〜1999年入試研究

2017 年 8 月 14 日

はじめに

20 世紀の日本の大学入試で，別解がいろいろあったりして面白いもので,『高校数学の方法』や『数学対話』でまだ取り上げていないを順次紹介します (南海).

目 次

1　代数

1.1　67 年京大文理

次の$\boxed{}$の中に適当な数または式を入れよ．また（イ）～（ホ）の「　　」で囲まれた文章の理由を，最後の（イ）～（ホ）の解答のところで述べよ．

方程式

$$x^2 - 3y^2 = 1 \qquad \cdots ①$$

をみたす整数の組 $(x,\ y)$ を求めることを考える．(以下この方程式の整数解を単に解と略称する．)

準備のために次のことを確かめておく．

（イ）　「$a,\ b,\ c,\ d$ が整数であって，$a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ ならば，$a = c$，$b = d$ である．」

次に $(x,\ y)$ が解であれば，$(x,\ -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x,\ -y)$ も解であることは，方程式 ① により明らかであるから，$(x,\ y)$ が共に負でない解を求めることが基本的である．それでそのような解を求める手段として

$$(2+\sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3} \qquad \cdots ②$$
$$(x_n,\ y_n \text{は負でない整数},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおく．そうすると（イ）によって，

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ x_1 = 2,\ y_1 = 1 \quad \cdots ③$$
$$x_2 = \boxed{},\ y_2 = \boxed{},\ x_3 = \boxed{},\ y_3 = \boxed{}$$

である．一方，$(2+\sqrt{3})^2$ と $(2-\sqrt{3})^2$，$(2+\sqrt{3})^3$ と $(2-\sqrt{3})^3$ などを比較することによって，一般に

$$(2-\sqrt{3})^n = x_n - y_n\sqrt{3} \qquad \cdots ④$$

であることがわかる．

② と ④ と，$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$ とを使って，

$$1 = (2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n = {x_n}^2 - 3{y_n}^2$$

となるから，② で定まる $(x_n,\ y_n)$ は方程式 ① の解であることがわかる．とくに，$x,\ y$ の一方が 0 となるような負でない解は，明かに $x = 1$，$y = 0$ で，それは ③ の $(x_0,\ y_0)$ に外ならない．

次に $(x_{n-1},\ y_{n-1})$ と $(x_n,\ y_n)$ との関係を求めてみる $(n \geqq 1)$．

$$\begin{aligned} & x_n + y_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n \\ = \ & (x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) \\ = \ & \boxed{} \end{aligned}$$

ゆえに，　　$x_n = \boxed{}$，$y_n = \boxed{}$

したがって $(x_0,\ y_0)$ から出発して，負でない解 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$,$\cdots$，$(x_n,\ y_n)$，……を順次求めて行くことができる．しかも $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$ である．

以上のことで負でない解を多数みつけたのであるが，これらで負でない解が尽くされているかどうかを次に吟味する．

いま任意の正の解 $(x,\ y)$ $(x > 0,\ y > 0)$ をとると，

$$(x + y\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = (2x - 3y) + (2y - x)\sqrt{3}$$

（ロ）　「$x' = 2x - 3y$，$y' = 2y - x$ とおくとき，$(x',\ y')$ も解である.」
（ハ）　「そして，$x > x' > 0$，$y > y' \geqq 0$ である.」
（ニ）　「それで，任意の正の解 $(x,\ y)$ から出発して,（ロ）における $(x',\ y')$ を求める操作を順次行なうことによって，③ に示す負でない解 $(x_0,\ y_0)$ に達する.」
（ホ）　「したがって，任意の負でない解 $(x,\ y)$ は式② によって定まる $(x_n,\ y_n)$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のどれか 1 つである.」

1.1.1　解答

$$x_2 = \boxed{7},\ y_2 = \boxed{4},\ x_3 = \boxed{26},\ y_3 = \boxed{15}$$

$$2x_{n-1} + 3y_{n-1} + (x_{n-1} + 2y_{n-1})\sqrt{3}$$

$$x_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1},\quad y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}\quad \cdots ⑤$$

（イ）　$\sqrt{3}$ が有理数とし，$\sqrt{3} = \dfrac{q}{p}$ $(p,\ q$ 互いに素$)$ とおく.

$$3 = \frac{q^2}{p^2}$$

で，左辺は整数で p^2，q^2 が互いに素なので,$p^2 = 1$．この結果，$\sqrt{3}$ は整数．ところが $1^2 = 1,\ 2^2 = 4$ なので，2 乗して 3 となる整数はない．よって $\sqrt{3}$ は無理数である.

$b \neq d$ と仮定すると

$$\sqrt{3} = -\frac{a-c}{b-d}$$

となり，$\sqrt{3}$ が無理数であることと矛盾する．よって $b = d$ となり，この結果 $a = c$ も成り立つ.
（ロ）

$$x'^2 - 3y'^2 = (2x - 3y)^2 - 3(2y - x)^2 = x^2 - 3y^2 = 1$$

より $(x',\ y')$ も方程式 $x^2 - 3y^2 = 1$ の整数解である.
（ハ）　$x > 0,\ y > 0$ の下では

$$\begin{aligned}
x' > 0 &\iff 2x > 3y \iff 4x^2 - 9y^2 = 4(x^2 - 3y^2) + 3y^3 > 0 \text{ より成立.}\\
x > x' &\iff x > 2x - 3y \iff 9y^2 > x^2 = 1 + 3y^2 \text{ より成立.}\\
y' \geqq 0 &\iff 2y \geqq x \iff 4y^2 - x^2 = y^2 - 1 \geqq 0 \text{ より成立.}\\
y > y' &\iff y > 2y - x \iff x^2 > y^2 \iff 1 + 3y^2 > y^2 \text{ より成立.}
\end{aligned}$$

となって，すべて成立する.
（ニ）　任意の正の解 $(x,\ y)$ から出発して,（ロ）における $(x',\ y')$ を求める操作を順次行なうことによって，$y > 0$ であれば y の値が真に減少する．この操作においても $y \geqq 0$ は成り立つので，$y = 0$ となるときがある．これは ③ に示す負でない解 $(x_0,\ y_0) = (1,\ 0)$ そのものである.
（ホ）　$(x_{n-1},\ y_{n-1})$ から ⑤ によって順次 $(x_n,\ y_n)$ を作る操作を（ヘ）の操作とする.（ヘ）の操作は（ロ）の操作と逆の操作である.

（ニ）によって任意の解 $(x,\ y)$ が（ロ）の操作で解 $(x_0,\ y_0)$ に至る．よって逆に $(x_0,\ y_0)$ から（ヘ）の操作を繰り返してゆけば解 $(x,\ y)$ に至る．つまり任意の負でない解 $(x,\ y)$ は式② によって定まる $(x_n,\ y_n)$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のどれか 1 つである.

1.2　83 年東大理科 2 番

数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 1$ であり，$n \geqq 2$ に対して a_n は，次の条件 (1)，(2) をみたす自然数のうち最小のものであるという．

(1) a_n は，a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} のどの項とも異なる．

(2) a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} のうちから重複なくどのように項を取り出しても，それらの和が a_n に等しくなることはない．

このとき，a_n を n で表し，その理由を述べよ．

1.2.1　解答

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$ であり，このうちから重複なく項を取り出して作れる数が 1，2，3 なので，$a_3 = 4 = 2^2$ である．

よって，自然数 n に対し，条件 (1)，(2) をみたす自然数のうち最小のものは $a_n = 2^{n-1}$ と推測される．これを n についての数学的帰納法で示す．

$n = 1$ は成立．n のとき $a_n = 2^{n-1}$ が成立するとする．a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} を用いて表せない最小の数が 2^{n-1} なので，a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} を用いて 1 から $2^{n-1} - 1$ までのすべてのすべての数が表される．

$n + 1$ のときを考える．$1 \leqq m \leqq 2^n - 1$ の m をとる．これが a_1, a_2, $\cdots$, a_n を用いて表されることを示す．$1 \leqq m \leqq 2^{n-1} - 1$ にあれば m は a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} を用いて表される．$m = 2^{n-1}$ なら $m = a_n$ である．$2^{n-1} + 1 \leqq m \leqq 2^n - 1$ にあれば $1 \leqq m - 2^{n-1} \leqq 2^{n-1} - 1$ なので $m - 2^{n-1} = m - a_n$ が a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} を用いて表され，その結果 m は a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1}, a_n を用いて表される．

従って，a_1, a_2, $\cdots$, a_n を用いて表されない最小の数は 2^n であり，これは a_1, a_2, $\cdots$, a_n とは異なるので，二つの条件を満たす a_{n+1} は 2^n である．つまり推測命題が $n + 1$ でも成立した．

よって $a_n = 2^{n-1}$ である．

1.3　83 年東大理科 6 番

放物線 $y = \dfrac{3}{4} - x^2$ を y 軸のまわりに回転して得られる曲面 K を，原点を通り回転軸と 45° の角をなす平面 H で切る．曲面 K と平面 H で囲まれた立体の体積を求めよ．

1.3.1　解答

解 1　xy 平面に対して直交する z 軸をとる．曲面 K 上の点 $(x,\ y,\ z)$ の満たす方程式を求める．放物線の方程式が $x^2 = \dfrac{3}{4} - y$ なので，y を固定するとき，回転円の半径は $\sqrt{\dfrac{3}{4} - y}$ である．よって方程式は

$$x^2 + z^2 = \frac{3}{4} - y$$

である．この曲面 K を $z=t$ 平面で切断すると，その平面での方程式は

$$x^2+t^2=\frac{3}{4}-y$$

である．この曲線と平面 H との交点の x 座標は，連立方程式

$$x^2+t^2=\frac{3}{4}-y,\ y=x$$

で与えられる．$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=1-t^2$ と変形できるので，x が存在する t の範囲は $-1 \leqq t \leqq 1$ である．このとき，交点は

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{1-t^2}$$

となる．したがって，曲面 K と平面 H で囲まれた立体を $z=t$ で切断した図形の面積は

$$\frac{(2\sqrt{1-t^2})^3}{6}=\frac{4(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

である．よって求める体積 V は

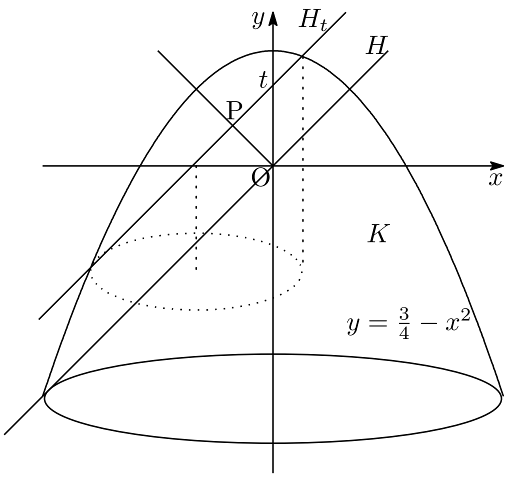
$$V=\int_{-1}^{1}\frac{4(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\,dt$$

で与えられる．$t=\sin\theta$ と置換して計算する．$\dfrac{dt}{d\theta}=\cos\theta$ なので，

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt=\frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta=\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3)\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{\sin 4\theta}{4}+2\sin 2\theta+3\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

である．

解 2　（K の方程式までは同じ）



$0 \leqq t < 1$ とし，H を平行移動した平面 H_t : $y=x+t$ が曲面 K との交わる曲線を，xz 平面に正射影すると，その方程式は

$$x^2+z^2=\frac{3}{4}-x-t$$

より

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=1-t$$

と円になる．よって平面 $H_t : y=x+t$ と曲面 K との交わりの曲線はこの円を z 方向に $\sqrt{2}$ 倍に伸ばした楕円であり，その面積は

$$\pi\sqrt{2}(1-t)$$

である．また $t=1$ のとき H_1 は K と接する．

原点を通り H と直交する半直線 l をとる．H_t と l の交点を P とし，$\mathrm{OP}=s$ とおくと，$s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ である．このとき，

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi\sqrt{2}(1-t)\,ds=\int_0^1\pi\sqrt{2}(1-t)\,\frac{1}{\sqrt{2}}dt=\pi\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

1.4　84 年東大理科 3 番

2 以上の自然数 k に対して $f_k(x)=x^k-kx+k-1$ とおく．このとき，次のことを証明せよ．

i) n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるためには，$g(x)$ が定数 a_2，$\cdots$，a_n を用いて，$g(x)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$ の形に表されることが必要十分である．

ii) n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるためには，$g(x)$ が関係式 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}a_k=0$ を満たす定数 a_2，$\cdots$，a_n を用いて，$g(x)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$ の形に表されることが必要十分である．

1.4.1　解答

i) n 次多項式 $g(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を $Q(x)$，余りを $px+q$ とおく．

$$g(x)=(x-1)^2Q(x)+px+q$$

となる．これから $g(1)=p+q$，また，辺々微分して

$$g'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+p$$

これから $g'(1)=p$ である．

よって，$g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れる，つまり $p=q=0$ となることは

$$g(1)=g'(1)=0 \quad \cdots ①$$

と同値である．

$g(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ とおく．このとき条件 ① は

$$g(1)=\sum_{k=0}^{n}a_k=0,\ g'(1)=\sum_{k=1}^{n}ka_k=0$$

と表される．

この条件が成り立つとする．このとき，

$$\begin{aligned}g(x)&=g(x)-\{g'(1)(x-1)+g(1)\}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k(x^k-1-kx+k)=\sum_{k=2}^{n}a_k(x^k-1-kx+k)\\&=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)\end{aligned}$$

と，$g(x)$ が $f_k(x)$ $(2 \leqq k \leqq n)$ と定数で表される．

逆に $g(x)$ が定数 a_2，$\cdots$，a_n を用いて，$g(x)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k f_k(x)$ と表されているとする．各 k に対して $f_k(1)=1-k+k-1=0$ であり，

$$f_k'(x)=kx^{k-1}-k \quad \text{より} \ f_k'(1)=0$$

となり，$f_k(x)$ は条件 ① を満たす．$f_k(x)$ の定数倍の和である $g(x)$ も条件 ① を満たす．よって題意の必要十分性が示された．

ii) n 次多項式 $g(x)$ を $(x-1)^3$ で割った商を $Q(x)$，余りを px^2+qx+r とおく．

$$g(x)=(x-1)^3Q(x)+px^2+qx+r$$

となる．これより，

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3(x-1)^2Q(x)+(x-1)^3Q'(x)+2px+q \\ g''(x) &= 6(x-1)Q(x)+6(x-1)^2Q'(x)+(x-1)^3Q''(x)+2p \end{aligned}$$

なので

$$g''(1)=2p,\ g'(1)=2p+q,\ g(1)=p+q+r$$

である．よって n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れる，つまり $p=q=r=0$ となることは

$$g(1)=g'(1)=g''(1)=0 \quad \cdots ②$$

と同値である．

$g(x)$ が条件 ② を満たすとする．このとき $g(x)$ は条件 ① も満しているので，i) より $g(x)$ は定数 a_2，$\cdots$，a_n を用いて，$g(x)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k f_k(x)$ の形に表される．ここで

$$f_k''(x)=k(k-1)x^{k-2} \quad \text{より} \ f_k''(1)=k(k-1)$$

である．よって

$$g''(1)=\sum_{k=2}^{n} a_k f_k''(1)=\sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)$$

となり，$g''(1)=0$ より $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)=0$ となる．つまり定数 a_2，$\cdots$，a_n は関係式 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} a_k=0$ を満たす．

逆に，$g(x)$ が関係式 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} a_k=0$ を満たす定数 a_2，$\cdots$，a_n を用いて，$g(x)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k f_k(x)$ の形に表されるとする．

i) と同様に $g(1)=g'(1)=0$ であるが，さらにこのとき $g''(1)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)=0$ となり，$g(x)$ は条件 ② を満たす．よって題意が証明された．

注意　$f_k(x)$ 自体が $h(x)=x^k$ に対して，

$$f_k(x)=h(x)-\{h'(1)(x-1)+h(1)\}$$

の形をしている．

1.5　91年京大後期理系1番

$f(x)$ は x に関する n 次の整式（多項式）とする（$n \geqq 0$）．

(1) 2変数 $x,\ y$ の整式として

$$f(x+y)=P_0(x)+P_1(x)y+P_2(x)y^2+\cdots+P_n(x)y^n$$

と書き表す．ただし，$P_i(x)$, $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は x に関する整式である．このとき $P_0(x)=f(x)$, $P_1(x)=f'(x)$, $P_2(x)=\dfrac{1}{2}f''(x)$ かつ $P_n(x)=$「$f(x)$ における x^nの係数」であることを示せ．

(2) ある定数 c があって，$f(x+y)-f(x)=yf'(x+cy)$ が成立すれば，$f(x)$ の次数は2以下であることを示せ．

1.5.1　解答

(1)

$$f(x+y)=P_0(x)+P_1(x)y+P_2(x)y^2+\cdots+P_n(x)y^n$$

に $y=0$ を代入して $f(x)=P_0(x)$ である．次に $f(x+y)$ を y の関数とみて y で微分する．

$$\frac{d}{dy}f(x+y)=f'(x+y)=P_1(x)+2P_2(x)y+\cdots+nP_n(x)y^{n-1}$$

ここに $y=0$ を代入して $f'(x)=P_1(x)$ である．さらに

$$\frac{d^2}{dy^2}f(x+y)=f''(x+y)=2P_2(x)+\cdots+n(n-1)P_n(x)y^{n-2}$$

ここに $y=0$ を代入して $f''(x)=2P_2(x)$，つまり $P_2(x)=\dfrac{1}{2}f''(x)$ である．同様にくりかえし微分して

$$\frac{d^n}{dy^n}f(x+y)=f^{(n)}(x+y)=n!P_n(x)$$

である．ここに $y=0$ を代入して $f^{(n)}(x)=n!P_n(x)$ となる．

$f(x)$ は x に関する n 次の整式なので，$f(x)$ の最高次の係数を a_n とすると，$f^{(n)}(x)$ は定数 $n!a_n$ である．つまり $P_n(x)=a_n$，すなわち $P_n(x)=$「$f(x)$ における x^nの係数」が示された．

(2) $f(x+y)-f(x)=yf'(x+cy)$ が成立し，かつ $n \geqq 3$ と仮定する．(1) より

$$f(x+y)-f(x)=f'(x)y+\frac{1}{2}f''(x)y^2+\cdots+a_ny^n$$

である．よって
$$f'(x)y+\frac{1}{2}f''(x)y^2+\cdots+a_ny^n=yf'(x+cy)$$
となる．つまり y の恒等式として
$$f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)y+\cdots+a_ny^{n-1}=f'(x+cy)$$
が成立する．一方，(1) の計算過程から
$$f'(x+cy)=f'(x)+f''(x)cy+\cdots+na_n(cy)^{n-1}$$
なので，y の恒等式としての係数比較と，$f''(x)\neq 0$ から
$$\frac{1}{2}=c,\ 1=nc^{n-1}$$
を得る．つまり
$$2^{n-1}=n$$
である．ところが $n\geqq 3$ のとき
$$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}=1+(n-1)+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots>n$$
となり，矛盾である．よって，$f(x)$ の次数は 2 以下である．

1.6　99 年東大理科 5 番

(1) k を自然数とする．m を $m=2^k$ とおくとき，$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ．

(2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ．

条件：$0\leqq n\leqq m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である．

1.6.1　解答

(1) 二項定理
$$(1+x)^m=\sum_{n=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_nx^n$$
の両辺を x で微分する．
$$m(1+x)^{m-1}=\sum_{n=1}^{m}n{}_m\mathrm{C}_nx^{n-1}$$
左辺の x^{n-1} の係数は $m{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$ であるから，両辺の係数比較から
$$m{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}=n{}_m\mathrm{C}_n$$
$0<n<m$ を満たす整数 n を $n=2^ha$ (a：奇数) と表すと，$n<m$ のとき $h<k$ である．
$$2^k{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}=2^ha{}_m\mathrm{C}_n$$
より
$$a{}_m\mathrm{C}_n=2^{k-h}{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$$
右辺は偶数で a は奇数なので ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数である．

(2) $m=2^k a$ (a : 3 以上の奇数) と表されるとき，${}_m\mathrm{C}_{2^k}$ は奇数であることを示す．

$$ {}_m\mathrm{C}_{2^k}=\frac{2^k a(2^k a-1)(2^k a-2)\cdots(2^k a-2^k+1)}{2^k(2^k-1)(2^k-2)\cdots 1} $$

である．分子の因数 $2^k a-j,\ (0\leqq j\leqq 2^k-1)$ と分母の因数 2^k-j をとる．j が奇数なら $2^k a-j$ も奇数．j が偶数のとき $j=2^h i,\ (i:$ 奇数$)$ とおく．$h<k$ でさらに，

$$ 2^k a-j=2^h(2^{k-h}a-i),\ 2^k-j=2^h(2^{k-h}-i) $$

となり，共通因数 2^h を約せば，分子分母とも奇数である．よって分子分母の 2 の因数はすべて約され，その後には奇数の因数のみが残るので，${}_m\mathrm{C}_{2^k}$ は奇数である．

つまり $m=2^k$ の形をしていることは，${}_m\mathrm{C}_n\ (0<n<m)$ がすべて偶数であるための必要十分条件である．

つぎに (2) の条件が成立するとき，

$$ {}_{m+1}\mathrm{C}_n={}_m\mathrm{C}_{n-1}+{}_m\mathrm{C}_n\ (0<n<m+1) $$

より ${}_{m+1}\mathrm{C}_n$ はすべて偶数である．逆に (2) の条件が成立しないとする．n を小さい方から見て最初に現れる偶数を ${}_m\mathrm{C}_n$ とすれば，${}_m\mathrm{C}_{n-1}$ は奇数なので，${}_{m+1}\mathrm{C}_n$ は奇数である．つまり ${}_{m+1}\mathrm{C}_n\ (0<n<m+1)$ のうちに奇数が存在する．

従って，(2) の条件が成立するためには，${}_{m+1}\mathrm{C}_n\ (0<n<m+1)$ がすべて偶数であることが必要十分条件である．つまり m が $m=2^k-1$ の形をしていることが，条件が成立するための必要十分条件である．

$$ m=2^k-1\ (k:\text{自然数}) $$

2　幾何

2.1　91年京大後期理系3番

空間に原点を始点とする長さ1のベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ がある．$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角を γ, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ のなす角を α, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}$ のなす角を β とするとき，次の関係式の成立することを示せ．またここで等号の成立するのはどのような場合か．

$$0 \leqq \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqq 1$$

2.1.1　解答

一般性を失わずに，$\overrightarrow{a} = (1,\ 0,\ 0)$ として良い．このとき，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \cos\gamma, \quad |\overrightarrow{b}| = 1$$

より

$$\overrightarrow{b} = (\cos\gamma,\ \sin\gamma,\ 0)$$

また，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = \cos\beta$ より

$$\overrightarrow{c} = (\cos\beta,\ t,\ u)$$

として良い．このときさらに

$$|\overrightarrow{c}| = 1 \quad \text{より} \quad \cos^2\beta + t^2 + u^2 = 1$$

$$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = \cos\alpha \quad \text{より} \quad \cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + t\sin\gamma$$

である．

いま，問題の式から文字を減らすように変形を行う．

$$\begin{aligned}
& \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
= \ & (\cos\beta\cos\gamma + t\sin\gamma)^2 + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2(\cos\beta\cos\gamma + t\sin\gamma)\cos\beta\cos\gamma \\
= \ & \cos^2\beta + \cos^2\gamma - \cos^2\beta\cos^2\gamma + t^2\sin^2\gamma \\
= \ & 1 - t^2\cos^2\gamma - \cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\gamma - u^2 \\
= \ & 1 + (1 - t^2 - \cos^2\beta)\cos^2\gamma - u^2 \\
= \ & 1 + u^2\cos^2\gamma - u^2 \\
= \ & 1 - u^2\sin^2\gamma
\end{aligned}$$

$u^2 = 1 - t^2 - \cos^2\beta$ より

$$0 \leqq u^2 \leqq 1$$

つまり

$$0 \leqq \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqq 1$$

左側の等号は

$$u^2\sin^2\gamma = 1 \ \Rightarrow\ u = \pm 1 \text{ かつ } \sin\gamma = \pm 1$$

このとき $t=0,\ \cos\beta=0$ となるので，

$$\overrightarrow{b}=(0,\ \pm1,\ 0),\quad \overrightarrow{c}=(0,\ 0,\ \pm1)\quad (複号任意)$$

つまり，$\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}$ が互いに直交するときである．

右側の等号は

$$u^2\sin^2\gamma=0\ \Rightarrow\ u=0\ または\ \sin\gamma=0$$

のときである．ここで，$u=0$ なら $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}$ が同一平面上にあることを意味する．また，$\sin\gamma=0$ のとき

$$\overrightarrow{b}=(\pm1,\ 0,\ 0)=\pm\overrightarrow{a}$$

となり，やはり $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}$ が同一平面上にある．

すなわち $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}$ が同一平面上のときである．

［参考］

三つのベクトル $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}$ で作られる平行六面体の体積は

$$\begin{aligned} V &= |\sin\gamma\cdot u| \\ &= \sqrt{(1-\cos^2\gamma)(1-t^2-\cos^2\beta)} \\ &= \sqrt{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\gamma+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)} \end{aligned}$$

となる．したがって $0\leqq V\leqq 1$ は直感的に納得される． V が最大，つまり左側の等号が成立するのは平行六面体が立方体のとき， V が最小，つまり右側の等号が成立するのは平行六面体がつぶれる，つまり三つのベクトルが同一平面上にあるときであることがわかる．

別解 1

本来は，空間内で三つの面から頂点を形成する角の問題であって，長さ 1 のベクトルということは必要ないはずである．つまり角の計算だけで証明が可能なはずである． $\leqq 1$ の角の計算による証明．

α,β,γ は頂点を形成する三つの角であるから，三角不等式と同様に

$$|\alpha-\beta|\leqq\gamma\leqq\alpha+\beta$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ =\ & (\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2-\cos^2\beta\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \\ =\ & 1+(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2-(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma) \\ =\ & 1+(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2-\sin^2\beta\sin^2\gamma \\ =\ & 1+(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma) \\ =\ & 1+\{\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)\}\{\cos\alpha-\cos(\beta-\gamma)\} \\ =\ & 1-4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \end{aligned}$$

すると

$$0\leqq\alpha,\ \beta,\ \gamma\leqq\pi,\quad 0\leqq\alpha+\beta+\gamma\leqq2\pi$$

さらに

$$\alpha\leqq\beta+\gamma,\quad \beta\leqq\gamma+\alpha,\quad \gamma\leqq\alpha+\beta$$

であるから

$$0 \leqq -\alpha+\beta+\gamma \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \alpha-\beta+\gamma \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \alpha+\beta-\gamma \leqq 2\pi$$

となり，各 sin の値が正であるので

$$(\text{与式}) \leqq 1$$

が示された．等号成立は

$$0=\alpha+\beta+\gamma, \quad \alpha+\beta+\gamma=2\pi, \quad \alpha=\beta+\gamma, \quad \beta=\gamma+\alpha, \quad \gamma=\alpha+\beta$$

のいずれかが成立すればよいから，三つの角が同一平面上にあるときである．

別解 2

左側の不等号は平方完成のみで示すことが出来る．

$$\begin{aligned} & \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ = & (\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2-\cos^2\beta\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \\ = & (\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2+\cos^2\beta(1-\cos^2\gamma)+\cos^2\gamma \\ = & (\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2+\cos^2\beta\sin^2\gamma+\cos^2\gamma \\ \geqq & 0 \end{aligned}$$

等号成立は，

$$\cos^2\gamma=0, \quad \cos^2\beta\sin^2\gamma=0, \quad \cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma$$

より

$$\cos\gamma=0, \quad \cos\beta=0, \quad \cos\alpha=0$$

つまり

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$$

のときである．

2.2　93 年東大後期理科 2 番

xy 平面において，直線 l と点 A の距離を $d(l,\ A)$ と書くことにする．さらに，相異なる 3 点 A$=(x_1,\ y_1)$，B$=(x_2,\ y_2)$，C$=(x_3,\ y_3)$ が与えられたとき $f(l)=d(l,\ A)^2+d(l,\ B)^2+d(l,\ C)^2$ とおく．

(1) ある与えられた直線に平行な直線のうち，$f(l)$ を最小にする直線 l_0 は三角形 ABC の重心を通ることを示せ．

(2) 異なる 3 本の直線が $f(l)$ をを最小にするならば，三角形 ABC は正三角形であることを示せ．

2.2.1 解答

(1)　3 頂点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ とし，直線を $ax+by+c=0$ とおく．平行に動かすので a と b は固定し，c を動かす．

$$\begin{aligned}
f(l) &= \frac{|ax_1+by_1+c|^2}{a^2+b^2}+\frac{|ax_2+by_2+c|^2}{a^2+b^2}+\frac{|ax_3+by_3+c|^2}{a^2+b^2}\\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left\{3c^2+2(ax_1+by_1+ax_2+by_2+ax_3+by_3)c\right.\\
&\qquad\left.+(ax_1+by_1)^2+(ax_2+by_2)^2+(ax_3+by_3)^2\right\}\\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left\{3\left(c+\frac{ax_1+by_1+ax_2+by_2+ax_3+by_3}{3}\right)^2\right.\\
&\qquad -\frac{(ax_1+by_1+ax_2+by_2+ax_3+by_3)^2}{3}\\
&\qquad\left.+(ax_1+by_1)^2+(ax_2+by_2)^2+(ax_3+by_3)^2\right\}
\end{aligned}$$

これを最小にする c は

$$c+\frac{ax_1+by_1+ax_2+by_2+ax_3+by_3}{3}=c+a\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)+b\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)=0$$

となるとき．このとき直線 $l: c+ax+by=0$ は $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ を通る．

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ を平行移動し重心を原点として一般性を失わない．このとき $x_1+x_2+x_3=0$，$y_1+y_2+y_3=0$ である．

l は原点を通る．必要なら $\triangle\mathrm{ABC}$ を回転し 2 本の l は y 軸とは平行でないとしてよい．l を $y=px$ とおく．

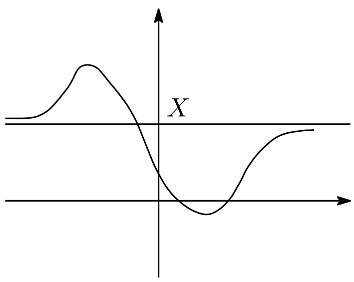
$$\begin{aligned}
f(l) &= \frac{(px_1-y_1)^2}{p^2+1}+\frac{(px_2-y_2)^2}{p^2+1}+\frac{(px_3-y_3)^2}{p^2+1}\\
&= \frac{1}{p^2+1}\left\{p^2({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)p+{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2\right\}\\
&= \frac{1}{p^2+1}\left(Xp^2-2Yp+Z\right)
\end{aligned}$$

ただし $X={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2$，$Y=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$，$Z={y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2$ とおいた．このとき

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}f(l) &= \frac{1}{(p^2+1)^2}\left\{(2Xp-2Y)(p^2+1)-\left(Xp^2-2Yp+Z\right)(2p)\right\}\\
&= \frac{2}{(p^2+1)^2}\left\{Yp^2+(X-Z)p-Y\right\}
\end{aligned}$$

分子の判別式を D とすると

$$D=(X-Z)^2+4Y^2\geqq 0$$



である．もし $D>0$ なら $f(l)$ は p の関数として極大値と極小値を一つずつもち，かつ $\displaystyle\lim_{p\to\pm\infty}f(l)=X$ で X が有限の定まった値であることより，極小かつ最小となる p はただ一つになる．

従って $D \leqq 0$ が必要であるがこのとき $D=0$ となり $(X-Z)^2+4Y^2=0$ である．これらは実数なので $X=Z,\ Y=0$ となる．つまり

$$
{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2={y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2,\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0 \quad \cdots ①
$$

でなければならない．ここで 3 つの複素数

$$
z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2,\ z_3=x_3+iy_3
$$

をとる．$x_1+x_2+x_3=0$，$y_1+y_2+y_3=0$ なので $z_1+z_2+z_3=0$ である．① より

$$
\begin{aligned}
{z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2 &= (x_1+iy_1)^2+(x_2+iy_2)^2+(x_3+iy_3)^2 \\
&= ({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-({y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2)+2i(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)=0
\end{aligned}
$$

また

$$
{z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2={z_1}^2+{z_2}^2+(z_1+z_2)^2=2({z_1}^2+z_1z_2+{z_2}^2)
$$

なので ${z_1}^2=-(z_1z_2+{z_2}^2)$ である．

$$
\begin{aligned}
|z_1|^2 &= \left|{z_1}^2\right|=\left|z_1z_2+{z_2}^2\right| \\
&= |z_2|\,|z_1+z_2|=|z_2|\,|z_3|
\end{aligned}
$$

同様に $|z_3|^2=|z_1|\,|z_2|$ なので

$$
|z_1|^4=|z_2|^2\,|z_3|^2=|z_1|\,|z_2|^3
$$

重心と頂点が一致することはないので $|z_1|\neq 0$．よって $|z_1|^3=|z_2|^3$ つまり $|z_1|=|z_2|$．同様に $|z_2|=|z_3|$ となる．これは

$$
\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}
$$

を意味し，重心 O が △ABC の外心でもある．このような三角形は正三角形である．

3　解析

3.1　83 年室蘭工大

$y = e^{-x}$ と $y = ax + 3$ $(a < 0)$ のグラフが囲む図形の面積を最小にする a の値を求めよ．

3.1.1　解答

$f(x) = e^{-x} - ax - 3$ とおく．$f'(x) = -e^{-x} - a$ より $f(x)$ は $x = -\log(-a)$ でただ一つの極小値をもつ．$f(0) = -2 < 0$ で $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ である．よって $f(x) = 0$ となる x は正負に一つずつ存在する．これを $\alpha < 0 < \beta$ とする．

このとき面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(e^{-\beta} + e^{-\alpha}) - \int_\alpha^\beta e^{-x}\,dx$$

である．α と β はそれぞれ

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-\alpha} = a\alpha + 3 \\ e^{-\beta} = a\beta + 3 \end{array}\right. \quad \cdots ①$$

で定まるので a の関数であり，微分可能である．① を a で微分して

$$\left\{\begin{array}{l} -e^{-\alpha}\alpha' = a\alpha' + \alpha \\ -e^{-\beta}\beta' = a\beta' + \beta \end{array}\right. \quad \cdots ②$$

となる．

S を a で微分する．

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{da} &= \frac{1}{2}(\beta' - \alpha')(e^{-\beta} + e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(e^{-\beta}\beta' + e^{-\alpha}\alpha') - (e^{-\beta}\beta' - e^{-\alpha}\alpha') \\
&= -\frac{1}{2}(\beta' + \alpha')(e^{-\beta} - e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(e^{-\beta}\beta' + e^{-\alpha}\alpha') \\
&= -\frac{1}{2}(\beta' + \alpha')(-a\beta + a\alpha) - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(-a\alpha' - \alpha + a\beta' - \beta) \\
&= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)
\end{aligned}$$

ここで ② から

$$\left\{\begin{array}{l} (a + e^{-\alpha})\alpha' = -\alpha \\ (a + e^{-\beta})\beta' = -\beta \end{array}\right.$$

であるが，$\alpha < -\log(-a) < \beta$ より $a + e^{-\beta} < 0 < a + e^{-\alpha}$ なので，α', $\beta' > 0$ である．よって $\alpha + \beta$ は単調に増加する．$\beta - \alpha > 0$ なので $\beta + \alpha = 0$ の前後で $\dfrac{dS}{da}$ は負から正に変わりこのとき極小かつ最小である．$\beta = -\alpha$ のとき，① は

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-\alpha} = a\alpha + 3 \\ e^{\alpha} = -a\alpha + 3 \end{array}\right.$$

となる．これから

$$e^\alpha + \frac{1}{e^\alpha} = 6$$

これを解いて

$$e^\alpha = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$\alpha < 0$ より $e^\alpha < 1$ なので $e^\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$.

よって最小値を与える a は

$$a = \frac{3 - e^\alpha}{\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{\log(3 - 2\sqrt{2})}$$

である．

注意　$F(x)$ が $F''(x) > 0$ を満たし下に凸な関数とする．$F(0) < c$ に対して，$y = ax + c$ を考える．このときも同様に交点の x 座標として $\alpha,\ \beta$ がとれ，グラフが囲む図形の面積を S とすると

$$\frac{dS}{da} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)$$

となる．この証明は上記計算と同様に示される．

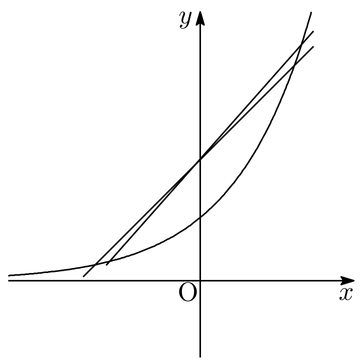
しかし次のような証明もある．

$a = \tan\theta$ とする．θ を $\theta + \Delta\theta$ まで変化させたとき，点 $(0,\ c)$ とそれぞれの交点までの距離 $L(\alpha)$ と $L(\beta)$ も変化するが，その最大値と最小値を $M(\alpha),\ m(\alpha),\ M(\beta),\ m(\beta)$ とする．このとき面積の変化 ΔS は

$$\frac{1}{2}M^2(\beta)\Delta\theta - \frac{1}{2}m^2(\alpha)\Delta\theta,\ \frac{1}{2}m^2(\beta)\Delta\theta - \frac{1}{2}M^2(\alpha)\Delta\theta$$

の間にある．$\Delta\theta \to 0$ のとき，M と m は L に収束する．よって

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(L^2(\beta) - L^2(\alpha)\right)$$



である．一方

$$L(\alpha)\cos\theta = -\alpha,\ L(\beta)\cos\theta = \beta$$

で

$$\frac{da}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\frac{dS}{da} &= \frac{dS}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{da}\\ &= \frac{1}{2}\left(L^2(\beta)\cos^2\theta - L^2(\alpha)\cos^2\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \alpha^2\right)\end{aligned}$$

3.2　89 年東大

$f(x) = \pi x^2 \sin \pi x^2$ とする．$y = f(x)$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 1$ の部分と x 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は $V = 2\pi \int_0^1 x f(x)\,dx$ で与えられることを示し，この値を求めよ．

3.2.1　解答

区間 [0, 1] にある t をとり，$y=f(x)$ のグラフの $0 \leqq x \leqq t$ の部分と x 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を $V(t)$ とおく．Δt を $t+\Delta t$ が区間 [0, 1] にあるようにとる．t と $t+\Delta t$ の間での関数 $f(x)$ の最大値と最小値を $M,\ m$ とする．このとき不等式

$$m\{\pi(t+\Delta t)^2-\pi t^2\} \leqq V(t+\Delta t)-V(t) \leqq M\{\pi(t+\Delta t)^2-\pi t^2\}$$

が成り立つ．これより

$$2\pi tm+\pi m\Delta t \leqq \frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} \leqq 2\pi tM+\pi M\Delta t$$

となる．$\Delta t \to 0$ のとき $M,\ m \to f(t)$ なので，

$$2\pi tf(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=\frac{d}{dt}V(t)$$

よって

$$V=V(1)-V(0)=\int_0^1\frac{d}{dt}V(t)\,dt=2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$$

となる．これから

$$V=2\pi\int_0^1 \pi x^3\sin\pi x^2\,dx=\int_0^1 \pi x^2\sin\pi x^2\,(2\pi x)dx$$

$t=\pi x^2$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=2\pi x$ なので

$$V=\int_0^\pi t\sin t\,dt=\Big[-t\cos t\Big]_0^\pi+\int_0^\pi \cos t\,dt=\pi$$

である．

3.3　90 年東工大

n を 2 以上の整数とする．

(1) $n-1$ 次多項式 $P_n(x)$ と n 次多項式 $Q_n(x)$ ですべての実数 θ に対して

$$\begin{cases}\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta)\\ \cos(2n\theta)=Q_n(\sin^2\theta)\end{cases}$$

を満たすものが存在することを、数学的帰納法を用いて示せ．

(2) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して

$$\alpha_k=\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^{-2}$$

とおくと

$$P_n(x)=(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$$

となること示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=\frac{2n^2-2}{3}$ を示せ．

3.3.1 解答

(1) 自然数 n に対して，次の命題を数学的帰納法で示す．

(i) 題意をみたす $n-1$ 次多項式 $P_n(x)$ と n 次多項式 $Q_n(x)$ が存在する．

(ii) $P_n(x)$ と $Q_n(x)$ の最高次数の項の係数の正負はそれぞれ $(-1)^{n-1}$ と $(-1)^n$ の正負に一致する．

(iii) $P_n(x)$ と $Q_n(x)$ の定数項は 1 である．つまり $P_n(0)=Q_n(0)=1$．

$n=1$ のとき．$P_1(x)=1$．また $\cos(2\theta)=1-2\sin^2\theta$ より $Q_1(x)=1-2x$．よって (i)〜(iii) はすべて成立する．

n のときに成立するとする．

$$\begin{aligned}
\sin\{2(n+1)\theta\} &= \sin(2n\theta)\cos(2\theta)+\cos(2n\theta)\sin(2\theta)\\
&= (n+1)\sin(2\theta)\left\{\frac{n}{n+1}P_n(\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta)+\frac{1}{n+1}Q_n(\sin^2\theta)\right\}\\
\cos\{2(n+1)\theta\} &= \cos(2n\theta)\cos(2\theta)-\sin(2n\theta)\sin(2\theta)\\
&= \cos(2n\theta)\cos(2\theta)-n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta)\sin(2\theta)\\
&= Q_n(\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta)-4n\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)P_n(\sin^2\theta)
\end{aligned}$$

よって

$$\left\{\begin{array}{l}
P_{n+1}(x)=\dfrac{n}{n+1}(1-2x)P_n(x)+\dfrac{1}{n+1}Q_n(x)\\
Q_{n+1}(x)=(1-2x)Q_n(x)-4nx(1-x)P_n(x)
\end{array}\right. \quad \cdots ①$$

とおく．

$(1-2x)P_n(x)$ と $Q_n(x)$ はともに n 次で (ii) より n 次の項の係数の正負はいずれも $(-1)^n$ と一致する．よって $P_{n+1}(x)$ は n 次多項式で最高次の係数の正負は $(-1)^n$ の正負に一致．同様に $Q_{n+1}(x)$ は $n+1$ 次多項式で最高次の係数の正負は $(-1)^{n+1}$ の正負に一致する．

また ① に $x=0$ を代入して

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(0) &= \frac{n}{n+1}P_n(0)+\frac{1}{n+1}Q_n(0)=1\\
Q_{n+1}(0) &= Q_n(0)=1
\end{aligned}$$

となる．以上から $n+1$ のときも (i)〜(iii) が成立し，すべての自然数 n に対して (i)〜(iii) が成立する．

(2) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して $\sin\left(2n\cdot\dfrac{k\pi}{2n}\right)=0$ なので $P_n(x)$ の定義式から

$$n\sin\left(2\cdot\frac{k\pi}{2n}\right)P_n\left(\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right)=0$$

である．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対しては $\sin\left(2\cdot\dfrac{k\pi}{2n}\right)\neq 0$ なので，

$$P_n\left(\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right)=P_n\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)=0$$

である．$P_n(x)$ は $n-1$ 次なので，因数定理から定数 A を用いて

$$P_n(x) = A\left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right)\cdots\left(x - \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)$$

と分解される．これを整理し定数をとりなおして

$$P_n(x) = B(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$$

とおく．(1) で証明した命題 (iii) から $P_n(x)$ の定数項は 1 なので $B=1$ である．つまり題意が示された．

(3) (2) から $-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$ は $P_n(x)$ の x の係数に等しい．多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ で $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots$ となるので、$a_1 = f'(0)$ である．つまり

$$\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k = -{P_n}'(0)$$

である．① の両辺を x で微分する．

$$\begin{cases} {P_{n+1}}'(x) = \dfrac{-2n}{n+1}P_n(x) + \dfrac{n}{n+1}(1-2x){P_n}'(x) + \dfrac{1}{n+1}{Q_n}'(x) \\ {Q_{n+1}}'(x) = -2Q_n(x) + (1-2x){Q_n}'(x) - 4n\{(1-2x)P_n(x) + x(1-x){P_n}'(x)\} \end{cases} \quad \cdots②$$

$P_n(0) = Q_n(0) = 1$ なので

$$\begin{cases} {P_{n+1}}'(0) = \dfrac{-2n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1}{P_n}'(0) + \dfrac{1}{n+1}{Q_n}'(0) \\ {Q_{n+1}}'(0) = -2 + {Q_n}'(0) - 4n \end{cases}$$

${Q_1}'(0) = -2$ であるから，第 2 式の階差数列から

$$Q_n'(0) = -2 + \sum_{k=1}^{n-1}(-4k-2) = -2n^2$$

である．$n=1$ のときも成立する．これを第 1 式に代入して分母を払うと

$$(n+1){P_{n+1}}'(0) = -2n + n{P_n}'(0) - 2n^2$$

$P_1'(0) = 0$ なので

$$\begin{aligned} n{P_n}'(0) &= -2\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1) \\ &= -2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)}{3} = \frac{-2(n-1)n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

$n=1$ のときも成立する．よって

$$-{P_n}'(0) = \frac{2n^2-2}{3} = \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$$

である．

$\zeta(2)$ を求める

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

をリーマンの ζ(ゼータ) 関数という．$s>1$ で収束する．

本問の結果を使うと $\zeta(2)$ を求めることができる．

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，教科書にあるように

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

が成り立つ．すべて正なので

$$\frac{1}{\tan^2\theta}<\frac{1}{\theta^2}<\frac{1}{\sin^2\theta}$$

である．ここで

$$\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}-1$$

なので

$$\frac{1}{\sin^2\theta}-1<\frac{1}{\theta^2}<\frac{1}{\sin^2\theta}\quad\cdots③$$

ここに $\theta=\dfrac{k\pi}{2n}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ を代入する．

$$\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)}-1<\left(\frac{2n}{k\pi}\right)^2<\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ にわたり和をとる．本問の $\alpha_k=\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)}$ を用いると

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k-1)<\frac{4n^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$$

となる．(3) より

$$\frac{2(n^2-1)}{3}-(n-1)<\frac{4n^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}<\frac{2(n^2-1)}{3}$$

これから

$$\frac{\pi^2}{4n^2}\left\{\frac{2(n^2-1)}{3}-(n-1)\right\}<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi^2}{4n^2}\cdot\frac{2(n^2-1)}{3}$$

$n\to\infty$ のとき両辺は $\dfrac{\pi^2}{6}$ に収束するので，

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

である．

連続数の積の和

以下で用いるので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$ で用いた方法を一般化し，l 連続数の積を求めておく．

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)\cdots(k+l-1) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{l+1}\{k(k+1)\cdots(k+l)-(k-1)(k+1)\cdots(k+l-1)\} \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)\cdots(n+l-1)}{l+1}
\end{aligned}
$$

$\zeta(4)$ を求める

以上のの結果を使うと $\zeta(4)$ を求めることができる．そのためには $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} {\alpha_k}^2$ が定まればよい．

$$
\sum_{k=1}^{n-1} {\alpha_k}^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\right)^2 - 2\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j
$$

であるが，$\displaystyle\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j$ は $P_n(x)$ の x^2 の係数である．

多項式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ で $f''(x)=2a_2+\cdots$ となるので、$2a_2=f''(0)$ である．したがって

$$
\sum_{k=1}^{n-1} {\alpha_k}^2 = \{-P_n'(0)\}^2 - P_n''(0)
$$

である．② の両辺を x で微分する．

$$
\begin{cases}
{P_{n+1}}''(x) = \dfrac{-4n}{n+1}{P_n}'(x) + \dfrac{n}{n+1}(1-2x){P_n}''(x) + \dfrac{1}{n+1}{Q_n}''(x) \\
{Q_{n+1}}''(x) = -4{Q_n}'(x) + (1-2x){Q_n}''(x) - 4n\{-2P_n(x)+2(1-2x)P_n(x)'+x(1-x){P_n}''(x)\}
\end{cases}
$$

$P_n(0)=Q_n(0)=1$，${Q_n}'(0)=-2n^2$，${P_n}'(0)=-\dfrac{-2(n^2-1)}{3}$ なので，分母の $n+1$ を払うと

$$
\begin{cases}
(n+1){P_{n+1}}''(0) = 4n{P_n}'(0) + n{P_n}''(0) + {Q_n}''(0) = \dfrac{8n(n^2-1)}{3} + n{P_n}''(0) + {Q_n}''(0) \\
{Q_{n+1}}''(0) = -4{Q_n}'(0) + {Q_n}''(0) - 4n\{-2+2{P_n}'(0)\} = 8n^2 + {Q_n}''(0) + 8n + \dfrac{16n(n^2-1)}{3}
\end{cases}
$$

これから

$$
{Q_{n+1}}''(0) - {Q_n}''(0) = \frac{8}{3}\{(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)\}
$$

${Q_1}''(0)=0$ なので

$$
\begin{aligned}
{Q_n}''(0) &= \frac{8}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k-1)k(k+1)+k(k+1)(k+2)\} \\
&= \frac{2\{(n-2)(n-1)n(n+1)+(n-1)n(n+1)(n+2)\}}{3}
\end{aligned}
$$

これは $n=1$ でも成立する．この結果

$$
\begin{aligned}
&(n+1){P_{n+1}}''(0) - n{P_n}''(0) \\
=\ & \frac{8(n-1)n(n+1)}{3} + \frac{2\{(n-2)(n-1)n(n+1)+(n-1)n(n+1)(n+2)\}}{3}
\end{aligned}
$$

${P_1}''(0)=0$ なので同様に連続数の積の和を用いて

$$
\begin{aligned}
& n{P_n}''(0) \\
= \quad & \frac{2(n-2)(n-1)n(n+1)}{3}+\frac{2\{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)+(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\}}{15}
\end{aligned}
$$

これは $n=1$ でも成立する．よって

$$
\begin{aligned}
& {P_n}''(0) \\
= \quad & \frac{2(n-2)(n-1)(n+1)}{3}+\frac{2\{(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)+(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)\}}{15} \\
= \quad & \frac{4}{15}n^4+[3\text{ 次以下の項}]
\end{aligned}
$$

となる．この結果

$$
\sum_{k=1}^{n-1}{\alpha_k}^2=\frac{4n^(n-1)^2}{9}-\frac{4}{15}n^4+[3\text{ 次以下の項}]=\frac{8}{45}n^4+[3\text{ 次以下の項}]
$$

となる．一方 ③ より，

$$
\frac{1}{\sin^4\theta}-\frac{2}{\sin^2\theta}+1<\frac{1}{\theta^4}<\frac{1}{\sin^4\theta}
$$

なので，ここに $\theta=\dfrac{k\pi}{2n}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ を代入し，和をとる．$\alpha_k=\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)}$ を用いると

$$
\sum_{k=1}^{n-1}({\alpha_k}^2-2\alpha_k+1)<\frac{16n^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^4}<\sum_{k=1}^{n-1}{\alpha_k}^2
$$

となる．よって

$$
\frac{\pi^4}{16n^4}\left(\frac{8}{45}n^4+[3\text{ 次以下の項}]\right)<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^4}<\frac{\pi^4}{16n^4}\left(\frac{8}{45}n^4+[3\text{ 次以下の項}]\right)
$$

$n\to\infty$ のとき両辺は $\dfrac{\pi^4}{90}$ に収束するので，

$$
\zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}
$$

である．

$\zeta(6)$ を求める

順次 $\zeta(2m)$ を求めることができる．$\zeta(6)$ を求めておこう．そのためには $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}{\alpha_k}^3$ が定まればよい

$$
\sum_{k=1}^{n-1}{\alpha_k}^3=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\right)^3-3\sum_{i,j}\alpha_i{\alpha_j}^2-6\sum_{i<j<k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k
$$

である．さらに

$$
\sum_{i,j}\alpha_i{\alpha_j}^2=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1}{\alpha_j}^2\right)-\sum_{k=1}^{n-1}{\alpha_k}^3
$$

である．またこれまでと同様に考え

$$P_n^{(3)}(0) = -6\sum_{i<j<k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k$$

である．よって

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n-1}{\alpha_k}^3 &= -\left(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\right)^3 + 3\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1}{\alpha_j}^2\right) + 6\sum_{i<j<k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k \\
&= \left\{\frac{2(n^2-n)}{3}\right\}^3 + 3\left\{\frac{-2(n^2-n)}{3}\right\}\left(\frac{8}{45}n^4 + [3\text{ 次以下の項}]\right) - P_n^{(3)}(0) \\
&= -\frac{8}{135}n^6 + [5\text{ 次以下の項}] - P_n^{(3)}(0)
\end{aligned}$$

となる．

次に，$P_n(x)$, $Q_n(x)$ の二次微分の等式をもういちど微分する．

$$P_{n+1}{}^{(3)}(x) = \frac{-6n}{n+1}P_n{}''(x) + \frac{n}{n+1}(1-2x)P_n{}^{(3)}(x) + \frac{1}{n+1}Q_n{}^{(3)}(x)$$
$$Q_{n+1}{}^{(3)}(x) = -6Q_n{}''(x) + (1-2x)Q_n{}^{(3)}(x) + 4n\{6P_n(x) - 3(1-2x)P_n(x)'' - x(1-x)P_n{}^{(3)}(x)\}$$

$x = 0$ を代入する．

$$P_{n+1}{}^{(3)}(0) = \frac{-6n}{n+1}P_n{}''(0) + \frac{n}{n+1}P_n{}^{(3)}(0) + \frac{1}{n+1}Q_n{}^{(3)}(0)$$
$$Q_{n+1}{}^{(3)}(0) = -6Q_n{}''(0) + Q_n{}^{(3)}(0) + 4n\{6P_n(0) - 3P_n(0)''\}$$

ここに既知のものを代入し $n+1$ を払う．

$$\begin{aligned}
(n+1)P_{n+1}{}^{(3)}(0) &= -4(n-2)(n-1)n(n+1) \\
&\quad -\frac{4\{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1) + (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\}}{5} \\
&\quad +nP_n{}^{(3)}(0) + Q_n{}^{(3)}(0) \\
Q_{n+1}{}^{(3)}(0) &= -4\{(n-2)(n-1)n(n+1) + (n-1)n(n+1)(n+2)\} + Q_n{}^{(3)}(0) + 24n \\
&\quad -8(n-2)(n-1)n(n+1) \\
&\quad -\frac{8\{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1) + (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\}}{5}
\end{aligned}$$

これまでと同様に順次求める．$\cdots$ で最高次より次数の低い項を表す．

$$\begin{aligned}
Q_n{}^{(3)}(0) &= -\frac{8}{15}n^6 + \cdots \\
P_n{}^{(3)}(0) &= -\frac{8}{15\cdot 7}n^6 + \cdots
\end{aligned}$$

これから

$$\sum_{k=1}^{n-1}{\alpha_k}^3 = \frac{4}{15\cdot 7}n^6 - \frac{4}{135}n^6 + \cdots = \frac{64}{945}n^6 + \cdots$$

同様に

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k-1)^3<\frac{64n^6}{\pi^6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^6}<\sum_{k=1}^{n-1}{\alpha_k}^3$$

となるので

$$\zeta(6)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

である.

3.4 97 年東大後期理科

座標平面上の点 A$(x,\ y)$ が次の連立不等式の領域を動くとする.

$$\begin{cases}|xy|<1\\ y>0\end{cases}$$

関数 $y=\dfrac{1}{|x|}$ のグラフのうち, $x<0$ の部分を H, $x>0$ の部分を K とする. 点 A に対し, x 軸上の 2 点 B, C, 曲線 H 上の点 D, 曲線 K 上の点 E を次の条件によって定める.
『直線 AB は, 2 点 A, B の間の点 D で曲線 H に接し, 直線 AC は, 2 点 A, C の間の点 E で曲線 K に接する』

(1) 三角形 ABC の面積のとりうる範囲を求めよ.

(2) 三角形 ADE の面積のとりうる範囲を求めよ.

3.4.1 解答

まず, 問題の条件を具体的にする.
双曲線 $xy=\pm1$ の $(x_0,\ y_0)$ での接線を求める. 両辺を x で微分すると,

$$x\frac{dy}{dx}+y=0$$

となるので, 接線は

$$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$$

となる. $x_0y_0=\pm1$ に注意すると

$$y_0x+x_0y=\pm2 \quad (\text{複号同順})$$

が得られる.
次に, A$(a,\ b)$, D$(x_1,\ y_1)$, E$(x_2,\ y_2)$ とする. このとき

$$x_1y_1=-1,\quad x_2y_2=1$$

である.
2 つの接線

$$\begin{cases}y_1x+x_1y=-2\\ y_2x+x_2y=2\end{cases}$$

が $(a,\ b)$ を通るので

$$\begin{cases} ay_1 + bx_1 = -2 \\ ay_2 + bx_2 = 2 \end{cases}$$

これから

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{y_1x_2 - x_1y_2} \begin{pmatrix} -(x_1 + x_2) \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

となる．

　ここで

$$\begin{aligned} y_1x_2 - x_1y_2 &= \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} = \frac{{y_1}^2 + {y_2}^2}{y_1y_2} \\ x_1 + x_2 &= -\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{y_1y_2} \end{aligned}$$

であるから，

$$a = \frac{-2(y_1 - y_2)}{{y_1}^2 + {y_2}^2}, \quad b = \frac{2y_1y_2(y_1 + y_2)}{{y_1}^2 + {y_2}^2} \qquad \cdots (*)$$

が得られる．また，

$$\mathrm{B}\left(-\frac{2}{y_1},\ 0\right), \quad \mathrm{C}\left(\frac{2}{y_2},\ 0\right)$$

である．

　さて，D, E がそれぞれ線分 AB と線分 AC の間にあることは

$$\begin{cases} b > y_1 > 0 \\ b > y_2 > 0 \end{cases}$$

となる．$b > y_1$ に $(*)$ を代入すると，

$$2y_1y_2(y_1 + y_2) > y_1({y_1}^2 + {y_2}^2)$$

となる．これを整理すると条件 $b > y_1 > 0$ は，

$${y_2}^2 + 2y_2y_1 - {y_1}^2 > 0, \quad y_1 > 0$$

となる．同様に，

$${y_1}^2 + 2y_1y_2 - {y_2}^2 > 0, \quad y_2 > 0$$

が得られる．

　ここで，2 実数 $\alpha,\ \beta$ が $\alpha > 0,\ \beta > 0$ であることは

$$\alpha + \beta > 0, \quad \alpha\beta > 0$$

と同値である．これを用いて $y_1,\ y_2$ の対称な条件に直す．

$$\text{和} : 4y_1y_2 > 0, \quad \text{積} : 4(y_1y_2)^2 - ({y_1}^2 - {y_2}^2)^2 > 0$$

であるから，$y_1 > 0,\ y_2 > 0$ なので和に関してはつねに成立している．そこで，積の条件

$$4(y_1y_2)^2 - ({y_1}^2 - {y_2}^2)^2 > 0$$

を展開し，${y_1}^2{y_2}^2$ でわると

$$8 > \left(\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{2} > \frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}$$

一方，$t=\dfrac{y_1}{y_2}+\dfrac{y_2}{y_1}$ とおくと，$\dfrac{y_1}{y_2}$ が正の実数でなければならないので，上式を $\dfrac{y_1}{y_2}$ についての 2 次方程式

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 - t\left(\frac{y_1}{y_2}\right)+1=0$$

とみて，正の解をもつための条件を求めると

$$\text{判別式 } D=t^2-4 \geqq 0, \quad \text{軸 } \frac{t}{2}>0$$

つまり

$$t \geqq 2$$

が成り立つ．この 2 つをあわせて，

$$2\sqrt{2} > t = \frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1} \geqq 2$$

これが問題の条件を書き表したものであり，このもとで各設問を考える．

(1)

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{y_2}+\frac{2}{y_1}\right)\cdot b = \frac{y_1+y_2}{y_1y_2}\cdot\frac{2y_1y_2(y_1+y_2)}{{y_1}^2+{y_2}^2}\\ &= \frac{2(t+2)}{t} = 2+\frac{4}{t}\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}<\dfrac{1}{t}\leqq\dfrac{1}{2}$ より

$$2+\sqrt{2}<\triangle\mathrm{ABC}\leqq 4$$

を得る．

(2)

$$\begin{aligned}&\triangle\mathrm{ADE}\\ =\ &\frac{1}{2}|(y_1-b)(x_2-a)-(y_2-b)(x_1-a)|\\ =\ &\frac{1}{2}\left|y_1x_2-y_2x_1-\frac{2y_1y_2(y_1+y_2)}{{y_1}^2+{y_2}^2}(x_2-x_1)-\frac{-2(y_1-y_2)}{{y_1}^2+{y_2}^2}(y_1-y_2)\right|\\ =\ &\frac{1}{2}\left|t-\left(2+\frac{4}{t}\right)+\left(2-\frac{4}{t}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|t-\frac{8}{t}\right|\end{aligned}$$

$t-\dfrac{8}{t}$ は $t>0$ で単調増加．よって，

$$-2\leqq t-\frac{8}{t}<0$$

となるから，

$$0<\triangle\mathrm{ADE}\leqq 1$$

3.5　99年東大後期理科

複素数 $z_n(n=1,2,\cdots)$ を

$$z_1=1,\quad z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$$

によって定める．ただし i は虚数単位である．

(1) すべての自然数 n について

$$\frac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\frac{5^n}{4}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 実数 $r>0$ に対して， $|z_n|\leqq r$ 満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく．このとき，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}$$

を求めよ．

3.5.1　解答

(1) 一般に複素数 α,β,γ について不等式

$$|\alpha||\beta|-|\gamma|\leqq|\alpha\beta+\gamma|\leqq|\alpha||\beta|+|\gamma|$$

が成り立つ．よって与えられた漸化式より，

$$5|z_n|-1\leqq|z_{n+1}|\leqq5|z_n|+1$$

これから，

$$\begin{cases}|z_{n+1}|+\dfrac{1}{4}\leqq5\Big(|z_n|+\dfrac{1}{4}\Big)\\5\Big(|z_n|-\dfrac{1}{4}\Big)\leqq|z_{n+1}|-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

従って，帰納的に

$$\begin{cases}|z_n|+\dfrac{1}{4}\leqq5^{n-1}\Big(|z_1|+\dfrac{1}{4}\Big)=\dfrac{5^n}{4}\\|z_n|-\dfrac{1}{4}\geqq5^{n-1}\Big(|z_1|-\dfrac{1}{4}\Big)=\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}\end{cases}$$

よって，すべての自然数に対して，

$$\frac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\frac{5^n}{4}$$

が成立する．

［別解］

$$\alpha=(3+4i)\alpha+1$$

より α を求めると， $\alpha=-\dfrac{1-2i}{10}$ となる．

よって，

$$z_1=1,\quad z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$$

より，

$$z_{n+1}-\alpha=(3+4i)(z_n-\alpha)$$

と変形されるので，

$$z_n-\alpha=(3+4i)^{n-1}(z_1-\alpha).$$

これから，

$$z_n=(3+4i)^{n-1}\frac{11-2i}{10}-\frac{1-2i}{10}$$

を得る．

一般に二つの複素数 α ， β について，

$$|\alpha|-|\beta|\leqq|\alpha-\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|$$

が成り立つので，次の不等式が成立する．

$$\left|(3+4i)^{n-1}\frac{11-2i}{10}\right|-\left|\frac{1-2i}{10}\right|\leqq|z_n|\leqq\left|(3+4i)^{n-1}\frac{11-2i}{10}\right|+\left|\frac{1-2i}{10}\right|$$

つまり，

$$5^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\leqq|z_n|\leqq5^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}$$

が成り立つ．

ここで，問題の不等式は $n=1$ では明らかに成立するので， $n\geqq2$ とする．このとき，

$$\begin{cases}\left(5^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)-\frac{3\times5^{n-1}}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{3\times5^{n-1}}{4}\right)5^{n-1}-\frac{\sqrt{5}}{10}\\ \qquad\geqq\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{3\times5^{n-1}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{8-3\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}>0\\ \frac{5^n}{4}-\left(5^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\right)=\frac{5-2\sqrt{5}}{4}\cdot5^{n-1}--\frac{\sqrt{5}}{10}\\ \qquad\geqq\frac{5-2\sqrt{5}}{4}\cdot5--\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{25\sqrt{5}-52}{4\sqrt{5}}>0\,(n\geqq2\text{ を用いた})\end{cases}$$

よってすべての自然数に対して，

$$\frac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\frac{5^n}{4}$$

が成立した．

(2) (1) の結果より

$$|z_{n-1}<\frac{5^{n-1}}{4}<\frac{3\times5^{n-1}}{4}<|zn|$$

となり， $|z_n|$ は単調に増加する． 従って， $f(r)=n$ ということは，

$$|z_n|\leqq r<|z_{n+1}|$$

ということに他ならない．すなわち (1) の不等式とあわせると，

$$\frac{3\times5^{n-1}}{4}<r<\frac{5^{n+1}}{4}$$

が得られる．両辺の対数をとると，

$$(n-1)\log5+\log4-\log3<\log r<(n+1)\log5-\log4$$

よって，

$$\frac{n}{(n+1)\log 5-\log 4}<\frac{f(r)}{\log r}<\frac{n}{(n-1)\log 5+\log 4-\log 3}$$

$r\to\infty$ のとき，$n\to\infty$ である．上の不等式の両辺は，$n\to\infty$ のとき，$\to\dfrac{1}{\log 5}$ である．つまり

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{\log r}=\frac{1}{\log 5}$$

4　確率

4.1　95 年京大後期理系 5 番

AとBの2人が次のようなゲームを行う．n を自然数とし，Aはそれぞれ $0,1,2,\cdots,n$ と書かれた $(n+1)$ 枚の札をもっている．Bはそれぞれ $1,2,\cdots,n$ と書かれた n 枚の札をもっているとする．第1回目にBがAの持札から1枚の札をとり，もし番号が一致する札があればその2枚をその場に捨てる．番号が一致しない札はそのまま持ち続ける．次にBに持札があれば，AがBの持札から1枚の札をとり，Bと同じことをする．こうして先に札のなくなったほうを勝とする．Aが勝つ確率を p_n，Bが勝つ確率を q_n とする．ただし相手の札を取るとき，どの札も等しい確率でとるものとする．

(1) $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2$ を求めよ．

(2) $p_n+q_n=1$，$(n+2)p_n-np_{n-2}=1\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ であることを示せ．

(3) p_n を求めよ．

4.1.1　解答

(1) $n=1$ のとき，Bが勝つのは，1を引いて勝つか，または，0を引いてAの立場になりそこからは確率 p_1 で勝つときである．Aが勝つのは，Bが最初に0を引いて，Bの立場になりそこからは確率 q_1 で勝つときである．

$$q_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_1,\ p_1=\frac{1}{2}q_1$$

これを解いて

$$p_1=\frac{1}{3},\ q_1=\frac{2}{3}$$

同様に考え

$$q_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}p_2,\ p_2=\frac{1}{3}q_2$$

より，

$$p_2=\frac{1}{4},\ q_2=\frac{3}{4}$$

(2) 同様に考え $n\geqq 3$ のとき，

$$\begin{cases} p_n=\dfrac{1}{n+1}q_n+\dfrac{n}{n+1}p_{n-2} \\ q_n=\dfrac{1}{n+1}p_n+\dfrac{n}{n+1}q_{n-2} \end{cases}$$

2式の辺々加えて計算すると，

$$p_n+q_n=p_{n-2}+q_{n-2}$$

となる．n が奇数が偶数かで分けて考え，(1) の結果より，

$$p_n+q_n=p_1+q_1=1,\ p_n+q_n=p_2+q_2=1$$

である．これから，$q_n = 1 - p_n$ なので，

$$p_n = \frac{1}{n+1}(1-p_n) + \frac{n}{n+1}p_{n-2}$$

これより $(n+2)p_n - np_{n-2} = 1$ $(n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ を得る．

(3) (2) より，n が偶数のとき，$n = 2m$ とおくと $2(m+1)p_{2m} - 2mp_{2(m-1)} = 1$ となるので，

$$\sum_{k=2}^{m}\left\{2(k+1)p_{2k} - 2kp_{2(k-1)}\right\} = 2(m+1)p_{2m} - 4p_2 = m - 1$$

したがって $(n+2)p_n = \dfrac{n}{2}$ である．

同様に n が奇数のとき，$n = 2m+1$ とおくと $(2m+3)p_{2m+1} - (2m+1)p_{2m-1} = 1$ となるので，

$$\sum_{k=1}^{m}\{(2k+3)p_{2k+1} - (2k+1)p_{2k-1}\} = (2m+3)p_{2m+1} - 3p_1 = m$$

したがって $(n+2)p_n = \dfrac{n-1}{2} + 1$ である．よって，

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2(n+1)} & (n : \text{偶数}) \\ \dfrac{n+1}{2(n+2)} & (n : \text{奇数}) \end{cases}.$$

4.2 95 年京大後期理系 5 番

箱の中に青，赤，黄のカードがそれぞれ 3 枚，2 枚，1 枚，合計 6 枚入っている．1 回の試行で，箱の中からカードを 1 枚取り出し，取り出したカードと同じ色のカードを 1 枚加えて，再び箱の中に戻す．したがって，n 回の試行を完了したときに，$(n+6)$ 枚のカードが箱の中にある．n 回目の試行が完了したとき箱の中にある青のカードの枚数の期待値 $E(n)$ を求めよ．

4.2.1 解答

n 回目の試行で青の出る確率を p_n とする．$k-1$ 回の試行を終えたとき青が a 枚，他の色が b 枚であるとする．$a + b = k - 1 + 6$．このとき，$p_k = \dfrac{a}{a+b}$．そして

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k \cdot \frac{a+1}{a+b+1} + (1-p_k)\cdot\frac{a}{a+b+1} \\ &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} + \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)} = p_k \end{aligned}$$

よって

$$p_n = p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である．次に $1 \leqq k \leqq n$ に対して確率変数 X_k を

$$X_k = \begin{cases} 1 & (k \text{ 回目が青}) \\ 0 & (k \text{ 回目が青以外}) \end{cases}$$

で定める．青の出る回数 X は $X = X_1 + \cdots + X_n$ である．はじめに 3 枚の青があるので，箱の中の青の枚数は $3 + X$ である．よってその期待値 E は

$$E = E(3+X) = E(3+X_1+\cdots+X_n) = 3 + E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$

ここで

$$E(X_k) = 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

なので $E = 3 + \dfrac{n}{2}$.

4.3　99 年京大文系 5 番

n，k は自然数で，$n \geqq 3$，$k \geqq 2$ を満たすものとする．いま，n 角柱の $n+2$ 個の面に 1 から $n+2$ までの番号が書いてあるものとする．この $n+2$ 個の面に 1 面 ずつ，異なる k 色の中から 1 色ずつ選んでは塗っていく．このとき，どの隣り合う面の組も同一色では塗られない塗り方の数を P_k で表す.

(1) P_2 と P_3 を求めよ．

(2) $n = 7$ のとき，P_4 を求めよ．

4.3.1　解答

(1) $k = 2$ のとき．ひとつの頂点に少なくとも 3 つの面がよるので，2 色で塗ることは出来ない．

$$\therefore\quad P_2 = 0$$

$k = 3$ のとき．底に 3 通りの選択で 1 色使う．側面は 2 色でぬらなければならない．交互に塗るしかない．n が奇数なら n の面と 1 の面が同色になる．よって側面を 2 色で塗ることは出来ない．n が偶数なら，底と側面は 1 を塗る色を決めれば，すべてきまる．

$$\therefore\quad P_3 = \begin{cases} 0 & (n\ \text{奇数}) \\ 6 & (n\ \text{偶数}) \end{cases}$$

(2)　n 側面をちょうど 3 色で塗る場合の数を a_n とする．また，1〜n までの隣りあう面は異なる色で塗られているが n 面と 1 面が同じ色であるような 3 色での塗り方を総数を b_n とする．

側面が $n+1$ のとき．

$n+1$ の面と 1 の面が異なるものは，n 側面で n と 1 が異なる塗り方に対し，1 と n の色以外の 1 色を $n+1$ 面に塗るか，n 側面で n と 1 が同色の塗り方に対し，1 と n の色以外の 2 色を $n+1$ 面に塗るか，で得られる．

$n+1$ の面と 1 の面が同色のものは，n 側面を 3 色で塗る場合から 1 の色と同じ色を加えれば得られる．逆に，$n+1$ の面をとれば n 側面を 3 色で塗る場合が得られる．

$$\therefore\quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

となる．これから 3 項間漸化式

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$$

を得る．$a_3 = 3! = 6$，$b_3 = {}_3\mathrm{P}_2 = 6$ のなで，$a_4 = 18$．漸化式を変形して

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = -(a_n - 2a_{n-1}) \\ a_{n+1} + a_n = 2(a_n + a_{n-1}) \end{cases}$$

これから

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} + a_n &=& 2^{n-3}(a_4 + a_3) = 24 \cdot 2^{n-3} = 3 \cdot 2^n \\ a_{n+1} - 2a_n &=& (-)^{n-3}(a_4 - 2a_3) = 6 \cdot (-1)^{n-3} \\ \therefore \quad 3a_n &=& 24 \cdot 2^{n-3} - 6 \cdot (-1)^{n-3} \end{array}$$

$$\therefore \quad a_n = 2^n + 2(-1)^n$$

底を塗る色の決め方は 4 通り．

$$\therefore \quad P_4 = 4 \cdot a_7 = 4(2^7 - 2) = 504$$

□

注意

$$a_{n+1} + a_n = 3 \cdot 2^n$$

の式は次のようにしても導ける．

側面が $n+1$ の場合．まず 1 の面に 3 通り，その後は直前の面と異なる色を塗る．その塗り方は $3 \cdot 2^n$ 通り．ここから $n+1$ の面と 1 の面の色が同じ場合を除けばよい．同じ色の面を同一視すれば，結局 n を色分けして塗ることになる．よって a_n 通りありこれをのぞく．

$$\therefore \quad a_{n+1} = 3 \cdot 2^n - a_n$$

これと $a_3 = 6$ で求めると $a_n = 2^n + 2(-1)^n$ となる．

参考

$n \geqq 3$ のとき，側面を k 色で塗る方法も求まる．
記号を同様にすると漸化式は次のようになる．

$$\begin{cases} a_{n+1} = (k-2)a_n + (k-1)b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

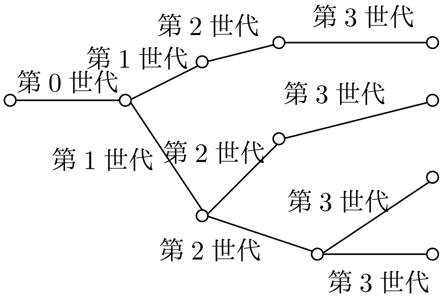
これから 3 項間漸化式

$$a_{n+1} - (k-2)a_n + (k-1)a_{n-1} = 0$$

を得る．$a_3 = {}_k\mathrm{P}_3$，$b_3 = {}_k\mathrm{P}_2$ をもとに，a_n を求める．

$$a_n = (k-1)\{(k-1)^{n-1} + (-1)^n\}$$

4.4　84 年東大文理科



各世代ごとに，各個体が，他の個体とは独立に，確率 p で 1 個，確率 $1-p$ で 2 個の新しい個体を次の世代に残し，それ自身は消滅する細胞がある．ただし $0<p<1$ とする．

いま，第 0 世代に 1 個であった細胞が，第 n 世代に m 個となる確率を，$P_n(m)$ と書くことにしよう．

n を自然数とするとき，$P_n(1)$，$P_n(2)$，$P_n(3)$ を求めよ．

4.4.1　解答

第 $n+1$ 世代に m 個となるのは，n 世代に $m-r$ 個で，そのうちの r 個が 2 個に分裂する場合である．ここで $r \leqq m-r$ より $0 \leqq r \leqq \left[\dfrac{m}{2}\right]$ の範囲である．ただし，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．したがって次の漸化式が成り立つ．

$$P_{n+1}(m)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} {}_{m-r}\mathrm{C}_r(1-p)^r p^{m-2r}P_n(m-r) \quad \cdots ①$$

$m=1$ のとき．① の和は $r=0$ だけだから次式となる．

$$\begin{aligned} P_{n+1}(1) &= pP_n(1) \\ \therefore \quad P_n(1) &= p^nP_0(1)=p^n \end{aligned}$$

$m=2$ のとき．① は $r=0,\ 1$ の和なので

$$P_{n+1}(2)=p^2P_n(2)+(1-p)P_n(1)=p^2P_n(2)+(1-p)p^n$$

である．これから

$$\frac{P_{n+1}(2)}{(p^2)^{n+1}}=\frac{P_n(2)}{(p^2)^n}+\frac{1-p}{p^{n+2}}$$

$P_0(2)=0$ なので

$$\begin{aligned} \frac{P_n(2)}{(p^2)^n} &= \frac{P_0(2)}{(p^2)^0}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-p}{p^{k+2}}=\frac{1-p}{p^2}\cdot\frac{\dfrac{1}{p^n}-1}{\dfrac{1}{p}-1}=\frac{\dfrac{1}{p^n}-1}{p} \\ \therefore \quad P_n(2) &= \frac{p^n-p^{2n}}{p}=p^{n-1}-p^{2n-1} \end{aligned}$$

$m=3$ のとき．① は $r=0,\ 1$ の和なので

$$\begin{aligned} P_{n+1}(3) &= p^3P_n(3)+2(1-p)pP_n(2) \\ &= p^3P_n(3)+2(1-p)p\left(p^{n-1}-p^{2n-1}\right) \end{aligned}$$

である．これから

$$\frac{P_{n+1}(3)}{(p^3)^{n+1}}=\frac{P_n(3)}{(p^3)^n}+2(1-p)\left(\frac{1}{p^{2n+3}}-\frac{1}{p^{n+3}}\right)$$

$P_0(3)=0$ なので

$$\begin{aligned}\frac{P_n(3)}{(p^3)^n} &= \frac{P_0(3)}{(p^3)^0}+2(1-p)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{p^{2k+3}}-\frac{1}{p^{k+3}}\right)=\frac{2(1-p)}{p^3}\left(\frac{\dfrac{1}{p^{2n}}-1}{\dfrac{1}{p^2}-1}-\frac{\dfrac{1}{p^n}-1}{\dfrac{1}{p}-1}\right)\\ \therefore\quad P_n(3) &= \frac{2(1-p)}{p^3}\left(\frac{p^{n+2}-p^{3n+2}}{1-p^2}-\frac{p^{2n+1}-p^{3n+1}}{1-p}\right)\\ &= \frac{2}{p^3}\cdot\frac{p^{n+2}-p^{3n+2}-(1+p)(p^{2n+1}-p^{3n+1})}{1+p}=\frac{2p^{n-1}(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p}\end{aligned}$$

4.5　98 年九州工芸大

1 個のサイコロを n 回投げるとき，1 の目が k 回以上連続して出る確率を $P_{n,k}$ とする．$k<n\leqq 2k$ とするとき

(1) $P_{5,3}-P_{4,3}$ の値を求めよ．

(2) $P_{n,k}-P_{n-1,k}$ を k を用いて表せ．

(3) $P_{n,k}$ を求めよ．

4.5.1　解答

(1) $P_{5,3}-P_{4,3}$ は 5 回投げたときはじめて 1 の目が 3 以上続く確率である．その事象は

$$\triangle\times\ 111\quad(\triangle\text{任意},\ \times\ 1\text{以外})$$

となるときなので，

$$P_{5,3}-P_{4,3}=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6^6}=\frac{5}{1296}$$

(2) 同様に考え確率 $P_{n,k}-P_{n-1,k}$ を与える事象は

$$\triangle\cdots\triangle\times\ 1\cdots(k\text{ 回})\cdots 1$$

なので

$$P_{n,k}-P_{n-1,k}=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6^k}=\frac{5}{6^{k+1}}$$

(3) 条件 $k<n\leqq 2k$ から，2 カ所で 1 の目が k 回以上連続して出ることはない．また題意から $P_{k,k}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$ なので，(2) から数列 $\{P_{n,k}\}$ は初項 $\dfrac{1}{6^k}$，公差 $\dfrac{5}{6^{k+1}}$ の等差数列である．よって

$$p_{n,k}=\frac{1}{6^k}+\frac{5}{6^{k+1}}(n-k)=\frac{5(n-k)+6}{6^{k+1}}$$

4.6　98 年東北大後期

＋（プラス）と－（マイナス）を n 個でたらめに並べるとき，同符号が続く部分の長さの最大値が $k\,(k=1,2,\cdots,n)$ となる確率を $P(k)$ で表す.（例： $n=10$ で＋＋－－－＋－＋＋＋のときは， $k=3$ ）

(1) $P(n-1)$ を求めよ.

(2) $2^nP(k)$ は，偶数であることを示せ.

(3) $k \geqq \dfrac{n}{2}$ のとき，$P(k)$ を求めよ.

4.6.1　解答

(1) $n=2$ なら（＋－）または（－＋）である．$n \geqq 3$ なら

$$(+\cdots+-)\,,\,(-+\cdots+)\,,\,(-\cdots-+)\,,\,(+-\cdots-)$$

の 4 通りである．よって

$$P(n-1)=\begin{cases} \dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2} & (n=2) \\ \dfrac{4}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-2}} & (n \geqq 3) \end{cases}$$

(2) 試行の結果の総数は 2^n 通りある．同符号が続く部分の長さの最大値が k となるある事象に対し，＋と－を逆にした事象も同じ条件をみたす．このようにすべての事象は 2 つずつ組になるので，該当事象の総数は偶数 $2m$ である．

$$P(k)=\frac{2m}{2^n}$$

より $2^nP(k)$ は偶数である.

(3) 左から見て 1 から j 番までに，同符号が k 以上続く部分が存在する確率を $Q_j(k)$ とする.

$$P(k)=Q_n(k)-Q_n(k+1)$$

である.

$$Q_1(k)=Q_2(k)=\cdots=Q_{k-1}(k)=0,\ Q_k(k)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2^{k-1}}$$

である.

次に，$Q_{j+1}(k)-Q_j(k)$ は $j+1$ 回投げてはじめて最大値が k 以上となる確率なので，$j-k$ 回までに k 以上の連続が起こらず，$j+1$ 回目にちょうど最大値が k となる確率である.

$$Q_{j+1}(k)-Q_j(k)=\{1-Q_{j-k}(k)\}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$k>\dfrac{n}{2}$ なら $|j-k|<\dfrac{n}{2}$ なので $Q_{j-k}(k)=0$ である．n が偶数で $k=\dfrac{n}{2}$ でさらに $j=n$ のときにかぎり

$$Q_{j-k}(k)=Q_{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

となる．これから $Q_j(k)$ を等差数列として一般項

$$Q_j(k) = Q_k(k) + \frac{1}{2^k}(j-k)$$

を求め，n が偶数で $k = \dfrac{n}{2}$ でさらに $j = n$ のときにかぎり

$$Q_{j-k}(k) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

を減じればよい．よって

$k > \dfrac{n}{2}$ のとき

$$P(k) = \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}(n-k) - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}(n-k-1) = \frac{n-k+3}{2^{k+1}}.$$

n が偶数で $k = \dfrac{n}{2}$ のとき

$$P(k) = \frac{n-k+3}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$