2020年入試問題研究

2021 年 8 月 25 日

目 次

1 京大特色理学部 **6**
1.1 1番 6
1.1.1 問題 6
1.1.2 解答 6
1.2 2番 9
1.2.1 問題 9
1.2.2 解答 9
1.3 3番 12
1.3.1 問題 12
1.3.2 解答 12
1.4 4番 14
1.4.1 問題 14
1.4.2 解答 14

2 京大特色総人理系 **16**
2.1 1番 16
2.1.1 問題 16
2.1.2 解答 16
2.2 2番 19
2.2.1 問題 19
2.2.2 解答 19

3 東大理科 **21**
3.1 1番 21
3.1.1 問題 21
3.1.2 解答 21
3.2 2番 22
3.2.1 問題 22
3.2.2 解答 22
3.3 4番 24
3.3.1 問題 24

3.3.2 解答 24
3.4 5 番 26
3.4.1 問題 26
3.4.2 解答 26
3.5 6 番 29
3.5.1 問題 29
3.5.2 解答 29

4 東大文科 34
4.1 4 番 34
4.1.1 問題 34
4.1.2 解答 34

5 京大理系 36
5.1 1 番 36
5.1.1 問題 36
5.1.2 解答 36
5.2 2 番 38
5.2.1 問題 38
5.2.2 解答 38
5.3 4 番 39
5.3.1 問題 39
5.3.2 解答 39
5.4 5 番 41
5.4.1 問題 41

6 京大文系 41
6.1 1 番 41
6.1.1 問題 41
6.1.2 解答 41

7 阪大理系 43
7.1 2 番 43
7.1.1 問題 43
7.1.2 解答 43

8 東北大 AO 45
8.1 1 番 45
8.1.1 問題 45
8.1.2 解答 45

9 東北大理系 47
9.1 5 番 47
9.1.1 問題 47
9.1.2 解答 47

9.2 6番 . . . 48
9.2.1 問題 . . . 48
9.2.2 解答 . . . 48

10 名大理系 **50**
10.1 3番 . . . 50
10.1.1 問題 . . . 50
10.1.2 解答 . . . 50
10.2 4番 . . . 52
10.2.1 問題 . . . 52
10.2.2 解答 . . . 52

11 九大後期理系 **55**
11.1 5番 . . . 55
11.1.1 問題 . . . 55
11.1.2 解答 . . . 55

12 神戸大理系 **57**
12.1 2番 . . . 57
12.1.1 問題 . . . 57
12.1.2 解答 . . . 57
12.2 5番 . . . 59
12.2.1 問題 . . . 59
12.2.2 解答 . . . 59

13 一橋大 **60**
13.1 5番 . . . 60
13.1.1 問題 . . . 60
13.1.2 解答 . . . 60

14 一橋大後期 **61**
14.1 経済 . . . 61
14.1.1 問題 . . . 61
14.1.2 解答 . . . 61

15 東工大 **63**
15.1 2番 . . . 63
15.1.1 問題 . . . 63
15.1.2 解答 . . . 63
15.2 5番 . . . 66
15.2.1 問題 . . . 66
15.2.2 解答 . . . 66

16 千葉大 **68**
16.1 10 番 68
16.1.1 問題 68
16.1.2 解答 68
16.2 11 番 69
16.2.1 問題 69
16.2.2 解答 69

17 鳥取大 **72**
17.1 72
17.1.1 問題 72
17.1.2 解答 72

18 大教大 **73**
18.1 73
18.1.1 問題 73
18.1.2 解答 73

19 信州大教育 **74**
19.1 2 番 74
19.1.1 問題 74
19.1.2 解答 74

20 広大後期 **78**
20.1 5 番 78
20.1.1 問題 78
20.1.2 解答 78

21 大阪市大後期 **82**
21.1 理学部 4 番 82
21.1.1 問題 82
21.1.2 解答 82

22 大阪府大後期 **83**
22.1 理学類 2 番 83
22.1.1 問題 83
22.1.2 解答 83

23 お茶の水女子大理後期 **85**
23.1 1 番 85
23.1.1 問題 85
23.1.2 解答 85
23.2 2 番 87
23.2.1 問題 87
23.2.2 解答 87

24 慈恵医大 **89**
24.1 2 番 . . . 89
24.1.1 問題 . . . 89
24.1.2 解答 . . . 89

25 横国大 **91**
25.1 3 番 . . . 91
25.1.1 問題 . . . 91
25.1.2 解答 . . . 91

26 奈良医大 **93**
26.1 5 番 . . . 93
26.1.1 問題 . . . 93
26.1.2 解答 . . . 93

27 奈良医大後期 **94**
27.1 2 番 . . . 94
27.1.1 問題 . . . 94
27.1.2 解答 . . . 94
27.2 4 番 . . . 97
27.2.1 問題 . . . 97
27.2.2 解答 . . . 97

28 滋賀医大 **99**
28.1 2 番 . . . 99
28.1.1 問題 . . . 99
28.1.2 解答 . . . 99
28.2 4 番 . . . 101
28.2.1 問題 . . . 101
28.2.2 解答 . . . 101

29 和歌山医大 **103**
29.1 4 番 . . . 103
29.1.1 問題 . . . 103
29.1.2 解答 . . . 103

1　京大特色理学部

1.1　1 番

1.1.1　問題

$0 \leqq x < 1$ の範囲で定義された連続関数 $f(x)$ は $f(0) = 0$ であり，$0 < x < 1$ において何回でも微分可能で次を満たすとする．

$$f(x) > 0, \quad \sin\left(\sqrt{f(x)}\right) = x$$

この関数 $f(x)$ に対して，$0 < x < 1$ で連続な関数 $f_n(x),\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ を以下のように定義する．

$$f_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

以下の設問に答えよ．

(1) 関数 $-xf'(x) + (1 - x^2)f''(x)$ は $0 < x < 1$ において x によらない定数値をとることを示せ．

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，極限 $a_n = \lim\limits_{x \to +0} f_n(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\lim\limits_{N \to \infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n!2^{\frac{n}{2}}} \right)$ は存在することが知られている．この事実を認めた上で，その極限値を小数第 1 位まで確定せよ．

1.1.2　解答

(1)　等式 $\sin\left(\sqrt{f(x)}\right) = x$ の両辺を x で微分することにより，

$$\cos\left(\sqrt{f(x)}\right) \cdot \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 1$$

を得る．これから，

$$\cos\left(\sqrt{f(x)}\right) \cdot f'(x) = 2\sqrt{f(x)} \quad \cdots ①$$

なので，① の両辺をさらに x で微分する．

$$-\sin\left(\sqrt{f(x)}\right) \cdot \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) + \cos\left(\sqrt{f(x)}\right) \cdot f''(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$$

両辺に $\cos\left(\sqrt{f(x)}\right)$ を乗じる．

$$-\sin\left(\sqrt{f(x)}\right) \cdot \cos\left(\sqrt{f(x)}\right) \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) + \cos^2\left(\sqrt{f(x)}\right) \cdot f''(x) = \cos\left(\sqrt{f(x)}\right) \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$$

$\cos\left(\sqrt{f(x)}\right) \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2$ であるから，

$$-xf'(x) + (1 - x^2)f''(x) = 2 \quad \cdots ②$$

を得る．

(2)　② の両辺を x で微分することにより，

$$-f'(x) - 3xf''(x) + (1-x^2)f^{(3)}(x) = 0$$

を得る．くり返し微分し，$f_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ を用いて

$$p_n f_n(x) + q_n x f_{n+1}(x) + (1-x^2)f_{n+2}(x) = 0 \quad \cdots ③$$

とおけるとする．ただし，$p_1 = -1$, $q_1 = -3$ である．さらに x で微分し

$$(p_n + q_n)f_{n+1}(x) + (q_n - 2)xf_{n+2}(x) + (1-x^2)f_{n+3}(x) = 0$$

を得る．これから

$$p_{n+1} = p_n + q_n, \quad q_{n+1} = q_n - 2$$

となり，数学的帰納法から ③ の形におけることが示された．そして

$$q_n = -3 - 2(n-1) = -(2n+1)$$

であり，

$$p_{n+1} - p_n = -(2n+1)$$

となる．よって

$$p_n = p_1 - \sum_{k=1}^{n^1}(2k+1) = -1 - (n^2 - 1) = -n^2$$

となる．③ において，$x \to +0$ の極限をとることにより，

$$p_n a_n + a_{n+2} = 0$$

となるので，

$$a_{n+2} = n^2 a_n \quad \cdots ④$$

を得る．

一方，① より，$a_1 = f'(0) = 0$，② より，$a_2 = f''(0) = 2$ である．

よって，n が奇数のときは $a_n = 0$ である．

n が偶数のときは，④ より，

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-4}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_4}{a_2} = (n-2)^2(n-4)^2 \cdots 2^2$$

$a_2 = 2$ なので，$n = 2m$ とおくと，

$$a_n = 2(2m-2)^2(2m-4)^2 \cdots 2^2 = 2^{2m-1}\{(m-1)!\}^2$$

したがって

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n : \text{奇数}) \\ 2^{n-1}\left\{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!\right\}^2 & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$

(3)　n が偶数のとき，(2) より，

$$\frac{a_n}{n! 2^{\frac{n}{2}}} = \frac{2^{2m-1}\{(m-1)!\}^2}{(2m)! 2^m} = \frac{2^{m-1}\{(m-1)!\}^2}{(2m)!} = \frac{2^{m-1}}{m^2 {}_{2m}\mathrm{C}_m}$$

これを b_m とおく．

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2} = 0.5 \\ b_2 &= \frac{2}{4\cdot 6} = \frac{1}{12} = 0.08\dot{3} \\ b_3 &= \frac{4}{9\cdot 20} = \frac{1}{45} = 0.0\dot{2} \end{aligned}$$

よって，

$$0.6 < b_1 + b_2 + b_3 < 0.61$$

$m \geqq 4$ のとき，

$$b_m < \frac{1}{8m(m-1)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right)$$

が成りたつ．なぜなら，

$$\begin{aligned} & b_m < \frac{1}{8m(m-1)} \\ \iff\quad & 4\cdot 2^m(m-1) < m^2 \cdot \frac{2m(2m-1)(2m-2)\cdots 1}{m!m!} \\ \iff\quad & 4\cdot(m-1) < m^2 \cdot \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{m(m-1)\cdots 1} \end{aligned}$$

$m \geqq 4$ のとき，

$$4(m-1) < m^2,\ \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{m(m-1)\cdots 1} > 1$$

より成立する．この結果任意の M に対して

$$\sum_4^M b_m < \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{M}\right) < \frac{1}{24} = 0.041\dot{6}$$

が成立する．したがって

$$0.6 < \sum_4^\infty b_m < 0.61 + 0.042 = 0.652$$

したがって，極限値を小数第 1 位までは 0.6 と確定する．

1.2　2 番

1.2.1　問題

次の 3 つのルール (i), (ii)，(iii) にしたがって三角形 ABC の頂点上でコマを動かすことを考える．

(i) 時刻 0 においてコマは頂点 A に位置している．

(ii) 時刻 0 にサイコロを振り，出た目が偶数なら時刻 1 で頂点 B に，出た目が奇数なら時刻 1 で頂点 C にコマを移動させる．

(iii) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，時刻 n にサイコロを振り，出た目が 3 の倍数でなければ時刻 $n+1$ でコマを時刻 $n-1$ に位置していた頂点に移動させ，出た目が 3 の倍数であれば時刻 $n+1$ でコマを時刻 $n-1$ にも時刻 n にも位置していなかった頂点に移動させる．

時刻 n においてコマが頂点 A に位置する確率を p_n とする．以下の設問に答えよ．

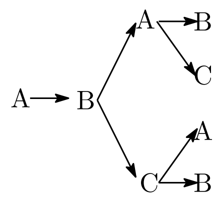
(1) $p_2,\ p_3$ を求めよ．

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，p_{n+1} を p_{n-1} と p_n を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

1.2.2　解答

(1)　1 回目の試行で B に来たときの，3 回の試行でのコマの動きは次のようになる．



1 回目の試行で C に来たときは，B と C をすべて入れかえたものになる．

よって，2 回の試行でのコマが頂点 A に来る確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

3 回の試行でのコマが頂点 A に来る確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

である．

(2)　試行の条件から，n 回目と $n+1$ 回目の同じ頂点に留まるのは，$n-1$ 回目もそこにあるときにかぎる．こうして，$n-2,\ \cdots$ がすべて同じ頂点にあるときにかぎるが，(1) より，$n \leqq 3$ では留まることはない．これより，数学的帰納法によってコマが 1 回の試行で同じ頂点に留まることはない．

$n+1$ 回の試行の後，コマが A にあるのは，次の 2 つの場合である．

1．$n-1$ 回目にコマが A にあり，n 回目には B, C にあって，A に移動する．この確率は

$$\frac{2}{3}p_{n-1}$$

である．

2．$n-1$ 回目，n 回目にコマが A になく，$n+1$ 回目に A に移動する．

$n-1$ 回目，n 回目ともコマが A にあることはないので，$p_{n-1}+p_n$ は $n-1$ または n 回目にコマが A にある確率である．したがって，$n-1$ 回目，n 回目にコマが A にない確率は

$$1-p_{n-1}-p_n$$

である．この場合から A に移動するのは 3 の倍数が出るときなので，その確率は

$$\frac{1}{3}\left(1-p_{n-1}-p_n\right)$$

である．よって，

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}\left(1-p_{n-1}-p_n\right) \\ &= -\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる．また $p_0=1$ である．

(3)　(2) から

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{3}\right)=0$$

$q_n=p_n-\dfrac{1}{3}$ とおき，q_n の漸化式を

$$q_{n+1}-(\alpha+\beta)q_n+\alpha\beta q_{n-1}=0$$

とおくと，$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{3}$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{3}$ である．これより α，β は 2 次方程式

$$t^2+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}=0$$

の 2 解なので，

$$\alpha,\ \beta=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$$

である．これを用いると漸化式は

$$\begin{aligned} q_{n+1}-\alpha q_n &= \beta\left(q_n-\alpha q_{n-1}\right) \\ q_{n+1}-\beta q_n &= \alpha\left(q_n-\beta q_{n-1}\right) \end{aligned}$$

となる．これから

$$\begin{aligned} q_{n+1}-\alpha q_n &= \beta^n\left(q_1-\alpha q_0\right) \\ q_{n+1}-\beta q_n &= \alpha^n\left(q_1-\beta q_0\right) \end{aligned}$$

よって，

$$(\beta-\alpha)q_n=\beta^n\left(q_1-\alpha q_0\right)-\alpha^n\left(q_1-\beta q_0\right)$$

$|\alpha| < 1,\ |\beta| < 1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \left(p_n - \frac{1}{3}\right) = 0$$

となる．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3}$$

である．

1.3　3 番

1.3.1　問題

整数 k，n は $0 \leqq k < n$ を満たすとする．以下の設問に答えよ．

(1) $f(x) = x^n$，$g(x) = x^k$ とする．$1 \leqq x < y$ に対して, 次の不等式がなりたつことを示せ．

$$\left| \frac{g(x) - g(y)}{f(x) - f(y)} \right| < \frac{1}{x}$$

(2) $f(x)$，$g(x)$ を実数係数の整式で，$f(x)$ の次数を n とし，$g(x)$ の次数を k 以下とする．$f(x_0)$ が整数となるすべての実数 x_0 に対して $g(x_0)$ も整数となるとき，$g(x)$ は x によらず一定の整数値をとることを示せ．

1.3.2　解答

(1)　$1 \leqq x < y$ のとき，不等式は

$$x(y^k - x^k) < y^n - x^n$$

と同値である．ここで，x を固定し $x \leqq y$ で定義された y の関数を

$$F(y) = y^n - x^n - x(y^k - x^k)$$

で定める．

$$F'(y) = ny^{n-1} - kxy^{k-1} = y^{k-1}\left(ny^{n-k} - kx\right)$$

である．$1 \leqq x \leqq y$ のとき

$$kx < ny \leqq ny^{n-k}$$

より，$F'(y) > 0$ であり，関数 $F(y)$ は $x \leqq y$ において単調に増加する，$F(x) = 0$ なので，$x < y$ において $F(y) > 0$ が示され，不等式が成立する．

(2)　$f(x)$ も $g(x)$ も整式関数であるから，極は有限個である．必要なら $-f(x)$ または $f(-x)$ をあらためて $f(x)$，$-g(x)$ または $g(-x)$ をあらためて $g(x)$ とすることにより，1 より大きい実数 a で，$a < x$ において $f(x)$ も $g(x)$ も単調増加であるものが存在する，とできる．

この $f(x)$ と $g(x)$ を用いて $g(x)$ が定数であることが証明できれば，もとの $g(x)$ も定数である．

$a < x < y$ とする．このとき，十分大きい x と y をとれば，不等式

$$\frac{g(y) - g(x)}{f(y) - f(x)} < 1 \quad \cdots ①$$

が成立することを示す．① は，

$$f(y) - f(x) > g(y) - g(x)$$

と同値である．x を固定し $x \leqq y$ で定義された y の関数を

$$F(y) = f(y) - f(x) - g(y) + g(x)$$

で定める．

$$F'(y) = f'(y) - g'(y)$$

である．$f'(y)$，$g'(y)$ はそれぞれ $n-1$ 次，$k-1$ 次である．単調増加なのでともに正である．

したがって，$b \leqq y$ であれば $F'(y)>0$ となる b が存在する．この b は x によらない．したがって，あらためて x を $b<x$ にとって，上記のように関数 $F(y)$ を定める．このとき $F(x)=0$ なので，$b<x<y$ の任意の x と y について $f(y)>0$，つまり不等式 ① が成立する．

$f(b)<N$ となる整数 N を 1 つとり，実数 $k=1,\ 2,\ \cdots$ に対して x_k を

$$f(x_k)=N+k$$

となるようにとる．

$$b<x_1<x_2<\cdots$$

であり，① より

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}<1$$

が成りたつ．

$$f(x_2)-f(x_1)=N+2-(N+1)=1$$

なので，

$$0 \leqq g(x_2)-g(x_1)<1$$

が成りたち，かつ $g(x_2)-g(x_1)$ は整数である．よって

$$g(x_2)-g(x_1)=0$$

である．同様に考えることにより正整数 k に対して

$$g(x_{k+1})=g(x_k)$$

が成立し，これより，

$$g(x)=g(x_1)$$

がすべての $x=x_k$ で成立する．

よってこれは恒等式であり，$g(x)$ は x によらず一定の整数値 $g(x_1)$ をとる．

1.4　4番

1.4.1　問題

四面体 ABCD の面および内部から一直線上にない 3 点 P, Q, R を選ぶ．このとき，三角形 PQR の面積は四面体 ABCD の 4 つの面の面積のうち最大のものを超えないことを示せ．

1.4.2　解答

解法 1

i)　三角形 PQR の定める平面と四面体 ABCD の共通部分が，辺上にある 3 点を頂点とする三角形であるとき．

三角形 PQR はこの三角形に含まれる．よって，題意を示すために 3 点 P, Q, R は四面体 ABCD の辺上にあるとしてよい．

2 点 Q, R を固定し，点 P を辺を含む直線上を動かす．点 P の位置ベクトルは，$\overrightarrow{a}t+\overrightarrow{b}$ と媒介変数 t の一次式で表される．

三角形 PQR の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{RP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right)^2}$ である．根号内は t の 2 次式となる．

実数 t に対して根号内は負とならないので t^2 の係数は正である．点 P が辺上を動くとき，t はある区間を動く．t^2 の係数が正の 2 次関数はこの区間のいずれかの境界で最大となる．つまり，三角形 PQR の面積は点 P が頂点に来たときの値でおさえられる．

点 P をその頂点に置き，次に点 Q を動かす．同様に考え，面積は点 Q が頂点に来たときの値でおさえられる．さらに点 R を動かす．面積は点 R が頂点に来たときの値でおさえられる．

従って，三角形 PQR の面積は 3 点 P, Q, R が頂点にあるときの面積でおさえられる．つまり，四面体 ABCD の 4 つの面の面積のうち最大のものを超えないことが示された．

※　t^2 の係数が正であることは，次のことからも分かる．

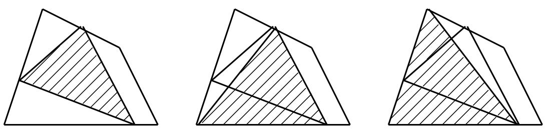
$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{\mathrm{RP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right)^2\\
=\ &\left({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2\right)\left({x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2\right)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\\
=\ &(x_1y_2-x_2y_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2
\end{aligned}
$$

ii)　三角形 PQR の定める平面と四面体 ABCD の共通部分が，辺上にある 4 点を頂点とする四辺形であるとき．このときこの四辺形は凸である．

一般に，凸な四辺形の内部にある三角形の面積は，その四辺形の 2 つの対角線でそれぞれに四辺形を 2 つに分けた 4 つの三角形の面積の最大値を超えない．

最大値を考えるので，三角形の頂点は四辺形の辺上にあるとしてよい．このとき，図のように，三角形の各頂点を順次面積がより大きくなる四辺形の頂点に動かすことで分かる．



よってこの場合も i) に帰着する．

解法 2

四面体 ABCD の面 △BCD 上の点 S は，$p_1+p_2+p_3=1,\quad p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ p_3 \geqq 0$ である実数 $p_1,\ p_2,\ p_3$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=p_1\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p_2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+p_3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表される．したがって，四面体 ABCD の面および内分にある点 P は，$0 \leqq t \leqq 1$ なる t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AS}}=tp_1\overrightarrow{\mathrm{AB}}+tp_2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+tp_3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表される．実数 $tp_1,\ tp_2,\ tp_3$ を改めて実数 $p_1,\ p_2,\ p_3$ とすることにより，四面体 ABCD の面および内分にある点 P は，$p_1+p_2+p_3 \leqq 1,\quad p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ p_3 \geqq 0$ である実数 $p_1,\ p_2,\ p_3$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p_1\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p_2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+p_3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表される．基準点 O をとる．これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-p_1-p_2-p_3)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p_1\overrightarrow{\mathrm{OB}}+p_2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p_3\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

なので，

$$r_1=1-p_1-p_2-p_3,\ r_2=p_1,\ r_3=p_2,\ r_4=p_3$$

とすることにより，点 P が，四面体 ABCD の面および内部にあるなら，$r_1+r_2+r_3+r_4=1,\ r_1 \geqq 0,\ r_2 \geqq 0,\ r_3 \geqq 0,\ r_4 \geqq 0$ である実数 $r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+r_3\overrightarrow{\mathrm{OC}}+r_4\overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad \cdots ①$$

と表される．

逆にこのとき，点 P が四面体 ABCD の面および内部にあることは，逆にたどることで分かる．

三角形 PQR は ABCD の面および内部にあるので，点 P は，上記のように表される．

点 P から直線 QR に垂線を引き，交点を O とする．点 O を通り，直線 QR に直交する平面を α とする．

点 P は α 上にある．4 頂点 A，B，C，D の α への正射影を A′，B′，C′，D′ とする．

平面 α を xy 平面に，直線 QR を z 軸にとる．このとき，ベクトル $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ の正射影は $(x_1,\ y_1,\ 0)$ となる．

① の関係は各成分で成りたつので，平面 α 上で

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r_1\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+r_2\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+r_3\overrightarrow{\mathrm{OC'}}+r_4\overrightarrow{\mathrm{OD'}}$$

が成りたつ．

また 5 点 P，A，B，C，D と直線 QR との距離は，それぞれ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OD'}}\right|$ である．

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OD'}}\right|$ のなかの最大値を $\left|\overrightarrow{\mathrm{OX'}}\right|$ とし，対応する頂点を X とする．

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| &= \left|r_1\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+r_2\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+r_3\overrightarrow{\mathrm{OC'}}+r_4\overrightarrow{\mathrm{OD'}}\right| \\
&\leqq \left|r_1\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|+r_2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right|+r_3\left|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right|+r_4\left|\overrightarrow{\mathrm{OD'}}\right| \\
&\leqq (r_1+r_2+r_3+r_4)\left|\overrightarrow{\mathrm{OX'}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OX'}}\right|
\end{aligned}$$

であり，

$$\triangle\mathrm{PQR}\ の面積=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{QR},\ \triangle\mathrm{XQR}\ の面積=\frac{1}{2}\mathrm{OX'}\cdot\mathrm{QR}$$

であるから，$\triangle$PQR の面積は $\triangle$XQR の面積を超えない．

X を固定し，点 Q について同様にして，$\triangle$XQR の面積以上になる頂点 Y を選び，その Y を固定して，点 R について同様にして，$\triangle$XYR の面積以上になる頂点 Z を選ぶ．

$\triangle$XYZ は四面体の何れかの面の面であるので，その面積は 4 つの面の面積のうち最大のものを超えない．

したがって，三角形 PQR の面積は四面体 ABCD の 4 つの面の面積のうち最大のものを超えないことが示された．

2　京大特色総人理系

2.1　1 番

2.1.1　問題

ブラマンジエという型にはめて作るフランス由来のお菓子がある．ここではブラマンジエが，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上の関数

$$y = \sum_{n=0}^{N} \frac{s(2^n x)}{2^n}$$

のグラフと x 軸で囲まれた領域を直線 $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転してできる立体として与えられているとする．ただし，ここで N は自然数，$s(x)$ は x から最も近い整数までの距離とする．

(1) ブラマンジエの体積を計算し，N を用いて表せ．

(2) (1) で求めた体積の $N \to \infty$ の極限を求めよ．

ただし，計算の際にパップス・ギュルダンの定理を証明無しに使ってもよい．ここでパップス・ギュルダンの定理とは次のものである：

> 面積 S の平面図形 A が，それと同一平面上の直線 l の一方の側 (直線 l を含む) のみにあるとき，その図形 A を直線 l の周りに 1 回転させてできる立体の体積は，(回転による A の重心の移動距離)$\times S$ となる．

また面積 S の平面図形 A が，区間 $a \leqq x \leqq b$ 上で $\phi(x) \leqq \psi(x)$ となる連続関数 $\phi(x)$, $\psi(x)$ を用いて $A = \{(x,\ y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \phi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$ と表せたとき，A の重心の座標は

$$\left(\frac{1}{S} \int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\, x\, dx,\ \frac{1}{S} \int_a^b \frac{\psi(x)^2 - \phi(x)^2}{2}\, dx \right)$$

であることも証明無しに使ってもよい．

2.1.2　解答

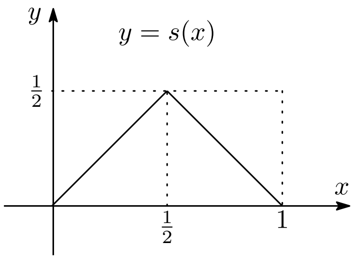
(1)　$f_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{s(2^n x)}{2^n}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ とおく．

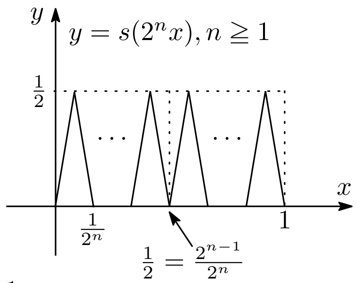
$$f_N(0) = f_N(1) = 0, \qquad f_N\left(\frac{1}{2}\right) = s\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{s(1)}{2} + \frac{s(2)}{2^2} + \cdots = s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

である．ここで

$$s(x)=\begin{cases} x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ 1-x & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1\right) \end{cases}$$

である．$y=s(2^n x)$ のグラフは $y=s(x)$ のグラフを x 方向に $\dfrac{1}{2^n}$ に縮めたものであるから，それぞれ次のようになる．





$0 \leqq n \leqq N$ に対して $y=s(2^n x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称である．よって，$y=f_N(x)$ のグラフも直線 $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称である．

$y=f_N(x)$ のグラフの区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ に対応する部分と x 軸で囲まれた領域の面積を S とおく．

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}} f_N(x)\,dx=\sum_{n=0}^{N}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{s(2^n x)}{2^n}\,dx$$

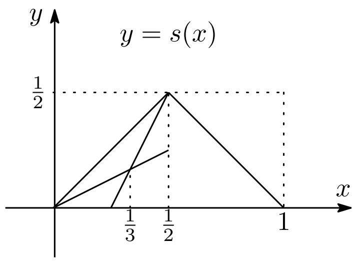
上のグラフよりわかるように，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} s(2^n x)\,dx=\frac{1}{8}$ となる．よって，

$$S=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{N+1}}\right)$$

である．次に面積が S となるこの領域を $x=\dfrac{1}{2}$ を軸に回転した回転体の体積を求める．重心の x 座標が求まれば，パップス・ギュルダンの定理より体積を求めることができる．重心の x 座標を r とする．

$$r=\frac{1}{S}\int_0^{\frac{1}{2}} f_N(x)x\,dx=\frac{1}{S}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{N}\frac{s(2^n x)}{2^n}\right\}x\,dx=\frac{1}{S}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{1}{2}} s(2^n x)x\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} s(2^n x)x\,dx$ は，$y=s(2^n x)$ で定まる区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の面積と重心の x 座標の積である．その値は，$n=0$ のときは次図のように $\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{3}$ であり，



$n \geqq 1$ のときは明らかに $\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{4}$ である．よって，

$$rS=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{1}{2}}s(2^nx)x\,dx=\frac{1}{24}+\frac{1}{32}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{24}+\frac{1}{32}\left(1-\frac{1}{2^N}\right)$$

重心の x 座標と回転軸との距離は $\dfrac{1}{2}-r$ なので，パップス・ギュルダンの定理よりブラマンジエの体積 V_N は

$$\begin{aligned} V_N &= 2\pi\left(\frac{1}{2}-r\right)S=\pi(S-2rS) \\ &= \pi\left\{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{N+1}}\right)-\frac{1}{12}-\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2^N}\right)\right\} \end{aligned}$$

である．
(2)

$$\lim_{N\to\infty}V_N=\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{16}\right)=\frac{5\pi}{48}$$

である．
※　重心という概念は物理学のものである．だから，数学では本問中の第 2 の命題を重心の定義としてもよい．重心の定義式は

$$\left(\frac{1}{S}\int_a^b(\psi(x)-\phi(x))\,x\,dx,\ \frac{1}{S}\int_a^b\frac{\psi(x)+\phi(x)}{2}\cdot(\psi(x)-\phi(x))\ dx\right)$$

と書ける．
重心の x 座標を X とすると，

$$SX=\int_a^b(\psi(x)-\phi(x))\,x\,dx$$

となる．右辺は x 方向の重みつき平均である．y 座標については，y 方向の中点の重みつき平均となり，物理的な意味が分かる．
また，回転体の体積は，軸からの距離を x とおけば

$$\int_a^b 2\pi\,(\psi(x)-\phi(x))\,x\,dx$$

となる．論証は，定積分の定義と同様の議論を経る必要があるが，意味は明確である．そして，これは重心の移動距離 $2\pi X$ の S 倍である．これが，パップス・ギュルダンの定理である．

2.2　2 番

2.2.1　問題

(1)　$T_0(x) = 1$，$T_1(x) = x$ として漸化式

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

で多項式 $T_1(x)$，$T_2(x)$, $\cdots$, $T_n(x)$, $\cdots$ を定めると，任意の自然数 n と実数 θ に対して

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

となることを示せ．

(2)　任意の自然数 n と実数 θ に対して

$$\cos(\theta)\cos\left(\theta + \frac{1}{n}2\pi\right)\cos\left(\theta + \frac{2}{n}2\pi\right)\cdots\cos\left(\theta + \frac{n-1}{n}2\pi\right)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}} - \cos(n\theta)}{2^{n-1}} & (n : 偶数) \\ \dfrac{\cos(n\theta)}{2^{n-1}} & (n : 奇数) \end{cases}$$

となることを示せ．

2.2.2　解答

(1)　任意の自然数 n と実数 θ に対して

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

となることを数学的帰納法で示す．$n = 0,\ 1$ のときは

$$T_0(\cos\theta) = \cos 0\cdot\theta = 1,\ T_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

より成立する．n，$n+1$ のとき成立するとする．$n+2$ のとき，

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\cos\{(n+1)\theta\} - \cos(n\theta) \\ &= \cos\{(n+1+1)\theta\} + \cos\{(n+1-1)\theta\} - \cos(n\theta) = \cos\{(n+2)\theta\} \end{aligned}$$

より成立し，すべての n で成立する．

(2)　多項式 $T_n(x)$ の漸化式と初期条件から，$T_n(x)$ の最高次の項は $2^{n-1}x^n$ である．また，漸化式に $x = 0$ を代入した

$$T_{n+2}(0) = -T_n(0)$$

と初期条件から，定数項 $T_n(0)$ は，n が偶数のとき $(-1)^{\frac{n}{2}}$，奇数のとき 0 である．

次に θ を任意の定数として n 次方程式

$$T_n(x) - \cos(n\theta) = 0 \quad \cdots①$$

を考える．$x=\cos\theta$ はこの方程式の解である．θ は任意定数なので，$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ の θ に $\theta+\dfrac{k}{n}2\pi$ を代入することにより

$$T_n\left\{\cos\left(\theta+\frac{k}{n}2\pi\right)\right\}=\cos\left\{n\left(\theta+\frac{k}{n}2\pi\right)\right\}=\cos n\theta$$

が成立する．よって，

$$x=\cos(\theta),\ \cos\left(\theta+\frac{1}{n}2\pi\right),\ \cos\left(\theta+\frac{2}{n}2\pi\right),\ \cdots,\ \cos\left(\theta+\frac{n-1}{n}2\pi\right)$$

の n 個の値が方程式 ① の解である．方程式 ① は x^n の係数が 2^{n-1} で，定数項が n が偶数のとき $(-1)^{\frac{n}{2}}-\cos(n\theta)$，奇数のとき $-\cos(n\theta)$ である．よって，n 個の解の積と係数の関係から

$$\begin{aligned}&(-1)^n\cos(\theta)\cos\left(\theta+\frac{1}{n}2\pi\right)\cos\left(\theta+\frac{2}{n}2\pi\right)\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-1}{n}2\pi\right)\\ =&\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}-\cos(n\theta)}{2^{n-1}} & (n:\text{偶数})\\ -\dfrac{\cos(n\theta)}{2^{n-1}} & (n:\text{奇数})\end{array}\right.\end{aligned}$$

となり，任意の自然数 n と実数 θ に対して

$$\begin{aligned}&\cos(\theta)\cos\left(\theta+\frac{1}{n}2\pi\right)\cos\left(\theta+\frac{2}{n}2\pi\right)\cdots\cos\left(\theta+\frac{n-1}{n}2\pi\right)\\ =&\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}-\cos(n\theta)}{2^{n-1}} & (n:\text{偶数})\\ \dfrac{\cos(n\theta)}{2^{n-1}} & (n:\text{奇数})\end{array}\right.\end{aligned}$$

となることが示された．

※　『数学対話』の「チェビシフの多項式」を参考のこと．

3　東大理科

3.1　1番

3.1.1　問題

$a,\ b,\ c,\ p$ を実数とする。不等式

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c>0 \\ bx^2+cx+a>0 \\ cx^2+ax+b>0 \end{aligned}$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

(1) $a,\ b,\ c$ はすべて 0 以上であることを示せ。

(2) $a,\ b,\ c$ のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。

(3) $p=0$ であることを示せ。

3.1.2　解答

(1) $a<0$ と仮定する．ax^2+bx+c の判別式を D とする．

$D<0$ のときはすべての x で $ax^2+bx+c<0$ となる．

$D \geqq 0$ のとき．$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha \leqq \beta)$ とすると，$x<\alpha$ において $ax^2+bx+c<0$ となる．

よって条件を満たさない．他も同様．よって $a,\ b,\ c$ はすべて 0 以上である．

(2) $a>0$ のとき，$ax^2+bx+c>0$ となる x の集合にはある値より小さいすべての x が含まれる．よって，$a,\ b,\ c$ がすべて正なら，ある値より小さいすべての x で 3 不等式が成立し，条件を満たす x の集合が $x>p$ を満たす実数 x の集合と一致することはない．よって，$a,\ b,\ c$ のうち少なくとも 1 個は 0 である．

(3) $a,\ b,\ c$ についての対称性から，$a=0$ とする．このとき，条件は

$$\begin{aligned} bx+c>0 \\ x(bx+c)>0 \\ cx^2+b>0 \end{aligned}$$

となり，必要十分条件は $x>0$ である．よって $p=0$ でなければならない．

3.2　2 番

3.2.1　問題

平面上の点 P，Q，R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle\mathrm{PQR}$ で表す．また， P，Q，R が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR} = 0$ とする．

A，B，C を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC} = 1$ とする．この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle\mathrm{ABX} + \triangle\mathrm{BCX} + \triangle\mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ．

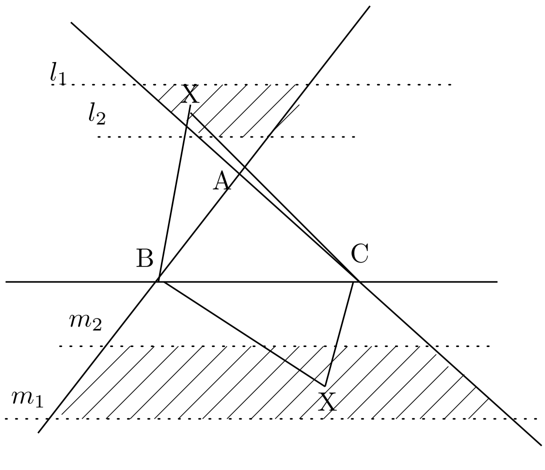
3.2.2　解答

$S(X) = \triangle\mathrm{ABX} + \triangle\mathrm{BCX} + \triangle\mathrm{CAX}$ とおく．

X が $\triangle\mathrm{ABC}$ の周か内部にあるときは $S(X) = 1$ である．これは条件をみたさない．よって，X は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外部にある．

$\triangle\mathrm{ABC}$ の外部は，3 直線 AB，BC，CA で 6 個の領域に分けられる．

X が $\triangle\mathrm{ABC}$ の辺を共有する領域にあるときと，X が $\triangle\mathrm{ABC}$ の辺を共有しない領域にあるときに分ける．



i)　X が $\triangle\mathrm{ABC}$ の辺を共有しない領域にあるとき

頂点 A につながる領域にあるとする．このとき，$S(X) = 2\triangle\mathrm{BCX} - \triangle\mathrm{ABC}$ より，$\dfrac{3}{2} \leqq \triangle\mathrm{BCX} \leqq 2$ である．

辺 BC に対する高さを考え，BC からの距離が BC に対する高さの 2 倍にある直線 l_1 と，1 の距離にある直線 l_2 をとる．

X はこの 2 直線と直線 AB，AC で囲まれた領域にある．この面積は $1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$ である．

ii)　X が $\triangle\mathrm{ABC}$ の辺を共有する領域にあるとき

辺 BC を共有する領域にあるとする．このとき，$S(X) = 2\triangle\mathrm{BCX} + \triangle\mathrm{ABC}$ より，$\dfrac{1}{2} \leqq \triangle\mathrm{BCX} \leqq 1$ である．

辺 BC に対する高さを考え，BC からの距離が BC に対する高さと同じ距離にある直線 m_1 と，$\dfrac{1}{2}$ の距離にある直線 m_2 をとる．

X はこの 2 直線と直線 AB，AC で囲まれた領域にある．この面積は $2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$ である．

これらは長さの比のみで決まるので，領域の他の部分にあっても同じである．よって，X の動きうる範囲の面積は

$$\frac{3}{4} \times 3 + \frac{7}{4} \times 3 = \frac{15}{2}$$

である．

3.3　4 番

3.3.1　問題

$n,\ k$ を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対してこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots\cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を k で表せ。

3.3.2　解答

(1)　選ぶ順序も区別して，n 個のものから，同じものを選ぶ場合を含めて 2 個選んだ積の和から，同じものを 2 個選んだ積の和を除く．

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^j \cdot 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{2i} \\ = & \frac{2^n-1}{2-1} \cdot \frac{2^n-1}{2-1} - \frac{4^n-1}{4-1} \\ = & \frac{2 \cdot 4^n}{3} - 2^{n+1} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

このなかには 2^3 と 2^5，2^5 と 2^3 のように 2 組ずつ同じものが入っている．よって，異なるものを順序を区別せず 2 個選ぶ場合の和 $a_{n,2}$ は，この 2 分の 1 である．よって，

$$a_{n,2} = \frac{4^n}{3} - 2^n + \frac{2}{3}$$

(2)　$a_{n,k}$ の定義により，

$$f_n(x) = (1+2^0x)(1+2^1x)\cdots\cdots(1+2^{n-2}x)(1+2^{n-1}x)$$

である．従って，

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} &= 1 + 2^n x \\ \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} &= \frac{f_{n+1}(x)}{(1+2^0(2x))(1+2^1(2x))\cdots\cdots(1+2^{n-2}(2x))(1+2^{n-1}(2x))} \\ &= 1 + 2^0 x = 1 + x \end{aligned}$$

(3)　(2) より，

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= (1+2^n x)\left(1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots\cdots+a_{n,n}x^n\right) \\ &= (1+x)\left(1+2a_{n,1}x+2^2a_{n,2}x^2+\cdots\cdots+2^n a_{n,n}x^n\right) \end{aligned}$$

である．両辺のの x^{k+1} の係数を比較することにより，

$$\begin{aligned} a_{n+1,k+1} &= 2^n a_{n,k}+a_{n,k+1} \\ &= 2^k a_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1} \end{aligned}$$

を得る．これから $a_{n,k+1}$ を消去して

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+k+1}-2^k)a_{n,k}$$

つまり，

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^{n+k+1}-2^k}{2^{k+1}-1}$$

である．

3.4 5 番

3.4.1 問題

座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える．この円を底面とし，点 $(0,0,2)$ を頂点とする円錐 (内部を含む) を S とする．また，点 A$(1,0,2)$ を考える．

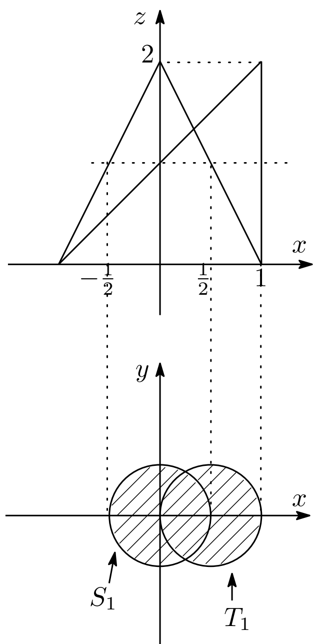
(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする．平面 $z=1$ によ S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ．

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ．

3.4.2 解答

(1) 直円錐 S と斜円錐 T を $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ での断面の円をそれぞれ S_t，T_t とおく．

比例から S_1 および T_1 は半径 $\dfrac{1}{2}$ の円であり，その中心は $(0,\ 0,\ 1)$ と $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$ であるから，それぞれ次図の斜線部分である．

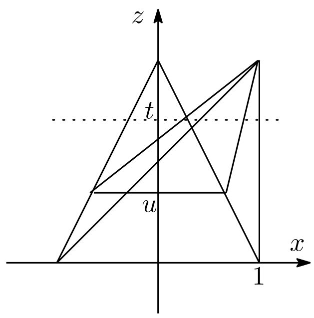


(2)

点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する領域を D とする．D はまた，直円錐の底面を S_0 から S_2 まで移動させたとき，その底面と頂点 A でできる斜円錐の通過領域でもある．

直円錐を $z=t$ 平面で切った断面の円の半径を r とすると，この円の半径を r とすると，$2:1=2-t:r$ より，$r=1-\dfrac{t}{2}$ である．

次に，底面の z 座標が u であるとき，この $1-\dfrac{u}{2}$ を半径とする円と頂点 A でできる斜円錐を考える．

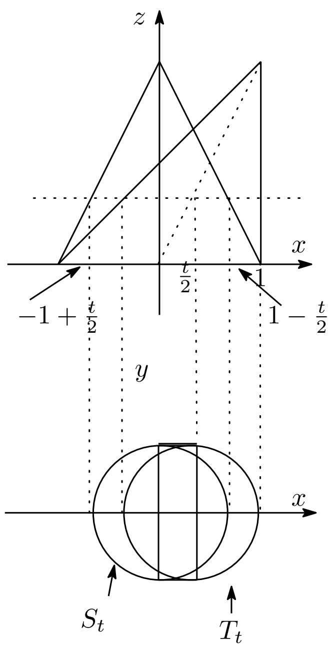


この斜円錐を $z=t$ 平面で切った断面の円の半径を s とすると

$$1-\frac{u}{2}:s=2-u:2-t$$

なので，$s=1-\dfrac{t}{2}$ となり，半径は変わらない．

したがって D を $z=t$ 平面で切った断面は，円 T_t から同じ半径の円が S_t まで動いた通過領域になる．



また T_t の中心の x 座標は $\dfrac{t}{2}$ である．したがってこの通過領域を，2 つの半円の和と長方形に分けることにより，断面積は

$$\pi\left(1-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}\cdot 2\left(1-\frac{t}{2}\right)=\frac{\pi}{4}(2-t)^2+\frac{t(2-t)}{2}$$

となる．よってその体積 V は

$$V = \int_0^2\left\{\frac{\pi}{4}(2-t)^2+\frac{t(2-t)}{2}\right\}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\pi}{12}(t-2)^3 + \frac{-t^3+3t^2}{6}\right]_0^2 \\
&= \frac{2}{3}(\pi+1)
\end{aligned}
$$

3.5 6番

3.5.1 問題

以下の問いに答えよ。

(1) A，α を実数とする。θ の方程式

$$A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha) = 0$$

を考える。$A > 1$ のとき，この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解を持つことを示せ。

(2) 座標平面上の楕円

$$C : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える。また，$0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする。D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r $(0 < r < 1)$ が存在することを示せ。また，そのような r の最大値を求めよ。

条件：C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。

3.5.2 解答

(1) $f(\theta) = A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha)$ とおく．

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin 2\theta = 1$ となるのは，$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}$ のときであり，$\sin 2\theta = -1$ となるのは，$\theta = \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ のときである．よって $A > 1$ なら，α にかかわらず

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) > 0$$

であり，同様にして，

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0,\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0,\ f\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0,\ f\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0$$

となる．$f(\theta)$ は連続関数なので，中間値の定理により $f(\theta) = 0$ となる θ が，区間

$$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right),\quad \left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right),\quad \left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right)$$

に存在する．

$f(0) = f(2\pi) = -\sin\alpha$ である．

$\sin\alpha = 0$ のときは，$f(\theta) = 0$ の解として $\theta = 0$ が加わる．

$\sin\alpha \neq 0$ のときは，$\sin\alpha > 0$ か $\sin\alpha < 0$ に応じて，区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ または区間 $\left(\dfrac{7\pi}{4},\ 2\pi\right)$ に，$f(\theta) = 0$ となる θ が存在する．

よって，$A>1$ のとき，$f(\theta)=0$ となる θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個存在する．

(2)　楕円 C 上の点 Q を $\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta\right)$ とおく．点 Q での接線は

$$\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2}x+(\sin\theta)y=1$$

である．領域 D の点 $(x,\ y)$ をとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(x-\sqrt{2}\cos\theta,\ y-\sin\theta)$$

が接線と直交しているので，接線の法線方向 $\left(\dfrac{\sqrt{2}\cos\theta}{2},\ \sin\theta\right)$ と平行である．2 ベクトルの平行条件から

$$(x-\sqrt{2}\cos\theta)\sin\theta-(y-\sin\theta)\cdot\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2}=0$$

である．これを整理して，

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2\theta-\left(x\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}y\cos\theta\right)=0 \quad \cdots①$$

となる．さらに，

$$x\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}y\cos\theta=\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}\sin(\theta+\alpha)$$

とおく，

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2\theta-\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}\sin(\theta+\alpha)=0$$

となる θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個あるような r の条件が求めるものである．

$x=y=0$ のときは $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ の 4 個ある．以下，$x^2+\dfrac{y^2}{2}\neq 0$ とする．

このとき，(1) から

$$\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{x^2+\dfrac{y^2}{2}}}>1$$

であれば少なくとも 4 個存在する．これを整理して，

$$2x^2+y^2<\frac{1}{4}$$

は十分条件である．よって $r^2 \leqq \dfrac{1}{4}$，つまり $r \leqq \dfrac{1}{2}$ は十分条件である．

$r>\dfrac{1}{2}$ とする．このときは

$$2x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

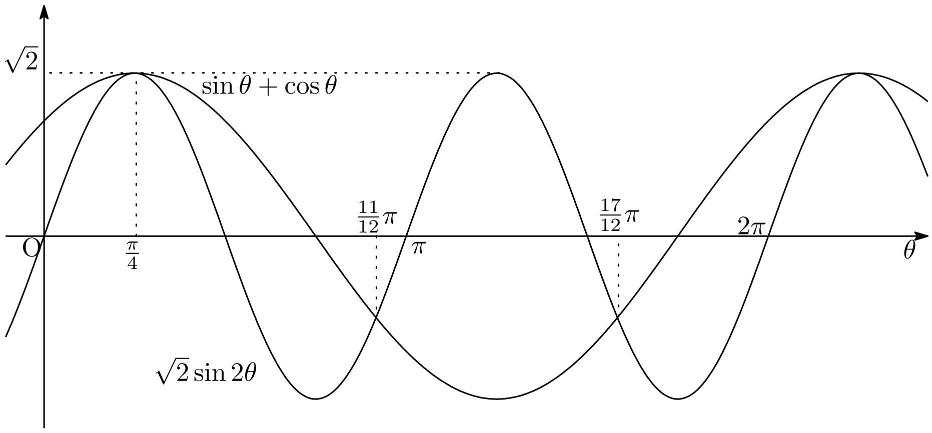
となる x と y がとれる．これを満たす組として $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ を用いると，① は

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\sin 2\theta-\sin\theta-\cos\theta\right)=0$$

となる．

$$\sqrt{2}\sin 2\theta = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

となる θ を考えるため $\sqrt{2}\sin 2\theta$ と $\sin\theta + \cos\theta$ のグラフを描くと次のようになる．



$$\sin 2\theta - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{3\theta + \frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{\theta - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

を解いて，

$$\frac{3\theta + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{\theta - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

より

$$\theta = \frac{\pi}{4}\ (\text{重解}),\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$$

となる．$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲の θ は 3 個である．

$r > \dfrac{1}{2}$ のとき反例ができたので，$r \leqq \dfrac{1}{2}$ は必要条件でもある．

よって，r の最大値は $\dfrac{1}{2}$ である．

※ 注意

本問は 4 本以上の法線が引ける点であるための十分条件を求めている．r の最大値とはいえ，この形での最大値である．

では必要十分条件はどのようになるのか．

必要十分条件

a と b を $a > b$ の正の定数とする xy 平面上に楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ がある．

平面上の点 P から少なくとも 4 本の異なる法線が引けるとする．このような点 P の集合は，不等式 $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} < (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$ で表される領域となる．

証明

C 上の点 $\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ での C の接線は

$$\frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b}y = 1$$

である。その法線方向が $\left(\dfrac{\cos\theta}{a},\ \dfrac{\sin\theta}{b}\right)$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (a\cos\theta - X,\ b\sin\theta - Y)$ がこの法線方向と平行であるので，

$$\frac{\cos\theta}{a}(b\sin\theta - Y) - \frac{\sin\theta}{b}(a\cos\theta - X) = 0 \quad \cdots①$$

$0 < \theta < 2\pi,\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ なので，

$$a^2 - b^2 = \frac{aX}{\cos\theta} - \frac{bY}{\sin\theta}$$

がなりたつ．

$X > 0,\ Y > 0$ とする。このとき，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を通る法線となる C 上の点を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とすると，$\theta \neq 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ である。

$0 < \theta < 2\pi,\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ に対して，$f(\theta) = \dfrac{aX}{\cos\theta} - \dfrac{bY}{\sin\theta}$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}aX + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}bY \\ &= \frac{aX\sin^3\theta + bY\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \end{aligned}$$

$f'(\theta) = 0$ となる θ は $\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = -\dfrac{bY}{aX}$ となるとき，つまり，$\tan\theta = -\left(\dfrac{bY}{aX}\right)^{\frac{1}{3}}$ のときである。

$-\left(\dfrac{bY}{aX}\right)^{\frac{1}{3}} < 0$ より，これをみたす θ は，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$，$\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ に 1 個ずつある。それを θ_1，θ_2 とする。

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき，$\sin\theta$ の $\cos\theta$ も減少するので，$f'(\theta)$ は θ_1 で正からに負に変わり，θ_1 で極大，

$\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta$ の $\cos\theta$ も増加するので，$f'(\theta)$ は θ_2 で負から正に変わり，この θ_2 で極小である。

したがって，$a^2 - b^2 = f(\theta)$ が異なる 4 つの解をもつのは

$$a^2 - b^2 > f(\theta_2)$$

のときである。

$\tan\theta_2 = -\left(\dfrac{bY}{aX}\right)^{\frac{1}{3}}$ より，

$$\cos^2\theta_2 = \frac{(aX)^{\frac{2}{3}}}{(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}}}, \qquad \sin^2\theta_2 = \frac{(bY)^{\frac{2}{3}}}{(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}}}$$

ここで，$\cos\theta_2 > 0$，$\sin\theta_2 < 0$ なので，

$$\cos\theta_2 = \frac{(aX)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}}}}, \qquad \sin\theta_2 = \frac{-(bY)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}}}}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} f(\theta_2) &= \frac{aX\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}}}{(aX)^{\frac{1}{3}}} - \frac{bY\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}}}{-(bY)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}\}\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}} \\ &< a^2-b^2 \end{aligned}$$

これより，

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}} < (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}} \quad \cdots ②$$

となることが示された．

X，Y のいずれかが負であるときも，図形の対称性と不等式の対称性から，同様の関係が成り立つ。

$X>0$，$Y=0$ のとき

平行条件 ① は

$$\frac{\cos\theta}{a}(b\sin\theta) - \frac{\sin\theta}{b}(a\cos\theta - X) = 0$$

となり，$\theta=0,\ \pi$ のとき成立し，さらに $\theta\neq 0,\ \pi$ のときは

$$\cos\theta = \frac{aX}{a^2-b^2}$$

となる。さらに，この θ が 2 個とれるのは，$\left|\dfrac{aX}{a^2-b^2}\right| < 1$ のときで，このとき条件は ② と同値である。

$X=0$，$Y>0$ のときも同様である。

$X=Y=0$ なら法線は x 軸と y 軸にとれ，対応する点は 4 個ある。$X=Y=0$ は ② をみたす。

以上から，平面上の点 P から少なくとも 4 本の異なる法線が引ける条件が，② であることが示された。

4　東大文科

4.1　4番

4.1.1　問題

$n,\ k$ を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対してこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots\cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を k で表せ。

4.1.2　解答

(1)　選ぶ順序も区別して，n 個のものから，同じものを選ぶ場合を含めて 2 個選んだ積の和から，同じものを 2 個選んだ積の和を除く.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^j \cdot 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{2i} \\
=\ & \frac{2^n-1}{2-1} \cdot \frac{2^n-1}{2-1} - \frac{4^n-1}{4-1} \\
=\ & \frac{2 \cdot 4^n}{3} - 2^{n+1} + \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

このなかには 2^3 と 2^5，2^5 と 2^3 のように 2 組ずつ同じものが入っている．よって，異なるものを順序を区別せず 2 個選ぶ場合の和 $a_{n,2}$ は，この 2 分の 1 である．よって，

$$a_{n,2} = \frac{4^n}{3} - 2^n + \frac{2}{3}$$

(2)　$a_{n,k}$ の定義により，

$$f_n(x) = (1+2^0x)(1+2^1x)\cdots\cdots(1+2^{n-2}x)(1+2^{n-1}x)$$

である．従って，

$$\begin{aligned}
\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} &= 1+2^n x \\
\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} &= \frac{f_{n+1}(x)}{(1+2^0(2x))(1+2^1(2x))\cdots\cdots(1+2^{n-2}(2x))(1+2^{n-1}(2x))} \\
&= 1+2^0 x = 1+x
\end{aligned}$$

(3)　(2) より，

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= (1+2^n x)\left(1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots\cdots+a_{n,n}x^n\right) \\
&= (1+x)\left(1+2a_{n,1}x+2^2a_{n,2}x^2+\cdots\cdots+2^n a_{n,n}x^n\right)
\end{aligned}$$

である．両辺のの x^{k+1} の係数を比較することにより，

$$\begin{aligned}
a_{n+1,k+1} &= 2^n a_{n,k}+a_{n,k+1} \\
&= 2^k a_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1}
\end{aligned}$$

を得る．これから $a_{n,k+1}$ を消去して

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1} = (2^{n+k+1}-2^k)a_{n,k}$$

つまり，

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{2^{n+k+1}-2^k}{2^{k+1}-1}$$

である．

5　京大理系

5.1　1番

5.1.1　問題

a，b は実数で，$a>0$ とする．z に関する方程式

$$z^3+3az^2+bz+1=0 \tag{$*$}$$

は 3 つの相異なる解を持ち，それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする．このとき，a，b と $(*)$ の 3 つの解を求めよ．

5.1.2　解答

3 つの解を α, β, γ とし，α が実数，$\gamma=\bar{\beta}$ とする．解と係数の関係から

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta+\gamma=-3a\\&\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b\\&\alpha\beta\gamma=\alpha|\beta|^2=-1\end{aligned}$$

正三角形の中心は

$$\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=-a$$

であり，一辺の長さが $\sqrt{3}a$ なので，中心と頂点との距離は

$$\sqrt{3}a\sin\frac{\pi}{3}\times\frac{2}{3}=a$$

である．$\alpha<0$ なので，$\alpha=-2a$ である．

ここで 1 の 3 乗根の虚数を ω とする．

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

である．これを用いて中心のまわりの各頂点の回転を考えると

$$\beta-(-a)=\omega(\alpha-(-a)),\quad \gamma-(-a)=\omega^2(\alpha-(-a))$$

となり，$\omega^2+\omega+1=0$ なので，この結果

$$\begin{aligned}\beta&=-a(\omega+1)=a\omega^2\\\gamma&=-a\left(\omega^2+1\right)=a\omega\end{aligned}$$

となる．これから

$$\alpha\beta\gamma=-2a^3=-1$$

よって

$$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}$$

となる．また

$$b=(-2a)a\omega^2+a\omega^2\cdot a\omega+a\omega(-2a)=a^2(1-2\omega-2\omega^2)=3a^2=3\cdot 2^{-\frac{2}{3}}$$

そして，3 つの解は

$$-2 \cdot 2^{-\frac{1}{3}} = -2^{\frac{2}{3}}, \qquad 2^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -2^{-\frac{4}{3}} \left(1 \pm \sqrt{3}i\right)$$

である．

5.2　2番

5.2.1　問題

p を正の整数とする．α，β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ，

5.2.2　解答

(1)　$a_n=\alpha^n+\beta^n$ と置く．a_n が偶数の整数であることを n についての数学的帰納法で示す．
解と係数の関係から

$$a_1=\alpha+\beta=2p,\quad \alpha\beta=-1$$

である．

$$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2$$

よって $n=1,\ 2$ で成立する．

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)\\ &= 2pa_{n+1}+a_n\end{aligned}$$

であるから，a_n，a_{n+1} が偶数の整数なら，a_{n+2} も偶数の整数である．
よってすべての n で a_n は偶数の整数である．

(2)　2 次方程式の判別式が $4p^2+4>0$ なので，α，β は実数である．
$|\alpha|>1$ のとき，$|\beta|<1$ である．a_n が偶数なので，

$$(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=(-\alpha)^n\sin\{(a_n-\beta^n)\pi\}=-(-\alpha)^n\sin(\beta^n\pi)$$

そして，

$$\begin{aligned}-(-\alpha)^n\sin(\beta^n\pi) &= -(\beta^n\pi)(-\alpha)^n\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}\\ &= -\pi(-\alpha\beta)^n\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}=-\pi\cdot\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\beta^n\pi)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}=1$ である．よって，

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=\lim_{n\to\infty}-\pi\cdot\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}=-\pi$$

である．

5.3　4番

5.3.1　問題

正の整数 a に対して，

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき，$B(a) = b$ と定める．例えば，$B(3^2 \cdot 5) = 2$ である．
m，n は整数で，次の条件を満たすとする．

(i) $1 \leqq m \leqq 30$

(ii) $1 \leqq n \leqq 30$

(iii) n は 3 で割り切れない．

このような $(m,\ n)$ について

$$f(m,\ n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき，

$$A(m,\ n) = B(f(m,\ n))$$

の最大値を求めよ．また，$A(m,\ n)$ の最大値を与えるような $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

5.3.2　解答

$m \equiv 0,\ 1,\ 2 \pmod 3$ のそれぞれに対して，

$$m^3 \equiv 0,\ 1,\ 2 \pmod 3$$

であり，$n \equiv 1,\ 2 \pmod 3$ のそれぞれに対して，

$$n^2 + n \equiv 2,\ 0 \pmod 3$$

である．従って，$A(m,\ n) \geqq 1$ となるためには，$m \equiv 1,\ n \equiv 1 \pmod 3$ または，$m \equiv 0,\ n \equiv 2 \pmod 3$ が必要である．
$m \equiv 1,\ n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$m = 3k + 1$，$n = 3l + 1$ と置くと，

$$f(m,\ n) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 9l^2 + 9l + 6$$

となる．k と l に寄らずこれは 3 の倍数であるが，3^2 の倍数ではない．つまり

$$A(3k + 1,\ 3l + 1) = 1$$

である．
$m \equiv 0,\ n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，$m = 3k$，$n = 3l + 2$ と置くと，

$$f(m,\ n) = 27k^3 + 9l^2 + 15l + 9$$

となる．

$$A(3k,\ 3l+2) \geqq 2$$

となるためには l が 3 の倍数，条件 (ii) より $l=3,\ 6,\ 9$ が必要である．それぞれ $n=11,\ 20,\ 29$ である．

$$\begin{aligned}
A(3k,\ 11) &= 27k^3+27\cdot 5 = 27(k^3+5)\\
A(3k,\ 20) &= 27k^3+423 = 27k^3+9\cdot 47\\
A(3k,\ 29) &= 27k^3+873 = 27k^3+9\cdot 97
\end{aligned}$$

$$A(3k,\ 3l+2) \geqq 4$$

となりうるのは $n=11$ で k^3+5 が 3 の倍数のときである．これは $k\equiv 1 \pmod 3$ のとき，つまり $k=1,\ 4,\ 7,\ 10$ のときである．このとき，

$$k^3+5 = 6,\ 69,\ 348,\ 1005$$

となり，いずれも 3 の倍数であるが 9 の倍数ではない．よって，$A(m,\ n)$ の最大値は 4，それを与えるような $(m,\ n)$ は

$$(m,\ n) = (3,\ 11),\ (12,\ 11),\ (21,\ 11),\ (30,\ 11)$$

である．

5.4　5 番

5.4.1　問題

縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

6　京大文系

6.1　1 番

6.1.1　問題

x の 2 次関数で，そのグラフが $y = x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ．ただし，2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう．

6.1.2　解答

求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ と置く．

グラフが $y = x^2$ のグラフと 2 点で交わるために，2 次方程式 $x^2 = ax^2 + bx + c$ が異なる 2 実解をもつ．よって

$$(a-1)x^2 + bx + c = 0 \quad \cdots ①$$

において，$a \neq 1$ かつ，判別式 D が正であることが必要である．

$$D = b^2 - 4(a-1)c > 0$$

交点での接線が直交しているので，

$$\begin{aligned} (2as+b)(2s) &= -1 \\ (2at+b)(2t) &= -1 \end{aligned} \quad \cdots ②$$

以上を満たすことが，$a,\ b,\ c$ の必要十分条件である．

② より，s と t は 2 次方程式

$$4ax^2 + 2bx + 1 = 0 \quad \cdots ③$$

の 2 解でもある．

つまり条件は 2 つの 2 次方程式 ①，③ が同一の解をもつこととなる．

$b \neq 0$ のとき，

$$2(a-1) = 4a,\ 2c = 1$$

これより $a=-1$，$c=\dfrac{1}{2}$ である．このとき任意の b に対して $D=b^2+4$ となり正である．よって，任意の b に対し

$$y=-x^2+bx+\frac{1}{2}$$

は条件を満たす．

$b=0$ のとき，①，③ は

$$(a-1)x^2+c=0, \quad 4ax^2+1=0$$

となる．これが同じ解をもつてので

$$-\frac{c}{a-1}=-\frac{1}{4a}$$

つまり，$c=\dfrac{a-1}{4a}$ である．このとき，$D=-\dfrac{(a-1)^2}{4a}>0$ より $a<0$ である．

$$y=ax^2+\frac{a-1}{4a}$$

以上から求める 2 次関数は

$$y=-x^2+bx+\frac{1}{2} \quad (b \text{ は任意の実数})$$
$$y=ax^2+\frac{a-1}{4a} \qquad (a<0)$$

7　阪大理系

7.1　2 番

7.1.1　問題

1 個のさいころを，n 回投げて，k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k = 1$，出た目が 2 の場合は $X_k = -1$，その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする．

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき，Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ を Z_n で表す，ただし，i は虚数単位とする．

以下の問いに答えよ．

(1) Z_2 が実数でない確率を求めよ．

(2) $Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ \cdots,\ Z_n$ がいずれも実数でない確率を求めよ．

(3) Z_n が実数となる確率を p_n とする．p_n を n を用いて表し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

7.1.2　解答

(1)　ド・モアブルの定理より，

$$Z_n = \cos\left\{\frac{\pi}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right\} + i\sin\left\{\frac{\pi}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right\}$$

となる．したがって，Z_n が実数となる必要十分条件は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ が 3 の倍数となることである．

Z_2 が実数となるのは，

$$(X_1,\ X_2) = (1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 0)$$

のときである．その確率は，

$$2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

である．よって，Z_2 が実数でない確率は $\dfrac{1}{2}$ である．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ が 3 の倍数でないとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} X_k$ が 3 の倍数でないのは，$X_{n+1} = 0$，または $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \equiv \pm 1 \pmod 3$ に対して $X_{n+1} \equiv \pm 1 \pmod 3$（複号同順）のときである．

したがって，$Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ \cdots,\ Z_n$ がいずれも実数でない確率を r_n とすると，

$$r_{n+1} = \left(\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\right) r_n = \frac{5}{6} r_n$$

が成り立つ．$r_1 = \dfrac{2}{6}$ なので，$r_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ である．

(3)　Z_n が実数のとき Z_{n+1} が実数となるのは $X_{n+1} = 0$ のときであり，Z_n が実数でないとき Z_{n+1} が実数となるのは，(2) と同様に考え，それぞれに応じて $X_{n+1} = 1$ または $X_{n+1} = -1$ のときである．

よって，数列 $\{p_n\}$ は漸化式

$$p_{n+1} = \frac{4}{6}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}$$

を満たす．これから，

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

となり，$p_1 = \dfrac{2}{3}$ なので，

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である．よって，

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3}$$

となる．

8　東北大 AO

8.1　1 番

8.1.1　問題

(1)　自然数 n と実数 x $(0 < x < \pi)$ に対して，次を示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cos\frac{(n+1)x}{2}$$

(2)　自然数 n と実数 x $(0 < x < \pi)$ に対して，次を示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} > 0$$

8.1.2　解答

(1)　$\alpha = \cos x + i \sin x$ とする．

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) + i\left\{\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right\}$$

であり．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \alpha^k &= \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \\
&= \frac{1-\{\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x\}}{1-(\cos x + i\sin x)} \\
&= \frac{\{1-\cos(n+1)x - i\sin(n+1)x)\}\{(1-\cos x)+i\sin x\}}{(1-\cos x)^2+\sin^2 x}
\end{aligned}$$

であるから，実部を比較することにより，

$$\begin{aligned}
1+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= \frac{\{1-\cos(n+1)x\}(1-\cos x)+\sin(n+1)x\sin x}{(1-\cos x)^2+\sin^2 x} \\
&= \frac{1-\cos x-\cos(n+1)x+\{\cos(n+1)x\cos x+\sin(n+1)x\sin x\}}{2(1-\cos x)} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{-\cos(n+1)x+\cos nx}{2(1-\cos x)} = \frac{1}{2}+\frac{2\sin\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= -\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{n}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(n+1)x}{2}
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^x \cos(kt)\,dt = \frac{\sin(kx)}{k}$ であるから，$f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ と置くと，

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \cos(kt)\,dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\,dt = \int_0^x \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cos\frac{(n+1)t}{2}\,dt$$

よって，

$$f_n'(x) = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cos\frac{(n+1)x}{2}$$

である．また，$f_n(x)$ の定義から $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$ である．

区間 $(0,\ \pi)$ で $f_n(x) > 0$ であることを，n に関する数学的帰納法で証明する．

$$f_1(x) = \int_0^x \cos t\,dt = \sin x$$

なので，$n = 1$ のときは成立している．

区間 $(0,\ \pi)$ で $f_{n-1}(x) > 0$ であると仮定する．

$f_n(x)$ の，区間 $[0,\ \pi]$ での最小値は，$f_n(0)$, $f_n(\pi)$，または極小値のいずれかである．よって，極小値がすべて正であれば，両端をのぞく区間 $(0,\ \pi)$ で $f_n(x) > 0$ である．

したがって，区間 $(0,\ \pi)$ で $f_n'(x) = 0$ となる x の値に対して $f_n(x) > 0$ であることを証明すればよい．

$f_n'(x) = 0$ となるのは，

$$\frac{nx}{2} = l\pi, \qquad \frac{(n+1)x}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi$$

となる整数 l があるとき，つまり，

$$x = \frac{2l}{n}\pi,\ \text{または}\ x = \frac{2l+1}{n+1}\pi$$

となる整数 l があるときである．

$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \dfrac{\sin nx}{n}$ であるから，$x = \dfrac{2l}{n}\pi$ のとき．

$$f_n\left(\frac{2l}{n}\pi\right) = f_{n-1}\left(\frac{2l}{n}\pi\right) + \frac{\sin 2l\pi}{n} = f_{n-1}\left(\frac{2l}{n}\pi\right) > 0$$

である．$x = \dfrac{2l+1}{n+1}\pi$ のとき．

$$f_n\left(\frac{2l+1}{n+1}\pi\right) = f_{n-1}\left(\frac{2l+1}{n+1}\pi\right) + \frac{\sin\left(\dfrac{(2l+1)n}{n+1}\pi\right)}{n}$$

ここで，$0 < x < \pi$ より，$0 < \dfrac{2l+1}{n+1} < 1$，つまり，$2l < n$ である．従って，

$$2l\pi < \frac{(2l+1)n}{n+1}\pi < (2l+1)\pi$$

となり，$\sin\left(\dfrac{(2l+1)n}{n+1}\pi\right) > 0$ である．帰納法の仮定とあわせてこの場合も正である．

よって n のときにも成り立ち，すべての n で，区間 $(0,\ \pi)$ で $f_n'(x) = 0$ となる x の値に対して $f_n(x) > 0$ である．

したがって，区間 $(0,\ \pi)$ で $f_n(x) > 0$ であることが示された．

9　東北大理系

9.1　5 番

9.1.1　問題

実数 t に対して複素数 $z = \dfrac{-1}{t+i}$ を考える。ただし i は虚数単位とする．

(1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) 絶対値 $\left|\dfrac{-1}{t+i}\right|$ を求めよ。

(3) 実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ。

9.1.2　解答

(1)

$$z = \frac{-1(t-i)}{t^2+1} = -\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}i$$

より

$$\text{実部} = -\frac{t}{t^2+1}, \quad \text{虚部} = \frac{1}{t^2+1}$$

(2)

$$\left|\frac{-1}{t+i}\right| = \frac{1}{|t+i|} = \frac{1}{\sqrt{t^2+i}}$$

(3)　$z = x + iy$ と置くと，(1) とあわせて，z の軌跡は

$$\begin{cases} x = -\dfrac{t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{1}{t^2+1} \end{cases} \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

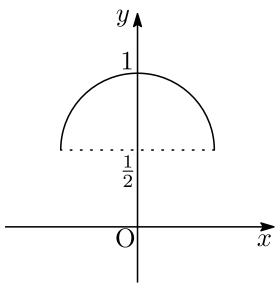
と媒介変数表示される．$1 \leqq t^2+1 \leqq 2$ であるから，$\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1$ である．そして $t = -\dfrac{x}{y}$ なので，これを第 2 式に代入して

$$y = \frac{1}{t^2+1} = \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$y \neq 0$ なので $x^2+y^2 = y$ となる．つまり，z の軌跡は

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{1}{2} \leqq y \leqq 1\right)$$

である．これを図示する．



9.2 6番

9.2.1 問題

正の整数 $m,\ n$ に対して実数 $A(m,\ n)$ を次の定積分で定める

$$A(m,\ n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,\ n)=A(n,\ m),\quad A(m+2,\ n)+A(m,\ n+2)=A(m,\ n)$$

(2) $A(m,\ 1)$ を求めよ。

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,\ n+2)=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,\ n)$$

(4) m または n が奇数ならば，$A(m,\ n)$ は有理数であることを示せ。

9.2.2 解答

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ で置換する．

$$\begin{aligned}
&A(m,\ n)\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx\\
=&\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\cos^n t\,dt=A(n,\ m)\\
&A(m+2,\ n)+A(m,\ n+2)\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\cos^m x\sin^n x\,dx=A(m,\ n)
\end{aligned}$$

である．

(2)

$$\begin{aligned}
A(m,\ 1)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x(-\cos x)'\,dx\\
&=\left[-\cos^{m+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}m\cos^{m-1}x(-\sin x)\cos x\,dx\\
&=1-A(m,\ 1)
\end{aligned}$$

よって，

$$A(m,\ 1)=\frac{1}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned}
A(m,\ n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^{n+2} x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x(-\cos x)' \sin^{n+1} x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\left(\frac{1}{m+1}\cos^{m+1} x\right)' \sin^{n+1} x\,dx \\
&= -\frac{1}{m+1}\Big[\cos^{m+1} x \sin^{n+1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{m+1}\cos^{m+1} x\cdot(n+1)\sin^n x\cos x\,dx \\
&= \frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \sin^n x\,dx = \frac{n+1}{m+1}A(m+2,\ n)
\end{aligned}$$

である．

(4)　$A(m,\ n)=A(n,\ m)$ なので，n を奇数とし，命題

任意の自然数 m に対して，$A(m,\ 2k-1)$ は有理数である

を，k に関する数学的帰納法で示す．

$k=1$ のときは (2) より成立する．

(3) より，

$$A(m,\ 2(k+1)-1)=\frac{2k}{m+1}A(m+2,\ 2k-1)$$

なので，k のとき成立すれば，$k+1$ のときも成立する．よって上記命題が成立することが示された．

10　名大理系

10.1　3 番

10.1.1　問題

　以下の問に答えよ。
(1)　関数 $f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x) > 0$ をみたしているとする。区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$$

と定義するとき，区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$ であることを示せ。
(2)　$f(x)$ を (1) の関数とするとき

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx \geqq 0$$

を示せ。
(3)　関数 $g(x)$ は．区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x) < 0$ をみたしているとする。このとき，

$$\int_0^{2\pi} g(x) \sin x \, dx \geqq 0$$

を示せ。

10.1.2　解答

(1)　$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$x < \pi - x < \pi + x < 2\pi - x$$

である．平均値の定理から

$$\begin{aligned} \frac{f(\pi - x) - f(x)}{\pi - x - x} &= f'(c_1) & x < c_1 < \pi - x \\ \frac{f(2\pi - x) - f(\pi + x)}{2\pi - x - (\pi + x)} &= f'(c_2) & \pi + x < c_2 < 2\pi - x \end{aligned}$$

となる c_1，c_2 が存在する．$f''(x) > 0$ で，$c_1 < c_2$ より，$f'(c_1) < f'(c_2)$ である．これより，

$$\frac{f(\pi - x) - f(x)}{\pi - x - x} < \frac{f(2\pi - x) - f(\pi + x)}{2\pi - x - (\pi + x)}$$

つまり，

$$f(\pi - x) - f(x) < f(2\pi - x) - f(\pi + x)$$

すなわち，

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x) > 0$$

$f'(x)$ が存在するので，$f(x)$ は連続である．よって $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x) \geqq 0$$

である．

(2)　定積分

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \\
=\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx
\end{aligned}$$

において，第 2，第 3，第 4 の定積分をそれぞれ，

$$x=\pi-t,\ x=\pi+t,\ x=2\pi-t$$

で置きかえることにより，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \\
=\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-t)\cos(\pi-t)\,(-dt) \\
&\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi+t)\cos(\pi+t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi-t)\cos(2\pi-t)\,(-dt) \\
=\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-t)\cos t\,dt \\
&\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi+t)\cos t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi-t)\cos t\,dt \\
=\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx
\end{aligned}$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$F(x)\geqq 0$，$\cos x\geqq 0$ より，

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

である．

(3)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \\
=\ &\int_0^{\pi} g(x)\sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \\
=\ &\int_0^{\pi} g(x)\sin x\,dx + \int_0^{\pi} g(x+\pi)\sin(x+\pi)\,dx \\
=\ &\int_0^{\pi} \{g(x)-g(x+\pi)\}\sin x\,dx
\end{aligned}$$

$g'(x)<0$ なので，$g(x)$ は単調に減少する．よって，$0<x<\pi$ で $g(x)-g(x+\pi)>0$ である．またこの区間で $\sin x\geqq 0$ である．よって，

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

が成り立つ．

10.2　4番

10.2.1　問題

2名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う。

(i) 正方形の4つの頂点を反時計回りにA，B，C，Dとする。両者はコマを1つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマはA，後攻の持ちゴマはCに置いてあるとする。

(ii) 先攻から始めて，交互にサイコロを振る。ただしサイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。出た目を3で割った余りが0のときコマは動かさない。また余りが1のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが2のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす。もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする。

ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) p_2, p_3 を求めよ。

(2) p_n を求めよ。

(3) このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち2以上の任意の整数 N に対して

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

が成り立つことを示せ。ただし正の実数 a に対し $[a]$ は，その整数部分 ($k \leqq a < k+1$ となる整数 k) を表す。

10.2.2　解答

(1)　ちょうど2回サイコロが振られたときに勝敗が決まるのは，先攻のものが動き，後攻のものがそこに向けて動くときなので，

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

ちょうど3回サイコロが振られたときに勝敗が決まるのは，

i)　先攻のものが動かず，そこから p_2 の確率で勝敗が決まる。

ii)　先攻のものが動き，後攻のものが動かず，先攻のものが後攻のコマに向けて動くとき。

のいずれかである。よって，

$$p_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

(2)　n 回の試行の後，2つのコマが対角線上にある確率を a_n，隣りあう確率を b_n とする。試行の条件から次の漸化式が成立する。

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n \end{cases}$$

これより，a_n を消去する。

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}b_{n+1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n\right)+\frac{1}{3}b_{n+1} \\ &= \frac{2}{9}a_n+\frac{2}{9}b_n+\frac{1}{3}b_{n+1}=\frac{1}{3}\left(b_{n+1}-\frac{1}{3}b_n\right)+\frac{2}{9}b_n+\frac{1}{3}b_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}b_{n+1}+\frac{1}{9}a_n \end{aligned}$$

つまり，

$$b_{n+2}-\frac{2}{3}b_{n+1}-\frac{1}{9}b_n=0$$

α と β を

$$b_{n+2}-(\alpha+\beta)b_{n+1}+\alpha\beta b_n=0$$

となるようにとる．$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{9}$ より，α と β は 2 次方程式

$$t^2-\frac{2}{3}t-\frac{1}{9}=0$$

の 2 解となり，

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{2}}{3},\ \beta=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

ととる．このとき，

$$b_{n+2}-\alpha b_{n+1}=\beta\left(b_{n+1}-\alpha b_n\right)$$

と変形される。$b_1=\dfrac{2}{3}$ なので，

$$b_{n+1}-\alpha b_n=\beta^n(b_1-b_0)=\frac{2}{3}\beta^n$$

である。同様に

$$b_{n+1}-\beta b_n=\alpha^n(b_1-b_0)=\frac{2}{3}\alpha^n$$

辺々引いて

$$(\beta-\alpha)b_n=\frac{2}{3}(\beta^n-\alpha^n)$$

つまり，

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}b_n=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n\right\}$$

ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まるのは，$n-1$ 回の試行の後コマが隣りあい，n 回目にそれが重なるときなので，

$$p_n=\frac{1}{3}b_{n-1}=\frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

である。

(3)　p_n は n に関して単調減少であることを示す．$n \geqq 3$ のとき．

$$\begin{aligned}
\frac{6}{\sqrt{2}}\left(p_n - p_{n+1}\right) &= \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} - \beta^n + \alpha^n \\
&= \beta^{n-1}(1-\beta) - \alpha^{n-1}(1-\alpha) \\
&= \beta^{n-1}\left(\frac{1}{3}+\alpha\right) - \alpha^{n-1}\left(\frac{1}{3}+\beta\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\right) + \alpha\beta\left(\beta^{n-2} - \alpha^{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\right) - \frac{1}{9}\left(\beta^{n-2} - \alpha^{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\beta^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\alpha^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{9}\left(\beta^{n-2} + \alpha^{n-2}\right)
\end{aligned}$$

$|\alpha| < |\beta|$ より，$\beta^{n-2} + \alpha^{n-2} > 0$ であるので，$p_n > p_{n+1}$ が示された．

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{3}b_0 = 0 \\
p_2 &= \frac{1}{3}b_1 = \frac{2}{9} \\
p_3 &= \frac{1}{3}b_2 = \frac{1}{27}
\end{aligned}$$

なので，$n \geqq 2$ で $p_n > p_{n+1}$ である．$p_1 = 0$ なので，

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} = \sum_{m=2}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} p_{2m+1}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m} - \sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m} - \sum_{m=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} p_{2m+1} \\
= &\left\{\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{m=1}^{M} p_{2m} - \sum_{m=1}^{M-1} p_{2m+1} > p_{2M} > 0 & (N = 2M) \\
\displaystyle\sum_{m=1}^{M-1} p_{2m} - \sum_{m=1}^{M-1} p_{2m+1} > 0 & (N = 2M-1)
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

である．よって，(3) の不等式が示された．

11　九大後期理系

11.1　5 番

11.1.1　問題

以下の規則にしたがって数直線上を移動する点 A を考える．

(規則) 点 A が座標 x にあるとき，表が出る確率が α $(0 < \alpha < 1)$ のコインを投げて，表が出たら x から $\dfrac{x}{2}$ へ移動し，裏が出たら x から $1 - \dfrac{x}{2}$ へ移動する．

点 A がはじめに座標 0 にあるとして，事象「上記の規則を適用する操作を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した直後に点 A が座標 y にある」の確率を記号 $P_n(y)$ で表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $P_1(y) > 0$ となる y $(0 \leqq y \leqq 1)$ とその確率 $P_1(y)$ の組をすべて答えよ．

(2) $y < 0$ または $y > 1$ のとき，$P_n(y) = 0$ であることを示せ．

(3) $P_n(1)$ を求めよ．

(4) k を自然数とするとき，以下のそれぞれの条件で $P_n(2^{-k})$ を求めよ。

① $n \leqq k$ のとき．

② $n > k$ のとき．

11.1.2　解答

(1)　点 A は，はじめに座標 0 にあるので，1 回の試行で表が出れば $y = \dfrac{0}{2} = 0$，裏が出れば $y = 1 - \dfrac{0}{2} = 1$ である．よって，

$$(y,\ P_1(y)) = (0,\ \alpha),\ (1,\ 1-\alpha)$$

である．
(2)　点 A(y) が区間 $[0,\ 1]$ にあるとき，$\dfrac{y}{2}$，$1 - \dfrac{y}{2}$ はともに区間 $[0,\ 1]$ にある．点 A は，はじめに区間 $[0,\ 1]$ にあるので，試行を繰り返しても区間 $[0,\ 1]$ にある．
よって，$y < 0$ または $y > 1$ のとき，$P_n(y) = 0$ である．
(3)　点 A(y) が区間 $[0,\ 1]$ にあるとき，次の試行で 1 となるのは，$y = 0$ で裏が出るときにかぎる．また，0 となるのは，$y = 0$ で表が出るときにかぎる．
したがって，n 回の試行の後で $y = 1$ となるのは，$n-1$ 回までの試行で 0 に留まり，n 回目の試行で 1 となるときにかぎる．よって，

$$P_n(1) = \alpha^{n-1}(1-\alpha)$$

である．
(4)　$y = 2^{-k}$ となるのは，表が h 回続き，裏が 1 回出て，次の試行では表でも裏でも $\dfrac{1}{2}$ に移動し，そして表が $k-1$ 回出るときにかぎる．そして $n = h + 1 + 1 + k - 1$ である．

① これより n 回の試行が可能なために $n > k$ が必要なので，$n \leqq k$ のときは $P_n(2^{-k}) = 0$ である．

② $n > k$ のとき．$h = n - k - 1$ なので

$$P_n(2^{-k}) = \alpha^{n-k-1}(1-\alpha) \cdot 1 \cdot \alpha^{k-1} = \alpha^{k-2}(1-\alpha)$$

である．

12　神戸大理系

12.1　2 番

12.1.1　問題

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とし，原点 O，A$(1, 0)$，B$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ を頂点とする $\triangle$OAB の内接円の中心を P とする．また，θ がこの範囲を動くときに点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分を D とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の座標は $\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$ で表されることを示せ．

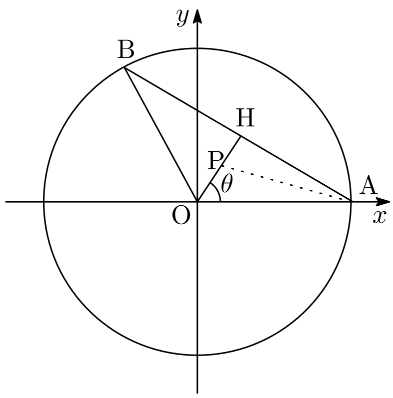
(2) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

12.1.2　解答

(1)　O から辺 AB に垂線を引き, 交点を H とする．$\triangle$OAB は二等辺三角形なので，内接円の中心 P は OH 上にある．$\angle\mathrm{AOP}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\theta$ である．$\mathrm{OH}=\cos\theta$ である．線分 AP は $\angle$OAH を 2 等分するので，

$$\mathrm{OP}:\mathrm{PH}=\mathrm{AO}:\mathrm{AH}=1:\sin\theta$$

である．



よって，

$$\mathrm{OP}=\frac{1}{1+\sin\theta}\mathrm{OH}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

この結果，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(1-\sin\theta,\ \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

となる．

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin\theta$ は単調増加関数であるから，点 P の x 座標を X とすると，$X=1-\sin\theta$ は単調減少関数である．

$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$X:1\to 0$ で，この範囲で X は単調である．よって，D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると，

$$V=\int_0^1 \pi Y^2\,dX$$

である．ここで，

$$
\begin{aligned}
Y^2 &= \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)^2} = \frac{(1-\sin\theta)\sin^2\theta}{1+\sin\theta} \\
&= \frac{X(1-X)^2}{2-X} = -X^2 - 1 + \frac{2}{2-X}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 \left(-X^2 - 1 + \frac{2}{2-X}\right) dX \\
&= \pi\left[-\frac{X^3}{3} - X - 2\log|2-X|\right]_0^1 = \pi\left(2\log 2 - \frac{4}{3}\right)
\end{aligned}
$$

12.2　5番

12.2.1　問題

p を 2 以上の自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = \frac{1}{2^p+1}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) $p = 3$ のとき，x_n を求めよ．

(2) $x_{p+1} = x_1$ であることを示せ．

12.2.2　解答

(1)

$$x_1 = \frac{1}{2^3+1} = \frac{1}{9}, \quad x_2 = \left|\frac{2}{9} - 1\right| = \frac{7}{9}, \quad x_3 = \left|\frac{14}{9} - 1\right| = \frac{5}{9}, \quad x_4 = \left|\frac{10}{9} - 1\right| = \frac{1}{9}$$

したがって，

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{9} & (n(\mathrm{mod}\ 3) \equiv 1) \\ \dfrac{7}{9} & (n(\mathrm{mod}\ 3) \equiv 2) \\ \dfrac{5}{9} & (n(\mathrm{mod}\ 3) \equiv 0) \end{cases}$$

である．
(2)

$$x_1 = \frac{1}{2^p+1}, \quad x_2 = \left|\frac{2}{2^p+1} - 1\right| = \frac{2^p-1}{2^p+1}, \quad x_3 = \frac{2^p-3}{2^p+1}$$

より，$2 \leqq k \leqq p$ に対して，

$$x_k = \frac{2^p - (2^{k-1}-1)}{2^p+1}$$

と推測される．これを仮定する．$2 \leqq k \leqq p-1$ のとき，

$$x_{k+1} = |2x_k - 1| = \left|\frac{2^{p+1} - (2^k-2)}{2^p+1} - 1\right| = \frac{2^p - (2^k-1)}{2^p+1}$$

となり $k+1$ で成立する．数学的帰納法により推測が証明された．よって，

$$x_{p+1} = |2x_p - 1| = \left|\frac{2^{p+1} - (2^p-2)}{2^p+1} - 1\right| = \frac{1}{2^p+1} = x_1$$

である．

13　一橋大

13.1　5 番

13.1.1　問題

n を正の整数とする．1 枚の硬貨を投げ，表が出れば 1 点，裏が出れば 2 点を得る．この試行を繰り返し，点の合計が n 以上になったらやめる．点の合計がちょうど n になる確率を p_n で表す．

(1) p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) $|p_{n+1} - p_n| < 0.01$ を満たす最小の n を求めよ．

13.1.2　解答

(1)　点の合計が $n+2$ になる事象は，点の合計が $n+1$ で表が出るか，点の合計が n で裏が出るかという排反な 2 つの事象の和事象である．よって，

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad \cdots ①$$

がなりたつ．そして，和が 1 になるのは表が出るときであり，和が 2 になるのは，表が 2 回出るか裏が 1 回出るときであるので，

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

である．これから，

$$p_3 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$
$$p_4 = \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{5}{16} + \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$$

である．

(2)　① より，

$$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = -\frac{1}{2}\left(p_{n+1} - p_n\right)$$

である．したがって，

$$p_{n+1} - p_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p_2 - p_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となる．これから，

$$|p_{n+1} - p_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

であり，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5+1} = \frac{1}{64} > 0.01, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{6+1} = \frac{1}{128} < 0.01$$

なので，条件を満たす最小の n は 6 である．

14　一橋大後期

14.1　経済

14.1.1　問題

a，b を正の整数とする．

(1) a が b の倍数ならば，2^a-1 は 2^b-1 の倍数であることを示せ．

(2) 2^a-1 が素数ならば，a は素数であることを示せ．

(3) $2^a-1=(2a+1)(8a+1)$ を満たす a を求めよ．

14.1.2　解答

(1)　$a=bk$ とおく．$2^a-1=(2^b)^k-1$ である，
ここで，正の整数 k に対し，多項式の因数分解

$$x^k-1=(x-1)(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)$$

が成り立つので，$x=2^b$ を代入する．これより，

$$(2^b)^k-1=(2^b-1)\{(2^b)^{k-1}+(2^b)^{k-2}+\cdots+2^b+1\}$$

となり，2^a-1 は 2^b-1 の倍数である．
(2)　a が素数でないとし，1 より大きい 2 つの整数 b，k を用いて $a=bk$ と表されるとする．このとき，(1) より

$$2^a-1=(2^b-1)\{(2^b)^{k-1}+(2^b)^{k-2}+\cdots+2^b+1\}$$

であるが，ここで $2^b-1>1$，$(2^b)^{k-1}+(2^b)^{k-2}+\cdots+2^b+1>1$ であるので，2^a-1 は素数ではない．よって，対偶が成り立ち，2^a-1 が素数ならば a は素数であることが示された．
(3)　$2^a-1=(2a+1)(8a+1)$ で $a\geqq 1$ より，

$$2^a=16a^2+10a+2<(5a+1)^2$$

が必要である．
$a=12$ のとき $2^a=4096$，$(5a+1)^2=61^2=3721$ である．
$a\geqq 12$ のとき $2^a>(5a+1)^2$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}2^{a+1}-\{5(a+1)+1\}^2 &> 2(5a+1)^2-(5a+6)^2\\ &= 25a^2-40a-34=(5a-4)^2-50\end{aligned}$$

これより，$a\geqq 12$ のとき，$2^{a+1}-\{5(a+1)+1\}^2>0$ となる．
よって，$2^a-1=(2a+1)(8a+1)$ となるためには $a\leqq 11$ が必要で，この範囲の a を調べることにより，$a=11$ のときに，$2^{11}-1=2047$，$(2\cdot 11+1)(8\cdot 11+1)=23\cdot 89=2047$ より，$2^a-1=(2a+1)(8a+1)$ となるので，$a=11$ である．

※　これは (2) の逆，つまり

a が素数ならば 2^a-1 は素数である．

は成りたたないことを示している．

$$
\begin{aligned}
2^3-1&=7:\text{素数}\\
2^5-1&=31:\text{素数}\\
2^7-1&=127:\text{素数}
\end{aligned}
$$

である．$2^{11}-1$ ではじめて合成数となる．

15　東工大

15.1　2 番

15.1.1　問題

　複素数平面上の異なる 3 点 A，B，C を複素数 α，β，γ で表す．ここで A，B，C は同一直線上にないと仮定する．

(1) △ ABC が正三角形となる必要十分条件は，

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

であることを示せ．

(2) △ ABC が正三角形のとき，△ ABC の外接円上の点 P を任意にとる．このとき，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ．ただし 2 点 X, Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す．

15.1.2　解答

(1)　△ ABC が正三角形となる必要十分条件は，

$$|\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|,\quad \arg\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)=\pm\frac{\pi}{3}$$

であり，これは

$$\arg\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^3=-1$$

と同値である．これより，

$$\begin{aligned}&(\alpha-\gamma)^3+(\beta-\gamma)^3=0\\ \iff\quad &(\alpha-\gamma+\beta-\gamma)\left\{(\alpha-\gamma)^2-(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)^2\right\}=0\end{aligned}$$

A，B，C は同一直線上にないので，$\alpha-\gamma+\beta-\gamma\neq 0$ である．

$$(\alpha-\gamma)^2-(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

であるから，△ ABC が正三角形となる必要十分条件は，

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

である．

(2)　△ ABC が外接円の半径が R の正三角形とする．

複素数平面の 3 点

$$R,\ R\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ R\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

を S, T, U とする．この 3 点は，原点からの距離が R で偏角が $0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ なので，△STU は原点を中心とする半径 R の円に内接する正三角形であり，△ABC と合同である．

△ ABC の外接円上の点 P に対応する △STU の点も同じ P で表し，$\mathrm{P}(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$ とする．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=\mathrm{SP}^2+\mathrm{TP}^2+\mathrm{UP}^2\\
=\ & R^2\left\{(\cos\theta-1)^2+(\sin\theta)^2+\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right.\\
&\qquad\left.+\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}\\
=\ & R^2\left(2-2\cos\theta+2+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta+2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)\\
=\ & 6R^2
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4=\mathrm{SP}^4+\mathrm{TP}^4+\mathrm{UP}^4\\
=\ & R^4\left\{(2-2\cos\theta)^2+\left(2+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)^2+\left(2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)^2\right\}\\
=\ & R^4\left\{4-8\cos\theta+4\cos^2\theta+4+\cos^2\theta+3\sin^2\theta+4\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta\right.\\
&\qquad\left.+4+\cos^2\theta+3\sin^2\theta+4\cos\theta+4\sqrt{3}\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta\right\}\\
=\ & 18R^4
\end{aligned}$$

※　(2) の別方法

△ABC が正三角形のとき，外接円の中心は重心に等しく，複素数平面では $\dfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$ である．$\delta=\dfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$ とおく．外接円周上の点点 $\mathrm{P}(z)$ をとる．外接円の半径が R なので，

$$|\alpha-\delta|=|\beta-\delta|=|\gamma-\delta|=|z-\delta|=R$$

であり，

$$(\alpha-\delta)+(\beta-\delta)+(\gamma-\delta)=\alpha+\beta+\gamma-3\delta=0$$

である．以下簡単のために，$\alpha-\delta$，$\beta-\delta$，$\gamma-\delta$，$z-\delta$ を，$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z$ とおく．このとき，$\alpha+\beta+\gamma=0$ である．よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 &= |z-\alpha|^2+|z-\beta|^2+|z-\gamma|^2\\
&= 6R^2-z\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)-\overline{z}(\alpha+\beta+\gamma)=6R^2
\end{aligned}$$

である．次に

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

より，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ である．よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4 &= |z-\alpha|^4+|z-\beta|^4+|z-\gamma|^4 \\
&= \left\{(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}\right\}^2+\left\{(z-\beta)\overline{(z-\beta)}\right\}^2+\left\{(z-\gamma)\overline{(z-\gamma)}\right\}^2 \\
&= \left(2R^2-z\overline{\alpha}-\overline{z}\alpha\right)^2+\left(2R^2-z\overline{\beta}-\overline{z}\beta\right)^2+\left(2R^2-z\overline{\gamma}-\overline{z}\gamma\right)^2 \\
&= 12R^4-4R^2\left(z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha+z\overline{\beta}+\overline{z}\beta+z\overline{\gamma}+\overline{z}\gamma\right) \\
&\qquad +\left(z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha\right)^2+\left(z\overline{\beta}+\overline{z}\beta\right)^2+\left(z\overline{\gamma}+\overline{z}\gamma\right)^2 \\
&= 12R^4+z^2\left(\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2\right)+\overline{z}^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)+6R^4=18R^4
\end{aligned}$$

である．

15.2　5 番

15.2.1　問題

k を正の整数とし，$a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx$ とおく．

(1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ．

(2) k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ．

(3) (2) の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 $m,\ n\ (m > n \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ．

(4) (2) と (3) の極限値 A，B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 p，q，$r(p > q > r \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値を求めよ．

15.2.2　解答

(1)　部分積分を 2 回行う．

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= \int_0^1 x^{k+1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \left[x^{k+1}\left\{-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}\right]_0^1 + \int_0^1 (k+1)x^k \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \frac{2(k+1)}{\pi}\int_0^1 x^k \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \frac{2(k+1)}{\pi}\left\{\left[x^k \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 kx^{k-1}\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx\right\} \\
&= \frac{2(k+1)}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{2k}{\pi}a_k\right) = \frac{4(k+1)}{\pi^2} - \frac{4k(k+1)}{\pi^2}a_k
\end{aligned}$$

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ において $0 \leqq \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \leqq 1$ である．よって，

$$a_k = \int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx < \int_0^1 x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k}$$

したがって

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

(1) より，

$$ka_k = 1 - \frac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}$$

なので，

$$A = \lim_{k\to\infty} ka_k = 1 - 0 = 1$$

である．

(3)

$$k^m a_k - k^n A = k^n (k^{m-n} a_k - 1)$$

において，$k^{m-n}a_k - 1$ が 0 に収束しなければ，$k^n \to \infty$ より，発散する．収束するために，$k^{m-n}a_k - 1$ が 0 に収束することが必要である．(2) から $m - n = 1$ が必要である．このとき，

$$\begin{aligned} k^m a_k - k^n A &= k^n (ka_k - 1) = -\frac{\pi^2 k^n}{4(k+1)} a_{k+2} \\ &= -\frac{\pi^2 k^n}{4(k+1)(k+2)} \{(k+2)a_{k+2}\} \end{aligned}$$

$k \to \infty$ のとき，$(k+2)a_{k+2}$ は 1 に収束するので，$k^m a_k - k^n A$ が 0 以外の値に収束する条件は $n = 2$ である．このとき $(m,\ n) = (3,\ 2)$ であり，

$$B = \lim_{k\to\infty} -\frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)} \{(k+2)a_{k+2}\} = -\frac{\pi^2}{4}$$

(4)　(2) と (3) より，

$$k^p a_k - k^q A - k^r B = k^p a_k - k^q + \frac{\pi^2 k^r}{4} = k^r \left(k^{p-r} a_k - k^{q-r} + \frac{\pi^2}{4} \right)$$

ここで，$k \to \infty$ のとき，$k^r \to \infty$ なので，$k^p a_k - k^q A - k^r B$ が 0 ではない値に収束するためには，$k^{p-r}a_k - k^{q-r} + \dfrac{\pi^2}{4}$ が 0 に収束することが必要である．そのためには，$k^{p-r}a_k - k^{q-r}$ が $-\dfrac{\pi^2}{4}$ に収束することで，(3) より，$p - q = 3$，$q - r = 2$ である．このとき，(3) より，

$$\begin{aligned} k^p a_k - k^q A - k^r B &= k^r \left(k^3 a_k - k^2 + \frac{\pi^2}{4} \right) \\ &= k^r \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \left\{ -\frac{k^2}{(k+1)} a_{k+2} + 1 \right\} \end{aligned}$$

(1) から

$$a_{k+4} = \frac{4(k+3)}{\pi^2} - \frac{4(k+2)(k+3)}{\pi^2} a_{k+2}$$

であるから，

$$\frac{k^2}{(k+1)} a_{k+2} = -\frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)(k+3)} a_{k+4} + \frac{k^2}{(k+1)(k+2)}$$

である．よって，

$$\begin{aligned} k^r \left(k^3 a_k - k^2 + \frac{\pi^2}{4} \right) &= k^r \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \left\{ \frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)(k+3)} a_{k+4} - \frac{k^2}{(k+1)(k+2)} + 1 \right\} \\ &= k^r \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \left\{ \frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)(k+3)} a_{k+4} + \frac{3k+2}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= k^r \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \left\{ \frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} (k+4) a_{k+4} + \frac{3k+2}{(k+1)(k+2)} \right\} \end{aligned}$$

これが 0 でない値に収束するのは，$r = 1$ のときである．よって，$(p,\ q,\ r) = (4,\ 3,\ 1)$ であり，このとき，

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \left\{ \frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} (k+4) a_{k+4} + \frac{3k+2}{(k+1)(k+2)} \right\} = \frac{3\pi^2}{4}$$

である．

16　千葉大

16.1　10 番

16.1.1　問題

有理数 a，b に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば a，b は整数であることを証明せよ．ただし，i は虚数単位である．

16.1.2　解答

$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ である．

命題の対偶を示す．すなわち，

a，b の少なくとも一方が整数でなければ，a^2-b^2，$2ab$ の少なくとも一方は整数でない．

を示す．

a，b の一方が整数で他方が整数でないときは，a^2-b^2 が整数でない．

以下，a，b がともに整数でないとする．

$$a = \frac{t}{s}\ (s,\ t\ \text{は互いに素}), \qquad b = \frac{v}{u}\ (u,\ v\ \text{は互いに素})$$

とおく．

s と t の偶奇で場合分けする．

i)　s と u がともに偶数のとき．t と v はともに奇数となるので，$2ab = \dfrac{2tv}{su}$ を 2 で約すると，分子は奇数，分母は偶数となり，整数ではない．

ii)　s が偶数で u が奇数のとき．t は奇数である．$a^2-b^2 = \dfrac{t^2u^2 - v^2s^2}{s^2u^2}$ において，分子は奇数，分母は偶数となり，整数ではない．

s が奇数で u が偶数のときも同様に a^2-b^2 が整数でない．

iii)　s，u が奇数のとき．

$2ab = \dfrac{2tv}{su}$ が整数とする．このときは t が u の倍数であり，v が s の倍数でなければならない．$t = pu$，$v = qs$ とおく．pu，qs はそれぞれ s，t と互いに素である．このとき，$a^2-b^2 = \dfrac{p^2u^4 - q^2s^4}{s^2u^2}$ において，分子は s の倍数でなく，u の倍数でもないので，整数ではない．

以上から，対偶が示された．

16.2　11 番

16.2.1　問題

定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ とする関数 $f_n(x)$ と $f(x)$ を以下で定める．

$$f_1(x)=0,\ f_{n+1}(x)=\int_0^x (f_n(t)-1)^2\,dt \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

(1) 正の整数 n に対して，不等式

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り登つことを証明せよ。

(2) 正の整数 n に対して，不等式

$$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 実数 a $(0 \leqq a \leqq 1)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ を求めよ。

16.2.2　解答

(1)

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1) \qquad \cdots ①$$

を，n に関する数学的帰納法で示す．$f_1(x)=0$ より $n=1$ のとき成立する．

n のとき成立するとする．$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ より $-1 \leqq f_n(x)-1 \leqq 0$ なので，$\{f_n(x)-1\}^2 \leqq 1$ である．よって

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x (f_n(t)-1)^2\,dt \leqq \int_0^x 1\,dt = x \leqq 1$$

より成立する．よってすべての自然数 n で ① が成立する．

(2)　この不等式は，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，n が偶数なら $f_n(x) \geqq f(x)$，n が奇数なら $f_n(x) \leqq f(x)$ を意味する．

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq f(x) \leqq \dfrac{1}{2}$ である．よって，$n=1$ のときは，$f_1(x)=0$ より，$f_1(x) \leqq f(x)$ は成立する．

従って，$f_n(x) \geqq f(x)$ なら $f_{n+1}(x) \leqq f(x)$，$f_n(x) \leqq f(x)$ なら $f_{n+1}(x) \geqq f(x)$ を示せばよい．

$f_n(x) \geqq f(x)$ のとき，

$$0 \geqq f_n(x)-1 \geqq f(x)-1$$

よって，

$$\{f_n(x)-1\}^2 \leqq \{f(x)-1\}^2$$

したがって

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^x \{f_n(t)-1\}^2\,dt \leqq \int_0^x \{f(t)-1\}^2\,dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{-1}{t+1}\right)^2 dt = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^x = \frac{x}{x+1} = f(x) \end{aligned}$$

$f_n(x) \leqq f(x)$ のとき，

$$-1 \leqq f_n(x) - 1 \leqq f(x) - 1$$

よって，

$$\{f_n(x) - 1\}^2 \geqq \{f(x) - 1\}^2$$

したがって同様に，

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \{f_n(t) - 1\}^2 \, dt \geqq \int_0^x \{f(t) - 1\}^2 \, dt = f(x)$$

よって，(2) の不等式が示された．

(3)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f(x) &= \int_0^x \{f_n(t) - 1\}^2 \, dt - \int_0^x \{f(t) - 1\}^2 \, dt \\ &= \int_0^x \{f_n(t) + f(t) - 2\} \{f_n(t) - f(t)\} \, dt \end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq x \leqq 1$ において，$f_n(t) + f(t) - 2 \leqq 0$ であり，$f_n(t) - f(t)$ はつねに 0 以上か，0 以下で符号の変化はない．よって，

$$\left| \int_0^x \{f_n(t) + f(t) - 2\} \{f_n(t) - f(t)\} \, dt \right| = \int_0^x |f_n(t) + f(t) - 2| \, |f_n(t) - f(t)| \, dt$$

つまり，

$$|f_{n+1}(x) - f(x)| = \int_0^x |f_n(t) + f(t) - 2| \, |f_n(t) - f(t)| \, dt$$

がなりたつ．ここで，$f_2(x) = \displaystyle\int_0^x (0-1)^2 \, dt = x$ なので，

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f(x)| &= \left| \frac{x}{x+1} \right| \leqq x \\ |f_2(x) - f(x)| &= |x - f(x)| = \left| \frac{x^2}{x+1} \right| \leqq \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

である．実際, $0 \leqq x \leqq 1$ において，

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{x+1} \leqq \frac{x^2}{2} \\ \iff \ & 2x^2 \leqq x^3 + x \\ \iff \ & 0 \leqq x(x-1)^2 \end{aligned}$$

である．これより

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{x^n}{n}$$

の成立を推測し，これを数学的帰納法で示す．n のとき成立するとする．$|f_n(t) + f(t) - 2| \leqq 2$ であるから，

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f(x)| &= \int_0^x |f_n(t) + f(t) - 2| \, |f_n(t) - f(t)| \, dt \\ &\leqq \int_0^x 2 \cdot \frac{t^n}{n} \, dt = \left[\frac{2t^{n+1}}{n(n+1)} \right]_0^x = \frac{2x^{n+1}}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき，

$$\frac{2x^{n+1}}{n(n+1)} \leqq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

なので成立する．よって，$0 \leqq a \leqq 1$ の任意の a に対して，

$$|f_n(a) - f(a)| \leqq \frac{a^n}{n} \leqq \frac{1}{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ より，

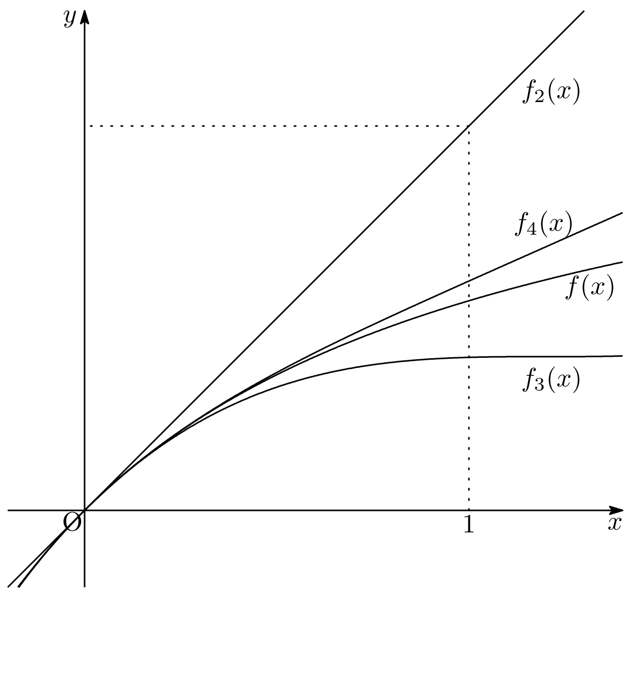
$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a) = \frac{a}{a+1}$$

である．

※　参考までに．

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= x \\
f_3(x) &= \int_0^x (t-1)^2\,dt = \frac{(x-1)^3+1}{3} \\
f_4(x) &= \int_0^x \left\{\frac{(t-1)^3+1}{3} - 1\right\}^2 dt \\
&= \frac{1}{63}\left\{(x-1)^7 - 7(x-1)^4 + 28x + 8\right\}
\end{aligned}$$

これをグラフに書くと次のようになる．



17　鳥取大

17.1

17.1.1　問題

微分可能な x の関数 $f(x)$ が任意の実数 x，y に対して次の関係を満たすとき，以下の問に答よ．

$$\begin{aligned}&f(-x) = -f(x)\\&f'(x+y) = f'(x)f'(y) - f(x)f(y)\\&f'(0) = 1\end{aligned}$$

(1) $f(0)$ を求めよ．

(2) $f'(x)$ は偶関数であることを証明せよ．

(3) $f'(u) - f'(v) = -2f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)f\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$ を証明せよ．

(4) $f'(x)$ が微分可能であることを示し，$f''(x) = -f(x)$ を証明せよ．

17.1.2　解答

(1)　$f(-0) = -f(0)$ より，$f(0) = 0$ である．
(2)　$f'(0-x) = f'(0)f'(-x) - f(0)f(-x)$ が成り立ち，$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$ なので，$f'(-x) = f'(-x)$ となる．つまり，$f'(x)$ は偶関数である．
(3)　$f'(x-y) = f'(x)f'(-y) - f(x)f(-y) = f'(x)f'(y) + f(x)f(y)$ なので，

$$f'(x+y) - f'(x-y) = -2f(x)f(y)$$

である．$x = \dfrac{u+v}{2}$，$y = \dfrac{u-v}{2}$ を代入して，(3) の等式を得る．
(4)　(3) を $u = x+h$，$v = x$ で用いて，

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = -\frac{2}{h}f\left(x + \frac{h}{2}\right)f\left(\frac{h}{2}\right)$$

である．ここで，

$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{h}f\left(\frac{h}{2}\right) = f'(0) = 1$$

であり，$f(x)$ は微分可能なので連続であるから，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = -f(x)$$

となる．つまり，$f'(x)$ は微分可能で，$f''(x) = -f(x)$ である．

18　大教大

18.1

18.1.1　問題

平面上の四角形 ABCD が円に内接してる．

$$a=\mathrm{AB},\ b=\mathrm{BC},\ c=\mathrm{CD},\ d=\mathrm{DA},$$
$$x=\mathrm{BD},\ y=\mathrm{AC},\ \theta=\angle\mathrm{BAD}$$

とする．次の問に答よ．

(1) x^2 を $a,\ d,\ \theta$ を用いて表せ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$x^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

(3) 次の等式を証明せよ．

$$xy=ac+bd$$

18.1.2　解答

(1)　△BAD について余弦定理から

$$x^2=a^2+d^2-2ad\cos\theta$$

(2)　$\angle\mathrm{BCD}=\pi-\theta$ なので，

$$x^2=b^2+c^2-2bc\cos(\pi-\theta)=b^2+c^2+2bc\cos\theta$$

(1) とあわせて，

$$2abcd\cos\theta=bc(a^2+d^2-x^2)=ad(x^2-b^2-c^2)$$

よって，

$$(ad+bc)x^2=bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)=(ab+cd)(ac+bd)$$

となり，(2) の等式が示された．
(3)　同様にして，

$$y^2=\frac{(bc+da)(ac+bd)}{ab+cd}$$

よって，

$$(xy)^2=(ac+bd)^2$$

となり，これから (3) の等式を得る．
※　これをトレミーの定理という．
　一般の位置にある 4 点に対しては

$$xy\leqq ac+bd$$

が成り立つ．これについては『数学対話』「フェルマ点」内の「トレミーの定理」を参照のこと．
　http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa/taiwaNch03/node5.html

19　信州大教育

19.1　2 番

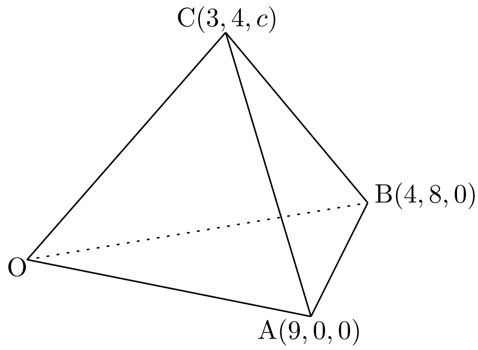
19.1.1　問題

c を正の実数とする．空間において，原点 O および 3 点 $\mathrm{A}(9,0,0)$，$\mathrm{B}(4,8,0)$，$\mathrm{C}(3,4,c)$ を頂点とする四面体 OABC がある。辺 OA の中点 L を通り直線 BC に直交する平面を α，辺 OC の中点 M を通り直線 AB に直交する平面を β，辺 AB の中点 N を通り直線 OC に直交する平面を γ とする。次の問いに答えなさい。

(1) 平面 α，β，γ の交点を X とする。点 X の座標を求めなさい。

(2) 辺 OB の中点を通り，直線 AC に直交する平面上に点 X はあるか。理由を述べて答えなさい。

(3) 点 X が四面体 OABC の表面および内部にあるような c の値の範囲を求めなさい。



19.1.2　解答

(1)　辺 OA の中点 L を通り直線 BC に直交する平面とは，辺 OA の中点 L を通り $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を法線方向とする平面である．よって $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-1,\ -4,\ c)$ より，その方程式は,

$$-\left(x-\frac{9}{2}\right)-4y+cz=0$$

同様に，β，γ の方程式は

$$-5\left(x-\frac{3}{2}\right)+8(y-2)=0$$
$$3\left(x-\frac{13}{2}\right)+4(y-4)+cz=0$$

である．つまり,

$$\begin{cases} x+4y-cz=\dfrac{9}{2} \\ 5x-8y=\dfrac{17}{2} \\ 3x+4y+cz=\dfrac{71}{2} \end{cases}$$

これを解いて，点 X の座標は

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{7}{2},\ \frac{13}{4},\ \frac{12}{c}\right)$$

である．

(2)　同様に，辺 OB の中点を通り，直線 AC に直交する平面の方程式は，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-6,\ 4,\ c)$ より，

$$-6(x-2)+4(y-4)+cz=0$$

ここに点 X の座標を代入すると，

$$-6\left(\frac{7}{2}-2\right)+4\left(\frac{13}{4}-4\right)+c\cdot\frac{12}{c}=-9-3+12=0$$

より，この平面上に点 X はある．

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

で点 P を定めるとき，点 P が四面体 OABC の表面および内部にある条件は，

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \geqq 0,\ \alpha+\beta+\gamma \leqq 1$$

である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\left(\frac{7}{2},\ \frac{13}{4},\ \frac{12}{c}\right)=\left(\frac{5}{24}-\frac{4}{3c^2}\right)(9,0,0)+\left(\frac{13}{32}-\frac{6}{c^2}\right)(4,8,0)+\frac{12}{c^2}(3,4,c)$$

なので，

$$\frac{13}{32}-\frac{6}{c^2}\geqq 0,\qquad \frac{5}{24}-\frac{4}{3c^2}+\frac{13}{32}-\frac{6}{c^2}+\frac{12}{c^2}\leqq 1$$

$c>0$ なので，これより $\dfrac{8\sqrt{39}}{13}\leqq c$ を得る．

※　一般に，次のことが成り立つ．

四面体の各辺の中点を通り，対辺と垂直な 6 平面は, 1 点を共有する．

この点をモンジュ点という．

証明　1 頂点を原点にとり，他の 3 頂点を

$$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3),\quad \mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\quad \mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$$

とする．各辺の中点を通り，対辺の方向ベクトルを法線方向とする 6 平面の方程式は次のようになる．

$$(c_1-b_1)\left(x-\frac{a_1}{2}\right)+(c_2-b_2)\left(y-\frac{a_2}{2}\right)+(c_3-b_3)\left(z-\frac{a_3}{2}\right)=0 \quad \cdots①$$
$$(a_1-c_1)\left(x-\frac{b_1}{2}\right)+(a_2-c_2)\left(y-\frac{b_2}{2}\right)+(a_3-c_3)\left(z-\frac{b_3}{2}\right)=0 \quad \cdots②$$
$$(b_1-a_1)\left(x-\frac{c_1}{2}\right)+(b_2-a_2)\left(y-\frac{c_2}{2}\right)+(b_3-a_3)\left(z-\frac{c_3}{2}\right)=0 \quad \cdots③$$
$$c_1\left(x-\frac{a_1+b_1}{2}\right)+c_2\left(y-\frac{a_2+b_2}{2}\right)+c_3\left(z-\frac{a_3+b_3}{2}\right)=0 \quad \cdots④$$
$$b_1\left(x-\frac{c_1+a_1}{2}\right)+b_2\left(y-\frac{c_2+a_2}{2}\right)+b_3\left(z-\frac{c_3+a_3}{2}\right)=0 \quad \cdots⑤$$
$$a_1\left(x-\frac{b_1+c_1}{2}\right)+a_2\left(y-\frac{b_2+c_2}{2}\right)+a_3\left(z-\frac{b_3+c_3}{2}\right)=0 \quad \cdots⑥$$

これより，

$$
\begin{aligned}
&(c_1-b_1)x+(c_2-b_2)y+(c_3-b_3)z=\frac{a_1(c_1-b_1)}{2}+\frac{a_2(c_2-b_2)}{2}+\frac{a_3(c_3-b_3)}{2} &\cdots ①\\
&(a_1-c_1)x+(a_2-c_2)y+(a_3-c_3)z=\frac{b_1(a_1-c_1)}{2}+\frac{b_2(a_2-c_2)}{2}+\frac{b_3(a_3-c_3)}{2} &\cdots ②\\
&(b_1-a_1)x+(b_2-a_2)y+(b_3-a_3)z=\frac{c_1(b_1-a_1)}{2}+\frac{c_2(b_2-a_2)}{2}+\frac{c_3(b_3-a_3)}{2} &\cdots ③\\
&c_1x+c_2y+c_3z=\frac{c_1(a_1+b_1)}{2}+\frac{c_2(a_2+b_2)}{2}+\frac{c_3(a_3+b_3)}{2} &\cdots ④\\
&b_1x+b_2y+c_3z=\frac{b_1(c_1+a_1)}{2}+\frac{b_2(c_2+a_2)}{2}+\frac{b_3(c_3+a_3)}{2} &\cdots ⑤\\
&a_1x+a_2y+a_3z=\frac{a_1(b_1+c_1)}{2}+\frac{a_2(b_2+c_2)}{2}+\frac{a_3(b_3+c_3)}{2} &\cdots ⑥
\end{aligned}
$$

となる．

④ 式 − ⑤ 式 = ① 式，⑥ 式 − ④ 式 = ② 式，⑤ 式 − ⑥ 式 = ③ 式なので，④，⑤，⑥ を満たす $x,\ y,\ z$ は ①，②，③ も満たす．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立なので，

$$
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0
$$

である．よって，連立方程式 ④，⑤，⑥ は 1 つの解をもつ．この点が 6 平面で共有される点である．

※　3 次行列による連立方程式の解の存在のところは，現在の高校範囲を越える．

※　6 平面の方程式を次のようにベクトル方程式で書いてもよい．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とし，$\overrightarrow{x}=(x,\ y,\ z)$ とする．各辺の中点を通り，対辺の方向ベクトルを法線方向とする 6 平面のベクトル方程式は次のようになる．

$$
\left(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{x}-\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right)=0,\quad \left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\right)\cdot\left(\overrightarrow{x}-\frac{\overrightarrow{b}}{2}\right)=0,\quad \left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{x}-\frac{\overrightarrow{c}}{2}\right)=0,
$$

$$
\overrightarrow{c}\cdot\left(\overrightarrow{x}-\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\right)=0,\quad \overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{x}-\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}}{2}\right)=0,\quad \overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{x}-\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2}\right)=0
$$

※　垂心が存在する四面体，これを直辺四面体という．

直辺四面体については『数学対話』「特別な四面体」「直辺四面体」を参照のこと．

直辺四面体では，モンジュ点は垂心に一致する．

それを示そう．直辺四面体では，3 組の対辺がそれぞれ直交する．すなわち

$$
\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}\right)=0,\quad \overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\right)=0,\quad \overrightarrow{c}\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=0
$$

すなわち，

$$
\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}
$$

である．この値を A とおくと，6 平面の方程式は

$$
\begin{aligned}
&\left(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{x}=0\cdots ① \quad &\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\right)\cdot\overrightarrow{x}=0\cdots ② \quad &\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{x}=0\cdots ③\\
&\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{x}=A\cdots ④ &\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{x}=A\cdots ⑤ &\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}=A\cdots ⑥
\end{aligned}
$$

で，第 ④ 式は

$$\overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) = 0, \qquad \overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}) = 0$$

を意味し，他の式も合わせると，各頂点と $\overrightarrow{x}$ で定まる点を結ぶ直線が対面と直交すること示している．

よって，モンジュ点は垂心である．

20　広大後期

20.1　5番

20.1.1　問題

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。2 以上の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k^3}{n}\right]$$

と定める。たとえば，

$$S_3 = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{8}{3}\right] = 2, \quad S_5 = \left[\frac{1}{5}\right] + \left[\frac{8}{5}\right] + \left[\frac{27}{5}\right] + \left[\frac{64}{5}\right] = 18$$

である。以下の問いに答えよ。必要ならば，正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

が成り立つことを，証明なしで用いてよい。

(1) n を 2 以上の整数とし，k を n 未満の正の整数とする。n と k が互いに素であるとき，

$$\left[\frac{k^3}{n}\right] + \left[\frac{(n-k)^3}{n}\right]$$

を n，k ついての整式として表せ。

(2) p を素数とするとき，S_p を p を用いて表せ。また，S_{23} を求めよ

(3) p を素数とするとき，S_{p^2} を p を用いて表せ。また，S_{25} を求めよ

※ 類似追加問題
p, q を相異なる 3 以上の 2 つの素数とするとき，S_{pq} を p と q を用いて表せ。

20.1.2　解答

(1) $\left[\frac{k^3}{n}\right] = m$ とする．このとき定義より $m \leqq \frac{k^3}{n} < m+1$ である．また，$\frac{(n-k)^3}{n} = n^2 - 3nk + 3k^2 - \frac{k^3}{n}$ であるから，

$$n^2 - 3nk + 3k^2 - m - 1 < n^2 - 3nk + 3k^2 - \frac{k^3}{n} \leqq n^2 - 3nk + 3k^2 - m$$

が成り立つ．n と k が互いに素なので，$\frac{k^3}{n}$ は整数でなく，右辺の等号は成立しない．よって，

$$\left[\frac{(n-k)^3}{n}\right] = n^2 - 3nk + 3k^2 - m - 1$$

である．この結果，

$$\left[\frac{k^3}{n}\right]+\left[\frac{(n-k)^3}{n}\right]=n^2-3nk+3k^2-1$$

となる．

(2)　$n=p=2$ のとき．

$$S_p=S_2=\left[\frac{1}{2}\right]=0$$

p を奇素数とする．$1 \leqq k \leqq p-1$ の範囲の k に対する k^3 は $n=p$ と互いに素である．(1) を用いて，

$$\begin{aligned}
S_p &= \left[\frac{1^3}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^3}{p}\right]+\left[\frac{\left(\frac{p+1}{2}\right)^3}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)^3}{p}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left\{\left[\frac{k^3}{p}\right]+\left[\frac{(p-k)^3}{p}\right]\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(p^2-3pk+3k^2-1\right) \\
&= p^2\cdot\frac{p-1}{2}-3p\cdot\frac{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}{2}+\frac{3\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)(p-1+1)}{6}-\frac{p-1}{2} \\
&= \frac{1}{4}(p-2)(p-1)(p+1)
\end{aligned}$$

となる．$p=2$ のときもこの式がは 0 となるので，$p=2$ のときを含めすべての素数に対して

$$S_p=\frac{1}{4}(p-2)(p-1)(p+1)$$

である．またこれより，

$$S_{23}=\frac{1}{4}21\cdot22\cdot24=2772$$

(3)　$p=2$ のとき，$n=p^2=4$ であり，

$$S_{p^2}=S_4=\left[\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{8}{4}\right]+\left[\frac{27}{4}\right]=8$$

である．次に，p を奇素数とする．

$n=p^2$ と k が互いに素でないのは k が p の倍数のときである．$1 \leqq k \leqq p^2-1$ の範囲では $k=pl$ $(1 \leqq l \leqq p-1)$ と表せる．このときは

$$\begin{aligned}
\left[\frac{k^3}{p^2}\right]+\left[\frac{(p^2-k)^3}{p^2}\right] &= pl^3+p(p-l)^3 \\
&= p^4-3p^3l+3p^2l^2=p^4-3p^2k+3k^2
\end{aligned}$$

p と k が互いに素なとき．

$$\left[\frac{k^3}{p^2}\right]+\left[\frac{(p^2-k)^3}{p^2}\right]=p^4-3p^2k+3k^2-1$$

(2) と同様に考える．$1 \leqq k \leqq \dfrac{p^2-1}{2}$ の範囲の k で p と互いに素でないものは $\dfrac{p-1}{2}$ 個あるので，この分を調整する．そして，(2) の計算での p を p^2 に置きかえて用いることにより，

$$\begin{aligned}
S_{p^2} &= \sum_{k=1}^{\frac{p^2-1}{2}} \left\{ \left[\frac{k^3}{p^2}\right] + \left[\frac{(p^2-k)^3}{p}\right] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\frac{p^2-1}{2}} \left(p^4 - 3p^2k + 3k^2 - 1\right) + \frac{p-1}{2} \\
&= \frac{1}{4}(p^2-2)(p^2-1)(p^2+1) + \frac{p-1}{2} \\
&= \frac{1}{4}(p-1)\left\{(p^2-2)(p+1)(p^2+1)+2\right\} \\
&= \frac{1}{4}p(p-1)(p^4+p^3-p^2-p-2)
\end{aligned}$$

$p=2$ のときも成り立つので，

$$S_{p^2} = \frac{1}{4}p(p-1)(p^4+p^3-p^2-p-2)$$

である．またこれを $p=5$ で用いて，

$$S_{25} = \frac{1}{4}5(5-1)(625+125-25-5-2) = 3590$$

追加問題

pq と k が互いに素でないのは k が p の倍数か q の倍数のときである．$1 \leqq k \leqq pq-1$ の範囲では $k = pl\ (1 \leqq l \leqq q-1)$ または $k = ql\ (1 \leqq l \leqq p-1)$ と表せる．

$k = pl\ (1 \leqq l \leqq q-1)$ のとき．

$$\left[\frac{k^3}{pq}\right] + \left[\frac{(pq-k)^3}{pq}\right] = \left[\frac{p^2l^3}{q}\right] + \left[\frac{p^2(q-l)^3}{q}\right]$$

ここで，$\left[\dfrac{p^2l^3}{q}\right] = m$ とおく．

$$\begin{aligned}
\frac{p^2(q-l)^3}{q} &= p^2q^2 - 3p^2ql + 3p^2l^2 - \frac{p^2l^3}{q} \\
&= n^2 - 3nk + 3k^2 - \frac{p^2l^3}{q}
\end{aligned}$$

であるから，

$$n^2-3nk+3k^2-m-1 < n^2-3nk+3k^2-\frac{p^2l^3}{q} \leqq n^2-3nk+3k^2-m$$

これより，$\left[\dfrac{(pq-k)^3}{pq}\right] = -m-1$ となるので，$k=pl$ のとき，

$$\left[\frac{k^3}{pq}\right] + \left[\frac{(pq-k)^3}{pq}\right] = n^2-3nk+3k^2-1$$

これは，k が $n=pq$ と互いに素なときの式と一致する．よって，

$$
\begin{aligned}
S_{pq} &= \sum_{k=1}^{\frac{pq-1}{2}} \left\{ \left[\frac{k^3}{pq}\right] + \left[\frac{(pq-k)^3}{pq}\right] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\frac{pq-1}{2}} \left(p^2q^2 - 3pqk + 3k^2 - 1\right) \\
&= \frac{1}{4}(pq-2)(pq-1)(pq+1)
\end{aligned}
$$

21　大阪市大後期

21.1　理学部 4 番

21.1.1　問題

k を 2 以上の自然数とし，$z=\cos\dfrac{2\pi}{k}+i\sin\dfrac{2\pi}{k}$ とおく．ただし，i は虚数単位とする．次の問いに答えよ，

問 1　m，n を整数とする．$m-n$ が k の倍数であることは，$z^m=z^n$ となるための必要十分条件であることを示せ．

問 2　l を k と互いに素な自然数とする．このとき，複素数 z^l，z^{2l}，z^{3l}，$\cdots\cdots$，z^{kl} はすべて異なることを示せ．

問 3　l を自然数とする．複素数 z^l，z^{2l}，z^{3l}，$\cdots\cdots$，z^{kl} がすべて異なるとき，k と l は互いに素であることを示せ．

21.1.2　解答

問 1　$z^m=z^n$ を同値変形すると，$z^{m-n}=1$ より，$\cos\dfrac{m-n}{k}2\pi+i\sin\dfrac{m-n}{k}2\pi=1$ となる．これが成立する必要十分条件は $\dfrac{m-n}{k}$ が整数，つまり $m-n$ が k の倍数であることとなる．

問 2　$1\leqq i,\ j\leqq k$ に対して $z^{il}=z^{jl}$ となるとする．(1) から，$il-jl=(i-j)l$ が k の倍数である．l が k と互いに素な自然数なので $i-j$ が k の倍数である．

$-k+1\leqq i-j\leqq k-1$ であるから，$i-j=0$．つまり，$z^{il}=z^{jl}$ となるのは $i=j$ のときにかぎり，複素数 z^l，z^{2l}，z^{3l}，$\cdots\cdots$，z^{kl} はすべて異なる．

問 3　複素数 z^l，z^{2l}，z^{3l}，$\cdots\cdots$，z^{kl} がすべて異なり，かつ k と l が互いに素ではないとする．共通因数を p とし，$k=pk'$，$l=pl'$ とおく．

このとき，$1<k'+1<k$ で

$$(k'+1)l-l=k'l=k'pl'=l'k$$

なので，(1) より，z^l と $z^{(k'+1)l}$ が一致し，すべて異なるという条件と矛盾する．

よって，k と l は互いに素である．

22　大阪府大後期

22.1　理学類 2 番

22.1.1　問題

n を自然数とし，a_n，b_n を等式

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{7}$$

を満たす整数と定める．このとき，以下の問いに答よ．

(1) a_3 と b_3 を求めよ．

(2) $\left(3-\sqrt{7}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{7}$ が成り立つことを示せ．

(3) n が 3 の倍数のとき，${a_n}^2$ を 7 で割った余りを求めよ．

(4) $\left(3+\sqrt{7}\right)^n = \sqrt{c_n + 2^n} + \sqrt{c_n}$ を満たす整数 c_n が存在することを示せ．

22.1.2　解答

(1)

$$\begin{aligned}\left(3+\sqrt{7}\right)^{n+1} &= \left(3+\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)^n = \left(3+\sqrt{7}\right)(a_n + b_n\sqrt{7}) \\ &= 3a_n + 7b_n + \sqrt{7}\,(a_n + 3b_n) \\ &= a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{7}\end{aligned}$$

$\sqrt{7}$ は無理数で，a_n，b_n は整数なので，

$$a_{n+1} = 3a_n + 7b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 3b_n$$

がなりたつ．$(a_1,\ b_1) = (3,\ 1)$ であるから，$(a_2,\ b_2) = (3\cdot 3 + 7\cdot 1,\ 3 + 3\cdot 1) = (16,\ 6)$ である．
よって，

$$(a_3,\ b_3) = (3\cdot 16 + 7\cdot 6,\ 16 + 3\cdot 6) = (90,\ 34)$$

である．
(2) n に関する数学的帰納法で示す．
$(a_1,\ b_1) = (3,\ 1)$ であるから $n = 1$ のときは成立する．
n で成立とする．$n+1$ のとき，

$$\begin{aligned}\left(3-\sqrt{7}\right)^{n+1} &= \left(3-\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)^n = \left(3-\sqrt{7}\right)(a_n - b_n\sqrt{7}) \\ &= 3a_n + 7b_n - \sqrt{7}\,(a_n + 3b_n) = a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{7}\end{aligned}$$

より成立した．よって自然数 n で題意が成立する．
(3) (2) より

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^n\left(3-\sqrt{7}\right)^n = (a_n + b_n\sqrt{7})(a_n - b_n\sqrt{7})$$

なので，

$$2^n = {a_n}^2 - 7{b_n}^2$$

ここで $n=3m$ とおく．これは整数である．

$$2^{3m}=8^m={a_n}^2-7{b_n}^2$$

$8 \pmod 7 \equiv 1$ なので，

$$ {a_n}^2 \equiv 2^{3m} \equiv 1 \pmod 7$$

より，求める余りは 1 である．

(4) $c_n=7{b_n}^2$ とおく．(3) から

$$2^n+c_n={a_n}^2$$

なので，$a_n=\sqrt{c_n+2^n}$ であり，$\sqrt{c_n}=b_n\sqrt{7}$ なので，このとき，

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{7}=\sqrt{c_n+2^n}+\sqrt{c_n}$$

が成立するを．

23　お茶の水女子大理後期

23.1　1 番

23.1.1　問題

すべての自然数 n に対して $a_{n+p}=a_n$ を満たすような自然数 p があるとき，数列 $\{a_n\}$ は周期的であるといい，このような p のうち最小のものを $\{a_n\}$ の周期という．

実数 q に対し，次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_{n+1}=\begin{cases} q & (a_n=0 \text{ のとき}) \\ q-\dfrac{1}{a_n} & (a_n\neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $q=\sqrt{3}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は周期的であることを示し，その周期を求めよ．

(2) $x^2-qx+1=0$ が 2 つの実数解をもつとし，それらの解を α, β $(0<|\alpha|<|\beta|)$ とする．$\{a_n\}$ が周期 1 の数列ではなく，すべての n に対して $a_n\neq 0$ であるとする．このとき，すべての n に対し，$a_n\neq\alpha$ であることを示し，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

と定めれば数列 $\{b_n\}$ は等比数列となることを示せ．

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ に対し，極限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ が存在することを示し，その値を求めよ．

(4) $q=2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ に対し，極限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ が存在することを示し，その値を求めよ．

23.1.2　解答

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sqrt{3}-\frac{1}{a_{n+1}}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{a_n}}=\frac{2a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n-1} \\ \therefore\quad a_{n+4} &= \frac{2a_{n+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_{n+2}-1}=\frac{\dfrac{4a_n-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n-1}-\sqrt{3}}{\dfrac{2\sqrt{3}a_n-3}{\sqrt{3}a_n-1}-1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n-2} \\ \therefore\quad a_{n+6} &= \frac{2a_{n+4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_{n+4}-1}=\frac{\dfrac{2a_n-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n-2}-\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}a_n-3}{\sqrt{3}a_n-2}-1}=\frac{-a_n}{-1}=a_n \end{aligned}$$

これより，$q=\sqrt{3}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は周期的であり，その周期は 6 である．

(2)　ある n で $a_n=\alpha$ とする．このとき，${a_n}^2-qa_n+1=0$ である．$a_n\neq 0$ なので，$a_n=q-\dfrac{1}{a_n}$ となる．これより $a_{n+1}=q-\dfrac{1}{a_n}$ なので，$a_{n+1}=a_n$ となる．これから $a_{n+1}=q-\dfrac{1}{a_n+1}$ も成り立ち，同様に $a_{n+2}=a_{n+1}$ である．

　また $a_n=q-\dfrac{1}{a_{n-1}}$ なので，$a_n=a_{n-1}$ も成り立つ．

　これらを繰り返すことで，$a_n=a_{n+1}$ がすべての n で成立し，周期が 1 となり，条件に反する．よって，すべての n で $a_n\neq\alpha$ である．

　次に，解と係数の関係から $\alpha+\beta=q$，$\alpha\beta=1$ であるので，

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{q-\dfrac{1}{a_n}-\beta}{q-\dfrac{1}{a_n}-\alpha}\\
&= \frac{qa_n-1-\beta a_n}{qa_n-1-\alpha a_n}=\frac{(\alpha+\beta)a_n-\alpha\beta-\beta a_n}{(\alpha+\beta)a_n-\alpha\beta-\alpha a_n}=\frac{\alpha a_n-\alpha\beta}{\beta a_n-\alpha\beta}\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}\right)=\frac{\alpha}{\beta}b_n
\end{aligned}$$

となり，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の等比数列である．

(3)　$r=\dfrac{\alpha}{\beta}$ とおく．$b_n=b_1r^{n-1}$ である．これより $\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=r^{n-1}b_1$ となる．これを a_n について解いて $a_n=\dfrac{\beta-b_1r^{n-1}\alpha}{1-b_1r^{n-1}}$ となる．

　ここで，$|r|<1$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta-b_1r^{n-1}\alpha}{1-b_1r^{n-1}}=\beta$$

である．

(4)　$q=2$ のとき，漸化式を変形して

$$a_{n+1}-1=1-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-1}{a_n}$$

逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{a_n}{a_n-1}=1+\frac{1}{a_n-1}$$

したがって数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ は公差 1 の等差数列である．よって，

$$\frac{1}{a_n-1}=n-1+\frac{1}{a_1}$$

よって，

$$a_n-1=\frac{1}{n-1+\dfrac{1}{a_1}}$$

となり $n\to\infty$ のとき右辺は 0 に収束するので，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

である．

23.2　2 番

23.2.1　問題

n を 2 より大きい自然数とする．座標平面において，原点を中心とし半径 1 の円に内接する正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ がある．ただし A_1 の座標は $(1,\ 0)$ とし，$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ はこの順に反時計回りに並んでいるものとする．すなわち，m を 1 以上 n 以下の整数とするとき，A_m の座標は

$$\left(\cos\frac{2(m-1)\pi}{n},\ \sin\frac{2(m-1)\pi}{n}\right)$$

である．袋に 1 から n までの番号をつけた n 個の球が入っている．この袋から 1 つの球を取り出して，取り出した球の番号が k のとき，原点と A_k を通る直線を対称軸として正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ を裏返した後，取り出した球を袋に戻す操作を考える．

(1) この操作を 1 回行い，取り出した球の番号が k であるとき，頂点 A_m が移った先の座標を求めよ．

(2) この操作を 2 回行い，取り出した球の番号が 1 回目は k で，2 回目が l であるとき，頂点 A_m が移った先の座標を求めよ．

(3) j を自然数とする．j 回の操作で $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ が同時に元の位置に戻る確率を求めよ．

(4) j を自然数とする．j 回の操作で初めて $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ が同時に元の位置に戻る確率を求めよ．

23.2.2　解答

(1)　正 n 角形の頂点 A に対して，直線 OA が x 軸の正の方向となす角を，頂点 A の偏角という．頂点 A_m が移った先の偏角を β とする．

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{2(m-1)\pi}{n}+\beta\right\}=\frac{2(k-1)\pi}{n}$$

が成り立つ．これより，$\beta=\dfrac{2(2k-m-1)\pi}{n}$ である．よって，頂点 A_m が移った先の座標は

$$\left(\cos\frac{2(2k-m-1)\pi}{n},\ \sin\frac{2(2k-m-1)\pi}{n}\right)$$

である．

(2)　2 回目の操作で移った先の偏角を γ とする．

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=\frac{2(l-1)\pi}{n}$$

が成り立つ．これより，$\gamma=\dfrac{2(2l-2k+m-1)\pi}{n}$ である．よって，頂点 A_m が移った先の座標は

$$\left(\cos\frac{2(2l-2k+m-1)\pi}{n},\ \sin\frac{2(2l-2k+m-1)\pi}{n}\right)$$

である．

(3)　(1)，(2) より j が奇数なら点の並びは番号に対して時計回りに変わり，j が偶数なら点の並びは番号に対して反時計回りのままとなる．

頂点の相互関係は変わらないので，同時に元の位置に戻るのは，操作の回数が偶数であることが必要で，このとき A_1 が A_1 の元の位置に戻ればよい．

(1) より，1 回の折り返しで，どの点も元の位置から偏角が $\dfrac{2\pi}{n}$ の偶数倍離れた点に移る．よって，j 回の操作の後，点 A_1 は A_1 の元の位置から偶数倍離れた点にある．よって，その A_1 を A_1 の元の位置に戻す折返しがただ 1 つ存在する．

n が偶数なら頂点を通る折返し軸は $\dfrac{n}{2}$ 本あるので，その A_1 が A_1 の元の位置に戻る確率は $\dfrac{1}{\frac{n}{2}} = \dfrac{2}{n}$ である．

n が奇数なら頂点を通る折返し軸は n 本あるので，A_1 が A_1 の元の位置に戻る確率は $\dfrac{1}{n}$ である．

以上より求める確率は

$$\begin{cases} 0 & (j\text{ が奇数}) \\ \dfrac{1}{n} & (j\text{ が偶数で }n\text{ が奇数}) \\ \dfrac{2}{n} & (j\text{ が偶数で }n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

となる．

(4)　j が奇数なら 0 である．

j が偶数のとき．2 回後，…，$j-2$ 回後に A_1 が元の位置になく，j 回後に元の位置に戻るので，

$$n\text{ が奇数なら，}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{j-1}{2}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$n\text{ が偶数なら，}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{\frac{j-1}{2}}\cdot\frac{2}{n}$$

である．

24　慈恵医大

24.1　2 番

24.1.1　問題

p を 2 以上の自然数の定数とする。$n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して、関数 $f_n(x)\ (x > 0)$ を

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{pn}\right)$$

で定める。例えば，$p = 2$ のとき

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right) \\ f_3(x) &= \left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\left(1+\frac{x}{5}\right)\left(1+\frac{x}{6}\right) \end{aligned}$$

である。$f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)\ (x > 0)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{t}{1+t} \leqq \log(1+t) \leqq t$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) $f(x)$ を求めよ。

24.1.2　解答

(1)　$g(t) = \log(1+t) - \dfrac{t}{1+t} = \log(1+t) - \left(1 - \dfrac{1}{1+t}\right)$，$h(t) = t - \log(1+t)$ とおく．$g(0) = h(0) = 0$ である．そして，$t \geqq 0$ において，

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} \geqq 0 \\ h'(t) &= 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geqq 0 \end{aligned}$$

である．したがって，$t \geqq 0$ のとき，$g(t)$，$h(t)$ は単調に増加し，$g(t) \geqq 0$，$h(t) \geqq 0$ となる．したがって，不等式 $\dfrac{t}{1+t} \leqq \log(1+t) \leqq t$ が成り立つ．

(2)

$$\log f_n(x) = \sum_{k=n}^{np} \log\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

である．この各項において，(1) を $t = \dfrac{x}{k}$ で用いると，$\dfrac{x}{x+k} \leqq \log\left(1+\dfrac{x}{k}\right) \leqq \dfrac{x}{k}$ が成り立つ．よって，

$$x\sum_{k=n}^{np}\frac{1}{x+k} \leqq \log f_n(x) \leqq x\sum_{k=n}^{np}\frac{1}{k}$$

である．

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{np}\frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{np}\frac{1}{\frac{k}{n}} = \int_1^p \frac{1}{t}\,dt = \log p$$

である．

次に x を固定し，区間 $[x+k,\ x+k+1]$ で関数 $\dfrac{1}{t}$ を考える．この区間で単調減少なので，$\dfrac{1}{t} \leqq \dfrac{1}{x+k}$ である．よって，

$$\int_{x+k}^{x+k+1} \frac{1}{t}\,dt < \int_{x+k}^{x+k+1} \frac{1}{x+k}\,dt$$

これから

$$\log(x+k+1) - \log(x+k) < \frac{1}{x+k}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{np} \frac{1}{x+k} &> \sum_{k=n}^{np} \{\log(x+k+1) - \log(x+k)\} \\ &= \log(x+np+1) - \log(x+n) = \log\frac{x+np+1}{x+n} \\ &= \log\frac{\dfrac{x}{n}+p+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{x}{n}+1} \end{aligned}$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{np} \frac{1}{x+k} \geqq \log p$$

が成り立つ．よってはさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty} \log f_n(x) = x\log p = \log p^x$$

対数関数の連続性から

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = p^x$$

である．

25　横国大

25.1　3 番

25.1.1　問題

中身の見えない 2 つの箱 A，B がある．箱 A には白玉と赤玉がそれぞれ 2 個ずつ入っており，箱 B には白玉 1 個だけが入っている．このとき，n を正の整数として，次の操作 $(*)$ を考える．

$(*)$　はじめに，箱 A の中身をよくかきまぜて，箱 A から玉を 2 個取り出し，色を確認しないで，箱 B に 2 個とも入れる．次に,「箱 B の中身をよくかきまぜて，箱 B ら玉を 1 個取り出し，色を確認した後，箱 B に戻すという作業を n 回繰り返す.

操作 $(*)$ を一度行なったとき，箱 B から取り出した玉が，n 回ともすべて白玉である確率を p_n とし，箱 B から取り出した玉が，n 回ともすべて白玉であるという条件のもとで，はじめに箱 A から取り出した玉が 2 個とも白玉である条件付き確率を q_n とする．

次の問いに答えよ．

(1) p_2，q_2 を求めよ．

(2) p_n，q_n をを求めよ．

(3) $q_n > \dfrac{1}{2}$ をみたす最小の n の値を求めよ．

25.1.2　解答

(2)

箱 A から赤球 2 個を箱 B に入れ, B からは n 回とも白球となる確率 :　$\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

箱 A から赤球 1 個白球 1 個を箱 B に入れ, B からは n 回とも白球となる確率 :　$\dfrac{2^2}{{}_4\mathrm{C}_2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

箱 A からシロ球 2 個を箱 B に入れ, B からは n 回とも白球となる確率 :　$\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}$

全事象はこれらに分けられ，互いに排反である．よって，

$$p_n = \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right\} = \frac{1+2^{n+2}+3^n}{2\cdot 3^{n+1}}$$

はじめに箱 A から取り出した玉が 2 個とも白玉である確率は $\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}$ なので，条件付き確率の定義から

$$q_n = \frac{\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}}{p_n} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1} = \frac{3^n}{1+2^{n+2}+3^n}$$

である．

(1)　これから

$$p_2 = \frac{13}{27},\ q_2 = \frac{9}{26}$$

である．

(3)　条件 $q_n > \dfrac{1}{2}$ は，

$$1 > \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right\}$$

となり，これから

$$3^n > 1 + 2^{n+2}$$

となる．

$$(n,\ 3^n,\ 1+2^{n+2}) : (1,\ 3, 9),\ (2,\ 9, 17),\ (3,\ 27, 33),\ (4,\ 81, 65),$$

より，条件を満たす最小の n は $n = 4$ である．

26　奈良医大

26.1　5 番

26.1.1　問題

実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が以下の 2 条件をみたしているとする．

- 条件 (i)：任意の x に対して $f(x) \geqq 0$
- 条件 (ii)：任意の $x \neq 0$ と任意の $\alpha > 1$ に対して $f(\alpha x) > \alpha f(x)$

(1)　条件 (ii) を用いて，任意の β $(0 < \beta < 1)$ に対して $\beta f(1) > f(\beta)$ となることを示せ．
(2)　$f(0)$ の値を求めよ．
(3)　$x > y > 0$ に対し $f(x) > f(y)$ が成り立つことを示せ．

26.1.2　解答

(1)　$1 < \dfrac{1}{\beta}$ であるから，条件 (ii) より，$x \neq 0$ のとき，$f\left(\dfrac{x}{\beta}\right) > \dfrac{1}{\beta}f(x)$．つまり $\beta f\left(\dfrac{x}{\beta}\right) > f(x)$．ここに，$x = \beta$ を代入することにより，$\beta f(1) > f(\beta)$ となる．
(2)　(1) から，

$$\lim_{\beta \to 0} \beta f(1) \geqq \lim_{\beta \to 0} f(\beta) \geqq 0$$

これよりはさみうちの原理によって，$\displaystyle\lim_{\beta \to 0} f(\beta) = 0$ となる．$f(x)$ は連続なので，$f(0) = 0$ である．
(3)　条件 (ii) を，$\alpha = \dfrac{x}{y} > 1$，$x$ を y に置きかえて用いることにより，

$$f\left(\frac{x}{y}y\right) > \frac{x}{y}f(y) > f(y)$$

となり，$x > y > 0$ に対し $f(x) > f(y)$ が成り立つことが示された．

27　奈良医大後期

27.1　2番

27.1.1　問題

α は $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とする．O は xy 平面の原点とし，xy 平面上の点 A_0，B_0，C_0 が与えられたとき，以下の漸化式により，A_n，B_n，C_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を定める．

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_n} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}_n} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n} \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}_n} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n} \end{cases}$$

(1)　$\mathrm{A}_0\,(\cos 0,\ \sin 0)$，$\mathrm{B}_0\left(\cos\dfrac{2\pi}{3},\ \sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\mathrm{C}_0\left(\cos\dfrac{2\pi}{3},\ \sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ とする．一般の 0 以上の整数 n に対して，$\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n}\right|$ を n を用いて表せ．さらに．

$$S(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\right|$$

として，

$$\lim_{\alpha\to 0} S(\alpha)$$

を求めよ．

(2)　a_x，a_y，b_x，b_y，c_x，c_y を実数定数とし，$\mathrm{A}_0(a_x,\ a_y)$，$\mathrm{B}_0(b_x,\ b_y)$，$\mathrm{C}_0(c_x,\ c_y)$ とする．点 P の x 座標の値，y 座標の値をそれぞれ x_{P}，y_{P} で表すことにする．各 $n \geqq 0$ に対して，$r_n = \mathrm{Max}(x_{\mathrm{A}_n},\ x_{\mathrm{B}_n},\ x_{\mathrm{C}_n}) - \mathrm{Min}(x_{\mathrm{A}_n},\ x_{\mathrm{B}_n},\ x_{\mathrm{C}_n})$ とおく．(ただし，Max，Min はそれぞれ，最大値，最小値を表す.)

もし，ある n について，不等式

$$x_{\mathrm{A}_n} \leqq x_{\mathrm{B}_n} \leqq x_{\mathrm{C}_n}$$

が満たされると仮定する．このとき，不等式 $r_{n+1} \leqq r_n\mathrm{Max}(\alpha,\ 1-\alpha)$ が成り立つことを証明せよ．

(3)　(2) において，

$$\lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{A}_n} = \lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{B}_n} = \lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{C}_n},\qquad \lim_{n\to\infty} y_{\mathrm{A}_n} = \lim_{n\to\infty} y_{\mathrm{B}_n} = \lim_{n\to\infty} y_{\mathrm{C}_n}$$

となることを証明し，これらの極限値を求めよ．

27.1.2　解答

(1)　$\triangle\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0$ は正三角形で，

$$\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0{}^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 = \mathrm{B}_0\mathrm{C}_0{}^2 = \mathrm{C}_0\mathrm{A}_0{}^2$$

であるから，$\triangle\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0$ の 1 辺は $\sqrt{3}$ となる．よって，$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 = \sqrt{3}\alpha$，$\mathrm{A}_0\mathrm{C}_1 = \sqrt{3}(1-\alpha)$ となるので，余弦定理から

$$\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1{}^2 \quad = \quad 3\alpha^2 + 3(1-\alpha)^2 - 2\cdot 3\alpha(1-\alpha)\cos\frac{\pi}{3}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\alpha^2+3(1-\alpha)^2-3\alpha(1-\alpha) \\
&= 3(3\alpha^2-3\alpha+1) \\
&= \mathrm{C_0A_0}^2(3\alpha^2-3\alpha+1)
\end{aligned}
$$

ここで $0<\alpha<1$ より，

$$0<\alpha(1-\alpha)=-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$$

したがって，

$$\frac{1}{4}<3\alpha^2-3\alpha+1=1-3\alpha(1-\alpha)<1$$

である．そして，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{C_1A_1}}\right|=\sqrt{3\alpha^2-3\alpha+1}\left|\overrightarrow{\mathrm{C_0A_0}}\right|$$

であり，同様に

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{C_{n+1}A_{n+1}}}\right|=\sqrt{3\alpha^2-3\alpha+1}\left|\overrightarrow{\mathrm{C_nA_n}}\right|$$

となる．よって，

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{C_nA_n}}\right| &= \left(3\alpha^2-3\alpha+1\right)^{\frac{n}{2}}\left|\overrightarrow{\mathrm{C_0A_0}}\right| \\
&= \sqrt{3}\left(3\alpha^2-3\alpha+1\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{A_nB_n}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{B_nC_n}}\right|
\end{aligned}
$$

となる．同様に

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{A_nA_{n+1}}}\right|=\sqrt{3\alpha^2-3\alpha+1}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_{n-1}A_n}}\right|$$

なので，

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{A_nA_{n+1}}}\right| &= \left(3\alpha^2-3\alpha+1\right)^{\frac{n}{2}}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}\right| \\
&= \sqrt{3}\alpha\left(3\alpha^2-3\alpha+1\right)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
S(\alpha) &= \frac{\sqrt{3}\alpha}{1-(3\alpha^2-3\alpha+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\alpha\left\{1+\left(3\alpha^2-3\alpha+1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}{1-(3\alpha^2-3\alpha+1)}=\frac{\sqrt{3}\alpha\left\{1+\left(3\alpha^2-3\alpha+1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}{-3\alpha(\alpha-1)} \\
&= \frac{1+\left(3\alpha^2-3\alpha+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}(1-\alpha)}
\end{aligned}
$$

なので，

$$\lim_{\alpha\to 0}S(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

である．

(2)　$x_{\mathrm{A}_n}\leqq x_{\mathrm{B}_n}\leqq x_{\mathrm{C}_n}$ のとき，$r_n=x_{\mathrm{C}_n}-x_{\mathrm{A}_n}$ である．定義から

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{A}_{n+1}}&=(1-\alpha)x_{\mathrm{A}_n}+\alpha x_{\mathrm{B}_n} \\
x_{\mathrm{B}_{n+1}}&=(1-\alpha)x_{\mathrm{B}_n}+\alpha x_{\mathrm{C}_n} \\
x_{\mathrm{C}_{n+1}}&=(1-\alpha)x_{\mathrm{C}_n}+\alpha x_{\mathrm{A}_n}
\end{aligned}
$$

である．そして，

$$\begin{aligned}
x_{\mathrm{C}_{n+1}} - x_{\mathrm{B}_{n+1}} &= (1-\alpha)\left(x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{B}_n}\right) + \alpha\left(x_{\mathrm{A}_n} - x_{\mathrm{C}_n}\right)\\
x_{\mathrm{B}_{n+1}} - x_{\mathrm{A}_{n+1}} &= (1-\alpha)\left(x_{\mathrm{B}_n} - x_{\mathrm{A}_n}\right) + \alpha\left(x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{B}_n}\right)\\
x_{\mathrm{A}_{n+1}} - x_{\mathrm{C}_{n+1}} &= (1-\alpha)\left(x_{\mathrm{A}_n} - x_{\mathrm{C}_n}\right) + \alpha\left(x_{\mathrm{B}_n} - x_{\mathrm{A}_n}\right)
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
&\alpha\left(x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{A}_n}\right) < x_{\mathrm{C}_{n+1}} - x_{\mathrm{B}_{n+1}} < (1-\alpha)\left(x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{B}_n}\right)\\
&0 < x_{\mathrm{B}_{n+1}} - x_{\mathrm{A}_{n+1}}\\
&< \begin{cases} (1-\alpha)\left(x_{\mathrm{B}_n} - x_{\mathrm{A}_n}\right) + (1-\alpha)\left(x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{B}_n}\right) = (1-\alpha)(x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{A}_n}) & (\alpha < 1-\alpha)\\ \alpha\left(x_{\mathrm{B}_n} - x_{\mathrm{A}_n}\right) + \alpha\left(x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{B}_n}\right) = \alpha(x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{A}_n}) & (1-\alpha \leqq \alpha)\end{cases}\\
&-(1-\alpha)\left(x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{A}_n}\right) < x_{\mathrm{A}_{n+1}} - x_{\mathrm{C}_{n+1}} < \alpha\left(x_{\mathrm{B}_n} - x_{\mathrm{A}_n}\right)
\end{aligned}$$

より，$x_{\mathrm{C}_n} - x_{\mathrm{A}_n}$ などがすべて $\pm r_n \mathrm{Max}(\alpha,\ 1-\alpha)$ の間にあるので，

$$r_{n+1} \leqq r_n \mathrm{Max}(\alpha,\ 1-\alpha)$$

が成立する．

(3)　(2) から，

$$r_n \leqq r_0 \left\{\mathrm{Max}(\alpha,\ 1-\alpha)\right\}^n$$

なので，

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

つまり，

$$\lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{A}_n} = \lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{B}_n} = \lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{C}_n}$$

である．y 座標についても同様に

$$\lim_{n\to\infty} y_{\mathrm{A}_n} = \lim_{n\to\infty} y_{\mathrm{B}_n} = \lim_{n\to\infty} y_{\mathrm{C}_n}$$

である．一方，n によらず，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}_{n+1}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_n} + \overrightarrow{\mathrm{OB}_n} + \overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$$

であるから，すべての n に対して

$$x_{\mathrm{A}_n} + x_{\mathrm{B}_n} + x_{\mathrm{C}_n} = a_x + b_x + c_x$$

となる．y 座標についても同様である．

　したがって，

$$3\lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{A}_n} = a_x + b_x + c_x$$

等が成り立ち，これらの極限値はそれぞれ

$$\frac{1}{3}\left(a_x + b_x + c_x\right),\quad \frac{1}{3}\left(a_y + b_y + c_y\right)$$

である．

※　(1) で $\triangle \mathrm{A_0B_0C_0}$ は正三角形で，このとき $\triangle \mathrm{A_nB_nC_n}$ はその中心である原点に収束する．

　では一般の三角形の場合，$\triangle \mathrm{A_nB_nC_n}$ は $\triangle \mathrm{A_0B_0C_0}$ のどの点に収束するのか．これが一般化された (2) で考えるべきことである．それは $\triangle \mathrm{A_0B_0C_0}$ の重心であることが示された．

27.2 4番

27.2.1 問題

数列 a_0, a_1, $\cdots$, a_n, $\cdots$ を $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ と記すことにする．数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ が周期数列であるとは，ある正整数 q が存在し，0 以上の任意の整数 n に対して等式 $a_{n+q}=a_n$ が成り立つこととする．このとき，q を周期数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の周期という．二つの数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ と $\{b_n\}_{n=0,1,\cdots}$ とが等しいとは，0 以上の任意の整数 n に対して，$a_n=b_n$ が成り立つこととする．

(1) 周期数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ が与えられたとき，正整数 p を $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の最小の周期とする．このとき，$\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の任意の周期 q は p で割り切れることを証明せよ．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を周期数列とする．0 以上の整数 i に対して，周期数列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=0,1,\cdots}$ を，$a_n^{(i)}=a_{n+i}$，$n=0,1,\cdots$ により定義する．もし，$\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の周期 $p\ (>1)$ が素数であり，関係式 $a_0=a_1=\cdots=a_{p-1}$ を満たさなければ，p 個の周期数列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=0,1,\cdots}(i=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1)$ はすべて相異なることを証明せよ．

(3) c を正整数，$p\ (>1)$ を素数とする．周期 p の周期数列 $\{x_n\}_{n=0,1,\cdots}$ で，0 以上の任意の整数 n について x_n は 1 以上 c 以下の整数であるもの全体のなす集合を S とおく．S の要素の個数を求めよ．またこれを用いて，c^p-c は p の倍数であることを証明せよ．

27.2.2 解答

(1) 周期 q を p で割った余りを r とする．$q=pk+r\ (0\leqq r<p)$ である．q と p が周期なので，

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+q}=a_{n+pk+r} \\ &= a_{n+p(k-1)+r+p}=a_{n+p(k-1)+r} \end{aligned}$$

これをくりかえして

$$a_n=a_{n+r}$$

となり，$r>0$ なら r も周期である．これは p が最小であることと矛盾する．よって，$r=0$．つまり任意の周期 q は p で割り切れる．

(2) 異なるる i と $j(0\leqq i<j\leqq p-1)$ に対し，相等しい周期数列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=0,1,\cdots}$ と周期数列 $\{a_n^{(j)}\}_{n=0,1,\cdots}$ が存在するとする．このとき $n=0,1,\cdots$ に対して，

$$a_{n+i}=a_{n+j}=a_{n+i+j-i}$$

が成り立つ．周期数列 $\{b_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を

$$b_n=a_{n+i}$$

で定める．b_n は $n=0,1,\cdots$ に対して，

$$b_n=b_{n+p},\ \text{かつ}\ b_n=b_{n+j-i}$$

がなりたつ．p と $j-i$ が周期である．p が最小なので，$j-i=0$ となり，仮定と矛盾する．よって，$\{a_n^{(i)}\}_{n=0,1,\cdots}$ はすべて異なる．

(3) a_0, a_1, $\cdots$, a_{p-1} を定めれば周期 p の数列は定まる．したがって，1 以上 c 以下の値をとる数列は c^p 個ある．

このうち，$a_0=a_1=\cdots=a_{p-1}$，つまり周期 0 であるものは c 個あり，$p>1$ となるものは c^p-c 個ある．

数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を用いて，p 個の周期数列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=0,1,\cdots}$ を，$a_n^{(i)}=a_{n+i}$，$n=0,1,\cdots$ により定義した．そのうちの 1 つの数列 $a_n^{(i_0)}$ をとる．これを用いて同様に数列を作る．

$$a_n^{(i)}=a_{n+i_0+i}$$

となるので，$i_0+i\equiv j \pmod p$ となる j をとれば，$\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を用いて作った $a_n^{(j)}$ になる．

よって，$p>1$ である数列 $\{a_n\}$ の集合は，たがいに共通なもののない p 個ずつの部分集合の和となる．

これより，c^p-c は p の倍数である．

※　周期 p の周期順列は，円周上に p 個の点を取り，0 から $p-1$ の番号をつけ，そこに p 個の数を並べたものに対応している．

(2) の順列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=0,1,\cdots}$ は，その円順列の i 番の点の数からはじめる数列である．

このように円順列と対応させて考えれば，(3) もわかりやすい．

28　滋賀医大

28.1　2番

28.1.1　問題

a，b を異なる正の実数とする．次で表される xy 平面上の円 C と楕円 E を考える．

$$C : x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$
$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

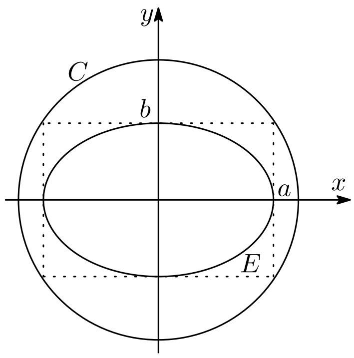
C 上の点 A から E に引いた 2 本の接線が C と再び交わる点をそれぞれ P，Q とする．

(1) AP⊥AQ を示せ．

(2) A が C 上を動くとき，△APQ の面積を最大，最小にする A の座標をそれぞれ求めよ．

28.1.2　解答

(1)　点 A が A$(\pm a,\ \pm b)$ の 4 点のときは，点 A から E に引いた 2 本の接線は x 軸と y 軸に平行なので，直交している．



これら 4 点でないとき，点 A の座標を $(\alpha,\ \beta)$ とする．$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$ を満たす．点 A を通る直線を $y = m(x - \alpha) + \beta$ とおく．これが E と接する．よって，y を消去して

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\{m(x-\alpha)+\beta\}^2}{b^2} = 1$$

が x の 2 次方程式として重解をもつ．これを整理して，

$$(m^2a^2 + b^2)x^2 - 2ma^2(m\alpha - \beta)x + a^2(m\alpha - \beta)^2 - a^2b^2 = 0$$

この判別式を D とする．

$$\begin{aligned} D/4 &= m^2a^4(m\alpha-\beta)^2 - a^2(m^2a^2+b^2)\{(m\alpha-\beta)^2 - b^2\} \\ &= a^4b^2m^2 - a^2b^2\{(m\alpha-\beta)^2 - b^2\} = 0 \end{aligned}$$

これより，

$$a^2m^2 - \{(m\alpha-\beta)^2 - b^2\} = (a^2 - \alpha^2)m^2 + 2\alpha\beta m + b^2 - \beta^2 = 0$$

これは m の 2 次方程式である．C 上の点 A から E に引いた 2 本の接線の傾きを m_1, m_2 とすると，m_1, m_2 はこの 2 次方程式の 2 解である．

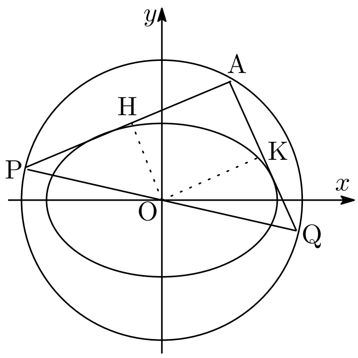
解と係数の関係から

$$m_1 m_2 = \frac{b^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2} = -1$$

なので，2 本の接線は直交する．

※　円 C を楕円 E の**準円**という．

(2)　角 A は直角なので，PQ は円 C の中心 O を通る．O から AP，AQ への垂線を OH，OK とする．



H，K はそれぞれ AP，AQ の中点となるので，三角形 APQ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ} = 2\mathrm{OH}\cdot\mathrm{OK}$$

点と直線の距離の式から

$$\mathrm{OH} = \frac{|m_1\alpha-\beta|}{\sqrt{{m_1}^2+(-1)^2}}$$

OK も同様である．よって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{S}{2}\right)^2 &= \frac{(m_1\alpha-\beta)^2(m_2\alpha-\beta)^2}{({m_1}^2+1)({m_2}^2+1)} = \frac{a^2b^2({m_1}^2+{m_2}^2)+a^4+b^4}{{m_1}^2+{m_2}^2+2} \\ &= a^2b^2+\frac{-2a^2b^2+a^4+b^4}{{m_1}^2+{m_2}^2+2} = a^2b^2+\frac{(a^2-b^2)^2}{{m_1}^2+{m_2}^2+2}\end{aligned}$$

$${m_1}^2+{m_2}^2 \geqq 2\sqrt{{m_1}^2{m_2}^2} = 2$$

で，等号成立は ${m_1}^2={m_2}^2$ のときである．よって，

$$0 < \frac{1}{{m_1}^2+{m_2}^2+2} \leqq \frac{1}{4}$$

である．したがって，$\mathrm{A} = (\pm a,\ \pm b)$ の 4 点のときを含めると，

$$a^2b^2 \leqq \left(\frac{S}{2}\right)^2 \leqq a^2b^2+\frac{(a^2-b^2)^2}{4} = \frac{(a^2+b^2)^2}{4}$$

つまり，

$$2ab \leqq S \leqq a^2+b^2$$

最小値は $2ab$ で，これは A が $(\pm a,\ \pm b)$ の 4 点のいずれかのとき．

最大値は a^2+b^2 で，${m_1}^2={m_2}^2$ のときである．これは対称性から A が $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$, $(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2})$ の 4 点のいずれかのときである．

28.2　4 番

28.2.1　問題

k を正の整数とし，k 以下の正の整数全体の集合を U とする．すなわち，$U=\{1,\ \cdots,\ k\}$ である．U の部分集合 A と U の要素 x に対して，$f_A(x)$ を，$x\in A$ ならば $f_A(x)=1$，$x\notin A$ ならば $f_A(x)=0$ と定める．例えば $k=3$，$A=\{2,\ 3\}$ のとき，$f_A(1)=0$，$f_A(2)=1$，$f_A(3)=1$ である．また，U の部分集合 A に対して，A の要素の個数を $n(A)$ で表す．

(1) A，B を U の部分集合，$\overline{A}$ を U に関する A の補集合とする．

$$f_{\overline{A}}(x)=1-f_A(x),\qquad f_{A\cap B}(x)=f_A(x)f_B(x)$$

を示せ，

(2) A を U の部分集合とする．$n(A)$ を $f_A(1)$, $\cdots$, $f_A(k)$ すべてを用いて表せ．

(3) A_1, A_2, A_3, A_4 を U の部分集合，A_1, A_2, A_3, A_4 の少なくとも一つに属する要素全体の集合を P とする．

$$f_P(x)=1-\left(1-f_{A_1}(x)\right)\left(1-f_{A_2}(x)\right)\left(1-f_{A_3}(x)\right)\left(1-f_{A_4}(x)\right)$$

を示せ．

(4) (3) の A_1, A_2, A_3, A_4 と P について考える．整数 1，2，3，4 から異なる p 個を選んで i_1, $\cdots$, i_p とし，A_{i_1}, $\cdots$, A_{i_p} のどれにも属する要素全体の集合 S をつくる．i_1, $\cdots$, i_p の選び方 ${}_4\mathrm{C}_p$ 通りをすべて考え，それぞれが定める集合 S を任意に並べて $S_1^{(p)}$, $\cdots$, $S_{{}_4\mathrm{C}_p}^{(p)}$ とおく．さらに，$s(p)=\displaystyle\sum_{i=1}^{{}_4\mathrm{C}_p} n\left(S_i^{(p)}\right)$ とする．このとき，$n(P)=s(1)-s(2)+s(3)-s(4)$ を示せ．

28.2.2　解答

(1)　$x\in A$ のとき，$x\notin\overline{A}$ なので，$f_{\overline{A}}(x)=0$，$1-f_A(x)=1-1=0$ で成立．
$x\notin A$ のとき，$x\in\overline{A}$ なので，$f_{\overline{A}}(x)=1$，$1-f_A(x)=1-0=1$ で成立．
$x\in A\cap B$ のとき，$x\in A$ かつ $x\in B$ なので，$f_{A\cap B}(x)=1$，$f_A(x)f_B(x)=1\cdot 1=1$ で成立．
$x\notin A\cap B$ のとき，$f_{A\cap B}(x)=0$ で，$x\notin A$ または $x\notin B$ なので $f_A(x)=0$ または $f_B(x)=0$ となり，与式は成立する．
(2)　$f_A(x)$ の定義より，

$$n(A)=\sum_{j\in A}1+\sum_{j\in\overline{A}}0=f_A(1)+\cdots+f_A(k)$$

(3)　$P=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ であり，$\overline{P}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}$ である．よって，

$$\begin{aligned}
f_P(x) &= 1-f_{\overline{P}}(x)\\
&= 1-f_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}}(x)\\
&= 1-f_{\overline{A_1}}(x)f_{\overline{A_2}}(x)f_{\overline{A_3}}(x)f_{\overline{A_4}}(x)\\
&= 1-\left(1-f_{A_1}(x)\right)\left(1-f_{A_2}(x)\right)\left(1-f_{A_3}(x)\right)\left(1-f_{A_4}(x)\right)
\end{aligned}$$

である．

(4)　$P=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ の要素 x が，A_1，A_2，A_3，A_4 のうちの何個の集合に含まれるかで場合分けし，それが個数 $s(1)$，$s(2)$，$s(3)$，$s(4)$ のなかで何回重なって数えられているかを考える．それぞれのなかでの重複回数を求め，$s(1)-s(2)+s(3)-s(4)$ の中での回数を求める．

x が A_1，A_2，A_3，A_4 のうちの 1 個に含まれる場合 $1-0+0-0=1$.

x が A_1，A_2，A_3，A_4 のうちの 2 個に含まれる場合 $2-1+0-0=1$.

x が A_1，A_2，A_3，A_4 のうちの 3 個に含まれる場合 $3-{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_3-0=1$.

x が A_1，A_2，A_3，A_4 のうちの 4 個に含まれる場合 $4-{}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_3-1=1$ となり，いずれもちょうど 1 回となる．よって，

$$n(P)=s(1)-s(2)+s(3)-s(4)$$

である．

※ (4) は 4 個の部分集合で考えたが，一般に m 個の部分集合のときも同様に考えることができる．

$P=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$ の要素 x が，A_1，$\cdots$，A_m のうちの k 個の集合に含まれるとする．$s(j)$ のなかで x が重複して数えられる回数を求め，それをもとに $s(1)-s(2)+\cdots(-1)^{m-1}s(m)$ の中での回数を求める．

$$\begin{aligned}
&{}_k\mathrm{C}_1-{}_k\mathrm{C}_2+{}_k\mathrm{C}_3-\cdots(-1)^{k-1}{}_k\mathrm{C}_k\\
=\ &1-\left\{1-{}_k\mathrm{C}_1+{}_k\mathrm{C}_2-\cdots(-1)^k{}_k\mathrm{C}_k\right\}\\
=\ &1-(1-1)^k=1
\end{aligned}$$

である．そして，$k<j\leqq m$ に対して $s(j)=0$ なので，$s(1)-s(2)+\cdots(-1)^{m-1}s(m)$ の中で数えられる x の回数の和はつねに 1 となる．よって，すべての x について加えた次式の左辺は，集合 P の要素の個数となる．つまり，

$$n(P)=s(1)-s(2)+s(3)-s(4)+\cdots(-1)^{m-1}s(m)$$

がなりたつ．

29　和歌山医大

29.1　4番

29.1.1　問題

(1)　自然数 k に対して，3^k を約数にもつ自然数は 2 から 30 までに何個あるか．
(2)　$30! = 6^d \cdot l$ となる自然数 d を求めよ．ただし，l は 6 で割り切れない自然数である．
(3)　n を自然数とし，p を素数とする．$p^n! = p^e \cdot m$ となる自然数 e を求めよ．ただし，m は p で割り切れない自然数である．
(4)　自然数 n に対して，自然数 $d(n)$, $e(n)$ を $30^n! = 6^{d(n)} \cdot l = 5^{e(n)} \cdot m$ と定める．ただし，l，m はそれぞれ 6，5 で割り切れない自然数である．このときの極限 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{d(n)}{e(n)}$ を求めよ．

29.1.2　解答

(1)　自然数は 2 から 30 までにある 3 の倍数は
　$k = 1$ のとき，$3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 10$ の 10 個．
　$k = 2$ のとき，$3^2 \cdot 1,\ 3^2 \cdot 2,\ 3^2 \cdot 3$ の 3 個．
　$k = 3$ のとき，$3^3 \cdot 1$ の 1 個．
　$k > 3$ のときは，0 個．
(2)
　自然数は 2 から 30 までにある 3 の倍数はの 10 個．自然数は 2 から 30 までにある 3^2 の倍数はの 3 個．自然数は 2 から 30 までにある 3^3 の倍数はの 1 個．
　3 の倍数で 3^2 の倍数でないものは $10 - 3$ 個．3^2 の倍数で 3^3 の倍数でないものは $3 - 1$ 個．
　よって，30! 内の素因子 3 の個数は，

$$1(10-3) + 2(3-1) + 3 \cdot 1 = 10 + 3 + 1 = 14$$

　自然数は 2 から 30 までにある 2 の倍数はの 15 個．自然数は 2 から 30 までにある 2^2 の倍数はの 7 個．自然数は 2 から 30 までにある 2^3 の倍数はの 3 個．自然数は 2 から 30 までにある 2^4 の倍数はの 1 個．同様に 30! 内の素因子 3 の個数は 26 個．
　よって，

$$30! = 2^{26} 3^{14} \cdot l' = 6^{14} \cdot l$$

$d = 14$ である．
(3)　e は $p^n!$ の因数分解における素因数 p の個数である．
　k を $1 \leqq k \leqq n-1$ の範囲の自然数とする．p^n 個の自然数 1, 2, $\cdots$, p^n の中に p^k の倍数は

$$p^k \cdot 1,\ p^k \cdot 2,\ \cdots,\ p^k \cdot p^{n-k}$$

の p^{n-k} 個ある．
　従って p^k の倍数であるが p^{k+1} の倍数ではない，つまり因数の中に素因数 p がちょうど k 個あるものは $p^{n-k} - p^{n-k-1}$ 個ある．また素因数 p がちょうど n 個あるものは 1 個である．

$p^n!$ は 1, 2, $\cdots$, p^n の積なので e は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=1}^{n-1} k\left(p^{n-k}-p^{n-k-1}\right)+n=\sum_{k=1}^{n-1} kp^{n-k}-\sum_{k=1}^{n-1} kp^{n-k-1}+n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} kp^{n-k}-\sum_{k=2}^{n}(k-1)p^{n-k}+n=p^{n-1}+\sum_{k=2}^{n-1} p^{n-k}-(n-1)+n \\ &= p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+1=\frac{p^n-1}{p-1} \end{aligned}$$

(4)　$d(n)$ は (2) と同様に考え $30^n!$ にある素因数 3 の個数である．1 から 30^n のうちに，3 の倍数は 3, 6, $\cdots$, $3\cdot 3^{n-1}\cdot 10^n$ より $3^{n-1}\cdot 10^n$ 個ある．3^2 は $3^{n-3}\cdot 10^n$ 個ある．以下同様に考え，3^n は 10^n 個ある．よって，

$$d(n)=10^n\left(3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+1\right)=\frac{(3^n-1)10^n}{2}$$

同様に，

$$e(n)=6^n\left(5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots+1\right)=\frac{(5^n-1)6^n}{4}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d(n)}{e(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(3^n-1)10^n}{2(5^n-1)6^n}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{5^n}}=2$$

※ (3) は 2009 年京大文系 5 番と同じ．