

2025年入試問題研究

2024年11月28日

目次

1	京大理学部特色入試	2
1.1	1番	2
1.1.1	問題	2
1.2	2番	3
1.2.1	問題	3
1.3	3番	4
1.3.1	問題	4
1.4	4番	5
1.4.1	問題	5

1 京大理学部特色入試

1.1 1番

1.1.1 問題

n を自然数とする. 実数 x に対し, x を超えない最大の整数を $[x]$ とし, $f(x) = x - [x]$ と定める. このとき, 1 よりも大きく, かつ整数でないような実数 x のうちで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{nf(\sqrt[n]{x})}\right) = \frac{1}{2}$$

を満たすものをすべて求めよ.

1.2 2番

1.2.1 問題

n を 5 以上の自然数とする. K, O, T, Y が 1 文字ずつ書かれた 4 枚のカードを用意する. この 4 枚のカードから 1 枚を引き, 書かれた文字を記録し, 戻すという操作を n 回繰り返す, 記録された順に文字を左から並べる.

このとき, 並んだ n 個の文字の中に連続した文字列「KYOTO」が現れる確率 p_n が

$$p_n \geq 1 - \left(\frac{1023}{1024}\right)^{n-4}$$

を満たすことを示せ.

ただし, 上の操作においては, それぞれのカードを毎回独立に, 等しい確率で引くものとする.

1.3 3番

1.3.1 問題

座標平面における領域

$$A = \{(x, y) \mid y \geq e^x\}$$

で定まる図形 A を考える. A に対して, 原点を中心とする回転や平行移動を, 何回か行って得られる図形を n 個用意し, それぞれ A_1, A_2, \dots, A_n とする.

このとき, A_1, A_2, \dots, A_n により座標平面全体を覆うことのできる n の最小値を求めよ.

1.4 4番

1.4.1 問題

自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を次で帰納的に定める.

$$f_1(x) = \sin(x)$$

$$f_n(x) = \sin(f_{n-1}(x)) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

また、 L を正の実数とし、

$$f_n(a) - \frac{a}{L} = 0$$

を満たす実数 a の個数を $A_{L,n}$ とする. このとき、以下の設問に答えよ.

(1) $L \leq 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L,n}$ の値を求めよ.

(2) $L > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L,n}$ の値を求めよ.

ただし、 0 以上の実数からなる数列 $\{a_n\}$ が、任意の n に対して $a_{n+1} \leq a_n$ を満たすとき、数列 $\{a_n\}$ が収束することを用いてもよい.