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n} - 1$$

である．

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) < \frac{1}{a} - (n-1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{a} - (n-1)\right\} = -\infty$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = -\infty$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x_n}} = 0$$

である．

6.2　4番

6.2.1　問題

実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す．

(1) $\left[2x^2+x+3\right]$，$\left[x^5-1\right]$，$\left[\left[2x^2+x+3\right]\left[x^5-1\right]\right]$ をそれぞれ求めよ．

(2) 整式 $A(x)$，$B(x)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)]\,[B(x)]]$$

(3) 実数 θ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\left[(x\sin\theta+\cos\theta)^2\right] = x\sin 2\theta+\cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数 $a,\ b$ の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

$$\left[(ax+b)^4\right] = -1$$

6.2.2　解答

(1)　実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りは 1 次以下の整式であるので，これを $px+q$ とし，商を $Q(x)$ とおく．

$$A(x) = (x^2+1)Q(x)+px+q$$

$x=i$ を代入すると，

$$A(i) = pi+q$$

となる．$px+q$ は実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りなので，p と q は実数である．よって，これから p と q は一意に定まる．

$$\begin{aligned}
&2i^2+i+3=i+1 \text{ より } p=1,\ q=1 \text{ ゆえに } \left[2x^2+x+3\right]=x+1\\
&i^5-1=i-1 \text{ より } p=1,\ q=-1 \text{ ゆえに } \left[x^5-1\right]=x-1\\
&(i+1)(i-1)=-2 \text{ より } p=0,\ q=-2 \text{ ゆえに } \left[\left[2x^2+x+3\right]\left[x^5-1\right]\right]=-2
\end{aligned}$$

(2)　(1) と同様に，

$$A(x)=(x^2+1)Q_1(x)+px+q,\ B(x)=(x^2+1)Q_2(x)+rx+s$$

とおく．このとき

$$A(i)B(i)=(pi+q)(ri+s)=(ps+qr)i-pr+qs \quad \cdots ①$$

一方，

$$[A(x)]=px+q,\ [B(x)]=rx+s$$

なので，$[[A(x)]\,[B(x)]]$ に $x=i$ を代入すると

$$(pi+q)(ri+s)=(ps+qr)i-pr+qs \quad \cdots ②$$

となり，① と ② が同一なので，等式

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)]\,[B(x)]]$$

が成立する．

(3)　$A(x) = (x\sin\theta + \cos\theta)^2$ とおく．ドモアブルの定理から

$$A(i) = (i\sin\theta + \cos\theta)^2 = i\sin 2\theta + \cos 2\theta$$

よって，

$$\left[(x\sin\theta + \cos\theta)^2\right] = x\sin 2\theta + \cos 2\theta$$

である．

(4)　実数 $a,\ b$ の満たすべき条件は

$$(ai+b)^4 = -1$$

である．これより $|ai+b| = 1$ なので，$ai+b = i\sin\theta + \cos\theta$ とおける．このとき，

$$(ai+b)^4 = i\sin 4\theta + \cos 4\theta = -1$$

これから

$$4\theta = \pi + 2k\pi$$

よって，

$$\begin{aligned} ai+b &= i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= \left(i\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(i\sin\frac{k\pi}{2}+\cos\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= \frac{i+1}{\sqrt{2}}\left(i\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)^k = \frac{i+1}{\sqrt{2}}\cdot i^k \end{aligned}$$

よって

$$ai+b = \frac{i+1}{\sqrt{2}},\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ -\frac{i+1}{\sqrt{2}},\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

これより，

$$(a,\ b) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \text{(複合任意)}$$

である．

6.3　5番

6.3.1　問題

(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1}(e^x - e^t + 1)f(t)\,dt$$

6.3.2　解答

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$ で $x=-t$ と置きかえることにより、

$$\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx=\int_{1}^{0}\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^{-t}}\,(-dt)=\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi t)e^t}{1+e^t}\,dt$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx &= \int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx\\ &= \int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)e^x}{1+e^x}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx\\ &= \int_{0}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx\\ &= \int_{0}^{1}\frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin(2\pi x)}{4\pi}\right]_0^1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2)

$$\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)\,dt=(e^x+1)\int_{-1}^{1}f(t)\,dt-\int_{-1}^{1}e^tf(t)\,dt$$

であるから，条件式は次のように変形される．

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\int_{-1}^{1}f(t)\,dt-\frac{1}{1+e^x}\int_{-1}^{1}e^tf(t)\,dt$$

ここで，

$$a=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt,\qquad b=\int_{-1}^{1}e^tf(t)\,dt$$

とおく．

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+a-\frac{b}{1+e^x}$$

なので，

$$\begin{aligned}a &= \int_{-1}^{1}\left\{\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t}+a-\frac{b}{e^t+1}\right\}dt\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t}\,dt+2a-b\int_{-1}^{1}\frac{1}{e^t+1}\,dt\\ b &= \int_{-1}^{1}\left\{\frac{\sin^2(\pi t)e^t}{1+e^t}+ae^t-\frac{be^t}{e^t+1}\right\}dt\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi t)e^t}{1+e^t}\,dt+a\int_{-1}^{1}e^t\,dt-b\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{e^t+1}\,dt\end{aligned}$$

ここで，(1) と同様の計算によって，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{e^t+1}\,dt &= \int_{-1}^{0}\frac{1}{e^t+1}\,dt+\int_{0}^{1}\frac{1}{e^t+1}\,dt\\ &= \int_{0}^{1}\frac{e^t}{e^t+1}\,dt+\int_{0}^{1}\frac{1}{e^t+1}\,dt=\int_{0}^{1}1\,dt=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{e^t+1}\,dt &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^{-t}}\,dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^{t}}\,dt=1\\ \int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi t)e^t}{1+e^t}\,dt &= \int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi t)}{e^{-t}+1}\,dt=\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi t)}{e^{t}+1}\,dt=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}+2a-b\\ b &= \frac{1}{2}+a\left(e-e^{-1}\right)-b\end{aligned}$$

である．a と b について解いて，

$$a=\frac{e}{2(e^2-2e-1)},\quad b=\frac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)}$$

となる．よって，

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}-\frac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)(e^x+1)}+\frac{e}{2(e^2-2e-1)}$$

である．

6.4　6番

6.4.1　問題

10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す．初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする．この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,k)$ とする．2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $p(n+1,2)$ を $p(n,2)$ と $p(n,1)$ を用いて表せ．

(2) $p(n,1)$ を求めよ．

(3) $p(n,2)$ を求めよ．

6.4.2　解答

(1)　$n+1$ 回の試行の後赤球が 2 回出ているのは，n 回までに赤球が 2 回出て，袋の中には白玉が 7 個赤球が 3 個あり，$n+1$ 回目は白球か，n 回までに赤球が 1 回出て，袋の中には白玉が 6 個赤球が 4 個あり，$n+1$ 回目は赤球か，いずれかの事象の和である．

n 回終わったときに，ある．よって，

$$p(n+1,2)=\frac{7}{10}p(n,2)+\frac{4}{10}p(n,1)$$

(2)　j 回目のみに赤が出る確率は

$$\left(\frac{5}{10}\right)^{j-1}\cdot\frac{5}{10}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^{n-j}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
p(n,1) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{5}{10}\right)^j\left(\frac{6}{10}\right)^{n-j} = \left(\frac{6}{10}\right)^n\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^j \\
&= \left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n}{1-\dfrac{5}{6}} = 5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}
\end{aligned}
$$

(3)

$p(n,2)$ を求めよ．

7　東北大後期

7.1　2 番

7.1.1　問題

n を正の整数とする．

(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$
\left\{1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right\}\sin\frac{x}{2} = \sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}
$$

(2) 次の方程式の解 x をすべて求めよ．

$$
\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = 0
$$

7.1.2　解答

(1)　ド・モアブルの定理と等比数列の和の公式から

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\{\cos(kx)+i\sin(kx)\} = \sum_{k=0}^{n}(\cos x+i\sin x)^k \\
=\;& \frac{1-(\cos x+i\sin x)^{n+1}}{1-(\cos x+i\sin x)} = \frac{1-[\cos\{(n+1)x\}+i\sin\{(n+1)x\}]}{1-\cos x-i\sin x} \\
=\;& \frac{(1-\cos x+i\sin x)[1-\cos\{(n+1)x\}-i\sin\{(n+1)x\}]}{(1-\cos x)^2+\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

である．ここで分母は

$$
(1-\cos x)^2+\sin^2 x = 2(1-\cos x) = 4\sin^2\frac{x}{2}
$$

である．分子の実数部分は，

$$
\begin{aligned}
&(1-\cos x)[1-\cos\{(n+1)x\}]+\cos\{(n+1)x\}\cos x+\sin\{(n+1)x\}\sin x \\
=\;& 2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}\sin\frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left\{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right\}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

これより

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left\{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right\}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

となるので，

$$\left\{1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right\}\sin\frac{x}{2}=\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}$$

が成りたつ．

(2)　(1) から，

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}-\sin\frac{x}{2}$$

である．ここで，$\sin\dfrac{x}{2}=0$ となるのは，$\dfrac{x}{2}$ が整数 m を用いて $\dfrac{x}{2}=m\pi$ と表せるときであるが，このとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\sum_{k=1}^{n}\cos(2mk\pi)=\sum_{k=1}^{n}1=n$$

なので，条件をみたさない．よって，$\sin\dfrac{x}{2}\neq 0$ が必要である．そしてこのとき，x が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=0$ をみたすのは，

$$\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}-\sin\frac{x}{2}=0$$

と同値である．

$$\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}-\sin\frac{x}{2}=2\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)=0$$

である．

i)　$\sin\left(\dfrac{n}{2}x\right)=0$ のとき．

　これは $\dfrac{n}{2}x=m\pi$ と整数 m を用いて表されるときである．このとき $x=\dfrac{2m}{n}\pi$．ただし上記考察より，x が π の偶数倍のときは条件をみたさないので，m が n の倍数となるときを除く．

ii)　$\cos\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)=0$ のとき．

　これは $\dfrac{n+1}{2}x=\dfrac{\pi}{2}+m\pi$ と整数 m を用いて表されるときである．このとき $x=\dfrac{2m+1}{n+1}\pi$．これは，すべての m に対して x が π の偶数倍となることはない．

　したがって与えられた整数 n に対して条件をみたす x は次のようになる．

$$x=\begin{cases}\dfrac{2m}{n}\pi & (m\text{ は }n\text{ の倍数でない整数})\\[2mm] \dfrac{2m+1}{n+1}\pi & (m\text{ は整数})\end{cases}$$

8　名大理系

8.1　4 番

8.1.1　問題

正の整数 n に対して 1, 2, $\cdots$, n を一列に並べた順列を考える．そのような順列は $n!$ 個ある．このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_l, a_2, \cdots, a_n)$ とする．この $(a_l, a_2, \cdots, a_n)$ に対し，各添字 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i=j \to a_j=k$ と書くことにする．ここで $a_i=j \to a_j=k \to a_k=l$ のようにたどり，それを続けていく．例えば $(a_l, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)=(2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき，

(i) $a_1=2 \to a_2=5 \to a_5=4 \to a_4=1 \to a_1=2$

(ii) $a_3=6 \to a_6=3 \to a_3=6$

(iii) $a_7=7 \to a_7=7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する．この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ．上の (i)，(ii)，(iii) は長さがそれぞれ 4，2，1 のサイクルになっている．

(1) $n=3$ とする．選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ．

(2) $n=4$ とする．長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ．

(3) n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ．

(4) n を奇数とする．選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ．

8.1.2　解答

(1)　$n=3$ のとき，長さ 1 のサイクルを含む順列は，$a_i=i$ となる項がある順列なので，

$$(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 3)$$

の 4 個ある．よってその確率は $\dfrac{4}{3!}=\dfrac{2}{3}$ である．

(2)　1, 2, $\cdots$, n を一列に並べた順列のうち，長さ n のサイクルである順列の個数を x_n とおく．

長さ n のサイクルがあるとき，新たに a_{n+1} を加えて長さ $n+1$ のサイクルを構成する方法は，$a_i=n+1,\ a_{n+1}=a_i,\ \ (1 \leqq i \leqq n)$ と，n 通りある．よって，

$$x_{n+1}=nx_n$$

がなりたつ．$x_1=1$ なので，$x_n=(n-1)!$ である．

$x_4 = 3! = 6$ である．長さ 3 のサイクルがあるものは (1) より，$6 - 4 = 2$ 個である．それは $(2,\ 3,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 2)$ である．これをもとに上記の手順で x_4 個の順列を作ると，

$$(4,3,1,2),\ (2,4,1,3),\ (2,3,4,1),$$
$$(4,1,2,3),\ (3,4,2,1),\ (3,1,4,2)$$

である．

※　x_n は次のようにしても求まる．

サイクルはどこからはじめても同じサイクルなので，長さ n のサイクルである順列は，

$$a_1 = k_1,\ a_{k_1} = k_2,\ \cdots,\ a_{k_{n-2}} = k_{n-1},\ a_{k_{n-1}} = 1$$

と，$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-1}$ に $2,\ 3,\ \cdots,\ n$ をあてはめるだけある．よって，$x_n = (n-1)!$ である．

(3)　正の実数で定義された関数 $\dfrac{1}{x}$ は単調減少であるから，区間 $(j,\ j+1]$ で $\dfrac{1}{j} > \dfrac{1}{x}$ がなりたつ．よって，

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{j}\,dx > \int_j^{j+1} \frac{1}{x}\,dx$$

つまり，

$$\frac{1}{j} > \log(j+1) - \log j$$

である．これを $k \leqq p \leqq n$ で加えて，

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \sum_{j=k}^{n} \{\log(j+1) - \log j\} = \log(n+1) - \log k$$

である．

(4)　$j \geqq \dfrac{n+1}{2}$ とする．長さ j のサイクルは存在しても 1 個である．それを構成する項を $a_l, a_2, \cdots, a_n$ から選ぶ．それは ${}_n\mathrm{C}_j$ 通りある．それを用いて長さ j のサイクルを作る．それは $(j-1)!$ 通りある．

残る $n-j$ は任意であり，$(n-j)!$ 通りある．よって，長さ j のサイクルが存在する場合の数は

$${}_n\mathrm{C}_j \cdot (j-1)! \cdot (n-j)! = \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot (j-1)! \cdot (n-j)! = \frac{n!}{j}$$

通りある．よって，長さ j のサイクルが存在する確率は $\dfrac{1}{j}$ である．これより，選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は (3) を用いて，

$$\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log\frac{n+1}{2} = \log 2$$

である．

9　神戸大理系後期

9.1　1 番

9.1.1　問題

$m,\ n$ を $0 < m < n$ をみたす整数とする．$\alpha,\ \beta$ を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，$m = \tan\alpha$，$n = \tan\beta$ をみたす実数とする．以下の問に答えよ．

(1) $\tan\dfrac{7\pi}{12}$ の値を求めよ．

(2) $\alpha+\beta>\dfrac{7\pi}{12}$ であることを示せ．

(3) $\tan(\alpha+\beta)$ が整数となるような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

9.1.2　解答

(1)

$$\begin{aligned}\tan\frac{7\pi}{12} &= \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=-2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

(2)

$$\tan\frac{\pi}{4}=1\leqq m=\tan\alpha,\quad \tan\frac{\pi}{3}<2\leqq n=\tan\beta$$

であり，$\tan x$ は，α，β の範囲である $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調増加なので，

$$\frac{\pi}{4}\leqq\alpha,\ \frac{\pi}{3}<\beta$$

である．よって，

$$\alpha+\beta>\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$$

である．

(3)　$mn\geqq 2$ なので

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{m+n}{1-mn}<0$$

であり，$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{7\pi}{12}<\alpha+\beta<\pi$ なので，

$$-2-\sqrt{3}<\frac{m+n}{1-mn}<0$$

である．これより，$\dfrac{m+n}{1-mn}$ が整数となるなら，

$$\frac{m+n}{1-mn}=-3,\ -2,\ -1$$

である．これを整理すると，順に

$$\begin{cases}(3m-1)(3n-1)=10,\\(2m-1)(2n-1)=5,\\(m-1)(n-1)=2\end{cases}$$

となる．$m \geqq 1$，$n \geqq 2$, $m < n$ の条件の下でこれをみたす整数の組は，

$$(m,\ n) = (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)$$

となる．

10　東工大

10.1　1 番

10.1.1　問題

(1) $h > 0$ とする．座標平面上の点 O$(0,0)$，点 P(h,s)，点 Q(h,t) に対して，三角形 OPQ の面積を S とする．ただし，$s < t$ とする．三角形 OPQ の辺 OP, OQ, PQ の長さをそれぞれ p, q, r とするとき，不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときの s, t の値を求めよ．

(2) 四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし，辺 AD, BD, CD の長さをそれぞれ l, m, n とする．このとき，不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ．

10.1.2　解答

(1)　$S = \dfrac{1}{2}h(t-s)$ である．また，

$$p^2 = h^2 + s^2, \quad q^2 = h^2 + t^2, \quad r^2 = (t-s)^2$$

であるから，

$$\begin{aligned}
p^2 + q^2 + r^2 - 4\sqrt{3}S &= h^2 + s^2 + h^2 + t^2 + (t-s)^2 - 2\sqrt{3}h(t-s) \\
&= 2h^2 - 2\sqrt{3}(t-s)h + s^2 + t^2 + (t-s)^2 \\
&= 2\left\{h - \frac{\sqrt{3}(t-s)}{2}\right\}^2 - \frac{3(t-s)^2}{2} + s^2 + t^2 + (t-s)^2 \\
&= 2\left\{h - \frac{\sqrt{3}(t-s)}{2}\right\}^2 + \frac{(s+t)^2}{2} \geqq 0
\end{aligned}$$

より，　不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つ．等号が成立するのは，

$$h = \frac{\sqrt{3}(t-s)}{2},\ s + t = 0$$

より

$$t=\frac{h}{\sqrt{3}},\ s=-\frac{h}{\sqrt{3}}$$

のときである．このとき，

$$p^2=q^2=r^2=\frac{4}{3}h^2$$

となり，三角形 OPQ は正三角形である．

(2)　平面上の任意の三角形 ABC に対し，移動して点 A を y 軸上におき，回転させて辺 BC が y 軸と平行で，第 1，第 4 象限にあるようにする．そして平行移動して点 A が原点にあるようにする．これは (1) の三角形 OPQ の点の配置と同じである．よって (1) の不等式は，3 辺の長さが $p,\ q,\ r$ の任意の三角形でなりたつ．

三角形 ABC の面積を △ABC のように表す．これより，

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &\geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\,\mathrm{ABC}\\
l^2+m^2+c^2 &\geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\,\mathrm{ABD}\\
a^2+m^2+n^2 &\geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\,\mathrm{BCD}\\
l^2+b^2+n^2 &\geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\,\mathrm{ACD}
\end{aligned}$$

これらを加えて，

$$2(a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2)\geqq 4\sqrt{3}T$$

より，不等式

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2\geqq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことが示された．

等号は，4 等号がすべて成立するときなので，4 面が正三角形，つまり正四面体のときである．

10.2　3 番

10.2.1　問題

i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

(1) 原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r\mid 10\leqq N(r)<25\}$ を求めよ．

(2) 複素数平面の相異なる 2 点 $z,\ w$ を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分 $L(0,\ 1)$，$L\left(1,\ 1+\dfrac{i}{2}\right)$，$L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$，$L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$，$L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$，$L(i,\ 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

10.3　4 番

10.3.1　問題

$H_1,\ \cdots,\ H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする．$H_1,\ \cdots,\ H_n$ によって空間が $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ 個の空間領域に分割さわるとする．例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，

- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1,\ H_2,\ H_3)=8$,
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1,\ H_2,\ H_3)=7$,
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1,\ H_2,\ H_3)=6$,
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4)=15$,

である．

(1) 各 n に対して $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2) 各 n に対して $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3) 各 n に対して $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

10.3.2　解答

(1)　平面上の n 本の直線が，一般の位置にある，とは次のこととする．

$i)$　どの 2 本も平行でない．
$ii)$　3 本が 1 点で交わることもない．

一般の位置にある n 本の直線によって，a_n 個の領域に分割されるとする．$a_1=2$ であり，n 本あるところにさらに 1 本追加すると，その直線が他の直線と n 回交わり，$n+1$ 個の部分に分けられる．それだけ分割された領域の個数が増える．よって，

$$a_{n+1}=a_n+n+1,\ a_1=2$$

これより，$n \geqq 2$ のとき．

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{n^2+n+2}{2}$$

となる．これが，平面を n 本の直線で分割したときの，分割された領域の個数の最大値である．

$T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のことを分割数ということにする．分割数のうち最も大きいものを b_n とする．

n 枚の平面が一般の位置にある，とは次のこととする．

1)　どの 2 枚も平行でない．
2)　どの交直線も平行でない．
3)　どの平面においても，他の面との共有直線は一般の位置にある．

3) はすべての平面の共有直線において，$i)$ と $ii)$ がなりたつことを意味する．

n 枚によって b_n に分割されているところにさらに 1 枚，他の n 枚と一般の位置にあるように追加する．これが，1 枚追加することで増加する増加分の最大値である．このとき，その平面が他の n 枚の平面と交わり，それらでできる直線は一般の位置にあるので，追加された平面は，a_n 個の領域に分けられる．それだけ分割された領域の個数が増える．よって，

$$b_{n+1}=b_n+a_n,\ b_1=2$$

これより，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2+k+2}{2} \\ &= 2 + \frac{1}{2}\left\{ \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) \right\} \\ &= \frac{n^3+5n+6}{6} \end{aligned}$$

となる．これは $n=1$ でも成立する．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$n-1$ 枚を分割される領域が b_{n-1} 個となるようにおいて，n 枚目を一般の位置でないようにおくことを考える．

$n-1$ 枚のうちの 2 平面に対して，n 枚目をその交直線と平行な平面にとる．その n 枚目の平面上の直線に関して $i)$ でないことになる．このとき，平行になることによって分割される領域が，一般の位置にある場合から 1 減る．したがって，分割数のとりうる値のうち 2 番目に大きいものは

$$b_n - 1 = \frac{n^3+5n}{6}$$

である．

(3)　$n \geqq 5$ とする．$n-2$ 枚で分割された個数が b_{n-2} であるように置かれている．ここに，1 枚をある交直線と平行に置く．また他の 1 枚を他の異なる交直線と平行になるように置く．このとき，分割数は $b_n - 2$ である．$n \geqq 5$ のとき，$T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものは

$$b_n - 2 = \frac{n^3+5n}{6} - 1$$

である．

$n=4$ のとき．$b_4 = \dfrac{64+20+6}{6} = 15$ である．

個数が 2 番目に大きい分割数は (2) より 14 である．

平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x=1$ を H_4 とすると，分割数は 12 である．

分割数が 13 となる配置が存在しないことを示す．

3 枚の平面の配置で場合を分ける．

(ア)　3 枚の平面が互いに交わりをもつとき．

そのうち，3 本の異なる交線が互いに平行ではないときは $b_3 = 8$ となる場合である．ここに，新たに 1 枚の平面を加える．

その平面がどの交線も含まず，どの交線とも平行でない場合，分割数は $b_4 = 15$ となる．

次に，どの交線も含まないが，いずれか 1 つの交線と平行な場合は，(2) の考察から分割数は 14 となる．

また，いずれかの交線を含むとき，分割数は 12 となる．

(イ)　3 本の異なる交線が互いに平行なとき．2 本が平行なら他の 1 本も平行になる．この段階で 7 個に分割されている．ここに新たに 1 枚の平面を加える．すべての領域を 2 分して 14 個となるか，または交線に平行に置いた場合は 11 個になる．

(ウ)　3 枚の平面が 1 直線を共有するとき，空間は 6 個に分割されている．ここに新たに 1 枚の平面を加える．最大 12 個に分割されるが，13 個になり得ない．

(エ)　3 枚の平面のうち 2 枚が平行．他は平行でないとき，その最大分割は 12 個である．

(オ)　3 枚の平面がすべて平行なとき，空間は 4 つに分される．新たに 1 面を加えて，分割数の最大は 8 である．

以上から，分割数が 13 となる平面の配置は存在せず，2 番目に大きい分割数は 12 である．

$n=3$ のとき．3 平面が 1 直線を共有するとき，分割数は 6 である．$b_3=8$ なので，これが個数が 2 番目に大きい分割数である．

よって，n 枚の平面のとき，2 番目に大きい分割数は

$$\begin{cases} 6 & (n=3) \\ 12 & (n=4) \\ \dfrac{n^3+5n-6}{6} & (n \geqq 5) \end{cases}$$

である．

11　千葉大

11.1　12 番

11.1.1　問題

数直線上に動点 P があり，はじめに原点にあるとする．$k=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，k 回目にさいころを振ったとき，1，2 の目が出たら P は正の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，3，4 が出たら負の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，5，6 が出たら移動しないとする．n 回さいころを振った後の点 P の座標を X_n とする．

(1) $0<X_n$ となる確率を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{2}<X_n$ となる確率を求めよ．

(3) l は n 未満の正の整数とする．このとき，$\dfrac{1}{2^l}<X_n$ となる確率を求めよ．

11.1.2　解答

(1)
方法 1：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+N-1}} &= \frac{1}{2^k}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^N}{1-\dfrac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{k-1}}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^N\right\}<\frac{1}{2^{k-1}} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

である．ある l で $X_l > 0$ または $X_l < 0$ となれば，そのうち最小のものを改めて l とし，① を $k = l + 1$，$N = n - l$ で用いることにより，l より大きい n で $X_n = 0$ となることはない．よって $X_n = 0$ となるのは，$X_1 = \cdots = X_n = 0$ にかぎる．その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ である．

$X_n > 0$，$X_n < 0$ となる事象は，$X_n = 0$ の余事象である．対称性から $X_n > 0$ となる事象の確率と $X_n < 0$ となる事象の確率は等しい．よって，$0 < X_n$ となる確率は

$$\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

方法 2：

$$p_n = P(X_n > 0), \quad q_n = P(X_n = 0)$$

とおく．

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 1$$

で，

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + \dfrac{1}{3}q_n \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{3}q_n \end{cases}$$

が成りたつ．これから，

$$q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

で，

$$p_{n+1} - p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

よって，

$$p_n = p_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

方法 3：p_n は上と同じ．

$X_{n+1} > 0$ となる事象を 1 回目で場合に分ける．$X_1 = \dfrac{1}{2}$ なら ① を $k = 2$，$N = n$ で用いることによりつねに $X_{n+1} > 0$ である．

$X_1 = 0$ なら，残る n 回の試行の後座標が正．この確率は p_n である．よって

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p_n$$

これから

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

$p_0 = 0$ より，

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(0 - \frac{1}{2}\right)$$

よって，

$$p_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

(2)　同様に考え，$\dfrac{1}{2} < X_n$ となるためには，$X_1 = \dfrac{1}{2}$ が必要である．

$$P_{X_1=\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} < X_n\right) = \frac{P\left(X_1 = \frac{1}{2} \text{ かつ } \frac{1}{2} < X_n\right)}{P\left(X_1 = \frac{1}{2}\right)}$$

(1) より

$$P_{X_1=\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} < X_n\right) = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

なので，

$$\begin{aligned} P\left(X_1 = \frac{1}{2} \text{ かつ } \frac{1}{2} < X_n\right) &= P\left(X_1 = \frac{1}{2}\right) \cdot P_{X_1=\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} < X_n\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

(3)　$X_1 = \cdots = X_l = 0$ とすると，① を $k = l+1$，$N = n-l$ で用いることにより，$X_n < \dfrac{1}{2^l}$ となる．よって，$\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となるためには，$1 \leqq m \leqq l$ の m で

$$X_1 = \cdots = X_{m-1} = 0,\ X_m = \frac{1}{2^m}$$

となるものが存在することが必要である．この確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^m$$

である．

　以下，この事象の下での条件付き確率を考える．簡単のために $Y_n(m)$ で m 回目から n 回目までの変化の総量を表す．① より

$$Y_n(m+1) \geqq -\frac{1}{2^{m+1}} - \cdots - \frac{1}{2^n} > -\frac{1}{2^m}$$

である．(i)　$m+1$ 回目から l 回目まで 5 か 6 が出続けるとする．このとき，

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2^m} - \left(\frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^l}\right) + Y_n(l+1) \\ &= \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l-m}}{1 - \frac{1}{2}} + Y_n(l+1) \\ &= \frac{1}{2^l} + Y_n(l+1) \end{aligned}$$

よって条件は $Y_n(l+1) > 0$ である．これは $m = l$ のときもあてはまる．その確率は，

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^{l-m} P\left(Y_n(l+1) > 0\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{l-m} P(X_{n-l} > 0) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{l-m} p_{n-l} = \left(\frac{1}{3}\right)^{l-m} \cdot \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-l}\right\} \end{aligned}$$

である．

(ii)　$m+1$ 回目から l 回目までに 5 か 6 以外の目が少なくとも 1 回出るとき．それが k $(m+1 \leqq k \leqq l)$ 回目とする．(i) の $-\dfrac{1}{2^k}$ が 0 か $\dfrac{1}{2^k}$ に置きかわるので，

$$\begin{aligned} X_n &\geqq \frac{1}{2^l} + Y_n(l+1) + \frac{1}{2^k} \\ &> \frac{1}{2^l} - \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k} \geqq \frac{1}{2^l} \end{aligned}$$

より，条件を満たす．この確率は $1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{l-m}$ である．

従って m を固定したときの確率は (2) と同様に考え，

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{l-m} \cdot \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-l}\right\} + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{l-m}\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^l - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} + \left(\frac{1}{3}\right)^m - \left(\frac{1}{3}\right)^l \\ =\ & -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^l + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} + \left(\frac{1}{3}\right)^m \end{aligned}$$

である．$P\left(\dfrac{1}{2^l} < X_n\right)$ は，この $1 \leqq m \leqq l$ の和であるから，

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2^l} < X_n\right) &= -\frac{l}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^l + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} + \sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{3}\right)^m \\ &= \frac{1}{2} - \frac{l+1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^l - \frac{l}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となる．

11.2　13 番

11.2.1　問題

a は実数とする．座標平面上で連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq (2a+3)x - a(a+3) \end{cases}$$

の表す領域を $D(a)$ とおく．いま，x 座標も y 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする．

(1) n を整数とする．このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ．

(2) 任意の実数 a について，$D(a)$ に含まれる格子点の個数と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ．

11.2.2　解答

(1)　$f(x)=x^2$，$g_a(x)=(2a+3)x-a(a+3)$ とおく．放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=g_a(x)$ の交点の x 座標は

$$f(x)-g_a(x)=x^2-(2a+3)x+a(a+3)=(x-a)(x-a-3)=0$$

より，$x=a$ と $x=a+3$ である．

　$a=n$ のとき．

$$g_n(n+1)-f(n+1)=2$$
$$g_n(n+2)-f(n+2)=2$$

より，$D(n)$ 内の $x=n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$ 上の格子点は

$$\begin{array}{l}(n,f(n))\\(n+1,f(n+1)),\ (n+1,f(n+1)+1),\ (n+1,f(n+1)+2)\\(n+2,f(n+2)),\ (n+2,f(n+2)+1),\ (n+2,f(n+2)+2)\\(n+3,f(n+3))\end{array}$$

であり，あわせて 8 個ある．

(2)　$D(a)$ に含まれる格子点の x 座標は $a\leqq n\leqq a+3$ の範囲の整数である．この n に対して $D(a+1)$ に含まれる格子点で x 座標が $n+1$ となるものを考える．

　$D(a)$ に含まれる x 座標が n の格子点は，

$$(n,f(n)),\ (n,f(n)+1),\ \cdots,\ (n,f(n)+[g_a(n)-f(n)])$$

である．ただし，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数とする．

　$D(a+1)$ に含まれる x 座標が $n+1$ の格子点は，

$$(n+1,f(n+1)),\ (n+1,f(n+1)+1),\ \cdots,\ (n+1,f(n+1)+[g_{a+1}(n+1)-f(n+1)])$$

である．ここで，

$$g_a(x)-f(x)=(x-a)(a+3-x),$$
$$g_{a+1}(x)-f(x)=(x-a-1)(a+4-x)$$

なので，

$$\begin{array}{rcl}g_a(n)-f(n)&=&(n-a)(a+3-n)\\g_{a+1}(n+1)-f(n+1)&=&(n+1-a-1)(a+4-n-1)\\&=&g_a(n)-f(n)\end{array}$$

である．よって，$D(a)$ に含まれる x 座標が n の格子点の個数と，$D(a+1)$ に含まれる x 座標が $n+1$ の格子点の個数が一致する．

　n を $n+1$，$n+2$ などに置きかえても同様であるので，任意の実数 a について，$D(a)$ に含まれる格子点の個数と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しい．

　※　本問は次の基本的な事実にもとづいている．

放物線 $C: y=x^2$ と，放物線上の異なる 2 点 A$(\alpha,\ \alpha^2)$，B$(\beta,\ \beta^2)$ がある．$\alpha<\beta$ とする．直線 AB の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)+\alpha^2 \\ &= (\alpha+\beta)x-\alpha\beta \end{aligned}$$

となる．$\alpha<t<\beta$ C 上の点 T$(t,\ t^2)$ と，直線 AB 上の x 座標が t の点 C$(t,\ (\alpha+\beta)t-\alpha\beta)$ との距離 TC は，

$$\mathrm{TC}=(\alpha+\beta)t-\alpha\beta-t^2=(t-\alpha)(\beta-t)$$

である．

したがって，α を $\alpha+\delta$ に，β を $\beta+\delta$ に，t を $t+\delta$ に変えて，点 A，B，T と，直線 AB をそれぞれ動かしても，$t-\alpha$ と $\beta-t$ は変わらないので，TC は不変である．

12　千葉大後期

12.1　理，医

12.1.1　問題

以下の問いに答えよ．

(1) α，β を異なる 2 つの正の数とする．このとき，定数 A，B を用いて，すべての 3 次以下の整式 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A\left(f\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)+A\left(f\left(-\sqrt{\alpha}\right)\right)+B\left(f\left(\sqrt{\beta}\right)\right)+B\left(f\left(-\sqrt{\beta}\right)\right)$$

と表せることを示し，A，B を α，β を用いて表示せよ．

(2) x^4 の係数が 1 であるような 4 次の整式 $g(x)$ であって，すべての 3 次以下の整式 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx=0$$

となるものを求めよ．

(3) $g(x)$ は (2) で求めた 4 次の整式とする．方程式 $g(x)=0$ は互いに異なる 4 つの実数解をもつことを示せ．

(4) 定数 A，B と正の定数 α，β を用いて，すべての 7 次以下の整式 $h(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = A\left(h\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)+A\left(h\left(-\sqrt{\alpha}\right)\right)+B\left(h\left(\sqrt{\beta}\right)\right)+B\left(h\left(-\sqrt{\beta}\right)\right)$$

と表せることを示せ．

12.1.2　解答

(1)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく．このとき

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1}\left(bx^2+d\right)\,dx = \frac{2}{3}b+2d$$

一方，

$$f\left(\sqrt{\alpha}\right)+f\left(-\sqrt{\alpha}\right)=2b\alpha+2d, \qquad f\left(\sqrt{\beta}\right)+f\left(-\sqrt{\beta}\right)=2b\beta+2d$$

なので，

$$A\left(2b\alpha+2d\right)+B\left(2b\beta+2d\right)=\frac{2}{3}b+2d$$

がすべての b と d について成りたつように A と B を定めればよい．b と d の恒等式となることなので，係数がそれぞれ一致すればよい．

$$\begin{aligned} 2\alpha A+2\beta B &= \frac{2}{3} \\ 2A+2B &= 2 \end{aligned}$$

これを A と B について解いて，

$$A=\frac{3\beta-1}{3(\beta-\alpha)}, \qquad B=\frac{1-3\alpha}{3(\beta-\alpha)}$$

(2)　すべての 3 次以下の整式 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx=0$$

となるためには

$$\int_{-1}^{1} x^n g(x)\,dx=0$$

が $n=3,\ 2,\ 1,\ 0$ について成りたてばよい．$g(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$ とおく．

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,dx &= \frac{2}{7}p+\frac{2}{5}r=0 \\ \int_{-1}^{1} x^2 g(x)\,dx &= \frac{2}{7}+\frac{2}{5}q+\frac{2}{3}s=0 \\ \int_{-1}^{1} x g(x)\,dx &= \frac{2}{5}p+\frac{2}{3}r=0 \\ \int_{-1}^{1} g(x)\,dx &= \frac{2}{5}+\frac{2}{3}q+2s=0 \end{aligned}$$

この連立一次方程式を解いて

$$p=r=0, \quad q=-\frac{6}{7}, \quad s=\frac{3}{35}$$

つまり，

$$g(x)=x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}$$

(3)　$g(x)$ で $x^2=t$ とおくと，$t^2-\dfrac{6}{7}t+\dfrac{3}{35}$ となる．この t の 2 次式の判別式を D とすると

$$D=\frac{36}{49}-\frac{12}{35}>0$$

である．よって，2 次方程式 $t^2-\dfrac{6}{7}t+\dfrac{3}{35}=0$ は異なる 2 次数解 α，β をもち，解と係数の関係からその和が $\dfrac{6}{7}>0$，積が $\dfrac{3}{35}>0$ であるから，α も β も正の実数である．

　したがって 4 次方程式 $g(x)=0$ は 4 つの実数解

$$\pm\sqrt{\alpha},\quad \pm\sqrt{\beta}$$

をもつ．

(4)　$h(x)$ を $g(x)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする．

$$h(x)=Q(x)g(x)+R(x)$$

　(3) より，$\displaystyle\int_{-1}^{1}Q(x)g(x)\,dx=0$ なので

$$\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=\int_{-1}^{1}R(x)\,dx$$

である．$\pm\sqrt{\alpha}$, $\pm\sqrt{\beta}$ に対して，(1) のように A，B を定めれば，

$$\int_{-1}^{1}R(x)\,dx=A\left(R\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)+A\left(R\left(-\sqrt{\alpha}\right)\right)+B\left(R\left(\sqrt{\beta}\right)\right)+B\left(R\left(-\sqrt{\beta}\right)\right)$$

となる．$g(\pm\sqrt{\alpha})=0$，$g(\pm\sqrt{\beta})=0$ なので，

$$h(\pm\sqrt{\alpha})=R(\pm\sqrt{\alpha}),\quad h(\pm\sqrt{\beta})=R(\pm\sqrt{\beta})$$

が成りたつ．よって，定数 A，B と正の定数 α，β をこのように定めれば

$$\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=A\left(h\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)+A\left(h\left(-\sqrt{\alpha}\right)\right)+B\left(h\left(\sqrt{\beta}\right)\right)+B\left(h\left(-\sqrt{\beta}\right)\right)$$

が成りたつ．

※　本問を次のように一般化することはできるのか．

(1) α_j $(1\leqq j\leqq n)$ を異なる n 個の正の数とする．このとき，定数 A_j $(1\leqq j\leqq n)$ を用いて，すべての $2n-1$ 次以下の整式 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}\left\{A_j\left(f\left(\sqrt{\alpha_j}\right)\right)+A_j\left(f\left(-\sqrt{\alpha_j}\right)\right)\right\}$$

と表せることを示し，A_j $(1\leqq j\leqq n)$ を α_j $(1\leqq j\leqq n)$ を用いて表示せよ．

(2) x^{2n} の係数が 1 であるような $2n$ 次の整式 $g(x)$ であって，すべての $2n-1$ 次以下の整式 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=0$$

となるものを求めよ．

(3) $g(x)$ は (2) で求めた $2n$ 次の整式とする．方程式 $g(x)=0$ は互いに異なる $2n$ 個の実数解をもつことを示せ．

(4) 定数 A_j $(1 \leqq j \leqq n)$ と正の定数 α_j $(1 \leqq j \leqq n)$ を用いて，すべての $4n-1$ 次以下の整式 $h(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \left\{ A_j \left(h\left(\sqrt{\alpha_j}\right)\right) + A_j \left(h\left(-\sqrt{\alpha_j}\right)\right)\right\}$$

と表せることを示せ．

※　$n=1$ のときは成りたつ．

(1) α を正の数とする．このとき，定数 A を用いて，すべての 1 次以下の整式 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A\left(f\left(\sqrt{\alpha}\right)\right) + A\left(f\left(-\sqrt{\alpha}\right)\right)$$

と表せることを示し，A を α を用いて表示せよ．

$A=1$ である．

(2) x^2 の係数が 1 であるような 2 次の整式 $g(x)$ であって，すべての 1 次以下の整式 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0$$

となるものを求めよ．

$g(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}$ である．

(3) $g(x)$ は (2) で求めた 2 次の整式とする．方程式 $g(x)=0$ は互いに異なる 2 個の実数解をもつことを示せ．

$\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ である．

(4) 定数 A と正の定数 α を用いて，すべての 3 次以下の整式 $h(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = A\left(h\left(\sqrt{\alpha}\right)\right) + A\left(h\left(-\sqrt{\alpha}\right)\right)$$

と表せることを示せ．

$A=1$，$\alpha = \dfrac{1}{3}$ である．

一般の場合は課題である．

13　大阪市大後期

13.1　工学部 4 番

13.1.1　問題

α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とする．自然数 n に対して，$3^{n-1}\alpha$ の整数部分を a_n，小数部分を b_n とする．b_n が条件

$$n\ \text{が奇数のとき},\ \frac{1}{3} \leqq b_n < \frac{2}{3}$$
$$n\ \text{が偶数のとき},\ 0 \leqq b_n < \frac{1}{3}$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．ただし，実数 x に対して，x の整数部分が a，小数部分か b であるとは，a が整数であり，$0 \leqq b < 1$ であって $x = a + b$ と表されることをいう．

(1) k を自然数とするとき，b_{2k+1} を b_{2k} を用いて表せ．

(2) k を自然数とするとき，b_{2k} を b_{2k-1} を用いて表せ．

(3) α を求めよ．

13.1.2　解答

(1)　$3^{n-1}\alpha = a_n + b_n$ なので，

$$3^n\alpha = 3a_n + 3b_n = a_{n+1} + b_{n+1}$$

である．ここで，n が奇数なら $1 \leqq 3b_n < 2$ なので，$3b_n$ の小数部分が b_{n+1} であることから

$$b_{n+1} = 3b_n - 1$$

となる．n が偶数なら $0 \leqq 3b_n < 1$ なので，同様にして

$$b_{n+1} = 3b_n$$

となる．これより

$$b_{2k\ +\ 1} = 3b_{2k}$$

である．
(2)　同様にして，

$$b_{2k} = 3b_{2k-1} - 1$$

である．
(3)　(1)，(2) より

$$b_{2k+1} = 9b_{2k-1} - 3$$

がなり立つ．これから

$$b_{2k+1} - \frac{3}{8} = 9\left(b_{2k-1} - \frac{3}{8}\right)$$

つまり，

$$b_{2k-1} - \frac{3}{8} = 9^{k-1}\left(b_1 - \frac{3}{8}\right)$$

$b_1 = \alpha$ なので，

$$b_{2k-1} = 9^{k-1}\left(\alpha - \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{8}$$

すべての自然数 k に対して $0 \leqq b_{2k-1} < 1$ である．$\alpha - \dfrac{3}{8} \neq 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} 9^{k-1} = +\infty$ なので，この条件をみたさない．よって $\alpha = \dfrac{3}{8}$ が必要である．このとき，

$$b_{2k-1} = \frac{3}{8}$$

なので，$\dfrac{1}{3} \leqq b_{2k-1} < \dfrac{2}{3}$ をみたし，$k \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= \frac{3}{8} \cdot 3^{2k-1-1} - b_{2k-1} \\ &= 3 \cdot \frac{3^{2k-2}-1}{8} = 3 \cdot \frac{9^{k-1}-1}{9-1} \\ &= 3\left(1 + 9 + 9^2 + \cdots + 9^{k-2}\right) \end{aligned}$$

は整数となり，条件をみたす．

よって，$\alpha = \dfrac{3}{8}$ である．

14　お茶大

14.1　理 (1)2 番

14.1.1　問題

集合 A を

$$A = \left\{ c \;\middle|\; \begin{array}{l} c \text{ は正の整数で，少なくとも 1 つの整数 } b \text{ に対して} \\ x^2 - 2bx + c = 0 \text{ が異なる 2 つの整数解をもつ} \end{array} \right\}$$

と定め，A の要素を小さい順に並べてできる数列を c_1，c_2，c_3，$\cdots$ とする．

(1) $1 \notin A$，$2 \notin A$ を示せ．

(2) $3 \in A$，すなわち $c_1 = 3$ であることを示せ．

(3) c_{100} を求めよ．

14.1.2　解答

(1)　相異なる 2 つの整数 α と β で $\alpha\beta = c$,　$\alpha + \beta = 2b$ となるものがあれば，その c は条件を満たす．つまり $\alpha + \beta$ が偶数にとれればよい．

c が奇数なら $\alpha = 1$，$\beta = c$ とすればよい．ただし $\alpha \neq \beta$ なので，$c \geqq 3$ である．

c が偶数で 4 の倍数なら，$\alpha = 2$，$\beta = \dfrac{c}{2}$ とすればよい．ただし $\alpha \neq \beta$ なので，$c \geqq 8$ である．

c が偶数で 2 の倍数ではあるが 4 の倍数ではないとき，つまり $c = 2p$ (p : 奇数) と表されるとき，$c = \alpha\beta$ となるどのような α と β も偶奇が異なり，条件を満たさない．

以上から c が 3 以上の奇数，または 8 以上の 4 の倍数であることが，c の満たすべき必要十分条件である．

よって，$1 \notin A$，$2 \notin A$ である．

(2)　以上の考察から，$1 \notin A$，$2 \notin A$ かつ $3 \in A$，すなわち $c_1 = 3$ である．

(3)　$c_1 = 3$ で，$(c_2,\ c_3,\ c_4)$，$(c_5,\ c_6,\ c_7)$，$(c_8,\ c_9,\ c_{10})$，$\cdots$，は (奇数，奇数，4 の倍数) となる．従って，その k 番目の組は

$$(c_{3k-1},\ c_{3k},\ c_{3k+1}) = (4k+1,\ 4k+3,\ 4k+4)$$

である．$100 = 3 \cdot 33 + 1$ なので，$k = 33$ より，

$$c_{100} = 4 \cdot 33 + 4 = 136$$

である．

14.2　理 (2)2 番

14.2.1　問題

数列 $\{a_n\}$ がすべての自然数 n について

$$a_n + a_{n+2} \geqq 2a_{n+1}$$

を満たしているとする．

(1) すべての自然数 n に対して次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{a_n + a_{n+2} + a_{n+4}}{3} \geqq \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2}$$

(2) すべての自然数 n と k に対して次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k}}{k+1} \geqq \frac{a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2k-1}}{k}$$

14.2.2　解答

(1)　条件から

$$a_n + a_{n+2} \geqq 2a_{n+1}$$
$$a_{n+2} + a_{n+4} \geqq 2a_{n+3}$$

これより，

$$a_n + 2a_{n+2} + a_{n+4} \geqq 2a_{n+1} + 2a_{n+3}$$

ここで，条件式を $n+1$ で用いることにより

$$\frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2} \geqq a_{n+2}$$

が成立する．よって，

$$a_n + 2a_{n+2} + a_{n+4} \leqq a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2}$$

である．これから，

$$a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2} \geqq 2a_{n+1} + 2a_{n+3}$$

となる．つまり，

$$a_n + a_{n+2} + a_{n+4} \geqq \frac{3}{2}\left(a_{n+1} + a_{n+3}\right)$$

より，すべての自然数 n に対して，不等式

$$\frac{a_n + a_{n+2} + a_{n+4}}{3} \geqq \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2}$$

が成立する．

(2)　各自然数 k に対し，命題：

すべての自然数 n に対し不等式

$$\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} a_{n+2j} \geqq \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+2j+1}$$

が成立する．

が成立することを，k についての数学的帰納法で証明する．

数列 $\{a_n\}$ の条件から $k=1$ のときは成立する．

$k-1$ のとき成立するとする．

数列 $\{a_n\}$ の条件から、不等式

$$a_{n+2j} + a_{n+2j+2} \geqq 2a_{n+2j+1}$$

が，$0 \leqq j \leqq k-1$ で成立する．よって，

$$\sum_{j=0}^{k-1}\left(a_{n+2j} + a_{n+2j+2}\right) \geqq \sum_{j=0}^{k-1} 2a_{n+2j+1}$$

ここで，

$$\text{左辺} = \sum_{j=0}^{k} a_{n+2j} + \left\{a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2(k-1)}\right\}$$

であるが，

$$\begin{aligned} & a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2(k-1)} \\ = \quad & a_{n+1+1} + a_{n+1+3} + \cdots + a_{n+1+2k-3} = \sum_{j=0}^{k-2} a_{n+1+2j+1} \end{aligned}$$

である．ここで，$k-1$ のときに命題が成立するという帰納法の仮定を，$n+1$ で用いることにより，

$$\frac{1}{k-1}\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+1+2j+1} \leqq \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+1+2j}$$

である．したがって (1) と同様に考え，

$$\sum_{j=0}^{k} a_{n+2j} + \frac{k-1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+1+2j} \geqq \sum_{j=0}^{k-1} 2a_{n+2j+1}$$

が成立する．これより，

$$\sum_{j=0}^{k} a_{n+2j} \geqq \left(2-\frac{k-1}{k}\right)\sum_{j=0}^{k-1} 2a_{n+2j+1}$$

が成りたち，これを整理して k のとき命題が成立した．

数学的帰納法からすべての自然数に対して命題が成立することが示された．

15　早大商

15.1　1 番 (4)

15.1.1　問題

次の条件を満たす整数 n を 100 で割った余りを求めよ．

$$n \leqq (5+2\sqrt{5})^{2019} < n+1$$

15.1.2　解答

$\alpha = 5-2\sqrt{5}$，$\beta = 5+2\sqrt{5}$ とおき，$a_m = \alpha^m + \beta^m$ とする．$\alpha+\beta = 10$，$\alpha\beta = 5$ で，

$$\alpha^{m+2} + \beta^{m+2} = (\alpha+\beta)\left(\alpha^{m+1}+\beta^{m+1}\right) - \alpha\beta\left(\alpha^m+\beta^m\right)$$

より，

$$a_{m+2} = 10a_{m+1} - 5a_m$$

である．そして，

$$a_1 = 10,\ a_2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 90$$

で，上記漸化式から

$$\begin{aligned} a_3 &= 900-50 = 850 \\ a_4 &= 8500-450 = 8050 \end{aligned}$$

$m \geqq 3$ のとき a_m を 100 で割った余りは 50 であることを数学的帰納法で示す．$m = 3,\ 4$ は成立．$m = k,\ k+1$ での成立を仮定し，$a_k = 100N_k + 50$，$a_{k+1} = 100N_{k+1} + 50$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 10(100N_{k+1}+50) - 5(100N_k+50) \\ &= 100(10N_{k+1}-5N_k) + 250 = 100(10N_{k+1}-5N_k+2) + 50 \end{aligned}$$

より成立．$0 < \alpha < 1$ なので，

$$(5+2\sqrt{5})^m = 100N_m + 49 + (1-\alpha^m)$$

で

$$0 < 1 - \alpha^m < 1$$

であり，かつ $2019 > 3$ なので

$$n \leqq (5 + 2\sqrt{5})^{2019} < n + 1$$

を満たす整数 n を 100 で割った余りは 49 である．

16　中央大理工

16.1　問題

実数を係数とする n 次多項式 $P(x)$ が，$x = 0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2n$ で整数値 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ をとると仮定する．また，$Q_0(x) = 1$，$Q_1(x) = \dfrac{x}{2}$，$Q_2(x) = \dfrac{x(x-2)}{2 \cdot 4}$，とし，一般に

$$Q_n(x) = \frac{x(x-2)(x-4)\cdots(x-2n+2)}{n! \cdot 2^n}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) x が偶数のとき，$Q_0(x),\ Q_1(x),\ \cdots,\ Q_n(x)$ は整数であることを示せ．

(2) $n = 3$ の場合に，多項式

$$Q(x) = b_0Q_0(x) + b_1Q_1(x) + b_2Q_2(x) + b_3Q_3(x)$$

が $x = 0,\ 2,\ 4,\ 6$ において $Q(x) = P(x)$ を満たすように，定数 $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3$ を定めよ．

上の (2) において，$P(x) - Q(x)$ に因数定理を適用すると，$P(x)$ が $Q(x)$ に一致することがわかる．以下では，n を一般の自然数とする．

(3) x が偶数のとき，$P(x)$ は整数であることを示せ．

(4) x が奇数のとき，$P(x) \neq 0$ ならば

$$|P(x)| \geqq \frac{1}{n! \cdot 2^n}$$

が成り立つことを示せ．

16.1.1　解答

(1)　n を自然数とする．m を整数として $x = 2m$ とおく．$m \geqq n$ のとき，

$$\begin{aligned} Q_n(2m) &= \frac{2m(2m-2)(2m-4)\cdots(2m-2n+2)}{n! \cdot 2^n} \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} = {}_m\mathrm{C}_n \end{aligned}$$

$0 \leqq m < n$ のとき，$x,\ x-2,\ \cdots,\ x-2n+2$ の何れかが 0 になるので，$Q_n(2m) = 0$ である．

$m<0$ のとき，

$$Q_n(2m)=(-1)^n\frac{(n-1-m)(n-2-m)\cdots(-m)}{n!}=(-1)^n{}_{n-1-m}\mathrm{C}_n$$

となる．以上から x が偶数のとき，$Q_n(x)$ は整数である．

(2)　条件を満たすのは

$$\begin{aligned}Q(0)&=b_0Q_0(x)=b_0=a_0\\Q(2)&=b_0+b_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1=b_0+b_1=a_1\\Q(4)&=b_0+b_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1+b_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2=b_0+2b_1+b_2=a_2\\Q(6)&=b_0+b_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1+b_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2+b_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3=b_0+3b_1+3b_2+b_3=a_3\end{aligned}$$

となるときである．これより，

$$\begin{aligned}&b_0=a_0,\ b_1=a_1-a_0\\&b_2=a_2-a_0-2(a_1-a_0)=a_2-2a_1+a_0\\&b_3=a_3-a_0-3(a_1-a_0)-3(a_2-2a_1+a_0)=a_3-3a_2+3a_1+2a_0\end{aligned}$$

である．

(3)　次の自然数 n に関する命題を，n についての数学的帰納法で示す．

実数を係数とする n 次多項式 $P(x)$ は，$x=0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2n$ で整数値 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ をとるとする．n 次の多項式を

$$Q(x)=b_0Q_0(x)+b_1Q_1(x)+b_2Q_2(x)+\cdots+b_nQ_n(x)$$

とおく．$x=0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2n$ において $Q(x)=P(x)$ を満たすように，整数 $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ を定めることができる．

$1\leqq n\leqq 3$ については (2) の証明より成立する．

n のとき成立するとする．$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ は n のときに定まった整数の定数とする．

$$\begin{aligned}Q(2(n+1))&=b_0+b_1\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_1+b_2\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+b_n\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_n+b_{n+1}\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\\&=b_0+b_1\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_1+b_2\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+b_n\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_n+b_{n+1}\end{aligned}$$

なので，

$$b_{n+1}=Q(2(n+1))-(b_0+b_1\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_1+b_2\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+b_n\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_n)$$

と定めれば，条件を満たす．よって上記命題は一般の n で成立する．

$Q(x)$ と $P(x)$ はともに n 次式であり，$Q(x)=P(x)$ が，$x=0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2n$ の $n+1$ 個の値で成立する．よって $Q(x)=P(x)$ は恒等式である．

x が偶数のとき，$Q_0(x),\ Q_1(x),\ \cdots,\ Q_n(x)$ は整数で，係数 $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ も整数であるから，$Q(x)$ は整数で，その結果 $P(x)$ も整数である．

(4)　(3) より，

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kQ_k(x)=\frac{1}{n!\cdot 2^n}\sum_{k=0}^{n}n!\cdot 2^nQ_k(x)$$

ここで，

$$n!\cdot 2^nQ_k(x)=n!\cdot 2^n\frac{x(x-2)(x-4)\cdots(x-2k+2)}{k!\cdot 2^k}$$

であり，k 連続整数の積は $k!$ の倍数なので，k が奇数のときこの値は 0 でない整数である．したがって $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n! \cdot 2^n Q_k(x)$ も整数であるから，

$$\left| \sum_{k=0}^{n} n! \cdot 2^n Q_k(x) \right| \geqq 1$$

である．よって，x が奇数のとき，$P(x) \neq 0$ ならば

$$|P(x)| \geqq \frac{1}{n! \cdot 2^n}$$

が成り立つ．

17　浜松医大

17.1　問題 3

関数 $f(x)$ はすべての実数 a, b, c に対して

$$f(a)f(b-c) + f(b)f(c-a) + f(c)f(a-b) = 0$$

を満たすものと仮定する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して $f(-x) = -f(x)$ が成立することを証明せよ．

(2) 0 以上のすべての整数 n，および，すべての実数 x, y に対して

$$f\left(\frac{y}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} f(x+ky) = f\left(x + \frac{n}{2}y\right) f\left(\frac{n+1}{2}y\right)$$

が成立することを証明せよ．

(3) $f(x)$ はすべての実数 x で連続かつ $x=0$ で微分可能で $f'(0)=1$ と仮定する．$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすれば，すべての実数 s, t に対して

$$\frac{F(t)-F(s)}{2} = f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

が成立することを証明せよ．

17.1.1　解答

(1)　条件式を $a=b=c=0$ で用いて，$3f^2(0)=0$．これより $f(0)=0$ である．

すべての実数 x で $f(x)=0$ のときは，すべての実数 x に対して $f(-x)=-f(x)=0$ が成立する．

$f(x) \neq 0$ となる x が存在するとき，それを a とする．任意の実数 x に対し $c=x$，$b=0$ で条件式を用いると

$$f(a)f(-x) + f(0)f(x-a) + f(x)f(a) = 0$$

$f(0)=0$ より

$$f(a)f(-x) + f(a)f(x) = 0$$

そして，$f(a) \neq 0$ なので，

$$f(-x) + f(x) = 0$$

以上から，すべての実数 x に対して $f(-x) = -f(x)$ が成立することが示された。

(2)　自然数 k に対して，条件式を

$$a = \frac{y}{2}, \quad b = -\frac{k}{2}y, \quad c = x + \frac{k}{2}y$$

で用いる。

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{y}{2}\right) f\left(-\frac{k}{2}y - x - \frac{k}{2}y\right) + f\left(-\frac{k}{2}y\right) f\left(x + \frac{k}{2}y - \frac{y}{2}\right) \\
& \qquad + f\left(x + \frac{k}{2}y\right) f\left(\frac{y}{2} + \frac{k}{2}y\right) \\
= \; & -f\left(\frac{y}{2}\right) f\left(x + ky\right) - f\left(\frac{k}{2}y\right) f\left(x + \frac{k-1}{2}y\right) + f\left(x + \frac{k}{2}y\right) f\left(\frac{k+1}{2}y\right) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

これより，

$$f\left(\frac{y}{2}\right) f\left(x + ky\right) = f\left(x + \frac{k}{2}y\right) f\left(\frac{k+1}{2}y\right) - f\left(x + \frac{k-1}{2}y\right) f\left(\frac{k}{2}y\right)$$

よって，

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{y}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} f(x + ky) \\
= \; & f\left(\frac{y}{2}\right) f(x) + f\left(\frac{y}{2}\right) \sum_{k=1}^{n} f(x + ky) \\
= \; & f\left(\frac{y}{2}\right) f(x) + \sum_{k=1}^{n} \left\{ f\left(x + \frac{k}{2}y\right) f\left(\frac{k+1}{2}y\right) - f\left(x + \frac{k-1}{2}y\right) f\left(\frac{k}{2}y\right) \right\} \\
= \; & f\left(\frac{y}{2}\right) f(x) + f\left(x + \frac{n}{2}y\right) f\left(\frac{n+1}{2}y\right) - f\left(x\right) f\left(\frac{y}{2}\right) \\
= \; & f\left(x + \frac{n}{2}y\right) f\left(\frac{n+1}{2}y\right)
\end{aligned}$$

となる。

(3)　$s = t$ のときは両辺 0 で成立する。以下 $s < t$ とする。定積分の定義より，

$$\begin{aligned}
F(t) - F(s) \; &= \; \int_s^t f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{t-s}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(s + \frac{t-s}{n}k\right) \\
&= \; \lim_{n \to \infty} \frac{t-s}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(s + \frac{t-s}{n}k\right) \quad \cdots①
\end{aligned}$$

$x = s$，$y = \dfrac{t-s}{n}$ で (2) を用いると，

$$f\left(\frac{t-s}{2n}\right) \sum_{k=0}^{n} f\left(s + \frac{t-s}{n}k\right) = f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{t-s}{n}\right)$$

一方，

$$f\left(\frac{t-s}{2n}\right)\sum_{k=0}^{n} f\left(s+\frac{t-s}{n}k\right)=\frac{f\left(\dfrac{t-s}{2n}\right)}{\dfrac{t-s}{n}}\cdot\frac{t-s}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(s+\frac{t-s}{n}k\right) \quad \cdots②$$

で，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\dfrac{t-s}{2n}\right)}{\dfrac{t-s}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\dfrac{t-s}{2n}\right)}{\dfrac{t-s}{2n}}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{s+t}{2}\right)f\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{t-s}{n}\right)=f\left(\frac{s+t}{2}\right)f\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

であるから，② で $n\to\infty$ をとることより，① とあわせて，すべての実数 $s,\ t$ に対して

$$\frac{F(t)-F(s)}{2}=f\left(\frac{s+t}{2}\right)f\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

が成立する。

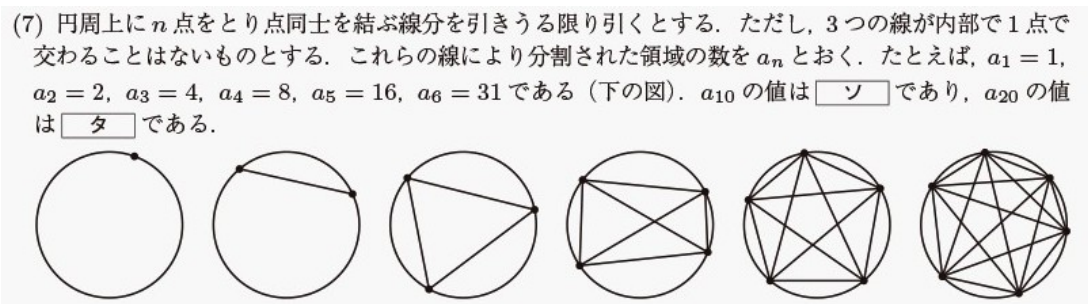
18　産業医大

18.1

18.1.1　問題 2(7) の一般化

円周上に n 点をとり点同士を結ぶ線分を引きうる限り引くとする．ただし，3 つの線が内部で 1 点で交わることはないものとする．これらの線により分割された領域の数を a_n とおく．a_n を求めよ．

※　原題：


(7) 円周上に n 点をとり点同士を結ぶ線分を引きうる限り引くとする．ただし，3 つの線が内部で 1 点で交わることはないものとする．これらの線により分割された領域の数を a_n とおく．たとえば，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=8$，$a_5=16$，$a_6=31$ である（下の図）．a_{10} の値は $\boxed{\text{ソ}}$ であり，a_{20} の値は $\boxed{\text{タ}}$ である．

18.1.2　解答

円周上に n 個の点があり，a_n 個の領域に分割されているとする．

n 個の点を $\mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n$ とする．ここに新たに $n+1$ 番目の点 P_{n+1} を，P_n と P_1 の間につけ加える．

線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_k$ を考える．P_1，$\cdots$，P_{k-1} の $k-1$ 個の点と，P_{k+1}，$\cdots$，P_n の $n-k$ 個の点が，線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_k$ で 2 つに分けられる円周のそれぞれの部分にある．

よって，$(k-1)(n-k)$ 個の交点が，線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_k$ 上にできる．その結果，線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_k$ が $(k-1)(n-k)+1$ 個に分けられるので，$(k-1)(n-k)+1$ 個の領域が，線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_k$ によって増やされる．各 k について加えることにより，$n+1$ 番目の点 P_{n+1} を加えることによって

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)(n-k)+1\}\text{（個）}$$

の領域が増える．よって，

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \sum_{k=1}^{n}\{(k-1)(n-k)+1\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n(k-1) - \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + n \\
&= \frac{(n-1)n^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + n
\end{aligned}$$

$a_1 = 1$ なので，

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\frac{(j-2)(j-1)j}{6} + j\right\} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\frac{(j-2)(j-1)j(j+1)-(j-3)(j-2)(j-1)j}{24}\right\} + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24} + \frac{(n-1)n}{2} + 1
\end{aligned}$$

である．