相加平均と相乗平均の不等式からコーシー・シュワルツの不等式を導く

x と y を負でない実数とするとき，不等式

$$\sqrt{xy} \leqq \frac{x+y}{2} \quad \cdots ①$$

が成り立つ．これが相加平均と相乗平均の不等式である．これを用いてコーシー・シュワルツの不等式

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \leqq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2) \quad \cdots ②$$

を証明しよう．

まず，a_1，a_2，$\cdots$，a_n，x_1，x_2，$\cdots$，x_n を負でない実数とする．このときは不等式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)^{\frac{1}{2}}({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots ③$$

を示せばよい．等号は $a_1 : x_1 = \cdots = a_n : x_n$ のときである．

$x = \dfrac{{a_k}^2}{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}$，$y = \dfrac{{x_k}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$ を ① に代入し，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について加える．

$$\begin{aligned} &\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}} \\ \leqq\ & \frac{1}{2}\left(\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2} + \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}\right) = 1 \end{aligned}$$

が得られる．これは ③ に他ならない．等号は $x = y$ つまり

$$\frac{{a_k}^2}{{x_k}^2} = \frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

が各 k について成り立つときである．つまり $a_1 : x_1 = \cdots = a_n : x_n$ のときである．

a_k，x_k が負でないとはかぎらないとき．一般に実数 y_1，$\cdots$，y_n について

$$|y_1 + \cdots + y_n| \leqq |y_1| + \cdots + |y_n|$$

が成り立ち，等号はすべて同符号のとき成立する．これは $n = 2$ のときは両辺 2 乗して，一般の n については数学的帰納法で直接示される．よって ② は

$$\begin{aligned} (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 &= |a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n|^2 \\ &\leqq (|a_1||x_1| + |a_2||x_2| + \cdots + |a_n||x_n|)^2 \\ &\leqq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2) \end{aligned}$$

より成立する．等号は a_1x_1，a_2x_2，$\cdots$，a_nx_n が同符号でかつ $|a_1| : |x_1| = \cdots = |a_n| : |x_n|$ のとき．つまり $a_1 : x_1 = \cdots = a_n : x_n$ のときである．