2024年入試問題研究

2023 年 11 月 18 日

目 次

1　京大理学部特色入試 　2

1.1　1 番 2

1.1.1　問題 2

1.2　2 番 2

1.2.1　問題 2

1.3　3 番 2

1.3.1　問題 2

1.4　4 番 2

1.4.1　問題 2

2　京大特色総人理系 　3

2.1　1 番 3

2.1.1　問題 3

2.2　2 番 3

2.2.1　問題 3

1 京大理学部特色入試

1.1 1番

1.1.1 問題

2以上の整数 n に対して，n を割り切る素数の個数を $f(n)$ とする．例えば，$n=120$ のとき，120を割る切る素数は2と3と5なので，$f(120)=3$ である．不等式 $f(n) \geqq \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ を満たす2以上の自然数 n をすべて求めよ．

1.2 2番

1.2.1 問題

$x^{100}-3x^{10}-2x-1=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ．

1.3 3番

1.3.1 問題

座標平面上の円 $D_1 : x^2+y^2=64$ と円 $D_2 : x^2+(y-4)^2=9$ に関して，以下の設問に答えよ．

(1) 座標平面上の3点 $(0,8)$, $(3\sqrt{7},1)$, $(-3\sqrt{7},1)$ を頂点とする三角形の外接円は D_1 であり，内接円は D_2 であることを示せ．

(2) D_1 が外接円であり，さらに D_2 が内接円である任意の三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，実数 α, β, γ を

$$\alpha = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}-\mathrm{BC}$$
$$\beta = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}-\mathrm{CA}$$
$$\gamma = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}-\mathrm{AB}$$

と定める．このとき $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=105$ が成り立つことを示せ．

1.4 4番

1.4.1 問題

t を実数とする．投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ であるコインを10回投げて，座標空間の点 P_0，P_1，P_2，$\cdots$， P_{10} を以下で定める．

- P_0 の座標は $(1,2,3)$ とする．
- n を $1 \leqq n \leqq 10$ を満たす任意の自然数とする．P_{n-1} の座標が (x,y,z) であるとき、もし n 回目のコイン投げで表が出たなら P_n の座標は $((1-t)x+ty, x, z)$ とし、裏が出たなら P_n の座標は $(x, (1-t)y+tz, y)$ とする．

例えば $t=-1$ のとき、1 回目のコイン投げで表，2 回目のコイン投げで裏が出たなら，P_0，P_1，P_2 の座標はそれぞれ $(1,2,3)$，$(0,1,3)$，$(0,-1,1)$，となる．また $t=-1$ のとき，P_1 が取り得る座標空間の点は $(0,1,3)$ と $(1,1,2)$ の 2 個である．以下の設問に答えよ．
(1) $t=-1$ のとき， P_3 の座標が $(1,0,1)$ となる確率を求めよ．
(2) P_{10} が取り得る座標空間の点の個数を $N(t)$ とする．$N(t) \geqq 250$ となる実数 t が存在するかどうかを判定せよ．

2　京大特色総人理系

2.1　1 番

2.1.1　問題

任意の三角形 ABC に対して次の主張 $(*)$ が成り立つことを証明せよ．

（$*$） 辺 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R を適当にとると三角形 PQR は正三角形となる．ただし，P, Q, R はいずれも A, B, C とは異なるとする．

2.2　2 番

2.2.1　問題

平面上に間隔 1 で平行線が無限に並べられているとする．そのうちの一本を l とし，その上に一点 O をとる．動点 P が点 O を中心とする半径 $r(r>1)$ の円周上を等速円運動で一周する．この間に l 以外の平行線と線分 OP との共有点の個数は変化するが，そのうち最も長い総時間でとられる個数を求めよ．