2023年入試問題研究

2022 年 11 月 26 日

目 次

1　京大特色理学部

1.1　1 番

1.1.1　問題

平面内の鋭角三角形 $\triangle$ABC を考える．$\triangle$ABC の内部の点 P に対して，

直線 BC に関して P と対称な点を D，
直線 CA に関して P と対称な点を E，
直線 AB に関して P と対称な点を F

とする．6 点 A，B，C，D，E，F が同一円周上にあるような P は $\triangle$ABC の内部にいくつあるか求めよ．

1.2　2番

1.2.1　問題

2つの整数 m と n が $0 < m < n$ を満たすとする．また，関数 $H(x)$ を

$$H(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x)\ (0 < x < 1)$$

と定める．ただし，log は自然対数を表す．また，e を自然対数の底とする．以下の設問に答えよ．

(1) ${}_n\mathrm{C}_m \leqq e^{nH\left(\frac{m}{n}\right)}$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq k \leqq n$ を満たす任意の整数 k に対して

$$ {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} \leqq {}_n\mathrm{C}_m \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-m}$$

が成り立つことを示せ．

(3) ${}_n\mathrm{C}_m \geqq \dfrac{1}{n+1}e^{nH\left(\frac{m}{n}\right)}$ が成り立つことを示せ．

1.3　3 番

1.3.1　問題

複素数の数列 $\{z_n\}$ に対する次の 2 つの条件を考える。

(i) すべての自然数 n に対して，$|z_n - z_{n+1} = 2^n|$ が成り立つ.
(ii) すべての自然数 に対して，

$$\frac{(z_n - z_{n+1})(z_{n+2} - z_{n+3})}{(z_{n+1} - z_{n+2})(z_{n+3} - z_n)}$$

は実数である.

複素数の数列 $\{z_n\}$ で (i) と (ii) をともに満たすものをすべて考えたとき，

$$\frac{z_{2022} - z_{2023}}{z_{2023} - z_{2024}}$$

がとり得る値をすべて求めよ.

1.4　4番

1.4.1　問題

p を 3 以上の素数とし，a を整数とする．このとき，p^2 以上の整数 n であって

$$ {}_n\mathrm{C}_{p^2} \equiv a \pmod{p^3} $$

を満たすものが存在することを示せ．