2022年入試問題研究

2024 年 1 月 27 日

目 次

1　京大特色理学部

1.1　1番

1.1.1　問題

n を正の整数とする．$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の n 個の文字についてのある実数係数の多項式とする．整数の列 $\{a_i\}$ が次の性質 $(*)$ を満たすと仮定する．

$(*)$　n より大きいすべての整数 i に対して $a_i = P(a_{i-n}, a_{i-n+1}, \cdots, a_{i-1})$

ただし，$P(a_{i-n}, a_{i-n+1}, \cdots, a_{i-1})$ は多項式 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ にそれぞれ $a_{i-n}, a_{i-n+1}, \cdots, a_{i-1}$ を代入したものである．

このとき，ある 2 つの正の実数 $c,\ d$ が存在して，すべての正の整数 i に対して

$$a_i < c^{d^i}$$

が成り立つことを示せ．

1.1.2　解答

多項式 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を構成する単項式の項数を M，単項式の次数の最大値を m，また係数の絶対値の最大値を A とする．AM, $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|$ の最大値を α とする．このとき，

$$a_{n+1} = P(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqq AM\alpha^m < (\alpha+1)^{m+1}$$

である．そして，$i \geqq 1$ に対して

$$a_{n+i} = P(a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{n+i-1}) < (\alpha+1)^{(m+1)^i}$$

が成り立つことを i に関する数学的帰納法で示す.

上記のように $i=1$ では成立する．$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$ のときの成立を仮定して $i = k+1$ での成立を示す.

$$\begin{aligned} a_{n+k+1} &= P(a_{k+1}i, a_{k+2}, \cdots, a_{n+k}) \\ &< AM(\alpha+1)^{(m+1)^k} < (\alpha+1)^{(m+1)^k+1} < (\alpha+1)^{(m+1)^{k+1}} \end{aligned}$$

である．よって，$i = k+1$ で成立する．

よって，$c = \alpha + 1$，$d = m+1$ とおけば，$i > n$ の i について，題意をみたす.

$i \leqq n$ の i に対しては,

$$a_i \leqq \quad \alpha < c < c^{d^i}$$

は成立する．

従って，題意をみたす c と d の存在が示された.

1.2　2番

1.2.1　問題

半径1の円 C の周上に相異なる5点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 がこの順に並んでいるとし，

B_1を線分 A_1A_3と線分 A_2A_4の交点，
B_2を線分 A_2A_4と線分 A_3A_5の交点，
B_3を線分 A_3A_5と線分 A_4A_1の交点，
B_4を線分 A_4A_1と線分 A_5A_2の交点，
B_5を線分 A_5A_2と線分 A_1A_3の交点

とするとき，

S_1を△ $A_1B_5B_4$の面積，
S_2を△ $A_2B_1B_5$の面積，
S_3を△ $A_3B_2B_1$の面積，
S_4を△ $A_4B_3B_2$の面積，
S_5を△ $A_5B_4B_3$の面積，
T を五角形 $B_1B_2B_3B_4B_5$の面積

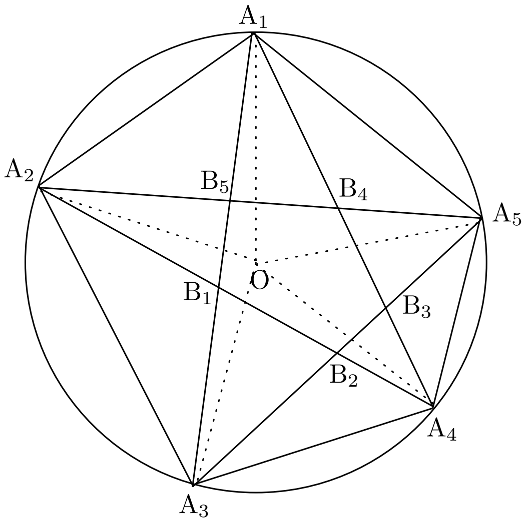
とおく．このように A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 を動かしたとき，

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + 2T$$

の最大値を求めよ．

ただし，三角比の値は具体的に求めずに用いてよい．

1.2.2　解答



1.3　3 番

1.3.1　問題

Z^4 を 4 つの整数 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ 全体のなす集合とする．このとき，以下の条件をすべて満たすような Z^4 の部分集合 S が存在することを示せ．

(i) $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) \in S$ ならば

$$(a_1)^2 - (a_2)^2 + (a_3)^2 - (a_4)^2 = 1$$

が成り立つ．

(ii) S は無限集合である．

(iii) 6 つの整数の組 $(d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ d_6)$ で $(d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4) \neq (0,\ 0,\ 0,\ 0)$ を満たす任意のものに対し，S の部分集合

$$\{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) | (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) \in S \text{ かつ } d_1a_1 + d_2a_2 = d_5 \text{かつ } d_3a_3 + d_4a_4 = d_6\}$$

は有限集合である．

1.3.2　解答

$$S=\left\{(4n^2+1,\ 4n^2,\ n,\ 3n)\mid n\in Z\right\}$$

が 3 つの条件を満たすことを示す．

※　次の集合も

$$\left\{(8n^2-1,\ 8n^2,\ 5n,\ 3n)\mid n\in Z\right\}$$

3 つの条件を満たす．

　Z^4 を 4 つの整数 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ 全体のなす集合とする．このとき，以下の条件をすべて満たすような Z^4 の部分集合 S が存在することを示せ．

(i) $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\in S$ ならば

$$(a_1)^2-(a_2)^2+(a_3)^2-(a_4)^2=1$$

が成り立つ．

(ii) S は無限集合である．

(iii) 6 つの整数の組 $(d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ d_6)$ で $(d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4)\neq(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ を満たす任意のものに対し，S の部分集合

$$\{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)|(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\in S \text{ かつ } d_1a_1+d_2a_2=d_5 \text{かつ } d_3a_3+d_4a_4=d_6\}$$

は有限集合である．

1.4　4番

1.4.1　問題

0以上1未満の実数 p を固定する．n を正の整数とし，xy 平面上の領域 D_n を $x+y \leqq n$ で定める．xy 平面上の点 $P_0(0,\ n)$ から始まる点列 $P_0,\ P_1,\ P_2,\ \cdots$ を以下の条件を満たすように定める．

(A) $P_k(x_k,\ y_k)$ が $y_k > 0$ を満たすならば,

(i) 確率 p で P_{k+1} を $P_{k+1}(x_k+1,\ y_k)$ とおく．

(ii) 確率 $1-p$ で P_{k+1} を $P_{k+1}(x_k,\ y_k-1)$ とおく．

(B) $P_k(x_k,\ y_k)$ が $y_k = 0$ を満たすならば P_{k+1} を P_k とおく．

このとき，以下の設問に答よ．

(1) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき，P_{n+k} が $(k,\ 0)$ となる確率を $p_{n,k}$ とする．このとき

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k}$$

を求めよ．

(2) 各々の n に対し，上の操作で実現可能な点列 $P_0(0,n),\ P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{2n}$ で，これらすべての点が D_n に属するものの総数を C_n とする．また，$C_0 = 1$ とする．このとき，

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $P_0(0,n),\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots$ のすべての点が領域 D_n に属する確率を q_n とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} q_n$$

を p を用いて表せ．

ただし，正の実数の列 $\{a_n\}$ が，任意の正の整数 m に対して $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j \leqq 1$ を満たすとき，以下が成り立つことを用いてもよい．

- 極限 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} a_j$ が存在する．この極限値を a とすると $a \leqq 1$.
- a の値は実数の列 $\{a_n\}$ の順番を入れ替えても変わらない．

1.4.2 解答

(1) p を $0 < p < 1$ の実数とする．

(2)

(3)

0 以上 1 未満の実数 p を固定する．n を正の整数とし，xy 平面上の領域 D_n を $x + y \leqq n$ で定める．xy 平面上の点 $P_0(0,\ n)$ から始まる点列 $P_0,\ P_1,\ P_2,\ \cdots$ を以下の条件を満たすように定める．

(A) $P_k(x_k,\ y_k)$ が $y_k > 0$ を満たすならば，

(i) 確率 p で P_{k+1} を $P_{k+1}(x_k + 1,\ y_k)$ とおく．

(ii) 確率 $1 - p$ で P_{k+1} を $P_{k+1}(x_k,\ y_k - 1)$ とおく．

(B) $P_k(x_k,\ y_k)$ が $y_k = 0$ を満たすならば P_{k+1} を P_k とおく．

このとき，以下の設問に答よ．

(1) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき，P_{n+k} が $(k,\ 0)$ となる確率を $p_{n,k}$ とする．このとき

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k}$$

を求めよ．

(2) 各々の n に対し，上の操作で実現可能な点列 $P_0(0,n),\ P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{2n}$ で，これらすべての点が D_n に属するものの総数を C_n とする．また，$C_0 = 1$ とする．このとき，

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $P_0(0,n),\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots$ のすべての点が領域 D_n に属する確率を q_n とする．このとき，

$$\lim_{n \to \infty} q_n$$

を p を用いて表せ．

ただし，正の実数の列 $\{a_n\}$ が，任意の正の整数 m に対して $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j \leqq 1$ を満たすとき，以下が成り立つことを用いてもよい．

- 極限 $\displaystyle\lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} a_j$ が存在する．この極限値を a とすると $a \leqq 1$．
- a の値は実数の列 $\{a_n\}$ の順番を入れ替えても変わらない．

2　京大特色総人理系

2.1　2 番

2.1.1　問題

p を素数とし，n を，$n \leqq p+1$ を満たす自然数とする．このとき，方程式

$$x^3 - nx - p = 0$$

の実数解で，無理数であるものの個数を求めよ．ただし，2 重解または 3 重解は 1 個の解とみなす．

2.1.2　解答

$f(x)=x^3-nx-p$ とおく．

3 次方程式 $f(x)=0$ が有理数の解をもつとする．それを $x=\dfrac{b}{a}$ $(a>0,\ b$ は互いに素な整数) とおく．

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3-n\left(\frac{b}{a}\right)-p=0$$

これより

$$\frac{b^3}{a}=nab+pa^2$$

右辺は整数で，a と b^3 も互いに素なので，$a=1$ である．この結果

$$b^3-nb=b(b^2-n)=p$$

となり，b は p の約数，つまり $1,\ -1,\ p,\ -p$ のいずれかである．

$$\begin{array}{ll}
b=1 \text{ のとき} & 1-n=p \text{ より } n=-p+1\\
b=-1 \text{ のとき} & -1+n=p \text{ より } n=p+1\\
b=p \text{ のとき} & p^3-np=p \text{ より } n=p^2-1\\
b=-p \text{ のとき} & -p^3+np=p \text{ より } n=p^2+1
\end{array}$$

このうち，条件 $1\leqq n\leqq p+1$ と矛盾しないのは，$b=-1$ で $n=p+1$ のときである．このとき，

$$f(x)=x^3-(p+1)x-p=(x+1)(x^2-px+p)$$

となり，$f(x)=0$ の他の 2 解は $\dfrac{p\pm\sqrt{p^2-4p}}{2}$ である．ここで，p^2-4p は平方数ではない．仮に，$p^2-4p=m^2$ となる正の整数 m があるとする．$p^2-m^2=(p+m)(p-m)=4p$ で $p-m>0$ より，

$$(p+m,\ p-m)=(p,\ 4),\ (2p,\ 2),\ (4p,\ 1)$$

のいずれかである．このとき，それぞれ

$$2p=p+4,\ 2p+2,\ 4p+1$$

であるが，素数 p でこれを満たすものはない．

したがって $n=p+1$ のとき，3 次方程式 $f(x)=0$ の解は，整数解が $x=-1$ と無理数解 2 個である．

$n<p+1$ とする．このとき，実数解はすべて無理数解である．

$f'(x)=3x^2-n$ より，関数 $f(x)$ は $x=\pm\sqrt{\dfrac{n}{3}}$ で極となる．

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{n}{3}}\right)=\mp\frac{2n}{3}\sqrt{\frac{n}{3}}-p$$

よって，

$$f\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right)f\left(-\sqrt{\frac{n}{3}}\right)\ =\ p^2-\frac{4n^3}{27}=4\left(\frac{p^2}{4}-\frac{n^3}{27}\right)$$

である．

　ここで，

$$4(p+1)^3-27p^2=(p-2)^2(4p+1)$$

より，$p>2$ のとき $4(p+1)^3-27p^2>0$ で，$p=2$ のとき $4(p+1)^3-27p^2=0$ である．よって，

$$p+1 \geqq \sqrt[3]{\frac{27p^2}{4}}=3\sqrt[3]{\frac{p^2}{4}}$$

従って，条件 $n<p+1$ と条件 $n<3\sqrt[3]{\dfrac{p^2}{4}}$ では，後者の方が強い．よって，

i) $\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{n^3}{27}>0$，つまり，$3\sqrt[3]{\dfrac{p^2}{4}}>n$ のとき，1 個．

ii) $\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{n^3}{27}=0$，つまり，$3\sqrt[3]{\dfrac{p^2}{4}}=n$ のとき，2 個．

iii) $\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{n^3}{27}<0$，つまり，$3\sqrt[3]{\dfrac{p^2}{4}}<n$ のとき，3 個．

である．

3　京大理系

3.1　1番

3.1.1　問題

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

3.1.2　解答

$2022 < 2048 = 2^{11}$ である．これから，

$$\log_4 2022 < \log_4 2^{11} = 11 \log_4 2 = \frac{11}{2} \quad \cdots ①$$

次に，

$$\begin{aligned} \log_4 2000 &= \log_4 (2^4 \cdot 5^3) \\ &= 2 + 3 \log_4 \frac{10}{2} \\ &= 2 + 3 \left(\log_4 10 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \log_4 10 &= \frac{1}{2 \log_{10} 2} > \frac{1}{2 \cdot 0.3011} \\ &= \frac{10000}{6022} > 1.66 \end{aligned}$$

よって

$$\log_4 2000 > 2 + 3\,(1.66 - 0.5) = 5.48 > 5.4 \quad \cdots ②$$

である．①，② より，題意が示された．

3.2　3番

3.2.1　問題

n を自然数とする．3つの整数 n^2+2，n^4+2，n^6+2 の最大公約数 A_n を求めよ．

3.2.2　解答

正の整数 a，b，q，r の間に $a=bq+r$ の関係式が成りたつとする．

このとき，a と b の公約数は b と r の公約数であり，b と r の公約数は a と b の公約数であるから，それぞれの公約数の集合は一致し，a と b の最大公約数と b と r の最大公約数は相等しい．

$$\begin{aligned} n^4+2 &= (n^2+2)(n^2-2)+6 \\ n^6+2 &= (n^2+2)(n^4-2n^2+4)-6. \end{aligned}$$

であるから，n^2+2 と n^4+2 の最大公約数は n^2+2 と 6 の最大公約数であり，n^2+2 と n^6+2 の最大公約数は n^2+2 と 6 の最大公約数である．

よって，A_n は n^2+2 と 6 の最大公約数に一致する．

以下合同式の法は 6 とする．

$n\equiv 0$ のとき．$n^2+2\equiv 2$ であるから，$A_n=2$.

$n\equiv 3$ のとき．$n^2+2\equiv 5$ であるから，$A_n=1$.

$n\equiv 1,\ 5$ のとき．$n^2+2\equiv 5$ であるから，$A_n=3$.

$n\equiv 2,\ 4$ のとき．$n^2+2\equiv 0$ であるから，$A_n=6$.

よって，

$$A_n=\begin{cases} 2 & (n\equiv 0) \\ 1 & (n\equiv 3) \\ 3 & (n\equiv 1,\ 5) \\ 6 & (n\equiv 2,\ 4) \end{cases}$$

である．

4　京大文系

4.1　4番

4.1.1　問題

a，b を正の実数とする．直線 $L: ax+by=1$ と曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ との 2 つの交点のうち，y 座標が正のものを P，負のものを Q とする．また，L と x 軸の交点を R とし L と y 軸の交点を S とする．a，b が条件

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}=\sqrt{2}$$

を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点の軌跡を求めよ．

4.1.2　解答

P$\left(p,\ -\dfrac{1}{p}\right)$，Q$\left(q,\ -\dfrac{1}{q}\right)$とおく．条件より $p<0$，$q>0$ である．このとき，直線 PQ の傾きは

$$\frac{-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}}{p-q}=\frac{1}{pq}$$

なので，直線 PQ の方程式は

$$y=\frac{1}{pq}(x-p)-\frac{1}{p}=\frac{1}{pq}x-\frac{p+q}{pq}$$

である．これより，

$$\mathrm{R}\left(0,\ -\frac{p+q}{pq}\right),\ \mathrm{S}(p+q,\ 0)$$

である．

P，Q，R，S が同一直線上にあるので，比 $\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}$ は，それぞれの線分を x 軸に正射影したものの長さの比に等しい．よって，条件は

$$\frac{q-p}{p+q}=\sqrt{2}$$

と同値である．これから

$$q(1-\sqrt{2})=p(1+\sqrt{2})$$

線分 PQ の中点を $(X,\ Y)$ とおく．

$$X=\frac{p+q}{2},\quad Y=\frac{-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}}{2}=-\frac{p+q}{2pq}$$

である．

$$p+q=p+\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}p=\frac{2}{1-\sqrt{2}}p,\quad pq=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}p^2$$

なので，

$$\begin{aligned}
Y &= -\frac{p+q}{2pq}=-\frac{\dfrac{2}{1-\sqrt{2}}p}{2\cdot\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}p^2}\\
&= -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{p}=(1-\sqrt{2})\frac{1}{p}\\
&= \frac{2}{p+q}=\frac{1}{X}
\end{aligned}$$

よって，線分 PQ の中点の軌跡は

$$y=\frac{1}{x}\ \ (x>0)$$

である．

5　九大理系

5.1　3 番

5.1.1　問題

　自然数 m，n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \qquad \cdots \quad ①$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ．

(2)　n^2-1 は 168 の倍数であることを示せ．

(3)　① を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ．

5.1.2　解答

(1)　n^2+1，n^2-1 は偶数なので，$\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は整数である．その共通因数を p とし，$\dfrac{n^2+1}{2}=pq,\ \dfrac{n^2-1}{2}=pr$ と置く．

$$\frac{n^2+1}{2}-\frac{n^2-1}{2}=1=p(q-r)$$

より，$p=1$．つまり，$\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数である．

(2)　$210=2\cdot3\cdot5\cdot7$ であり，$168=2^3\cdot3\cdot7$ である．

条件より，

$$n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=2\cdot3\cdot5\cdot7m^2$$

ここで，

$n\equiv0,\ \pm1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ に対して $n^2+1\equiv1,\ 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ なので，n^2+1 は 3 の倍数ではない．よって n^2-1 が 3 の倍数である．

$n\equiv0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3\ (\mathrm{mod}\ 7)$ に対して $n^2+1\equiv1,\ 5,\ 3\ (\mathrm{mod}\ 7)$ なので，n^2+1 は 7 の倍数ではない．よって n^2-1 が 7 の倍数である．

n は奇数であるので $n=2k+1$ と置くと

$$n^2-1=4k^2+4k=4k(k+1)$$

で，$k(k+1)$ は偶数なので，n^2-1 は 8 の倍数である．

よって，n^2-1 は

$$3\cdot7\cdot8=168$$

の倍数である．

(3)　$n^2-1=168s=2^3\cdot3\cdot7s$ とおく．m は偶数なので，$m=2q$ とおくと，

$$(n^2+1)(n^2-1)=(2^3\cdot3\cdot7s+2)\cdot2^3\cdot3\cdot7s=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot(2q)^2$$

これより，

$$2s(84s+1)=5q^2$$

を得る．ここで $s=10$ とすると，

$$\begin{array}{rcl} n^2 &=& 1+2^3\cdot3\cdot7\cdot10=1681=41^2 \\ q^2 &=& \dfrac{1}{5}\{2\cdot10(84\cdot10+1)\}=2^2\cdot29^2 \end{array}$$

となり，$n=41$，$q=2\cdot29=58$ が条件をみたす．このとき，$m=116$ となるので，

$$(m,\ n)=(116,\ 41)$$

は ① みたす．

6　東工大

6.1　2番

6.1.1　問題

3つの正の整数 a, b, c の最大公約数が1であるとき，次の問いに答よ．

(1)　$a+b+c$，$bc+ca+ab$，abc の最大公約数は1であることを示せ．

(2)　$a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ．

6.1.2　解答

(1)　$A=a+b+c$，$B=bc+ca+ab$，$C=abc$ とおく．3つの正の整数 a, b, c は3次方程式

$$t^3-At^2+Bt-C=0$$

を満たす．これから，

$$a^3=Aa^2-Ba+C$$

である．$A=a+b+c$，$B=bc+ca+ab$，$C=abc$ の最大公約数が1より大きいと仮定し，共通素因数の1つを p とすると，a^3 が p の倍数で p が素数なので，a が p の倍数である．

A, B, C が a, b, c について対称なので，b, c も p の倍数となり，a, b, c の最大公約数が1であることと矛楯する．

よって，$a+b+c$，$bc+ca+ab$，abc の最大公約数は1である．

(2)

$a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数を d とおく．

$$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ca)$$
$$(a+b+c)^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=3abc$$

より，$2(ab+bc+ca)$，$3abc$ も d を約数にもつ．つまり d は $a+b+c$，$2(bc+ca+ab)$，$3abc$ の公約数である．

$a+b+c$，$bc+ca+ab$，abc の最大公約数が1なので，d は，2と3で構成される6の約数であることが必要である．

つまり，$d=1,\ 2,\ 3,\ 6$ が必要である．

それぞれ，対応する a, b, c が存在することを示す．

$a=1, b=c=2$ のとき $a+b+c=5$ で2,3を因数にもたないので $d=1$．

$a=b=1, c=2$ のとき

$$a+b+c=4,\ a^2+b^2+c^2=6,\ a^3+b^3+c^3=10$$

より $d=2$．

$a=b=c=1$ のとき

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=3$$

より $d=3$．

$a=b=1, c=4$ のとき

$$a+b+c=6,\ a^2+b^2+c^2=18,\ a^3+b^3+c^3=66$$

より $d=6$.

よって求める正の整数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 6$$

である.

7　信州大理系

7.1　7 番

7.1.1　問題

$a_1=a_2=1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，次の 2 つの条件 p と q が同値であることを示せ.

p :　すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ が成り立つ.

q :　すべての自然数 n に対して，${a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n=(-1)^n$ が成り立つ.

7.1.2　解答

i)　条件 p ならば条件 q であることを示す.

$$\begin{aligned}
& {a_{n+2}}^2-a_{n+3}a_{n+1} \\
=\ & {a_{n+2}}^2-\left(a_{n+2}+a_{n+1}\right)a_{n+1} \\
=\ & a_{n+2}\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)-{a_{n+1}}^2 \\
=\ & a_{n+2}a_n-{a_{n+1}}^2 \\
=\ & -\left({a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n\right)
\end{aligned}$$

より，数列 $\{{a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n\}$ は公比 -1 の等比数列である．よって，

$$\begin{aligned}
{a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n &= (-1)^{n-1}\left({a_2}^2-a_3a_1\right) \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

が成り立つ.

ii)　条件 q ならば条件 p であることを示す.

$${a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n+{a_{n+2}}^2-a_{n+3}a_{n+1}=(-1)^n+(-1)^{n+1}=0$$

なので,

$$a_{n+2}\left(a_{n+2}-a_n\right)=a_{n+1}\left(a_{n+3}-a_{n+1}\right)$$

が成り立つ.

これを用いて,

$$1\leqq a_n<a_{n+2}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

$$a_2 - a_3 a_1 = (-1)^{-1} = -1$$

において，$a_1 = 1$，$a_2 = 1$ より $a_3 = 2$ となり，$n = 1$ で成立する．1，2，$\cdots$，n で成立すれば，$0 < a_{n+3} - a_{n+1}$，つまり，$1 \leqq a_{n+1} < a_{n+3}$ となり，$n+1$ で成立する．よって，すべての n で $1 \leqq a_n < a_{n+2}$ となり，特にすべての n で $a_n \neq 0$ である．

これから

$$\frac{a_{n+2} - a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} - a_{n+1}}{a_{n+2}}$$

が成立し，

$$\frac{a_{n+2} - a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_3 - a_1}{a_2} = 1$$

となる．これより，

$$a_{n+2} - a_n = a_{n+1}$$

となり，条件 p となる．

8　山口大

8.1　4 番

8.1.1　問題

整数全体を定義域とし，整数を値にとる関数 $f(n)$ が，次の条件 1，2 を満たしているとする。

条件 1　$f(0) = 0$

条件 2　任意の整数 n に対し，$f(3+n) = f(3-n)$ かつ $f(7+n) = f(7-n)$ が成り立つ

整数全体を定義域とする関数 $g(n)$，$h(n)$ をそれぞれ，$g(n) = 6 - n$，$h(n) = 14 - n$ とするとき，次の問いに答えなさい。

(1)　合成関数 $(h \circ g)(n)$ と $(g \circ h)(n)$ を求めなさい。
(2)　任意の整数 n に対し，2 つの等式 $(f \circ g)(n) = f(n)$ と $(f \circ h)(n) = f(n)$ が成り立つことを示しなさい。
(3)　$f(2022) = 0$ であることを示しなさい。
(4)　集合 A を，関数 $f(n)$ のとりうる値全体の集合，すなわち，$A = \{f(n) \mid n \text{ は整数}\}$ とする。このとき，集合 A の要素の個数は 5 以下であることを示しなさい。

8.1.2　解答

(1)

$$\begin{aligned}(h \circ g)(n) &= h(g(n)) = h(6-n) = 14 - (6-n) = n + 8 \\ (g \circ h)(n) &= g(h(n)) = g(14-n) = 6 - (14-n) = n - 8\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(f\circ g)(n) &= f(6-n)=f(3-(-3+n))=f(3+(-3+n))=f(n)\\(f\circ h)(n) &= f(14-n)=f(7-(-7+n))=f(7+(-7+n))=f(n)\end{aligned}$$

(3)

$$f(n)=f(14-n)=f(3-(-11+n))=f(3+(-11+n))=f(n-8)$$

であるから，

$$f(2022)=f(2022-8\times 252)=f(6)=f(3+3)=f(3-3)=f(0)=0$$

(4)　(3) から

$$A=\{f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5),\ f(6),\ f(7)\}$$

であるが，さらに

$$\begin{aligned}f(5) &= f(3+2)=f(3-2)=f(1)\\f(6) &= 0\\f(7) &= f(4+3)=f(4-3)=f(1)\end{aligned}$$

なので，

$$A=\{f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)\}$$

となり，集合 A の要素の個数は 5 以下である。

9　奈良医大（後）

9.1　4 番

9.1.1　問題

$P(x)$，$Q(x)$ はいずれも零でない実数係数の整式であり，以下の条件 (C) を満たすとする．

$$\text{条件 } (C) : 1 - P(x)^2 = Q(x)^2(1 - x^2)$$

(1)　$P(x)P'(x)$ は $Q(x)$ で割り切れることを証明せよ．（但し，$P'(x)$ は $P(x)$ の導関数を表す．）

(2)　$P'(x)$ は $Q(x)$ で割り切れることを証明せよ．

(3)　$P'(x) = nQ(x)$，（n は整数）と表されることを証明せよ．

9.1.2　解答

(1)　条件式を x で微分する．

$$
\begin{aligned}
-2P(x)P'(x) &= Q(x)Q'(x)(1-x^2) - 2xQ(x)^2 \\
&= Q(x)\{2Q(x)'(1-x^2) - 2xQ(x)\}
\end{aligned}
$$

これより，$Q(x)$ は $P(x)P'(x)$ の約数である．

(2)

$$P(x)^2 + Q(x)^2(1-x^2) = 1$$

であるから，$P(x)$ と $Q(x)$ の共通因数は右辺の約数となる．右辺が 1 なので，$P(x)$ と $Q(x)$ は互いに素である．

　従って，$Q(x)$ は $P'(x)$ の約数である．

(3)　$P(x)$ の次数を p，$Q(x)$ の次数を q とする．条件式より

$$2p = 2q + 2$$

なので，$q = p - 1$ となり，$Q(x)$ と $P'(x)$ は同次である．(2) とあわせ，ある定数 α を用いて，

$$P'(x) = \alpha Q(x)$$

と表される．

　$P(x) = ax^p + \cdots$ とおく。ただし，$\cdots$ の部分は最高次以外の項を表すとする．

$$\alpha Q(x) = P'(x) = apx^{p-1} + \cdots$$

である．また条件 (C) より，

$$-a^2x^{2p} + \cdots = -x^2 \cdot \frac{a^2p^2}{\alpha^2}x^{2(p-1)} + \cdots$$

なので，

$$a^2 = \frac{a^2p^2}{\alpha^2}$$

これより

$$\alpha^2 = p^2$$

つまり

$$\alpha = p \text{ または } -p$$

右辺を n とおくと

$$P'(x) = nQ(x)$$

と表され，n は整数である．