

# 2025年入試問題研究

2024年11月28日

## 目次

<b>1</b>	<b>京大理学部特色入試</b>	<b>2</b>
1.1	1番	2
1.1.1	問題	2
1.2	2番	3
1.2.1	問題	3
1.3	3番	4
1.3.1	問題	4
1.4	4番	5
1.4.1	問題	5

# 1 京大理学部特色入試

## 1.1 1番

### 1.1.1 問題

$n$  を自然数とする. 実数  $x$  に対し,  $x$  を超えない最大の整数を  $[x]$  とし,  $f(x) = x - [x]$  と定める. このとき, 1 よりも大きく, かつ整数でないような実数  $x$  のうちで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{nf(\sqrt[n]{x})}\right) = \frac{1}{2}$$

を満たすものをすべて求めよ.

## 1.2 2番

### 1.2.1 問題

$n$  を 5 以上の自然数とする. K, O, T, Y が 1 文字ずつ書かれた 4 枚のカードを用意する. この 4 枚のカードから 1 枚を引き, 書かれた文字を記録し, 戻すという操作を  $n$  回繰り返す, 記録された順に文字を左から並べる.

このとき, 並んだ  $n$  個の文字の中に連続した文字列「KYOTO」が現れる確率  $p_n$  が

$$p_n \geq 1 - \left(\frac{1023}{1024}\right)^{n-4}$$

を満たすことを示せ.

ただし, 上の操作においては, それぞれのカードを毎回独立に, 等しい確率で引くものとする.

## 1.3 3番

### 1.3.1 問題

座標平面における領域

$$A = \{(x, y) \mid y \geq e^x\}$$

で定まる図形  $A$  を考える.  $A$  に対して, 原点を中心とする回転や平行移動を, 何回か行って得られる図形を  $n$  個用意し, それぞれ  $A_1, A_2, \dots, A_n$  とする.

このとき,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  により座標平面全体を覆うことのできる  $n$  の最小値を求めよ.

## 1.4 4番

### 1.4.1 問題

自然数  $n$  に対して，関数  $f_n(x)$  を次で帰納的に定める．

$$f_1(x) = \sin(x)$$

$$f_n(x) = \sin(f_{n-1}(x)) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

また， $L$  を正の実数とし，

$$f_n(a) - \frac{a}{L} = 0$$

を満たす実数  $a$  の個数を  $A_{L,n}$  とする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1)  $L \leq 1$  のとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L,n}$  の値を求めよ．

(2)  $L > 1$  のとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L,n}$  の値を求めよ．

ただし， $0$  以上の実数からなる数列  $\{a_n\}$  が，任意の  $n$  に対して  $a_{n+1} \leq a_n$  を満たすとき，数列  $\{a_n\}$  が収束することを用いてもよい．