解析基礎

2016 年 4 月 1 日

2014.7.4 ／ 2014.5.24 ／ 2013.4.9 ／ 2009.2.7

目 次

まえがき

解析学の歴史

学習記録として　長い間，いろいろな立場から日本の高校生の数学教育に携わってきた．教えるうえで学習したことをもとに，仮想学園としての青空学園をはじめて 2014 年で 15 年になる．

2000 年 6 月から 3 年間ほど，同時配メールを活用して，青空学園で『解析概論』の読書会をおこなった．今も自分で読みながら質問をよせてくる人がいる．質問に答えながら定理や例題などを再構成してみると，いろいろ工夫しなければならず，そういう論証の工夫の跡を『解析概論』のなかに再発見することが幾度もあった．『解析概論』の改訂第三版の「序文」には，高木貞治が晩年までさまざまに手を入れていた様子が書かれている．『解析概論』が 1938 年に出版されたことは，近代数学が日本に根づくうえでたいへん大きなことであった．

しかし，このような名著がありながら，この半世紀，高校の微分積分は指導要領改訂のたびに混乱を深め，なおかつ歴史的に築かれてきた内容との食いちがいを広げてきた．大学人のなかにもそれを指摘する人はいる．が，正そうとする人は少ない．せめて高校段階の微分積分を支える基礎部分について，現在の高校数学とつながる形で再構成しておきたいと考えた．

それで，まず整数の公理から実数の公理とそれを満たすモデルの構成までの骨子を述べる．そのもとで関数の解析論から微分方程式の解の存在定理まで，実数論のうえにはじめから証明をつけてみることにした．

物理現象への適用として，運動方程式から楕円軌道を導く．集合論を基礎にして，数学を物理現象に適用するために，いったいどれだけの準備が必要なのか，それを点検するという観点をふまえて，改訂した．

これらのことはもとより高校生自身には必須でない．が，教える側が，教えている内容の全体をつかんで，教えることを全うしようとすれば，いちどは再構成して確認しておくべきことである．これはそのように考えた私自身の学習の記録である．練習問題やいろんな例もつけていきたいが，今後の課題である．

解析学の展開　人間は長い時間をかけて量の認識を深めてきた．量は二つの側面から深まってきた．一つは，面積，体積そして容積などの加法性のある量である．まず量としてつかみ，量の比較から計量へとすすんだ．アルキメデスの求積法をひとつの頂点に，さまざまの方法が展開されてきた．面積や体積の公式も長い歴史の産物である．

他方，速度，濃度や密度などは，近代に入って瞬間速度と平均速度の関係などの理解が深まり，その本質が局所的な比率であることが理解されてきた．数は何より量をつかむための言葉としてはじまり，数の言葉で考えることをとおして量の認識としての数学を深めてきた．

本質的な発見が今から 300 年前になされた．そして今日まで，解析学は四つの段階を経てきた．

(1) 第一段階は，ニュートン (Sir Isaac Newton，1642～1727) とライプニッツ (Gottfried Wilhelm von Leibnitz，1646～1716) による微分法と積分法の確立である．これを可能にしたのは**極限**の方法であった．こうして，極限操作を基本的な方法とする数学，**解析学**が生まれた．

　微分法と積分法はそれぞれ独立に定義される．それが互いに逆の操作であるということが微分積分の基本定理である．ライプニッツは曲線の接線を研究し，ニュートンは力学的な観点から研究を進め，両者はたがいに独立に基本定理の発見に至った．

ニュートンはこの方法を用いて，なぜ地球の軌道は太陽を焦点の一つとする楕円であるのかを，引力が距離の二乗に反比例し質量の積に正比例することから明らかにした．自然界の秘密の一端を数学によって解明した．

(2) 17 世紀から 18 世紀にかけて解析学は爆発するように発展した．オイラー (Leonhard Euler，1707〜1783) はその中心にいた人である．彼は「無限量の比や総和」の解析を**無限解析**と呼び，この方法をもとにして解析学を発展させ，変分学を創始．天文学，力学にも大きな足跡を残した．

その当時は新しい方法によって発見された成果があまりにも豊かであって，級数が収束するかどうかの吟味，極限値の存在，関数の微分可能性，積分可能性などの厳密性の問題にはあまり注意が払われなかった．これらの問題を深く考えたのはフランスのコーシー (Augustin Cauchy，1789〜1857)，そしてそれを引き継いだドイツのワイエルシュトラス (Karl Weierstrass，1815〜1897) 等である．解析学の基礎づけ，複素関数論の主定理の証明や微分方程式の解の存在定理の証明，$\epsilon-\delta$ 論法の整備など，今日に至る解析学の土台が築かれた．

(3) 解析学の根拠を問い，その土台にある実数について深く研究したのはコーシーの次の世代のデデキント (Julius Wilhelm Richard Dedekind，1831〜1916）やカントール（Georg Cantor，1845〜1918）であった．何を根拠として数列や関数における極限を論じることができるのか．収束する根拠としての実数の完備性，その構造はどのようになっているのか．彼らはこれをはじめて考え，実数論や集合論が開拓された．

カントールの集合論は解析学に根本的な変化をもたらした．デデキントはこの集合論によりつつ実数を研究した．彼の『連続性と無理数』の翻訳が『数について』として岩波文庫にある．高校生が読んですべてがわかるわけではないが，しかし読める．デデキントがどのようなところから実数論を考えていったかよくわかる．彼らは，解析学の基礎を研究するうえで集合をもっとも基本的な言葉として用いた．

(4) 20 世紀に入り集合論の矛盾の発見を経て，数学の基礎が問われる．ヒルベルト（David Hilbert, 1862〜1943）はカントールを深く理解し，集合論を土台にして数学の基礎を確固としたものにしようとした．その要の問題として連続体仮説と算術の無矛盾性を問うた．

ところが 1931 年，クルト・ゲーデル（Kurt Gödel, 1906 年 4 月 28 日〜1978 年 1 月 14 日）は「『プリンキピア・マティマティカ』やその関連体系での形式的に決定不可能な命題について」という論文において「ある体系が無矛盾で，かつ自然数の体系を含むならば，その体系は完全ではない」ことを示し，また「数学は自己の無矛盾性を証明できない」ことを示した．この不完全性定理の証明は，ヒルベルトの主張した有限の立場にたつ形式化を忠実に用い，超数学の命題を自然数体系の中に写像して，実現された．

ヒルベルトの計画が有限の立場に立つかぎり本質的に不可能であることを示した．数学は，ヒルベルトが考えたよりももっと大きく，形式化でとらえることはできさらない，ということをそこから読みとることができる．

さらにゲーデルは 1940 年，ヒルベルトの第一問題（連続体仮説）について，集合論の ZF 公理系 (ツェルメロ・フランケルによる公理的集合論の体系) が無矛盾ならば，そこに選択公理と一般連続体仮説を加えても無矛盾であることを証明した．

1963 年，ポール・コーエンは ZF 公理系に選択公理と一般連続体仮説の否定を加えた ZFC 公理系ても無矛盾であることを証明し，ゲーデルの結果と合わせて一般連続体仮説がとは独

立である（証明も否定の証明も出来ない）ことを示した．

ギリシア時代，公理は絶対の真理であった．それが，平行線公理の相対性の発見から不完全性定理に至り，公理系を立てることはそれ自体が対象の内部構造を研究するための方法となった．そして解析学は今日に続いている．

高校の解析学

教科書の変化　解析学の方法は単純明快なもので力強い．すべてを実数論に根拠づけることができる．ところが，日本の高校解析の教科書は年々内容が薄くなり，理論構成が煩雑で力強さを失っている．論述も感覚的な解説に頼って命題が成立する根拠を問うことがたいへん弱い．そのため立ちかえるべき地点が見えず，よけいに理解が困難になっている．

1960 年代以降の日本の高校数学における微分・積分の取り扱い方の変遷を確認しよう．資料として次のものを用いた．

①　1965 年教科書（数研出版）の I，IIB．②　1969 年教科書（日本書院）の I，IIB，III．③　1982 年問題新集（科学新興社）の I，代数・幾何，基礎解析，微分・積分．④　1997 年教科書（数研出版）の I，A，II，B，III，C．⑤　2005 年教科書（数研出版）の一部写し．⑤　2014 年教科書（数研出版）I，A，II，B，III．

これを見るとそれぞれにつぎのような特徴がある．

1)　1965 年，1969 年のものでは，数列の極限と無限級数まで数学 IIB の範囲，つまり文理共通範囲であった．極限が数学 IIB の微分法で必要な以上，数列およびその和の極限移行まで数学 IIB に置くのは自然である．

面積の定義が，小正方形による内からの近似，およびその極限としてなされる．その上で区分求積による面積計算がなされ，それを踏まえて区間を n 等分したリーマン和によって定積分が定義される．その定義にもとづいて，定積分が原始関数の値の差と一致することが証明される．

数学 III において，平均値の定理について．1969 年には「微分法」のなかで連続関数の最大最小値の存在を根拠に微分の定義から証明されている．

また，定積分の定義では，任意の小区間についてのリーマン和で定義される．そして定積分の平均値の定理から，連続関数に対して，積分法は微分法の逆演算であることを示している．

2)　80 年代に用いられた基礎解析と微分・積分では，数列の極限と無限級数が微分・積分に移行する．平均値の定理と定積分の定義は，60 年代の方法をそのまま継承している．

3)　1997 年の教科書はこれらと大きく変わる．平均値の定理が「微分法の応用」の「発展」として扱われ，必須でなくなる．

数学 II で面積が無定義に用いられ，関数のグラフと x 軸で囲まれる領域の面積を，x 方向で微分するともとの関数になることが示される．面積の微分が $f(x)$ となることを数学 II で示す．そしてこれを原始関数が存在する根拠に用いて，定積分を原始関数の値の差で定義した．つまり，積分を，微分を前提として定義した．

この定積分の定義は，数学 III でも変わらない．

4)　2005 年には平均値の定理が証明なしに「知られている」として扱われるようになり，平均値の定理の根拠が示されなくなった．

定積分の定義は，90 年代のものがそのまま移行する．

5)　2014 年版では，平均値の定理が，「発展」として，閉区間での連続関数が最大値，最小値をもつことを根拠に，ロルの定理を経て証明がなされる．さらにこの根拠は「実数の本質に基づくも

のであり」云々の記述があり，90 年代〜00 年代の従来のものより改善されたといえる．これがこの教科書だけのことであるのかどうかは，点検しえていない．

一方，2014 年版では，次のような記述が現れる．

$$\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x}{n}f\left(\frac{kx}{n}\right) \quad \cdots ①$$

歴史的には，定積分は⊠で定義された．

教科書の著者は，この記述で，本来はこれが定積分の定義であるということが言いたかったのかも知れない．しかし，この教科書の文面からは，かつてはこのように定義されていたが今は違う，と誤ったことが高校生に伝わる．あるいは，原始関数の値の差として定義する現行の定義の方が正しい定義であると高校生が誤解する．

また，2014 年版では，面積をリーマン和で表すことは発展的解説の中で復活する．ところが

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

$$\text{ここで}\quad \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x$$

定積分を，上のような和の極限として求めることを，定積分の**区分求積法**という。

との記述がなされる．

まず,「求積」とは『解析概論』の第 3 章冒頭「28　古代の求積法」にあるように，一貫して面積や体積を求めることであった．ところがここでは定積分を求めることとされている．また,「定積分を和の極限として求める」と書かれているが，現行高校数学の体系をおいて，本来の解析学の立場でいえば，これは右辺の和の極限が左辺の定積分の定義なのであって，一方から他方を求めるということではない．

さらに，実際に高校生がやることは，そしてまたこの教科書の例題にもあることは「数列の和の極限を定積分で計算する」ことである．この記述と実際は逆である．これをまじめに読んだ高校生は，習ったことと逆で，いったい何が言いたいのかまったく理解できないだろう．

以上、各時代の教科書の特徴点をあげた．1997 年以降，リーマン和を定積分の定義とすることを避けている．ここに現行の日本の高校教科書の特質がある．その結果，さまざまの矛盾や堂々巡りを繰り返す解説となる．定積分を原始関数の値の差で定義することに無理がある．このような定義を教科書に載せているのは日本くらいなものである．この誤りを正すことなく教科書をつくるので，いろんなところで矛盾が出るし，記述が混乱する．

実際に多くの制約の中で教科書をつくる困難は理解する．しかし，これは制作者の良心の問題である．教科書の変化は日本の科学教育の混乱と衰退を象徴している．この 40 年間，日本の高校での微分法・積分法は衰退し続けてきた．このようなことでは，ますます科学離れが進み，若者の考える力が衰えていく．

せめて 1960〜80 年代の教科書の立場に立ち返ることができなければならない．あるいは，文明の現段階に応じて，過去の遺産を継承し，その上で新たな表現とそれを伝える方法を見出さなければならない．そのためにも，高校生に伝えるべき内容とその背景に関する過去の遺産をまとめることは，必要な一里塚である．

人間を育てる

人間は資源ではない　高校生に数学を教えてきて，つくづくと，教育は人そのものを育てることであると思う．一人一人を人間として育てる．一人一人の人間を開花させる．そうして現れた人間のさまざまな力は，けっして個人の持ち物ではない．どんな力も多くの人々に囲まれ育まれてはじめて開花する．であるから，育まれた自らの力を，育ててくれたこの世間に返さなければならない．少しでも世に循環させていってほしい．こうして人を育て，人に支えられる世でなければならない．

これが最近とくに失われたように思われる．1970 年代初頭，日本の教育は大きな転換をした．このころ中央教育審議会は「人的資源の開発」ということを言いはじめる．「人的資源」とは生産活動に必要な技術をもった労働力ということそのものである．人を人として育てる教育から，人を資源として使えるようにする教育への転換である．この能力を開発するのが教育だというわけである．教育を生産活動の一部とする考え方が表面化する．

もとより近代の学校制度は，産業技術を習得した人間の育成を目的にしている．その時代の文明とそれを支える技術を習得することは，必然である．人間にとって何らかの生産につながることは，人間としての存在条件そのものである．だから仕事を求める人すべてに仕事を保障する．労働権を保障する．それは人間の尊厳を尊重するということだ．

人間のためにある生産が，しかし逆転する．資本主義が世界大に行きわたり，とりわけ産業資本から金融資本が資本主義の中心部を占めるようになるにつれ，生産のための人間となり，いきつくところ，正面から人間は「資源」であるという主張が行われはじめたのだ．

人的資源という観点からすれば，現実を批判するよりも，ひたすら従順に働く労働者のほうが都合がよいことになる．現実批判力より感性的理解による現状肯定の教育．この方向性はいまも変わっていない．1960 年代から 1990 年代にかけての．数学教科書の変転の背景である．

しかし，人間は生産資源ではない．人そのものとして，まじめに働き，ものを大切にし，隣人同僚，生きとし生きるもの，たがいに助けあって生きてゆく．それが人間というものだ．経済は人間にとって目的ではない．あくまで方法である．そういう人間を育てなければならない．これが青空学園の立場である．

現実にも，経済を第一とする世のあり方に対し，人間の協働の力で人間を第一とする世を求める人々の動きは，ますます深く広がっている．経済原理から人間原理へ，世界はいま大きな転換期の黎明期にある．

希望を次代に託す　学問において，自分自身の理解と照らしあわせて学び，心の底からの納得を求める高校生は今もいる．数学的事実の根拠を問い，問題が解ける理由を考え，自分を大切にして志をもって生きてゆこうとする高校生や大学生は今もいる．そんな学生はむしろ増えているかも知れない．

高校数学の内容が歪んでいるのは微分積分の分野だけではない．感覚的な理解を主とし．根拠問わないという姿勢が全体を支配している．一方，昔も今も本当に何かを考えようとすれば，教科書を超えて学ばなければならない．これを書いたもう一つの意図は，みずから考える学生が，高校数学を対象化して見直し，そして次の段階に進む契機になればよい，ということである．

解析学は，現実の量の解析にはじまり，微積計算の根拠を問うことで飛躍した．数学教育に携わる人びとは，根拠を問うことの大切さを知り，問題を学生に投げかえし，そのうえでそれに応えることができるようになってほしい．

科学とはものごとの根拠を問うことである．根拠を問うとは，現象を根本において捉えることであり，その根本としたことさえ疑い，さらにその根本を求める永続運動，これが科学である．理系

自然科学だけではなく，人文系諸学科でも同じことである.「すべてを疑え」(マルクス) である．科学精神の復興，これは青空学園の願いである．

こうして，人を育て，育った人がまた世を支える．このような教育とそれを取りまく世の中や人間の関係を再建することは可能だと信じている．可能性があるということは歴史の要求ということであり，それは必ず現実化する．経済が自己目的化された歴史時代は，高々八百年にすぎない．経済から人間への転換期のはじまりの段階，それが歴史の現段階であり，その歴史のなかに本稿もまたある．

本稿の構成

$\epsilon-\delta$ 論法の意義　本稿では，数列と関数の収束に関する，いわゆる $\epsilon-\delta$ 論法は終始一貫して用いる．この論法は，収束性を「すべて」と「存在する」という論理の言葉で論じる方法である．いわば無限を有限の言葉でつかむ方法である．数学的な現象を人間が論理の言葉でつかむうえで不可欠である．

もとより，この論法が確立するまでには幾多の試行錯誤があった．その歴史は『$\epsilon-\delta$ 論法とその形成』[17] に詳しい．$\epsilon-\delta$ 論法もまた，歴史的制約の中での理論であり，それを最終的な方法であると言うことはできない．しかし，まずこの方法を習得し身につけることが，現代において数学を学ぶことことの意味の一つであり，この段階をふまえることは不可避である．

大学初年級の解析学ではここで躓くことが多いと言われる．この論法が苦手な人は，いちどこれを用いずに収束性を厳密に論じてみようとすればよい．やってみればただちに $\epsilon-\delta$ 論法の重要性がわかる．まず自分で厳密な組み立てようとする．そして，やはり有限の言葉でこれをつかもうとすれば，これしかないことを納得する．この過程を経験することによってはじめてこの論法の重要性がわかり，日常的な言語感覚や論証感覚を省みることができる．

章立て　次のような内容を骨子に，いくつか関連したことを含めて展開するようにしたい．

第一， 現代数学は集合をその言葉として用いる．まずこれを整理するとともに，整列集合と選択公理についてのべる．その上で，整数の公理系を出発点とする．西洋の伝統では自然数からはじめるのであるが，高木貞治の『数の概念』にならい，東洋の伝統を引き継いで，整数を定義し，有理数にすすむ．

第二， 実数の公理までまとめる．整数の公理は人間がつかんでいる数の世界の構造を定式化するものであるが，実数の公理は理論の要請である．実数の公理を満たすモデルの存在を，有理数をもとに示す．

実数の構成でのカントールの方法はそれ数列を用いる．実数の連続性を理論の根拠として，そこから導かれる，数列の極限に関する基本性質と無限級数についてまとめる．

第三， 解析学は関数を解析することが，基本である．ではその**関数**とは何か．また，関数の連続性とは何か．これをいわゆる $\epsilon-\delta$ 論法によって定義し，基本性質を示す．

第四， 無限小変化率として**微分**をとらえ，関数の微分を定義し，基本定理としての平均値の定理を示す．平均値の定理の一般化として，関数の展開定理を示す．

第五， 無限小の総和としての**積分**を微分とは独立に定義する．そのうえで面積，体積などの量と定積分の関係を考える．また，積分と微分がどのような条件で逆演算であるかを解明する．

第六，微分と積分を多次元空間の関数に適用し，陰関数定理を証明する．ベクトル解析と多変数の微分積分の初歩をつかむ．

第七，微分方程式を定義し，実数の完備性がどのように微分方程式の解の存在を保証するのかを確認する．

第八，以上の準備の下に，物理世界への適用として，地球の軌道が太陽を焦点とする楕円軌道をなすことを証明する．

高校などで数学教育に携わる人，解析学への道筋を知りたい大学初年級の学生，そして意欲的な高校生等にいささかの役に立てればと思う．

解析学はここから大きくさまざまの分野に展開する．一方で，ルベーグ測度論に深まり，また複素関数の解析，複素函数論にすすむ．そうしてはじめて実関数の解析もまたその意味が明らかになる．さらに，複素関数の解析からリーマン面へ，そして代数幾何と複素多様体に展開する．そのことをここで指摘し，さらなる勉強をすすめたい．

記述を簡明にするため，■で定義や定理，命題等の陳述の終わりを示し，□で証明の終わりを示すことにする.「系」とは定理からただちに導かれる命題，または定理の圏内にあって，関連する他の命題と結合することで示される命題を意味し，番号は「定理番号－系番号」となっている．

1　集合と公理

1.1　集合の概念

集合概念の定義　集合論は，古典的な解析学を根本的に変革し，現代数学に不可欠な数学の言葉となった．言葉が伝達の方法であると同時に思想の母体であるように，集合論は現代の数学記述の言葉であると同時に考え方の基礎である．この集合の考え方と記法を整理するところからはじめよう．

また，高校時代に学ぶべき数学の全体像を一言でいえば，**集合と写像**である．このような観点からも，集合についてあらかじめ一定のことを考えておかなければならない．

そもそも集合とは何か．現行の日本の高校数学課程では次のように書かれている．ある教科書の記述である．

> 1 から 10 までの自然数の集まりのように，それに含まれる「もの」がはっきりしているような,「もの」の集まりを**集合**という．集合に含まれている 1 つ 1 つの「もの」を，その集合の**要素**という．

これによると「美しいものの集まり」が集合となり得ないのは，あるものがその集合に属するか否かが個人の主観によって異なり，確定できないからである．だからどのようなものを集めるのかが大切なのだ．ところで「はっきりしている」という意味ははっきりしてるだろうか．

この教科書の定義を次のようにとらえ直そう．ある枠組のなかで考えているものを a や b のように小文字で表し，それらを一つにまとめたものを A のように大文字で表す．書体は何でもよい．A にまとめられた個々のものを集合 A の**要素**という．**元**ともいうが，高校教科書にあわせて要素といおう．a が A の要素であることを $a \in A$ と書く．この記号を用いて，集合という概念の定義を明示的に書く．

定義 1 (集合)　集合とは，考えているもの全部，または一部をまとめて括ったもの A で，二つの条件

(1) 任意のもの x に対して，それが A に含まれるか A に含まれないかが確定する．

(2) A の任意の要素 x と y は区別される．つまり A の任意の $x,\ y$ に対して，相等しいか．異なるかが確定する．

を満たすもののことである． ■

x が A に含まれることを $x \in A$，含まれないことを $x \notin A$ と書く．また x と y が相等しいことを $x = y$，等しくないことを $x \neq y$ と書く．

後にのべるように，この条件を満たすものとして，A をそれ自身を要素に含まないような集合の集合とすると，A が A に含まれるとしても，含まれないとしても矛盾が起こる．この問題は「集合の公理」で考えることにし，今は素朴な集合のとらえ方を定式化した上記定義からはじめよう．

集合を定義する　集合がいかなるものかはわかった．つまり集合という概念は定義された．それではこの集合そのものはどのように定義するのか．直接的には，要素を書き並べることでどのような集合であるかが確定する．記号では

$$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$$

のように書く．このようにして集合を定義することを**外延的定義**という．これはそのまますべてを書いただけである．逆にこの場合，集合が「15 の約数の集合である」と見抜くことは大切なことである．もちろん外延的に定義された集合にこのような性質があるとはかぎらない．逆にいくつもあることもある．

外延的定義は無限集合には使えない．偶数をすべて書くことはできない．したがって要素をすべて書くのではない方法で集合を定義しなければならない．それは「x は〜である」という条件によって集合を定義することである．つまり，集合 A は「x に関する条件 $\varphi(x)$ を満たす x よりなるもの」として定めるのである．

偶数の集合は，条件 $\varphi(x) =$「x は偶数である」を満たす x の全体を A とすることで定義するのである．このような集合の定義を**内包的定義**という．内包的に定義された集合 A は

$$A = \{\ x \mid \varphi(x)\ \text{を満たす．}\}$$

のように書くことができる．実際には「満たす」がなくても意味が不明にならないときは条件 $\varphi(x)$ のみを記しておく．では x はどの範囲からとるのか．一定の全体集合を定めておいていくつかの集合をその全体集合からとって考えるというようにすることも多い．そのような集合を**普遍集合**ということもある．Ω や U などを使うことが多い．一方，要素をもたない空の集合も考える．これを**空集合**といい $\emptyset$ と書くことにする．

内包的定義は新しい局面を開く．集合というのは $\varphi(x)$ が真となる**すべての**要素からなることを意味し，具体的にそれがどのようなものであるかはわからなくても，そのすべてを考えるということになる．偶数の集合というとき，偶数の一つ一つをすべて確認するわけではない．しかし，数 x が偶数の集合に属するか属さないかは確定する．

和集合と積集合　二つの集合 A と B に対して，

$A \cup B$ ： A の要素であるかまたは B の要素である要素の集合．これを和集合という．

$A \cap B$ ： A の要素でありかつ B の要素である要素の集合，これを積集合という．

とする．集合 A と B に対して積集合は A の要素で B の要素でもあるものからなる部分集合であるが，和集合の存在は自明ではない．それに対する数学の外での議論は置いて，数学では，後に述べる集合の公理系に，和集合の存在公理を置き，それを出発とする．逆にいえば，新たな矛盾や問題点が出てくるまでは，和集合の存在は数学のなかでは議論しないのである．

べき集合　集合 A に対し，その部分集合全体の集合を A の**べき集合**といい，2^A などと書き表す．ただし，集合 A の部分集合には，空集合と集合 A それ自身を含めるものとする．例えば

$$A = \{a,\ b,\ c\ \}$$

と 3 個の要素からできているとき，べき集合は

$$\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{b,\ c\},\ \{c,\ a\},\ A\}$$

と 8 個の要素からなる．なぜ 8 個になるのか．集合 A の要素は 3 個あり，各要素が選ばれるか選ばれないか，それぞれ 2 通りなので $2^3 = 8$ つの場合がる．それに応じて部分集合も 8 個あるのである．

べき集合の 8 個の要素の一つを選ぶと，それに対して集合 A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像 f が定まる．つまり a が選ばれた部分集合に含まれるか含まれないかに応じて，$f(a) = 1$ または $f(a) = 0$ と定めるのである．逆に集合 A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像 f に対し

$$\{x|f(x) = 1,\ x \in A\}$$

によって A の部分集合が定まる．このように，A の部分集合と集合 A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像 f は一対一に対応している．

これを一般化し，二つの集合 A と B に対し，集合 A から集合 B への写像の集合を**べき集合**といい

$$B^A$$

と書く．先に 2^A と書いたのは，この場合 $B = \{\ 0,\ 1\ \}$ となり，B の要素の個数が 2 だからである．べき集合の存在もまた公理系に入れることで，その存在についての議論は，現在の数学では行わない．

直積集合　集合 A，B の**直積** $A \times B$ を次のように定義する．

$$A \times B = \{(a,\ b)\ |\ a \in A,\ b \in B\}$$

同じ集合 A の直積は A^2 とも書く．先のべき集合の記号の用法からすれば，

$$A^2 = A^{\{\ 0,\ 1\ \}}$$

でもなければ記号の整合性がとれないのであるが，A^2 の要素 $(a,\ b)$ と $A^{\{\ 0,\ 1\ \}}$ の $(0) = a,\ f(1) = b$ となる要素 f を対応させることにより，これは一対一対応になる．

例 1.1 $\mathbb{R}$ を実数の集合とする．$\mathbb{R}^2$ は 2 つの実数の順序づけられた組 $(a,\ b)$ よりなる．$\mathbb{R}$ は数直線でもあるのだが，$\mathbb{R}^2$ は平面の点と対応する．この対応を定めるためには，平面の 1 次独立な 2 つのベクトル $\overrightarrow{e}_1$，$\overrightarrow{e}_2$ が必要である．$\overrightarrow{e}_1$，$\overrightarrow{e}_2$ によって $(a,\ b)$ に平面上のベクトル

$$a\overrightarrow{e}_1 + b\overrightarrow{e}_2$$

で定まる点を対応させるのである．$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ が大きさが 1 で直交しているとき，この平面を直交座標平面というのであった．大きさが 1 で直交しているという条件がみたされなくても，$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ が 1 次独立であれば平面上の点を一意に定める．これを一般的には斜交座標という.『数学対話』「座標の方法」参照のこと．

直積集合の存在もまた公理系に入れることで，その存在についての議論は，現在の数学では行わない．

無限の不思議　日本の高校でも「集合」の概念は習う．しかし，実際に扱うのは要素の個数が有限である場合がほとんどだった．実は，集合は無限集合を考えるとき，面白く不思議なことが起こる．自然数の集合 $\mathbb{N}$ と正の偶数の集合 A という二つの集合を考えよう．

$$A \subset \mathbb{N},\ A \neq \mathbb{N}$$

である．しかし

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{に対し} \quad 2n \in A$$

を対応させると，これは $\mathbb{N}$ の要素と A の要素の間の一対一の対応だ．つまり $\mathbb{N}$ と A の要素は「同じだけ」ある！　部分が全体と等しい？　無限集合ではこのように部分集合の各要素と全体集合の各要素の間に一対一の対応ができることがある．これがさらに実数の集合に至って驚くようなことが起こるのである．これは後に述べる．

集合と論理　集合に対してそれを操作して新しい集合を考えたり，集合相互の関係を考えたりすることが重要である．普遍集合を Ω とする．集合の相互関係は論理と密接な関係を持っている．

記号「$\Rightarrow$」は「ならば」を意味し，二つの命題 $P,\ Q$ に対して「$P \Rightarrow Q$」は命題 P が成立するなら (真なら) 命題 Q が成立する (真である) ことを意味する．また記号「$\iff$」は「必要十分である」「同値である」を意味し，二つの命題 $P,\ Q$ に対して「$P \iff Q$」は命題 P が成立することと命題 Q が成立することが同値であることを意味する．

(1) まず集合の**包含関係**である．

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

が成り立つとき，集合 A は集合 B に含まれるといい，次のように書く．

$$A \subset B$$

(2) 集合 $A,\ B$ に対し，その**和集合** $A \cup B$ を次のように定める．

$$A \cup B = \{\ x \mid x \in A \ \text{または}\ x \in B\ \}$$

(3) 集合 $A,\ B$ に対し，その**積集合** $A \cap B$ を次のように定める．

$$A \cap B = \{\ x \mid x \in A \ \text{かつ}\ x \in B\ \}$$

(4) 集合 A に対し，その**補集合** $\overline{A}$ を次のように定める．

$$\overline{A} = \{\ x \mid x \notin A,\ x \in \Omega\ \}$$

集合は一定の条件を満たすものすべての集合なのであるから，集合の間に成り立つ関係や集合から作られた集合には，条件の関係が対応する．それを次にまとめておこう．

集合と条件　二つの集合が二つの条件 $\varphi(x)$ と $\phi(x)$ で定められているとする．

$$A = \{\ x \mid \varphi(x)\ \}$$
$$B = \{\ x \mid \phi(x)\ \}$$

このとき，集合の関係は条件の関係に対応している．

(1) $A \subset B$ であることは

$$x \text{ が} \varphi(x) \text{ を満たす．} \Rightarrow\ x \text{ が} \phi(x) \text{ を満たす．}$$

となり，$\varphi(x)$ が $\phi(x)$ の十分条件 (または $\phi(x)$ が $\varphi(x)$ の必要条件) であることと同じことを意味することがわかる．

(2) 二つの条件 $\varphi(x)$，$\phi(x)$ に対して，条件「$\varphi(x)$ または$\phi(x)$」を $\varphi(x) \vee \phi(x)$ と書き，条件「$\varphi(x)$ かつ$\phi(x)$ を」$\varphi(x) \wedge \phi(x)$ と書く．

集合の和と積に対しては次のような条件が対応する．

$$A \cup B = \{\ x \mid \varphi(x) \vee \phi(x)\ \}$$

(3)

$$A \cap B = \{\ x \mid \varphi(x) \wedge \phi(x)\ \}$$

(4) 補集合は条件 $\varphi(x)$ の否定に対応する．

$$A = \{\ x \mid \varphi(x)\ \} \text{ のとき } \overline{A} = \{\ x \mid \overline{\varphi(x)}\ \}$$

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

これは次のように示される．

$$x \in \overline{A \cap B} \iff x \notin A \cap B \iff x \notin A \text{ または } x \notin B \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ かつ } x \notin B \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

だからド・モルガンの法則は次の条件の「かつ ($\wedge$)」「または ($\vee$)」「否定 ($\overline{}$)」に関する法則が対応する．

$$\overline{\varphi(x) \wedge \phi(x)} = \overline{\varphi(x)} \vee \overline{\phi(x)}, \quad \overline{\varphi(x) \vee \phi(x)} = \overline{\varphi(x)} \wedge \overline{\phi(x)}$$

このように集合と論理は一体である．

「すべて」と「存在」　今後，必要に応じて用いる論理記号をここで確認しておこう.「条件」とは何か．今はこれを，変数 x を含む命題とする．x に a を代入したとき，それが真になることを「a は条件 $\varphi(x)$ をみたす」という．

「集合 A の任意の要素 a は条件 $\varphi(x)$ をみたす.」これを

$$\forall a (\in A)\ ;\ \varphi(a)$$

のように書く．記号 $\forall$ は「すべての」という意味である．この記号を全称記号という．

「条件 $\varphi(x)$ をみたす集合 A の要素 a が存在する.」これを

$$\exists a(\in A)\ ;\ \varphi(a)$$

のように書く．記号 $\exists$ は「存在する」という意味である．この記号を存在記号という．

これらの記号で指定される演算や操作は，ある集合の要素の範囲を限定することになるので，**量化子**や**限定記号**といわれる．

もとより論理にどのような操作まで許すのかという，論理の公理についても考えなければならないのだが，本稿では，高校での数学で教科書にある範囲は，そこに考えるべき問題があることを指摘し，その考察は保留しつつ，そのまま用いる．

1.2 対応と写像

写像　先に自然数と偶数の間の一対一対応をのべたが，一般的に集合の間の要素の対応として，写像を定義しよう．

定義 2 (写像)　二つの集合 $A,\ B$ において，集合 A の各要素に対して，集合 B の要素をただ一つ対応させる規則が定まっているとき，その規則による対応の働きのことを **A から B への写像**という．記号 f などを用いて

$$f\ :\ A\ \to\ B$$

などと書きあらわす．

集合 A を**定義域**という．写像 $f\ :\ A\ \to\ B$ によって A の要素 a に対応する B の要素を $f(a)$ と書き，これを f による a の**像**，または f の a における**値**という．また値の集合 $\{f(a)\mid a\in A\}$ を写像 f の**値域**という．$f(A)$ と略記することもある．■

合成写像　A から B への写像 f と B から C への写像 g がある．$a\in A$ に対し $f(a)\in B$ のなので，$g(f(a))\in C$ が定まる．これによって A から C への写像が定まる．これを f，g の合成写像といい，$g\circ f$ と表わす．つまり，$g\circ f(a)=g(f(a))$ である．

単射，全射　A から B への写像 f で，$a_1, a_2\in A$ に対し，

$$a_1\neq a_2 \quad\Rightarrow\quad f(a_1)\neq f(a_2)$$

がなりたつとき，f は**単射**であるという．

$$\forall b(\in B)\quad \exists a(\in A)\ ;\ b=f(a)$$

がなりたつとき，f は**全射**であるという．f が全射かつ単射であるとき，f は一対一写像であるという．

逆写像　A から B への写像 f がある．f が A から値域 $f(A)\subset B$ への一対一写像であるとき，$f(A)$ の任意の要素 b に対して A の要素 a で $f(a)=b$ となるものがただ一つ定まる．この対応によって $f(A)$ から A への写像が定まる．この写像を f^{-1} と表わし，f の**逆写像**という．定義より

$$f\circ f^{-1}(b)=b,\ f^{-1}\circ f(a)=a$$

がなり立つ．また，f の定義域と値域が f^{-1} の値域と定義域になる．

グラフ　集合 A から集合 B への写像 f に対して直積 $A \times B$ の部分集合

$$G = \{(a,\ f(a)) \mid a \in A\}$$

を写像 f の**グラフ**という．逆に直積 $A \times B$ の部分集合 G で，二つの条件

(1) 任意の $a \in A$ に対し $(a,\ b) \in G$ が存在する．

(2) 任意の $(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2) \in G$ に対し，

$$a_1 = a_2 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2$$

が成り立つものは，$(a,\ b) \in G$ に対し $b = f(a)$ とすることで，集合 A から集合 B への写像 f を定める．

商集合　集合 A の要素の間に，成り立つか成り立たないかがつねに確定する関係が定義されているとする．a と b の間にこの関係が成り立つことを $a \sim b$ と表す．関係〜が

(i) $a \sim a$.

(ii) $a \sim b$ なら $b \sim a$.

(iii) $a \sim b,\ b \sim c$ なら $a \sim c$.

が成り立つとき,「〜」を「同値関係」という．

　同値関係があると，同値なものをひとつの部分集合にまとめることができる．つまり A の要素 a と同値な要素からなる A の部分集合 $\overline{a}$ が一意に確定し，A のすべての要素はいずれかただひとつの $\overline{a}$ に属する．いいかえると，任意の $\overline{a}$ と $\overline{b}$ について $\overline{a} = \overline{b}$ か $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$ のいずれか一方が成立する．

　a の属する集合を a の同値類という．このようにして得られる同値類の集合

$$A／\sim = \{\overline{a} \mid a \in A\}$$

を，集合 A の関係〜に関する**商集合**という．

　A から〜による商集合 $A／\sim$ への写像 f を $a \in A$ に対して

$$f(a) = \overline{a}$$

で定める．これを同値関係〜で定まる**自然な写像**という．これは全射である．

例 1.2　　整数の集合 $\mathbb{Z}$ の要素 m と n に対し，$m - n$ が 7 の倍数になるとき $m \sim n$ と定める．これは同値関係である．実際，上の条件の成立を確かめる．

(i) $m - m = 0$ は 7 の倍数なので $m \sim m$.

(ii) $n - m = -(m - n)$ なので $m - n$ が 7 の倍数なら $n - m$ も 7 の倍数．$m \sim n$ なら $n \sim m$ である．

(iii) $l - n = (l - m) + (m - n)$ なので $l - m,\ m - n$ がともに 7 の倍数なら $l - n$ も 7 の倍数．よって $l \sim m,\ m \sim n$ なら $l \sim n$.

この同値関係で同値なものをひとまとめにする．例えば 7 で割って 3 余る整数の集合，これが同値類である．この場合は同じ余りの集合なので**剰余類**ともいう．

$$\overline{3} = \overline{10} = \overline{-4} = \{\ \cdots,\ -11,\ -4,\ 3,\ 10,\ \cdots\ \}$$

つまり

$$\mathbb{Z} / \sim = \{\ \overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6}\ \}$$

$\mathbb{Z} / \sim$ がふたたび加法と乗法をもつことも確認することができる．

濃度　「一対一対応が存在する」という関係は同値関係になる．二つの集合 A と B の間に一対一対応が存在するとき，二つの**集合は濃度が等しい**といい，$|A| = |B|$ と記す．

同値関係であるから，集合の集合のこの同値関係によるによる類別を考え，その類を集合 A の濃度といい，$|A|$ と記す，と考えてよいのか．集合の集合という考えかたには矛盾が生じるので，この定義を用いることはできない．

有限集合の場合は，その個数が等しければ一対一対応が存在し，逆も成り立つので，集合 A の要素の個数を濃度とし，$|A|$ と記す．実はここにも問題はある．つまり未だわれわれは「個数」を定義していないのである．このように，厳密に考えると，様々の問題を浮かびあがらせることが出来ることを忘れず，しかし，素朴な理解を重視して，考えてゆきたい．

集合 A が集合 B のなかに埋め込める，つまり B の部分集合との間に一対一対応が存在するとき，濃度の関係は $|A| \leqq |B|$ であると書く．$|A| \leqq |B|$ ではあるが，A と B の間の一対一対応は存在しないときは $|A| < |B|$ と書く．

一般に，

定理 1　　集合 A に対して

$$|A| < |2^A|$$

が成立する．　■

証明　A の要素 a に対して，A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像 f_a を

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & x = a \\ 1 & x \neq a \end{cases}$$

で定めることで，A は 2^A の部分集合と一対一に対応する．ゆえに

$$|A| \leqq |2^A|$$

である．次に A と 2^A の間に一対一写像は存在しないことを示す．

集合 A と 2^A の間に一対一対応が存在すると仮定する．

この一対一対応で集合 A の要素 a に対応する A の部分集合を S_a とする．A の部分集合 T を次のように定める．

$$T = \{\ t \mid t \notin S_t\ \}$$

T もまた A の部分集合なので，A のある要素 u と対応している．つまり

$$T = S_u$$

である．しかしこのとき，もし $u \in T$ なら T の定義から $u \notin S_u = T$ なので矛盾，もし $u \notin T$，つまり u が T の補集合の要素なら T の定義から $u \in S_u = T$ なので矛盾，

いずれも矛盾となる．ゆえに集合 A と 2^A の間に一対一対応は存在しない．つまり

$$|A| < |2^A|$$

である． □

上記背理法はいわゆる対角線論法である．

例 **1.3**　整数や実数はまだ定義されていない．したがってここでは，高校で通常用いる意味での整数と実数とする．この整数と実数の濃度に関して次のことが成り立つ．

自然数とと一対一の対応が作れる無限集合の濃度を**可付番**と言い，$\aleph_0$ と書き表し「アレフ 0」と読む．また可付番な無限を**可算無限**ともいう．

それに対して実数の集合の濃度を $\aleph$ と書く．カントールが最初に発見した集合論の定理が，次の定理である．この定理は，実数の集合の濃度は自然数の濃度より大きい，つまり実数の集合は**可付番**ではないことを意味する．カントールは 1874 年にはこれを発見していたが，1891 年に次の証明のような対角線論法でこれを証明した．カントールは三角関数の級数の研究から集合論を創始し，また，位相空間論の基礎を築いた．現代的な数学のはじまりとなったものだ．

これは，区間 $[0,\ 1)$ の実数 x を 2 進法で

$$x = 0.11011000\cdots$$

のように書き表す．このとき少数第 j 位の数字 0 か 1 を $f_x(j)$ と書くと，

$$x \to f_x(j)$$

によって，集合 $[0,\ 1)$ と，自然数から $\{0,\ 1\}$ への写像の集合の一対一が得られる．

よって上記定理から，区間 $[0,\ 1)$ の濃度は自然数よりも実際に大きいことがわかる．つまり

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 < |2^{\mathbb{N}}| = |(0,\ 1]| \leqq \aleph = |\mathbb{R}|$$

が示された．

一般連続体仮説　そして

> 無限集合 A に対して，
> $$|A| < |B| < \left|2^A\right|$$
> となる集合 B は存在しない．

という命題がいわゆる**一般連続体仮説**である．次節で述べるようにこれは公理的集合論のなかで証明することも否定することもできない．集合論の公理系から独立している．

1.3　集合と公理

集合論の矛盾　以上述べた集合の定義はカントールの時代のものである．それからまもなくこの定義ではいろいろな矛盾が生まれることが知られていった．次のラッセル (Bartland Russell 1872～1970) の逆理がそのもっとも重要なものである．

X を，それ自身を要素に含まない集合 x の集合とする．つまり

$$X = \{\ x \mid x \notin x\ \}$$

このとき，

$$X \in X \quad \Longleftrightarrow \quad X \notin X$$

となり矛盾である．

このような矛盾が「数学の危機」といわれる反省をもたらし，数学基礎論を発展させた．集合論についていえば公理的集合論を生み出すのである．それに対してこれまで述べた集合の定義にもとづく集合論は**素朴集合論**といわれる．

集合論の公理　このような矛盾を退けるような公理体系が，いくつか提出された．そのはじめは 1908 年のツェルメロであった．それを補強したのがフランケルでこれをツェルメローフランケルの集合論という．それは次のような公理系よりなる．論理記号で書くと次のようになる．これらは，集合を表す文字と関係 $\in$ のみで書かれる．

定義 3　以下の 9 命題よりなる公理系を「ツェルメローフランケル (ZF) の公理」という．※以下の一文は，その意味の解説文と記号の定義である．ツェルメローフランケル (ZF) の公理を満たすものを**集合**という．

1. 外延性公理：
$$\forall a \forall b (\forall x (x \in a \equiv x \in b) \Rightarrow a = b).$$
※　同じ要素をもつ集合は相等しい．

2. 空集合の公理：
$$\exists x \forall y (\neg y \in x).$$
※　この x を空集合と言う．公理 1. からそれはひとつしかない．空集合を $\emptyset$ で表す．

3. 対の公理：
$$\forall a \forall b (\exists x \forall y (y \in x \equiv y = a \vee y = b)).$$
※　x と y に対して，x と y を要素とする集合が存在する．公理 1. から x と y に対してひとつ定まる．これを $\{x,\ y\}$ で表す．また $\{x,\ x\}$ を $\{x\}$ で表す．

4. 和集合の公理：
$$\forall a (\exists x \forall y (y \in x \equiv \exists z (z \in a \wedge y \in z))).$$
※　a の要素である集合に含まれる要素を要素とする集合が存在する．公理 1. から x は一つに定まる．これを $\bigcup z$ のように表す．$\bigcup \{u,\ v\}$ は $u \cup v$ とも表す．

5. べき集合の公理：
$$\forall a (\exists x \forall y (y \in x \equiv \forall z (z \in y \wedge z \in a))).$$
※　公理 1. から x は一つに定まる．これを 2^a と表す．

7. 無限公理：
$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y \cup \{y\} \in x)).$$

8. 置換公理：

$$\forall a \forall b(\exists x \forall y \in a(\exists z \in b \wedge A(y,\ z)) \Rightarrow \exists z(z \in x \wedge A(y,\ z))).$$

※　A によって a と関係づけられる b の要素は集合をなす.

9. 正則性公理：

$$\exists x A(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge \forall y(y \in x \wedge \neg A(y))).$$

※　これはまた基礎の公理とも言われるが，この公理によって「x は　$x \in x$ である」のような命題は除かれる.

■

ツェルメローフランケルの公理系は ZF 公理系と言われる.

このように，公理的集合論によって数学の言葉としての集合は，これまで通り用いることができる．もとより公理系そのものが改訂されてゆく．上記公理系も，ツェルメローフランケルのものからさらに，フォンノイマンによって拡張されたものである．また，これとは別に，ベルナイスーゲーデルの公理系がある．二つの公理系は一方から他方が導かれ同等であることが知られている.

選択公理　次の公理を選択公理という.

10. 選択公理：

$$\forall a(\forall x \in a \exists y A(x,\ y) \Rightarrow \exists f \forall x(x \in a \wedge A(x,\ f(x)))).$$

ここで f は a で定義された関数である．このような関数はグラフによって決定される．y は，$A(x,\ y)$ によって定まる集合の要素である.

この論理式の $A(x,\ y)$ が $y \in x$ のときの意味は，a に属する集合が空でないとき，各 x から x の要素を選ぶ関数が存在するということである．それを論理式に書くと次のようになる.

$$\forall a((\neg \emptyset \in a \wedge \forall x \in a \forall y \in a(\neg x = y \Rightarrow\Rightarrow x \cap y = \emptyset)) \Rightarrow \quad \exists z \forall x \in z \exists w(x \cap z = \{w\}))$$

a が互いに交わらない空でない集合の集合のとき，a の要素である集合から要素を選んだ集合 z が存在する．ZF 公理系のなかでは，この形の公理は上記選択公理と同値になる.

選択公理は，素朴集合論の言葉では次のような命題となる．ここでは集合を大文字で書く.

(1) 集合 X の部分集合の族 $\mathfrak{A}$ において，$\mathfrak{A}$ が空集合を含まないとき，$\mathfrak{A}$ に属する各部分集合 A に A に属する要素 $f(A)$ を一意に対応させる関数 f が存在する.

(2) Λ を添え字の集合とする集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ において，$A_\lambda = \emptyset$ となる λ が存在しないなら，その直積集合 $\displaystyle\prod_\lambda A_\lambda \neq \emptyset$ である.

(3) 集合 A が，Λ を添え字の集合とする部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直和 $\displaystyle\sum_\lambda A_\lambda$ であるとき，各 A_λ とただ一つの要素を共有する A の部分集合が存在する.

(4) 集合 A から集合 B への全射 $f : A \to B$ に対して，写像 $g : B \to A$ で，$f \circ g$ が B から B への恒等写像となるものが存在する.

ZF 公理系に選択公理を加えた公理系を ZFC 公理系と言う．集合の公理系に選択公理を加えた公理系が素朴集合論と合致する集合である．

選択公理はごく自然な公理であり，論述の中で意識せずに用いられることも繰り返されてきた．集合論の基礎を再確認しようとするなかで，これが自明なことではなく，用いる以上は公理としてあげねばならないことであることが認識されたのは，20 世紀の初頭であった．

しかしこの自然な公理の定式化が，集合論におけるもっとも深い事実をつぎつぎに明らかにした．

整列可能定理　集合の公理系を考えることは，素朴集合論で現れる矛盾を回避するためどのように集合の公理系をつくればよいのか，という問題にはじまった．しかしこのように用いる論理を明確にし，集合の公理を立て厳格な論証をおこなうことによって，集合論の深い定理が見出された．それが**選択公理**と**ツォルンの補題**そして**整列可能定理**の同値性である．

ここでは，その証明はおこなわない．選択公理や整列可能定理に含まれる概念の定義と，得られる結論のみをのべる．

いくつかの定義．

定義 4

(1) 集合 X は要素の間の関係 $\leqq$ が

$$x \leqq x,\ x \leqq y \wedge y \leqq z \Rightarrow x \leqq z,\ x \leqq y \wedge y \leqq x \Rightarrow x = y$$

を満たすとき，この関係を**順序**という．順序をもつ集合 X を**半順序集合**という．関係を明記するときは $(X,\ \leqq)$ と記す．■

(2) 半順序集合 $(X,\ \leqq)$ の任意の 2 つの要素 x と y に対し

$$x \leqq y,\ x = y,\ y \leqq x$$

のいずれかが定まるとき，集合 X は**全順序集合**であるという．■

半順序集合または全順序集合を順序集合という．順序集合においてさらに次の概念を定義する．

定義 5

(1) 半順序集合 $(X,\ \leqq)$ の空でない部分集合 A に対し，

$$u \in X(\forall a \in A \wedge a \leqq u)$$

が成り立つ u を A の一つの**上界**という．■

(2) 半順序集合は，その任意の全順序部分集合が上界をもつとき，**帰納的**であるという．■

(3) 半順序集合 $(X,\ \leqq)$ の要素 a は，$a \leqq x$ かつ $x \neq a$ である要素 $x \in X$ が存在しないとき，**極大要素**であるという．■

(4) 半順序集合 $(X,\ \leqq)$ の空でない部分集合 A に対し，$\forall a \in A(c \leqq a)$ となる A の要素 c を，A の**最小要素**という．■

(5) 半順序集合 $(X,\ \leqq)$ は，その空でない部分集合 A がつねに最小要素をもつとき，**整列集合**であるという．■

公理的集合論を踏まえた研究によって，20 世紀に次の事実が発見された．

定理 2　集合の公理 1.〜8. の下において，次の 3 命題は同値である．

(1) 選択公理が成立する．

(2) （**ツォルンの補題**）帰納的半順序集合には極大要素が存在する．

(3) （**整列可能定理**）任意の集合は，その上にある順序を定義して整列集合にすることができる．

■

この証明は例えば『集合論入門』[1] や『集合と位相』[2] にある．

この選択公理やツォルンの補題によって，それまでは成り立つはずだと証明なしに考えられてきた次のような多くの定理が，はじめて証明される．

(1) 任意の二つの集合の濃度は比較可能である．これはいいかえると，任意の二つの集合において，一方から他方の部分集合への一対一対応が存在する，ということである．

(2) 体上の線型空間には基が存在する．

(3) コンパクト空間の任意個の積空間はコンパクトである．

実はこれらの定理もまた，選択公理と同値であることが知られている．あるいは，

(1) すべての無限集合は，可算無限な濃度部分集合をもつ．

(2) 任意の体は，代数的閉包が存在する．

などもまた，選択公理を用いないで証明することは難しい．ただし，不可能性の証明までがなされているかどうかは，不知．

さらに驚くべきことに，次のことが示されている．

定理 3

(1) この同値な命題は，集合の公理 1.〜8. と独立である．いいかえれば，集合の公理 1.〜8. が矛盾を含んでいなければ，これに選択公理を付け加えても，あるいは選択公理の否定命題を付け加えても，やはり矛盾は起こらない．■

　※　無矛盾性の証明はゲーデルによって，独立性の証明はコーエンによってなされた．

(2) 先に述べた一般連続体仮説について．集合の公理 1.〜8. に一般連続体仮説を公理として加えると，選択公理が定理として示される．■

　※　これはシールピンスキによって示された．

(3) 一般連続体仮説は，集合の公理 1.〜8. に選択公理を加えた公理系から独立である．■

　※これもまたゲーデルとコーエンによって示されている．

平行線の公理が，ユークリッド幾何の公理系のなかで独立しており，それを否定した公理を加えても，豊かな幾何，つまり非ユークリッド幾何があることが，19 世紀に見出された．選択公理や，あるいは一般連続体仮説を否定した体系が豊かであるのか否か，それは開かれた問題である．

このように，19 世紀から 20 世紀にかけて，人間が数学として考えるということの根底に，どのような仮説が存在しているのかが，解明されていった．

無限の不思議・再説　われわれが選択公理を，有限個の集合から選ぶことの一般化として考えるとき，そこで思い浮かべているのは可算無限個の集合から選ぶことである．しかし，選択公理は可算無限という制限を設けない．

選択公理を文字通り適用すると，次の定理が成り立つ．

定理 4 (バナッハ・タルスキーの定理)　大きさの異なる中身の詰まった 2 つの球 (体)K と L があるとする．このとき, K を適当に有限個に分割し, それらを再び寄せ集めることによって，L を作ることができる．■

この定理の詳しい解説やその証明は，例えば「バナッハ・タルスキーの定理」等にある．しかしこれは決してパラドックスではない．任意の集合で選択公理が成り立つとしたその帰結である．

『解析概論』にもこのような事例はすでに紹介されている．たとえば Peano の曲線がそうである．それは，区間 $a \leqq x \leqq b$ で定義された連続曲線

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t)$$

で，一定の平面領域の点をすべて通過するものである．それが具体的に構成されている．

これも一見不思議である．しかしこれもまた，実数と連続の定義からの帰結である．われわれが採用した公理系は，ある理論を展開するのに必要な内容で構成されている．

方法としての集合論　数学の公理系というのは絶対のものではなく，それによって数学的対象を定義する．逆に言えば，数学的現象，数学的真理を記述する方法である．集合論の公理も数学の方法であり，基礎の方法として，数学の言葉である．

方法に絶対のものはなく，数学の発展とともに，方法もまた変化し発展する．今日の数学の新たな枠組みを作ったフランスを中心とする数学者集団ブルバキは，このことを端的に次のように述べる．

> もし，未来にそれ (現在の数学の枠組みとなっている公理的集合論) が破綻しても数学は必ずや新しい基礎を見つけるだろう．

体系とは完結したものではなく，それ自体が開かれた発展する方法なのである．このような立場からいえば，解析の基礎を考え学ぶうえでは，このような矛盾の存在をおさえつつ，とりあえず素朴な集合論からはじめればよい．

1.4　整数の公理

整数の公理　整数論の分野で類体の基本定理を証明した高木貞治は，同時に日本近代の数学のために,『解析概論』[6] のように優れた一般書を書くとともに，また数の概念についても生涯研究し『新式算術講義』,『数学雑談』[7],『数の概念』[8] にその研鑽の跡を残している．

青空学園の『数論初歩』の「存在と構成」では自然数の公理から整数を構成した．自然数をすべての基礎とする考え方は，西洋の伝統である．これに対して，高木貞治の最後の著作となった『数の概念』では，整数の定義からはじまる．意識されていたのかどうかはわからないが，二つの方向の数を対等に扱う東洋的な数の世界をふまえた公理系が示されている．そして，それはより根底的で明晰である．

西洋数学では，あくまで自然数が基礎であり，負数や有理数は必要のために導かれるという立場である．つまり正の数こそ存在する第一のものであり，負数はそこから導かれるという立場である．これにたいして,『数の概念』における定義は，最初から負数も含めた整数の定義である．

また，高木貞治は「我々の整数は，物の数でもなく，物の順序を示すものでもない」(『数の概念』）という立場で整数を定義する．その立場では，数とはいわゆる基数としての数，また順序数としての数のいずれでもない．高木貞治が上記公理系で定義した数が，集合論と結びついて基数ともなり，また順序を定めるものともなる．これは世界的にも他にない一般的な考え方である．

この歴史的，文化的な問題に関しては『数とは何か　そしてまた何であったか』[10] に詳しい．『数の概念』の公理系と，それにもとづく整数の定義をここに紹介する．

整数の公理を考えることは，我々の整数のすべての性質を導くのに，最小限どのような公理が必要であるかを考えることである．

定義 6　次の公理系を**整数の公理**という．集合 $\mathbb{Z}$ と写像 $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ が整数の公理を満たすとき，$(\mathbb{Z},\ \varphi)$ を整数空間，$\mathbb{Z}$ の要素を整数，$\mathbb{Z}$ をすべての整数の集合という．

1. φ は $\mathbb{Z}$ 上の全単射写像である．
2. $M \subset \mathbb{Z}$ かつ $\varphi(M) = M$ ならば $M = \mathbb{Z}$ である．
3. $\mathbb{Z}$ は無限集合である．

ここで集合 A が無限集合とは，A の真部分集合 B で，A と B の間に全単射が存在するものが存在することである．■

『数論初歩』のペアノの公理で $+1$ の操作にあたるのが φ である．高木の定義とペアノノ公理が結びつく．これから整数の諸性質を導くことは，基本的には『数論初歩』でやったのと同じことであるが，その骨子は次のようになされる．証明はつけないので，定理としては掲げない．

$\mathbb{Z}$ の要素 x に対して

$$x^+ = \varphi(x), \quad x^- = \varphi^{-1}(x)$$

とおく．また，$\mathbb{Z}$ の部分集合 M に対し

$$M^+ = \{x^+ \mid x \in M\}, \quad M^- = \{x^- \mid x \in M\}$$

とを記号を定める．$\mathbb{Z}$ の部分集合 K が

$$x \in K \to x^+ \in K$$

を満たすとき，K を**昇列**と言う．部分集合 L が

$$x \in L \to x^- \in L$$

を満たすとき，L を**降列**と言う．

整数の大小　集合の包含関係 $A \subset B$ は $A = B$ を含む．A が B の真部分集合であることを $A < B$ と書く．

$\mathbb{Z}$ の二つの要素 $a,\ b$ に関して次のいずれか一つが成立する．

$$K(a) > K(b), \quad L(a) < L(b)$$
$$K(a) = K(b), \quad L(a) = L(b)$$
$$K(a) < K(b), \quad L(a) > L(b)$$

それぞれに応じて $a,\ b$ の大小を

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

と定める．

$\leqq$ で $<$ または $=$ が成り立つ記号とすれば，$\leqq$ は順序の定義 4 に従う．つまり整数の大小関係 $\leqq$ は順序であり，集合 $\mathbb{Z}$ は全順序集合である．しかし，この関係 $\leqq$ で $\mathbb{Z}$ は整列集合ではない．

数学的帰納法　数学的帰納法は次のように定式化される．

定理 5　　数 $x \in \mathbb{Z}$ に関する命題 $P(x)$ について，

(1) $P(a)$ が真となる $a \in \mathbb{Z}$ が存在する．

(2) $P(x)$ が真ならば $P(x^+)$ と $P(x^-)$ が真である．

という二命題が成立する．このとき，

すべての $x \in \mathbb{Z}$ に対して $P(x)$ は真である．

が成立する．■

整数の加法　演算を定義する．そのために $\mathbb{Z}$ から任意の一つの数を取り出し，それを記号 0 で表す．そして

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi^{-1}(0) = -1$$

と定める．

定理 6　　$\mathbb{Z}$ の要素 a を任意にとる．このとき

$$F_a(0) = a$$
$$F_a(x^+) = F_a(x)^+$$

となる $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $F_a(x)$ がただ一つ存在する．■

この証明は a に関する数学的帰納法でなされる．

$a = 0$ のとき．$F_0(x) = x$ とすると条件を満たし，かつこれ以外にないことが x に関する数学的帰納法で示される．その上で，$F_a(x)$ の存在を仮定して $F_{a^+}(x)$ と $F_{a^-}(x)$ を

$$F_{a^+}(x) = F_a(x)^+,\ F_{a^-}(x) = F_a(x)^-$$

と定める．これが条件を満たす証明はここではおく．こうしてその存在が確定した $F_a(x)$ よって，x と a の和 $x + a$ を

$$F_a(x) = x + a$$

で定める．この演算を加法とする．この加法によって $\mathbb{Z}$ は可換群になることが示される．

整数の乗法

定理 7　$\mathbb{Z}$ の要素 a を任意にとる．このとき

$$G_a(0) = 0$$
$$G_a(x^+) = G_a(x) + a$$

となる $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $G_a(x)$ がただ一つ存在する．■

$G_a(x)$ よって，x と a の積 xa を

$$G_a(x) = xa$$

で定める．

この演算を乗法とする．乗法は可換であり単位元 1 をもつ．逆元はもたない．加法と乗法に関して分配法則が成り立つ．つまり整数 $\mathbb{Z}$ は環である．

この順序と演算に関して次の性質が成り立つ．

(i) $a \leqq b$ ならば任意の c に対し $a + c \leqq b + c$.

(ii) $a \leqq b$ ならば $0 \leqq c$ である c に対し $ac \leqq bc$.

順序関係をもつので $\mathbb{Z}$ は順序環といわれる．

数の正負と絶対値　$0 < x$ である数 x を正の数といい，$x < 0$ である数 x を負の数という．$x > 0$ なら両辺に $-x$ を加えて $0 > -x$ が導かれる．さらに，負の数の積は正の数なることなどは，環と順序の基本性質から導かれる．

例 1.4　$x,\ y \in \mathbb{Z}$ に対して $(-x)(-y) = xy$ である．■

証明

(1)

$$x = 1 \times x = (0+1) \times x = 0 \times x + 1 \times x = 0 \times x + x$$

$$\therefore \quad 0 \times x = 0$$

(2)

$$0 = 0 \times x = \{1 + (-1)\} \times x = 1 \times x + (-1) \times x = x + (-1) \times x$$

$$\therefore \quad (-1) \times x = -x$$

(3)

$$x + (-x) = 1 \times \quad x + (-1) \times \quad x = \{1 + (-1)\} \times x = 0 \times x = 0$$

$$\therefore \quad -(-x) = x$$

ところが

$$-(-x) = (-1) \times \{(-1) \times x\} = \{(-1) \times (-1)\} \times x$$

なので

$$\{(-1) \times (-1)\} \times x = x$$

$x=1$ とすると

$$(-1)\times(-1)=1$$

よってまた

$$(-x)\times(-y)=(-1)\times x\times(-1)\times y=\{(-1)\times(-1)\}\times x\times y=x\times y$$

$\square$

数 $x\in\mathbb{Z}$ に対して負でない数 $|x|$ を

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geqq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

で定め，x の**絶対値**という．

$x,\ y\in\mathbb{Z}$ に対して不等式

$$|x+y|\leqq|x|+|y|$$

が成り立つ．

その証明は次の補題による．$x,\ y\in\mathbb{Z}$ とする．

(i) $xy>0 \iff (x>0,\ y>0)$ または $(x<0,\ y<0)$.

(ii) $|x|^2=x^2$．$|xy|=|x|\,|y|$.

(iii) $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき，$x\leqq y \iff x^2\leqq y^2$.

(iv) $xy\leqq|xy|$．等号は $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ または $(x\leqq 0,\ y\leqq 0)$ のとき．

証明は略する．よって

$$\begin{aligned} & |x+y|\leqq|x|+|y|\\ \iff\ & (x+y)^2\leqq(|x|+|y|)^2=x^2+2\,|xy|+y^2\\ \iff\ & xy\leqq|xy|\,. \end{aligned}$$

これは成立し，等号は $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ または $(x\leqq 0,\ y\leqq 0)$ のときである．

これを三角不等式という．三角不等式の成り立つ絶対値が定義されると，これを用いて距離が定義される．つまり 2 数 x と y の距離を

$$|x-y|$$

で定める．

有理数の構成　整数の集合 $\mathbb{Z}$ を用いて有理数の集合 $\mathbb{Q}$ を構成しよう．

$\mathbb{Z}$ を整数の集合とする．次のような整数の組の集合を考える．

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\{\ (a,\ b)\mid a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\}$$

この集合の二つの要素 $(p,\ q)$，$(a,\ b)$ に対し，同値関係を，

$$(p,\ q)\sim(a,\ b) \quad\iff\quad pb=qa$$

で定める．このとき

$$(p,\ q){\sim}(a,\ b)\ \text{かつ}\ (a,\ b){\sim}(s,\ t) \quad \Rightarrow \quad (p,\ q){\sim}(s,\ t)$$

が成り立つ．実際

$$pb = qa\ \text{かつ}\ at = bs \quad \Rightarrow \quad ptab = qsab$$

$ab \neq 0$ なので $pt = qa$ である．また，$a \neq 0$ に対して

$$(ap,\ aq) = (p,\ q)$$

も成り立つ．従って「∼」は同値関係である．

定義 7　集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ のこの同値関係∼での商集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ／∼ を，有理数の集合といい，$\mathbb{Q}$ と記する． ■

$\mathbb{Q}$ の要素 $a,\ b$ に対し自然な形で和 $a+b$ と積 ab が定まる．こうして集合 $\mathbb{Q}$ は次のような量の要請をすべて満たしている．

まず全順序集合である．つまり $\mathbb{Q}$ は全順序集合 4 である．つまり，二つの有理数 $\dfrac{q}{p},\ \dfrac{t}{s}$ に関して，

$$\frac{q}{p} < \frac{t}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n (\in \mathbb{N});\, qs + n = pt$$

と定める．負の有理数，正負の有理数の順序も通常の大小に一致するようにする．これが全順序であることが示され，有理数体は全順序集合である．

そして $\mathbb{Q}$ は体である．つまり二つの演算，加法と乗法が定義され次の性質を満たす．

(i) 2 つの演算は結合法則を満たす．

$$(a+b)+c = a+(b+c)\ ,\quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

(ii) 加法は可換である．$a+b = b+a$ が成り立つ．

(iii) $a+e = a$，$a \times f = f \times a = a$ となる要素 e と f が存在する．e を加法の単位元といい，通常 0 と書く．f を乗法の単位元といい，通常 1 と書く．

(iv) $a + x = 0$ となる x が存在する．これを a の加法の逆元といい，$-a$ と書く．

(v) 0 でない要素 a に対して $a \times x = 1$ となる x が存在する．これを a の乗法の逆元といい，a^{-1} と書く．

(vi) 加法と乗法について分配法則が成り立つ．

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c\ ,\quad (b+c) \times a = b \times a + c \times a$$

(vii) 積が可換である．$a \times b = b \times a$ が成り立つ．

この順序と演算に関して整数と同様に和および正数の積は順序を保存する．以上を満たす構造をもつ集合を**順序体**という．

有理数の稠密性　有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は任意の要素 $a,\ b\ (a<b)$ に対して，

$$a<c<b$$

となる $c \in \mathbb{Q}$ が存在する．

実際，

$$a+a<a+b<b+b$$

つまり $2a<a+b<2b$ で，2 の乗法に関する逆元 $\dfrac{1}{2}$ をもちいて $c=\dfrac{1}{2}(b+c)$ とおけば c が条件を満たす．

このような集合は**稠密**であるといわれる．こうして有理数は稠密な全順序体である．

2　実数の構成

2.1　連続の公理

実数への要請　実数，これが解析学が展開されるもっとも基礎の部分をなす．実数に求められる性質は，全順序体であるということに加えて，以下の内容が加わる．今はまだこのような性質をもつ数学的対象としての実数が存在するかどうかはわからない．それを踏まえたうえで，以下，実数を $\mathbb{R}$ で表す．

連続性　実数はまず順序体でなければならない．しかし順序体ということでいえば，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ もまた順序体である．同じ順序体で有理数と実数を分けるのは連続性である．

連続とはいうまでもなく「つながっている」ということである．この世界が連続であるかどうか，それはわからない．物質に最小の単位があるのであれば，それが素粒子であれ，より小さいものであれ，その単位以上には分解できないのだから，棒を二つに切るのに任意のところできるというわけにはいかないことになる．切断に関して棒が連続であるとはいえない．

移動という観点から見れば，あそこからここまで不連続に移動したとは考えられないように思われる．途中を飛ばして移動できるとは思われないからだ．しかしこれも連続な座標系が，連続な時間とともに固定されていることを前提にするからいえるのである．もし時間が不連続なら，移動が連続であることに意味はない．

このように連続という概念は，考えれば考えるほど難しい．連続について深く考えようとする人は『無限と連続』(遠山啓，岩波新書) のような書をぜひとも読んでみてほしい．

数学では現実世界の連続性に関する思弁的な議論はしない．数学の対象としての連続なものを準備し，それを用いてこの世界を近似してつかむということだ．準備された連続なものを用いて現実を近似するのである．普通は $\sqrt{2}$ を有理数 1.4142 で近似するという．実は実数を準備しそれを用いてこの世界を連続な世界として近似するのだ．近似する側の実数は，そのために何が要請されるのか．

上限, 下限　上界，下界は定義 5 で定めた．つまり，順序体 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A がある．A の任意の要素 a に対して

$$a \leqq r$$

となる実数 r を A の**上界**というのであった．

ここでさらに，上界が存在することを**上に有界**という．上界に最小値が存在すれば，それを A の**上限**といい $\sup A$ と表す．

同様に，下界が存在することを**下に有界**という．下界に最大値が存在すれば，それを A の**下限**といい $\inf A$ と表す．

連続の公理

定義 8　次の公理を**連続の公理**という．

順序体の空でない部分集合 A が上に有界であるなら，A の上限 $\sup A$ が存在する．

連続の公理を満たす順序体を実数体と言い $\mathbb{R}$ と記す．その要素を**実数**という．■

一方，有理数は連続の公理を満たさない．それは次の例でに示される．

例 2.1　x に関する条件 $\varphi(x)$ を

$$\varphi(x) : x^2 < 2,\ \text{または}\ x < 0$$

とする．条件 $\varphi(x)$ を用いて有理数 $\mathbb{Q}$ の部分集合 A と実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 B をそれぞれ

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid \varphi(x), x \in \mathbb{Q}\} \\ B &= \{x \mid \varphi(x), x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

とする．$\mathbb{Q}$ の中で A の上限は存在しない．

もし $\sup A$ が存在したとしそれを α とする．α は，$x^2 < 2$，または $x < 0$ であるようなすべての有理数 x に対し $x \leqq \alpha$ となるなかで最小の数である．$x = 1$ も $x^2 < 2$ なので $0 < 1 \leqq \alpha$ である．

ここで $\alpha^2 < 2$ とする．自然数 n に対して

$$\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - \alpha^2$$

なので，α が固定されるときそれに応じて上記不等式がなり立つように n をとることができる．$x = \alpha + \dfrac{1}{n}$ は A の要素であるが $x \leqq \alpha$ がなり立たない．これは α の条件に反する．

よって $\alpha^2 \geqq 2$ である．次に $\alpha^2 > 2$ とする．

$$\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 - 2 > \frac{2\alpha}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$\alpha^2 - 2 > 0$ なのでこれを満たし，かつ $\alpha - \dfrac{1}{n} > 0$ となる n が存在する．

正の有理数 x が $x^2 < 2$ を満たせば $x^2 < \left(\alpha - \dfrac{1}{n}\right)^2$ となり両辺正なので $x < \alpha - \dfrac{1}{n}$ である．これは α の最小性に反する．

よって $\alpha^2 = 2$ である．ところがこれを満たす有理数は存在しないことは整数の範囲で証明される．つまり $\mathbb{Q}$ に $\sup A$ は存在しない．

ここで用いた「n を大きくすれば $\dfrac{1}{n}$ がいくらでも小さくなる」ことは $\mathbb{Q}$ におけるアルキメデスの原則から導かれる．それは後で明確にする．

実数の公理によって $\mathbb{R}$ の中で B の上限は存在する．それを β とすると同様の考察で $\beta^2 = 2$ となる数であり，この数のことを $\sqrt{2}$ と記するのだった．

実数 $\mathbb{R}$ これが基礎である．まずこの定義からただちに導かれるアルキメデスの原則を証明しよう．

アルキメデスの原則　次の定理を**アルキメデスの原則**という.『解析概論』では「アルキメデスの原則」『量の世界ー構造主義的分析』(銀林浩　著) では「アルキメデスの公理」といい，また手元の微積の参考書では「アルキメデスの性質」となっている.

どのような公理系を採用するかで，この命題の位置づけが変わる．しかし，どのような公理系を採用しようと，そのなかで成立することが要請される．つまり公理系をどのようにするのかということよりも一般的な命題である．それでここでは『解析概論』の言葉を使う.

定理 8 (アルキメデスの原則)　任意の正の実数 p と r に対して $r < np$ となる自然数 n が存在する.　■

証明　背理法で示す．命題の否定は

任意の自然数 n に対して，$np \leqq r$ となる正の実数 p と r が存在する.

である．いいかえると

$$n \leqq \frac{r}{p}$$

これは実数の部分集合である自然数の集合 $\mathbb{N}$ が上に有界であることを意味している．よって実数の公理により $\sup \mathbb{N} = a$ が存在する.

任意の自然数 n に対して $n+1$ も自然数であるから $n+1 \leqq a$．ゆえに

$$n \leqq a - 1$$

これは $a-1$ も $\mathbb{N}$ の上界であることを示しており，a が $\mathbb{N}$ の最小上界であることと矛盾した．□

注意 2.1　アルキメデスの原則それ自体は有理数でも成り立つ．有理数の構成で定めた順序に関して $\mathbb{Q}$ はアルキメデスの原則を満たす.

実際，任意の正の二つの有理数 $\dfrac{q}{p} < \dfrac{t}{s}$ に関して $\dfrac{t}{s} < n \cdot \dfrac{q}{p}$ となる自然数 n が存在することは

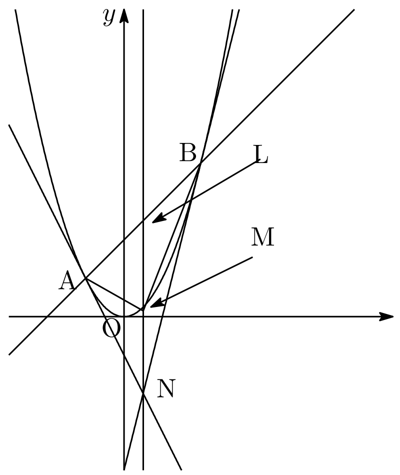
$$qs < pt \text{ のとき } pt < nqs$$

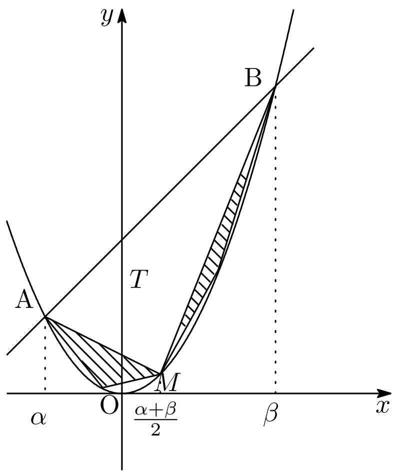
となる n が存在するということと同値になり，pt を qs で割った商に 1 加えた数を n とすれば条件が満たされることからわかる．負の有理数に関してもこれをもとに示され，有理数は通常の大小関係に関してアルキメデスの原則を満たす順序体である.

アルキメデスの原則と，基本数列の収束，つまり完備性とあわせることで，実数の公理と同等になること，ここに二つの構成方法の同等性がある.

アルキメデスの求積法　なぜこれをアルキメデスの名を冠して言うのか．それは次のような考察をアルキメデスが行ったからである．これは『解析概論』に詳しく述べられている．ここにこの定理の成立が要請される根拠があるといえる.

アルキメデスの時代は，もちろん座標の方法もないし，関数を式に表すことも知られていない．彼は放物線で囲まれた図形の面積を次のように求めた．一応座標に入れて説明する．アルキメデスはもっと図形的にやった.





$y=x^2$ 上の点 A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ 4)$ をとる．線分 AB と放物線で囲まれた図形の面積を S としよう．

x 座標が A と B の x 座標の中点と一致する点を M，A と B での接線の交点を N とする．このとき一般に

$$\triangle\mathrm{ABM}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABN}$$

になる．こういう放物線の性質を彼はよく知っていた．だから

$$\triangle\mathrm{ABM}<S<2\triangle\mathrm{ABM}$$

である．そこで，△ABM の面積を T とする．右側の図の斜線部分の面積はちょうど $\dfrac{1}{4}T$ であることも知っていた．ここで斜線部分に対して同じ操作を行うとさらに $\dfrac{1}{4^2}T$ 面積が増える．このようにして彼は

$$T+\frac{1}{4}T+\frac{1}{4^2}T+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{4^n}T<$$
$$S<T+\frac{1}{4}T+\frac{1}{4^2}T+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{2}{4^n}T$$

この結果

$$\frac{4}{3}T\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)<S<\frac{4}{3}T\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)+\frac{1}{4^n}T$$

を得る．つまり

$$\left|S-\frac{4}{3}T\right|<\frac{2}{3}T\cdot\frac{1}{4^n}$$

となる．問題がここで生じた．n は任意であるとき，これから

$$S=\frac{4}{3}T$$

と結論してよいのか．アルキメデスは次のように考えた．

$n<4^n$ なので，不等式は正の定数 a を用いて

$$\left|S-\frac{4}{3}T\right|<\frac{a}{n}$$

と書ける．ここで $\left|S-\frac{4}{3}T\right| \neq 0$ であるとしよう．不等式は任意の n で

$$n\left|S-\frac{4}{3}T\right| < a$$

でなければならないことになるが，$\left|S-\frac{4}{3}T\right| \neq 0$ であるかぎり

$$a < n\left|S-\frac{4}{3}T\right|$$

となる n が存在する（アルキメデスの原則！）ので矛盾である．

$T=\frac{27}{8}$ だから

$$S=\frac{4}{3}\cdot\frac{27}{8}=\frac{9}{2}$$

である．アルキメデスが行った考察の根拠こそ，実数の連続性であった．

『数の概念』の定義　高木貞治が『数の概念』でのべた連続体の定義は次のもである．これはここまでの内容を整理する意味があるので，言葉の意味を再定義してそれを述べる．

定義 9

(1) 集合 X の任意の 2 つの元 a と b に関係 $a<b$ が定まり，次の条件を満たすとき，A を**全順序集合**または**線型順序集合**という．■

　１．$a<b$，$a=b$，$b<a$ のいずれか一つに定まる．

　２．$a<b$ かつ $b<c$ ならば，$a<c$ である．

(2) 全順序集合 X の元 a で，任意の元 x に対して $x=a$ または $x<a$ のいずれかが成り立つものが存在するとき，A は**上に有界**という．対称的に**下に有界**も定義される．■

(3) 全順序集合 X を二つの集合 Y と Z に次の条件を満たすように分ける．

$$X=Y\cup Z,\ a\in Y \text{ かつ } b\in Z \text{ なら } a<b$$

Y に最大の元があるか，または Z に最小の元があるか，いずれか一方が成立するとき，X は連続であるという．

ただし，Y の最大の元とは，$a\in Y$ で任意の Y の元 y に対して $y<a$ または $y=a$ が成り立つものをいう．■

モデルの存在　では，実数の公理をすべて満たす集合は実際に存在するのか．そもそもある数学的対象が存在するとはどのようなことをいうのか．その問いに対して現代の数学は，実数の公理をすべて満たすモデルが構成できるとき存在するとするのである．

　自然数，整数，有理数は人間が数として考えるものであり，その公理とは，これらの数の構造を公理として定式化したものである．数の存在は，現実の人間の数にかかわる生活のなかにあると言うこともできる．数学的には，集合の公理 6．の無限公理は，まさに自然数の存在を一般化して公理としたものである．

それに対して，実数は理論からの要請ではないだろうか．であるなら，高校解析の基礎を築くという立場からは，有理数体 $\mathbb{Q}$ を出発点として実数が構成できることを示すことが基本である．

もちろん，一般の順序体で考え，実数の公理から導かれるいくつかの定理の相互関係を解明することも重要な問題なのであり，それは後に触れる．

実数の公理を満たすモデルを二つの方法で構成しよう．

実数モデルの一つの作り方はカントールによる．それは数列を用いる．したがってまず数列に関して必要なことを準備しなければならない．

2.2 数列の方法

数列 整数，自然数，あるいは自然数と 0 の集合などから他の数学的対象への写像 f を数列という．ここでは，自然数の集合，あるいは自然数と 0 の集合から実数への写像を考える．自然数 n に対する値 $f(n)$ を a_n のように表し**一般項**という．$f(1) = a_1$ を**初項**という．

数列の収束 数列 $\{a_n\}$ が数 α に収束することは，高校数学では「n がかぎりなく大きくなるとき，a_n は α にかぎりなく近づく」と理解し，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書き表す．だが「かぎりなく」というのはどういうことだろうか．これは必ずしも明確ではない．また,「$n \to \infty$」は「n がいくらでも大きくなる」と理解する．しかし「いくらでも大きくなる」もまた必ずしも明確ではない．

収束や極限値という概念の定義のなかの言葉にはこのような「無限」が潜んでいる．無限という概念は，人間にとって魅力あるものだが，集合論で見たように危険も伴う．収束や極限値を定義する言葉のなかに「無限」が現れることを避けることはできないのか．

$a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ を考えよう．これは 1 に収束する．収束するということは，n を大きくすれば a_n がいくらでも 1 に近くなるということだ.「いくらでも」ということは，どんな小さい正の実数 ϵ が指定されても，$|a_n - 1|$ が ϵ より小さくなるように n を大きくできるということではないか．1 と a_n を $\dfrac{1}{100}$ よりもっと近づけよ，といわれれば n を 100 より大きくとればよい．$\dfrac{1}{10000}$ より小さくしたければ 10000 より大きくとればよい.「どんなに小さい」というが「小さい」ことは関係ない.「何が指定されても」ということだ．

任意の正の実数 ϵ 対し，$n > N$ なら $|a_n - 1| < \epsilon$ となる N が存在する．

この命題のなかには「かぎりなく」や「いくらでも」という言葉はない．これをもって収束の定義としてはどうだろうか．

定義 10 (数列の収束) 数列 $\{a_n\}$ と数 α がある．任意の正の実数 ϵ に対し，番号 N で

$$n > N \text{ なら } |a_n - \alpha| < \epsilon$$

となるものが存在するとき，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するという． ■

α のことを極限値といい．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書く．

「任意の正の実数 ϵ に対して，番号 N で…となるものが存在」というところは「どのような小さい」正の実数 ϵ が指定されても，それに対して「つねに」番号 N が存在する，ということを意味している．だが数学ではそのような副詞は必要ない．

いくつかの定理　数列の極限に関し今後必要なことをいくつか示していこう．上記の論法を用いると．これを厳密に論証することができる．

定理 9　数列 $\{a_n\}$ および数列 $\{b_n\}$ が収束して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ (ただし k は定数)　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (ただし，$b_n \neq 0,\ \beta \neq 0$)

が成り立つ．■

証明

(1) $\forall\epsilon\ (>\ 0)$ に対し自然数 N が存在して，$n\ >\ N$ なら $|a_n - \alpha|\ <\ \dfrac{\epsilon}{|k|}$ となる．このとき $|ka_n - k\alpha| < \epsilon$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$$

(2) $\forall\epsilon\ (> 0)$ に対し自然数 N が存在して，$n > N$ なら $|a_n - \alpha| < \dfrac{\epsilon}{2}$，$|b_n - \beta| < \dfrac{\epsilon}{2}$ となる．このとき

$$|a_n \pm b_n - (\alpha \pm \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

なので，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$$

(3) 数列 $\{b_n\}$ は収束するので，$n > N_1$ なら $|b_n| < c$ となる正定数 c と自然数 N_1 が存在する．$\forall\epsilon\ (> 0)$ に対し自然数 N_2 が存在して，$n > N_2$ なら $|a_n - \alpha| < \dfrac{\epsilon}{2c}$，$|b_n - \beta| < \dfrac{\epsilon}{2\,|\alpha|}$ となる．$N \geqq \mathrm{Max}\{N_1,\ N_2\}$ とすると，$n > N$ のとき

$$\begin{aligned}
& |a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n b_n - \alpha b_n + \alpha b_n - \alpha\beta| \\
\leqq\ & |b_n|\,|a_n - \alpha| + |\alpha|\,|b_n - \beta| \\
<\ & c\,|a_n - \alpha| + |\alpha|\,|b_n - \beta| \\
<\ & c \cdot \frac{\epsilon}{2c} + |\alpha| \cdot \frac{\epsilon}{2\,|\alpha|} = \epsilon
\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ を示せば，(3) と併せて (4) は成立する．$\beta \neq 0$ なので $n > N_1$ なら $c < |b_n|$ となる N_1 と正定数 c が存在する．つまり $\dfrac{1}{|b_n|} < \dfrac{1}{c}$ である．

$\forall\epsilon\ (>0)$ に対して $n > N_2$ なら

$$|b_n - \beta| < c\,|\beta|\,\epsilon$$

となる N_2 が存在する．$N > \mathrm{Max}\{N_1,\ N_2\}$ にとる．$n > N$ なら

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n\beta|} < \frac{c\,|\beta|\,\epsilon}{c\,|\beta|} = \epsilon$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

□

定理 10 (はさみうちの原理)　三つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の各項の間に

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

がなり立ち，かつ数列 $\{a_n\}$ および数列 $\{b_n\}$ が同じ値 α に収束するとする．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

このとき，数列 $\{c_n\}$ も収束し，極限値は α である．■

証明　任意の正の実数 ϵ に対して $n > N$ ならば

$$|a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{4}$$

$$|b_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{4}$$

となる N が存在する．このとき

$$\begin{aligned}
|c_n - \alpha| &= |c_n - a_n + a_n - \alpha| \\
&\leqq |c_n - a_n| + |a_n - \alpha| = c_n - a_n + |a_n - \alpha| \\
&\leqq b_n - a_n + |a_n - \alpha| = |b_n - \alpha - (a_n - \alpha)| + |a_n - \alpha| \\
&\leqq |b_n - \alpha| + 2|a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon
\end{aligned}$$

よって数列 $\{c_n\}$ 収束し，極限は α である．□

カントールの方法　カントールは，以上の準備の下，基本数列を定義し，そのある同値類の集合として実数を定義した．

定義 11 (基本数列)　数列 $\{a_n\}$ が性質

任意の正の実数 ϵ に対し，$N < m,\ n$ なら $|a_m - a_n| < \epsilon$　となる N が存在する．

をもつとき，これを**基本数列**または**コーシー数列**という．■

集合 R を有理数からなる基本数列 $\{a_n\}$ の集合とする．R に属する二つの基本数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において

$$\lim_{n\to\infty}|a_n - b_n| = 0$$

が成り立つとき，二つの基本数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ には関係$\sim$が成り立つとする．関係$\sim$は同値関係である．

(i) $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_n| = 0$ より，$\{a_n\} \sim \{a_n\}$.

(ii) $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$ より $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ なら $\{b_n\} \sim \{a_n\}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} |a_n - c_n| \leqq \lim_{n\to\infty} (|a_n - b_n| + |b_n - c_n|)$ より $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, $\{b_n\} \sim \{c_n\}$ なら $\{a_n\} \sim \{c_n\}$.

したがってこの関係$\sim$による商集合 $R/\sim$ が定義される．数列 $\{a_n\}$ の属する同値類を $\overline{\{a_n\}}$ のように表そう．

この商集合はまだ単に数列の同値類の集合でしかない．まずこれを順序体にしなければならない．次の手順でなされる．以下方針のみとし証明は略する．

(1) 和と積を

$$\overline{\{a_n\}} + \overline{\{b_n\}} = \overline{\{a_n + b_n\}}, \quad \overline{\{a_n\}} \cdot \overline{\{b_n\}} = \overline{\{a_n b_n\}}$$

で定義する．類の代表のとり方によらず定まる (これを"well-defined"という).

$a_n = p$ のような定数数列を $\{p\}$ のように表すことにする．加法の単位元は $\overline{\{0\}}$，乗法の単位元は $\overline{\{1\}}$ であり，このときそれぞれ逆元は

$$-\overline{\{a_n\}} = \overline{\{-a_n\}}, \quad \overline{\{a_n\}}^{-1} = \overline{\{a_n^{-1}\}}$$

となる．ただし $\overline{\{a_n\}}^{-1}$ を考えるときは，数列 $\{a_n\}$ は 0 には収束しないときであり，$\overline{\{a_n^{-1}\}}$ においては 0 の項を除いた部分列を改めて数列 $\{a_n\}$ とすることにする．

これによって四則演算が定義され，商集合 $R/\sim$ は体となること，つまり実数の公理の I) が満たされる．有理数 α を数列 $\{\alpha\}$ の属する類と同一視することで $\mathbb{Q} \subset R/\sim$ とできる．

(2) 順序を次のように定義する．

$$\begin{aligned} & \overline{\{a_n\}} < \overline{\{b_n\}} \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists N(\in \mathbb{N}), \exists \epsilon(>0,\ \in \mathbb{Q}) \quad ; \quad b_n - a_n > \epsilon \ (\forall n > N) \end{aligned}$$

この定義が well-defined であることも示される．このように定義された順序は順序の公理を満たす．

実数の公理 II) が成り立つことがわかった．つまり商集合 $R/\sim$ は順序体である．

以下はこの順序体を $\mathbb{R}$ で表し，$\mathbb{R} = R/\sim$ の要素を α のように一文字で表す．

定理 11　$\mathbb{R}$ はアルキメデスの原則を満たす． ■

証明　アルキメデスの原則を満たさないということは，$\mathbb{R}$ に埋め込まれた自然数の集合 $\mathbb{N}$ が上に有界であることを意味する．したがって，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha < N$ となる自然数 N が存在すること，いいかえれば $\mathbb{R}$ のなかで $\mathbb{N}$ が有界でないことを示せばよい．

そこで α を定義する基本数列 $\{a_n\}$ をとる．これは有界であるから $a_n < k$ $(\forall n)$ となる有理数 k が存在する．ところが有理数体 $\mathbb{Q}$ はアルキメデスの原則を満たすので，$k < N$ となる自然数 N が存在する．つまり $a_n < N$ $(\forall n)$ これは $\mathbb{R}$ のなかに埋め込まれた N について $\alpha < N$ となることを意味しており，$\mathbb{R}$ のなかで $\mathbb{N}$ が有界でないこと示された． □

最後に $\mathbb{R}$ が実数の公理を満たすことを示す．

定理 12　$\mathbb{R}$ は連続性の公理を満たす．つまり，A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．集合 A が上に有界ならば A の上限 $\sup A$ が存在する．■

証明　上限の存在を示すために，$u \in A$ を適当にとり，$A' = \{x \mid x \geqq u\}$ として A' に上限が存在することを示せばよい．したがってはじめから A は下にも有界であるとする．$\mathbb{R}$ がアルキメデスの原則を満たすことは示されているので，$A \subset [a,\ b]$ となる有理数 a と b が存在する．

ここで A の上限を構成する．閉区間の列 $[a_n,\ b_n]$ で次の性質をもつものを定める．

(i) $a_n,\ b_n \in \mathbb{Q}$.

(ii) b_n は A の上界.

(iii) a_n は A の上界ではない.

これを次のように帰納的に定める．

1. $[a_0,\ b_0] = [a,\ b]$．これは条件を満たす．
2. $[a_n,\ b_n]$ は条件を満たすとする．
   $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ が A の上界なら $a_{n+1} = a_n$，$b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$，$\dfrac{a_n+b_n}{2}$ が A の上界ではないなら $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1} = b_n$ と定義する．

この a_{n+1}，b_{n+1} は (i)〜(iii) を満たしている．

基本数列の例??の (2) の証明と同様の方法で，数列 $\{a_n\}$ が基本数列であることを示すことができる．

$0 \leqq a_{n+1} - a_n \leqq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ であるから任意の正整数 k に対して

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &\leqq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leqq (b-a)\left(\frac{1}{2^{n+k}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqq \frac{b-a}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = \frac{b-a}{2^n} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ がアルキメデスの原則を満たすので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ である．したがって数列 $\{a_n\}$ は基本数列である．

数列 $\{a_n\}$ の属する類，つまり $\mathbb{R}$ の要素を α とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$ であるから，数列 $\{b_n\}$ も同じ類に入る．

α は A の上限である．$A \leqq b_n$ なので $A \leqq \alpha$ である．一方，任意の ϵ に対して $|a_n - \alpha| < \epsilon$，つまり $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ となる n が存在する．a_n は上界ではないので $\alpha - \epsilon$ は上界ではない．これは α が A の上限であることを意味している．□

このようにして実数の公理をすべて満たす集合が構成できたのである．したがって，この実数を用いて自然現象や社会現象を連続なものとして近似的につかみ，その解析をすることが保障されたのである．

実数の完備性　この構成法によって，次の完備性が示される．実数においてはこの逆もなり立つのである．

定理 13　実数からなる数列が収束するための必要十分条件は，数列が基本数列であることである．■

証明　まず収束数列は基本数列であることを確認しよう．数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとする．任意の正の実数 ϵ に対して $n > N$ なら

$$|a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

となる N がある．$m,\ n > N$ のとき

$$|a_m - a_n| = |a_m - \alpha + \alpha - a_n| \leqq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

となる．よって数列 $\{a_n\}$ は基本数列である．

逆を示す．数列 $\{a_n\}$ が基本数列であるとする．実数 1 に対し，$N < m,\ n$ なら

$$|a_m - a_n| < 1$$

となる N が存在する．$n_0 = N + 1$ とする．$m \geqq n_0$ なら $|a_m - a_{n_0}| < 1$ がなり立つので

$$|a_m| < |a_{n_0}| + 1$$

となり，すべての a_n について

$$|a_n| \leqq \mathrm{Max}\{\ |a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_{n_0}|,\ |a_{n_0}| + 1\ \}$$

がなり立つ．つまり数列 $\{a_n\}$ は有界である．

集合 A_n を

$$A_n = \{\ a_m \mid m \geqq n\}$$

とする．実数の部分集合 A_n は有界なので上限と下限が存在する．

$$b_n = \inf A_n,\ c_n = \sup A_n$$

とおく．集合 A_n の要素は n が増加すれば減少するので，数列 $\{b_n\}$ は単調増加，数列 $\{c_n\}$ は単調減少である．よって数列 $\{c_n - b_n\}$ は単調減少である．

一方，数列 $\{a_n\}$ は基本数列なので，任意の ϵ に対して，$m \geqq N$ なら

$$a_N - \epsilon < a_m < a_N + \epsilon$$

となる．これから $a_N - \epsilon$ と $a_N + \epsilon$ は集合 A_N の下界と上界である．したがって

$$a_N - \epsilon \leqq b_N \leqq c_N \leqq a_N + \epsilon$$

よって $n > N$ なら

$$0 \leqq c_n - b_n \leqq c_N - b_N \leqq 2\epsilon$$

つまり

$$\lim_{n \to \infty} (c_n - b_n) = 0$$

区間縮小法の原理 (定理 18) によって数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{c_n\}$ は同じ値 α に収束する．

$$b_n \leqq a_n \leqq c_n$$

なので，数列 $\{a_n\}$ も α に収束する． □

実数の集合においては，収束数列であることと，それが基本数列であることが同値である．有理数の集合においては同値ではない．これが同値であるという実数の集合の性質を**完備性**という．

2.3 切断の方法

デデキントの方法 有理数 $\mathbb{Q}$ が二つの集合 A と B の和集合で，A の任意の要素 a と B の任意の要素 b の間につねに $a < b$ が成り立っているとき，これを $(A|B)$ と書いて「切断」と呼ぶ．A を $(A|B)$ の下組，B を上組という．

$A_1 = \{\ x \mid x \leqq 3,\ x \in \mathbb{Q}\},\ B_1 = \{\ x \mid 3 < x,\ x \in \mathbb{Q}\ \}$ とする．この切断 $(A_1|B_1)$ は有理数 3 を定める．$A_2 = \{\ x \mid x < 3,\ x \in \mathbb{Q}\},\ B_2 = \{\ x \mid 3 \leqq x,\ x \in \mathbb{Q}\ \}$ とする．としたときも切断 $(A_2|B_2)$ は有理数 3 を定める．これは理解できる．

$A_3 = \{\ x \mid x \leqq 0$ または $x^2 < 2,\ x \in \mathbb{Q}\ \},\ B_3 = \{\ x \mid x > 0$ かつ $2 \leqq x^2,\ x \in \mathbb{Q}\ \}$ とすると，$x^2 = 2$ となる有理数は存在しないのだから，この境目になる有理数はない．実数ならいわゆる $\sqrt{2}$ が対応するが，有理数のなかではこの切断の境目となる数は存在しない．しかし逆に見ると，有理数だけを用いて $\sqrt{2}$ が指示できている．有理数を用いて実数を指示できる．それなら有理数から実数を構成する方法として，切断の集合

$$\{\ (A|B)\ \}$$

を考えればよいのではないか．A から B か，B から A かへ 1 つの要素を動かしてそれを $A',\ B'$ とするとき $(A'|B')$ も切断になるなら

$$(A|B) \sim (A'|B')$$

とする．上の例では $(A_1|B_1) \sim (A_2|B_2)$ である．$x^2 = 2$ となる有理数はないのだから，$(A_3|B_3)$ はと同値なものは他にない．

切断の集合の同値関係 $\sim$ による商集合を $R_D = \{\ (A|B)\ \} / \sim$ とおく．

定理 14 集合 R_D には四則演算，大小関係が定義でき，実数の公理を満たす． ■

以下方針のみとし証明は一部を除き略する．

まず，R_D には有理数 $\mathbb{Q}$ が自然に埋め込まれる．また，$\mathbb{Q}$ の順序と整合する自然な順序が定義できる．

つまり，切断 $(A|B),\ (C|D)$ に対して異なる実数が定まるとする．したがって A と C は一方の要素を動かして他方になるということも，等しいこともない，とする．$A \subset C$ なら $(A|B) < (C|D)$，$C \subset A$ なら $(A|B) > (C|D)$ とすればよい．これによって R_D に順序が入る．

加法は次のように定めればよい．α と β がそれぞれ切断 $\alpha = (A,\ A')$，$\beta = (B,\ B')$ で定義されているとする．

$$A + B = \{\ a + b\ | a \in A,\ b \in B\ \}$$

とし，$A + B$ の補集合を $(A + B)'$ とするとき，$(A + B|(A + B)')$ は切断であることが示される．この切断で定まる R_D の要素を $\alpha + \beta$ と定める．これをもとに加法の逆元，0 などを構成する．この加法と順序は順序の公理を満たす．

ここでは積を定義し，それが定義になっていることを示そう．以下の定義は青空学園数学科の『解析概論』読書会における Kanney さんの定義であり，証明は南海によるものである．

定義 12 (切断の集合での積の定義) α の切断で 0 を含まない組を C_α，β のそれを C_β とし，$a \in C_\alpha$，$b \in C_\beta$ の積 ab の集合を $C_{\alpha\beta}$ とする．それはある切断の 0 を含まないほうの組である．この切断をもって積 $\alpha\beta$ を定義する． ■

これで積が定義できていることを示す．

切断が有理数のときは R_D と $\mathbb{Q}$ の切断を同一視し，具体的に考えるときは境界は上の集合に入れることにする．

$\alpha = (A|A')$，$\beta = (B|B')$ とする．以下集合はすべて $\mathbb{Q}$ の部分集合である．

1) $\alpha > 0,\ \beta > 0$ のとき．$C_\alpha = A' = \{x|x \geqq \alpha\}$，$C_\beta = B' = \{x|x \geqq \beta\}$．(順序は定義できているので有理数と無理数でも不等式は意味がある)．$C_{\alpha\beta}$ に対し，$K = C_{\alpha\beta}$ とおく．K の補集合を K' とする．$\forall k \in K,\ \forall k' \in K'$ に対し $k' < k$ を示せばよい．

   $k \neq k'$ なので，$k' < k$ を否定して $k < k'$ となったとする．$a \in C_\alpha$，$b \in C_\beta$ として $k = ab$ とする．$k' = \{(k'/ab)a\}b$ において，$k < k'$ より $k'/ab > 1$．よって $\{(k'/ab)a\} \geqq a \geqq \alpha$ となる．つまり $\{(k'/ab)a\} \in C_\alpha$．

   k' が C_α と C_β の要素の積で表せたので，$k' \in K'$ と矛盾．よって $k' < k$．つまり $(K'|K)$ は切断である．

2) $\alpha = 0,\ \beta > 0$ のとき．$C_\alpha = A = \{x|x < 0\}$，$C_\beta = B' = \{x|x \geqq \beta(> 0)\}$．そこで $K = C_{\alpha\beta}$ とおく．K の補集合を K' とする．$\forall k \in \mathbb{Q},\ k < 0, \forall b \in C_\beta$ に対して $k = b \times (k/b)$ とすれば $k/b \in C_\alpha$．よって K はすべての負の有理数を含む．明らかに 0 と正の有理数は含まない．よって $(K|K')$ は切断であり 0 に一致する．

3) $\alpha = 0,\ \beta < 0$ のとき．$C_\alpha = A = \{x|x < 0\}$，$C_\beta = B = \{x|x < \beta(< 0)\}$．そこで $K = C_{\alpha\beta}$ とおく．K の補集合を K' とする．$\forall k \in \mathbb{Q},\ k > 0, \forall b \in C_\beta$ に対して $k = b \times (k/b)$ とすれば $k/b \in C_\alpha$．よって K はすべての正の有理数を含む．明らかに 0 と負の有理数は含まない．よって $(K'|K)$ は切断であり 0 に一致する．(こうして構成されたものは 0 が下に含まれる切断になる．これと 0 のみを上に移した切断は同じものである)．

4) $\alpha > 0,\ \beta < 0$ のとき．$C_\alpha = A' = \{x|x \geqq \alpha\}, C_\beta = B = \{x|x < \beta\}$．$K = C_{\alpha\beta}$ とおく．K の補集合を K' とする．$\forall k \in K, \forall k' \in K'$ に対し $k \leqq k'$ を示せばよい．$k' < k$ となったとする．$k = ab$ とおく．$k' < k = ab < 0$ である．$k' = \{(k'/ab)a\}b$ とすると $k'/ab > 1$ より $\{(k'/ab)a\} > a \geqq \alpha$．よって $\{(k'/ab)a\} \in C_\alpha$．したがって k' が C_α と C_β の要素の積で表せたので，$k' \in K'$ と矛盾．よって $k < k'$．つまり $(K|K')$ は切断である．

5) $\alpha < 0,\ \beta < 0$ のとき．$C_\alpha = A = \{x|x < \alpha\}, C_\beta = B = \{x|x < \beta\}$．$K = C_{\alpha\beta}$ とおく．K の補集合を K' とする．$\forall k \in K, \forall k' \in K'$ に対し $k' < k$ を示せばよい．$k < k'$ となったとする．$k = ab$ とおく．$a < 0, b < 0, k > 0$ である．$k' = \{(k'/ab)a\}b$ とすると $k'/ab > 1$ より $\{(k'/ab)a\} < a < \alpha$．よって $\{(k'/ab)a\} \in C_\alpha$．したがって k' が C_α と C_β の要素の積で表せたので，$k' \in K'$ と矛盾．よって $k' \leqq k$．つまり $(K'|K)$ は切断である．

よって積が定義された． □

この積に関して結合法則が成り立ち，和との間で分配法則が成り立つ．

定理 15　R_D は連続のを満たす．つまり A を R_D の空でない部分集合とする．集合 A が上に有界ならば A の上限 $\sup A$ が存在する．■

証明　A は上に有界なので $\forall a \in A,\ a \leqq s$ となる s が存在する．s を定める切断を $(S|S')$ とする．

$$\forall (P|Q) \in A \quad \Rightarrow \quad P \subset S$$

である．集合 A に属する切断 $(P|Q)$ の下組の和集合 L をとる．

$$L = \bigcup_{(P|Q) \in A} P$$

とおく．$L \subset S$ であり，L の補集合を L' とすると

$$L' = \overline{\bigcup_{(P|Q) \in A} P} = \bigcap_{(P|Q) \in A} \overline{P} = \bigcap_{(P|Q) \in A} Q$$

となる．$(L \mid L')$ は切断である．この切断の定める実数を α とする．

$$\forall\,(P|Q) \in A,\, P \subset L$$

なので，α は A の上界である．一方，$\forall\,(P|Q) \in A,\, P \subset S$ より $L \subset S$．つまり

$$(L|L') \leqq (S|S')$$

となる．つまり $(L|L')$ は A の上界の最小値である．

$$\therefore \quad \alpha = \sup A$$

□

このようにして，R_D も実数の公理をすべて満たすことが示された．

定理 16　R_D の順序で R_D 自身に切断が定義される．この切断も同様に $(A|B)$ のように表す．$(A|B)$ が R_D の切断であるとは

$$A \cup B = R_D,\ A \cap B = \emptyset,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B\ ,\, a < b$$

このとき，R_D の切断では，A に最大値が存在するか B に最小値が存在するか，いずれかが成り立つ．■

証明　A は上に有界であるから上限 α が存在する．α が A に属せば α の最大値であり，B に属せば B の最小値である．□

このようにして R_D もまた実数の公理をすべて満たすことが示された．

2.4　二論は同等

二つの実数の構成法はずいぶん異なっている．

カントールによって基本数列を用いる構成では，数の大小関係 (順序) を一切使わず，二つの数の間の距離のみを用いている．つまり距離による完備化である．逆に順序は改めて定義しなければならなかった．そのうえで埋め込まれた有理数体の大小関係を用いてアルキメデスの原則が成り立つことを示し，それを用いて上限の存在を示した．

これに対して，デデキントの切断は，二つの有理数の間の距離 (長さ) のような概念を一切使わず，ただ数の大小関係 (順序) しか使わない．順序を用いた有理数の完備化である．したがってただちに上限の存在は示せた．つまりアルキメデスの原則は定義からの帰結である．

二つの理論は同等である．それを証明するために数列に関するいくつかの定理を示そう．

単調有界数列　まず単調で有界な数列の収束定理を証明しよう．このような数列を**単調増加有界数列**という．

定理 17 (単調増加有界数列)　実数からなる数列 $\{a_n\}$ は条件

$$a_n < a_{n+1}, \text{かつすべての } n \text{ に対して } a_n < M \text{ となる実 } M \text{ が存在する．}$$

が成り立つ．このとき数列 $\{a_n\}$ は収束する．■

証明　実数の集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は上に有界であるからその上限が存在する．

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \alpha$$

とおく．正数 ϵ に対して $\alpha - \epsilon$ は集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上界ではないから，ある番号 N で

$$\alpha - \epsilon < a_N \leqq \alpha$$

となるものが存在する．数列 $\{a_n\}$ は単調増加なので $n > N$ ならば

$$\alpha - \epsilon < a_N \leqq a_n \leqq \alpha < \alpha + \epsilon$$

つまり

$$|a_n - \alpha| < \epsilon$$

ゆえに $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ である．□

系 17.1　実数からなる数列 $\{a_n\}$ は，$a_n > a_{n+1}$，かつすべての n に対して，$a_n > M$ となる実数 M があるとする．このとき数列 $\{a_n\}$ は収束する．■

証明　$b_n = -a_n$ とおくことで定理 17 より明らかに成り立つ．□

定理と系を一言でいえば,「単調有界数列は収束する」ということである．

例 2.2

(1) $0 < r < 1$ のとき，任意の非負整数 k に対して

$$\lim_{n\to\infty} n^k r^n = 0$$

(2) a を正数とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

(3) $a > 1$ とする．

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

証明

(1) $a_n = n^k r^n$ とおく．

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k r^{n+1}}{n^k r^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k r$$

n が十分大きければこれは 1 以下である．実際

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^k r \leqq 1 \iff \frac{n+1}{n} \cdot r^{\frac{1}{k}} \leqq 1 \iff r^{\frac{1}{k}} \leqq n\left(1 - r^{\frac{1}{k}}\right)$$

アルキメデスの原則によって

$$r^{\frac{1}{k}} \leqq n_0\left(1 - r^{\frac{1}{k}}\right)$$

となる n_0 がある．

$$n_0 \leqq n \ \Rightarrow r^{\frac{1}{k}} \leqq n\left(1 - r^{\frac{1}{k}}\right) \iff a_n \geqq a_{n+1}$$

数列 $\{a_n\}$ は n_0 から先が単調減少で $a_n \geqq 0$ なので下に有界．極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が存在する．

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k r a_n$$

であり，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = 1$ なので

$$\alpha = r\alpha$$

$r \neq 1$ より $\alpha = 0$ である．つまり $\lim_{n\to\infty} n^k r^n = 0$ である．

(2) $a_n = \frac{a^n}{n!}$ とおく．

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1}$$

そこで $N(\in \mathbb{N})$ を $N > a - 1$ にとる．$n > N$ なら $n + 1 \geqq a$ となり，$a_{n+1} \leqq a_n$．数列 $\{a_n\}$ は N 項から単調減少で有界 $(a_n > 0)$ である．よって極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が存在する．一方 $a_{n+1} = \frac{a}{n+1} a_n$ なので $n \to \infty$ とすると，

$$\alpha = 0 \cdot \alpha = 0$$

すなわち $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ である．

(3) $a > 1$ なので

$$\sqrt[n]{a} \geqq \sqrt[n+1]{a}$$

すなわち数列 $\{\sqrt[n]{a}\}$ は単調減少有界数列である．極限値 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \alpha$ が存在する．$\alpha > 1$ と仮定し $\alpha = 1 + h$ $(h > 0)$ とおく．

$$\sqrt[n]{a} \geqq \alpha = 1 + h \quad (n \in \mathbb{N})$$

より

$$a \geqq (1 + h)^n > 1 + nh \quad (n \in \mathbb{N})$$

すべての $n(\in \mathbb{N})$ に対して $nh < a - 1$ となり，$h,\ a - 1 > 0$ であるからアルキメデスの原則と矛盾する．よって $\alpha = 1$ である．

$\square$

定理 18 (区間縮小法の原理)　閉区間 $I_n = [a_n,\ b_n]$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ は条件

(i) $I_{n+1} \subset I_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0.$

を満たす．このときすべての区間に共通な要素がただ一つ存在する．つまり集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ はただ一つの実数からなる．$\blacksquare$

証明　条件 (i) から数列 $\{a_n\}$ は単調増加で数列 $\{b_n\}$ は単調減少である．ゆえに

$$a_n \leqq b_n \leqq b_1$$

となり数列 $\{a_n\}$ は上に有界である．したがって定理 17 から収束する．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

とする．

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n + a_n) = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \alpha = \alpha$$

つまり

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\ \alpha\ \}$$

である．$\square$

定理 19 (ボルツァノーワイエルシュトラスの定理)　有界数列は収束部分列をもつ．$\blacksquare$

証明　数列 $\{a_n\}$ が有界なので

$$b_1 \leqq a_n \leqq c_1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

となる区間 $I_1 = [b_1,\ c_1]$ が存在する．集合

$$\{\ n\ | a_n \in [b_1,\ c_1]\ \},$$

は $\mathbb{N}$ 自身であり無限集合である．これを区間 I_1 に属する a_n は無数にある，という．

区間 $I_k = [b_k,\ c_k]$ に属する a_n が無数にあるとする．この区間の中点を m_k とする．2 つの区間 $[b_k,\ m_k]$，$[m_k,\ c_k]$ のいずれかには無数の a_n が属する．つまり 2 つの集合

$$\{\ n\ | a_n \in [b_k,\ m_k]\ \},\ \{\ n\ | a_n \in [m_k,\ c_k]\ \}$$

の少なくとも一方は無限集合である．第 1 の集合が無限集合なら $b_{k+1} = b_k,\ c_{k+1} = m_k$ とし，第 2 の集合が無限集合なら $b_{k+1} = m_k,\ c_{k+1} = c_k$ とする．このようにして区間 $I_{k+1} = [b_{k+1},\ c_{k+1}]$ を定める．帰納的に縮小区間の列 I_k $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が

$$\{\ n\ | a_n \in I_k\ \} \text{ が無限集合，かつ } c_k - b_k = \frac{c_1 - b_1}{2^{k-1}}$$

となるように定められた．定理 18 によって

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k = \alpha$$

が存在する．

数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{\varphi(k)}\}$ で α に収束するものを次のように定める．

> $\varphi(1) = 1$,
> $\varphi(1),\ \varphi(2),\ \cdots,\ \varphi(k)$ が定まったとき,$\varphi(k+1)$ を次のように定める．
> $a_n \in I_{k+1}$となる n の中で，
> $\varphi(1),\ \varphi(2),\ \cdots,\ \varphi(k)$ と異なり，かつ n が最小のものを $\varphi(k+1)$ とする．

数列 $\{a_{\varphi(k)}\}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は数列 $\{a_n\}$ の部分列であり

$$b_k \leqq a_{\varphi(k)} \leqq c_k$$

が満たされるのではさみうちの原理から α に収束する． □

この定理にも歴史がある．区間を順次二等分することで，区間縮小法を適用した．この論法は**ワイエルシュトラスの逐次二等分法**といわれている．数列 $\{a_n\}$ の部分列の極限値を数列 $\{a_n\}$ の**集積値**という．ボルツァノ—ワイエルストラスの定理は集積値という概念を用いると次のようにいえる．

> 有界数列には集積値が存在する．

公理の構造　ここで少し公理の構造ということを考えておこう．

定理 20　体 K は順序体であるとする．このとき命題：

1. $(A|B)$ が K の切断であるとき，A に最大値が存在するか B に最小値が存在するか，いずれかが成り立つ．

2. K における上に有界な空でない集合は，K 内に上限をもつ．

3. K の要素からなる数列 $\{a_n\}$ が上に有界で単調増加なら K において収束する．

4. K では距離 $|x-y|$ が定義され，順序に関してアルキメデスの原則が成り立つとする．閉区間の列 $I_n = [a_n,\ b_n]$ が

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$$

を満たすなら，すべての区間に含まれる K の要素がただ一つ定まる．

5. K では距離 $|x-y|$ が定義され，順序に関してアルキメデスの原則が成り立つとする．K の基本数列は K 内に収束する．

はすべて同値である． ■

証明　多くの証明はすでになされているのでそれを指摘しつつ不足部分を補う．

- **1.**$\Rightarrow$**2.**：定理 16 の証明そのものである．

- **2.⇒3.**：定理 17 の証明そのものである．
- **3.⇒4.**：2 節ではアルキメデスの原則の成立を実数の公理から導いた．その定理 8 の証明を少し変えればよい．

  K がアルキメデスの原則を満たさないとする．それは任意の自然数 n に対して，$np \leqq r$ となる正の実数 p と r が存在することを意味する．である．いいかえると

  $$n \leqq \frac{r}{p}$$

  これは実数の部分集合である自然数の集合 $\mathbb{N}$ が上に有界であることを意味している．数列 $\{n\}$ は単調増加であるがさらに上に有界となったので，$\lim_{n\to\infty} n = \alpha$ が存在する．

  $$\lim_{n\to\infty} |(n+1)-n| \leqq \lim_{n\to\infty} \{|(n+1)-\alpha| + |n-\alpha|\}$$

  なので $\lim_{n\to\infty} |(n+1)-n| = 0$．これは矛盾である．

  区間に関する条件から数列 $\{a_n\}$ は単調増加，数列 $\{b_n\}$ は単調減少である．すべて区間 I_0 に含まれるので有界．**3.** によりそれぞれ収束する．極限値を α，β とすると

  $$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

  なので，すべての I_n にただ一つ $\alpha = \beta$ が含まれる． □

- **4.⇒5.**：

  $$\text{定理 } 18 \Rightarrow \text{定理 } 19 \Rightarrow \text{定理 } 13$$

  で示されている．もう少し整理して直接示すことができるが，ワイエルシュトラスの逐次二等分法を用いることは同じである．

- **5.⇒1.**：本節の定理 12 の証明がそれである．

こうして，有理数の切断による実数の理論と基本列によるそれとは同等である．同等であるとはつぎの四つの命題が成り立つことを意味する：

(1) 任意の切断に対して，これが定める実数に収束する基本列がある．

(2) 任意の基本列に対して，これと同一の実数を定める切断がある．

(3) 切断の間の大小，相等の関係は，これらの切断に対応する基本列の間の関係とそれぞれ一致する．

(4) x, y に四則算法を行うとき，基本列に対する算法の定義をあてはめても，切断に対する算法の定義をあてはめても結果はそれぞれ等しい．

この記述は『数学原論』[14] によっている．このようにして定義される順序体は**実数体**と呼ばれ，これを $\mathbb{R}$ と書くのであった．

最後に,『数の概念』における実数体の定義を述べよう．ここにいたる著者高木貞治の思索の跡については『数とは何か　そしてまた何であったか』[10] などを参照されたい．

定義 13 (連続体の定義)　空でない全順序集合 $\mathbb{L}$ において次の公理が成り立つときそれを**実数体**と言い，$\mathbb{R}$ と記す．

1. 無限界性公理：Ł は上にも下にも有界ではない．
2. 連続性公理：Ł は連続である．
3. 最小性公理：連続かつ無限界な全順序集合には，Ł と同型な部分集合が存在する．

■

連続体とはまた，実直線に他ならない．人間は長い歴史を経て，直線というものをこのようにつかんだといえる．

どのような公理を立てるのかがなぜそんなに問題になるのか．それは公理相互の関係を解明し，可能なかぎり一般的で前提の少ない公理系をうち立て，公理相互の関係を研究すること自体が，実数というものの本質を研究することである．

数学的現象は事実として存在する．それを公理系で捉えようとする．公理は絶対的真理ではなく，数学的な対象を捉えるための方法であり，公理相互の関係の中にその対象の本質的が顕れている．

3　関数の概念

3.1　無限級数

級数の定義　数列 $\{a_n\}$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ の略記とし，収束するときもしないときにも用いる．この無限和を**級数** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは，部分和 $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ によって定まる数列 $\{s_n\}$ が収束することであると定める．その極限値 s を級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和といい，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ と表す．収束しないとき，級数は発散するという．級数が収束すれば

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

であるが，逆は成立しない．

定理 21　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は，任意の正数 ϵ に対し番号 N で，$N \leqq m < l$ ならば

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_l| < \epsilon$$

となるものが存在することである．■

証明

$$|s_l - s_{m-1}| = |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_l|$$

なので，本定理の条件を満たす N の存在は数列 $\{s_n\}$ が基本数列である条件である．したがって，基本数列に関する定理 13 と級数の収束の定義から，この条件が級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件である．□

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の各項の絶対値を項とする級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束**するという．

定理 22　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は，それが絶対収束すれば収束し，和については不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つ． ■

証明

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_l| \leqq |a_m| + |a_{m+1}| + \cdots + |a_l|$$

である．数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right\}$ が基本数列なので，任意の正数 ϵ に対し N で，$N \leqq l,\ m-1$ のとき

$$|a_m| + |a_{m+1}| + \cdots + |a_l| < \epsilon$$

となるものが存在する．よって定理 21 から $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$ も基本数列となり，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．極限値の不等式は部分和の不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{N} |a_n|$$

からただちに従う． □

系 22.1　正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束し，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項について

$$|a_n| \leqq M_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成立すれば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束し，和について

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

が成り立つ． ■

証明

$$\begin{aligned} |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_l| &\leqq |a_m| + |a_{m+1}| + \cdots + |a_l| \\ &\leqq M_m + M_{m+1} + \cdots + M_l \end{aligned}$$

なので，定理 21 と絶対収束の定義から従う． □

系 22.2 (ダランベールの判定法)　正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について

(1) $\exists N$，$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq r < 1\ (n \geqq N)$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

(2) $\exists N$，$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq 1\ (n \geqq N)$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない． ■

証明
(1)　このとき，$n \geqq N+1$ ならば

$$|a_n| \leqq r\,|a_{n-1}| \leqq r^2\,|a_{n-2}| \leqq \cdots \leqq r^{n-N}\,|a_N|$$

となり，$0<r<1$ なので系 22.1 から級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．
(2)　このとき，$n \geqq N+1$ ならば

$$|a_n| \geqq |a_{n-1}| \geqq |a_{n-2}| \geqq \cdots \geqq |a_N| > 0$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ なので収束しない．　□

定理 23　単調に減少し 0 に収束する正項数列 $\{a_n\}$ に対し，項の符号を交互に変えて作った級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する．　■

証明　部分和

$$s_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}a_k,\ s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k$$

をとると，

$$\begin{aligned}
&s_{2n-1} - s_{2n} = -(-1)^{2n-1}a_{2n} = a_{2n} > 0\\
&s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n}a_{2n+1} + (-1)^{2n-1}a_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n} < 0\\
&s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+1}a_{2n+2} + (-1)^{2n}a_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} > 0
\end{aligned}$$

となるので，

$$s_1 > s_3 > \cdots > s_{2n-1} > \cdots > s_{2n} > \cdots > s_4 > s_2$$

が成り立つ．つまり区間 $I_n = [s_{2n},\ s_{2n-1}]$ は縮小区間列である．そして

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

であるから，区間縮小法の原理 (定理 18) によって 2 つの数列 $\{s_{2n-1}\}$，$\{s_{2n}\}$ は同じ極限値に収束する．よって数列 $\{s_n\}$ も同じ値に収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する．　□

定理 23 のように符号が交互に変わる級数を**交代級数**という．

定理 24　二つの級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束するならば，二つの級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)$ はともに絶対収束し，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n\\
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)
\end{aligned}$$

である．　■

証明　一次結合に関する部分は

$$|\alpha a_n + \beta b_n| \leqq |\alpha|\,|a_n| + |\beta|\,|b_n|$$

から絶対収束性が示され，部分和に関する等式

$$\sum_{n=0}^{N}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=0}^{N} a_n + \beta\sum_{n=0}^{N} b_n$$

より従う．積に関する部分はやや複雑である．この証明は割愛する．　□

例 3.1　　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ の収束性.

$p = 1$ のとき：発散する．

この証明は定積分による評価

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} > \int_{1}^{N+1}\frac{1}{x}\,dx = \log(N+1)$$

からわかる．積分を用いないなら次のように部分和を評価する．

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

したがって級数が収束するための必要十分条件を定めた定理 21 において，$\dfrac{1}{2}$ より小さく ϵ をとると，N をどのようにとっても $m = N+1,\ l = 2N$ とすると

$$\left|\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{l}\right| > \frac{1}{2} > \epsilon$$

となり，定理 21 の条件を満たさない．よって発散する．

$p < 1$ のとき：発散する．

$\dfrac{1}{n^p} \geqq \dfrac{1}{n}$ なので，$p = 1$ のとき発散することから結論される．

$1 < p$ のとき：収束する．

$r = \dfrac{1}{2^{p-1}}$ とおき，次のような級数の部分和をとる．$0 < r < 1$ である．

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^m-1}\frac{1}{n^p} &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{j^p}\right) \leqq \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{(2^{k-1})^p}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^p}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{(2^{k-1})^{p-1}}\right) = \sum_{k=1}^{m} r^{k-1} = \frac{1-r^m}{1-r} < \frac{1}{1-r}\end{aligned}$$

級数は正項級数なので部分和は単調増加である．かつこのように有界であることが示された．つまり収束する．

p が偶数のときは比較的容易に級数の値を計算することができる．これについては『数学対話』－「円周率を表す」－「ゼータ関数の値」を参照のこと．

例 3.2　　交代級数の例.

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

この級数は交代級数であるから収束する．極限値は $\dfrac{\pi}{4}$ である．その証明は後に示す二つの定理を必要とする．

$|x|<1$ において次式右辺の無限等比級数は左辺に収束する．

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots$$

巾級数と積分に関する定理 58 によってこの範囲において両辺積分し，積分定数をあわせて

$$\mathrm{Tan}^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots$$

である．ところが $x=1$ のとき右辺が交代級数で収束するので，アーベルの定理 46 によってこの値が $\lim_{x\to1}\mathrm{Tan}^{-1}x=\dfrac{\pi}{4}$ となるのである．

(2) 同様に

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2$$

である．これは $|x|<1$ において

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-\cdots$$

を積分することで同じ議論によって得られる．

3.2 連続関数

写像と関数　集合 A から集合 B への写像 f で，とくに集合 A が実数や複素数など数の集合であるとき，f を**関数**ということが多い．ちなみに集合 A から同じ集合 A への写像は**変換**といわれることが多い．関数とは function の訳語で，意味は集合 A の要素に集合 B の要素を対応させる**機能，働き**である．

集合 A の要素 x が集合 B の要素 y に対応するとき，これを $y=f(x)$ と書く．関数における x や y は個別の要素と考えることもできる．しかし，文字とはそもそもそこに「数を入れる箱」でもあるので，$y=f(x)$ では箱 x に集合 A の要素を入れると，それに対応して B の要素が定まる．その値を入れる箱 が y であるとも考えることができる．

例えば，$y=x^2+2x$ とする．x に f で対応する値が x^2+2x であると考えることができるが，また関数 f は $(\quad)^2+2(\quad)$ の $(\quad)$ に集合 A の要素である値 a を入れることで，集合 B の要素 a^2+2a が対応するという機能そのものを $f(x)=x^2+2x$ で表しているとも考えることができる．

関数の $f(x)$ に対し集合 A を**定義域**，それに対し集合 B の部分集合

$$\{b \mid b=f(a)\ ,\ a\in A\}$$

を**値域**という．関数を考えるときに用いる箱としての文字のことを**変数**という．定義域側の変数を**独立変数** といいこれを普通 x で表わし，値域側の変数を**従属変数** といいこれを普通 y で表わすことが多い．

関数は変数にどのような文字を使うかを明示して $f(x)$ と書くこともあれば，f と書くこともある．また $y=f(x)$ のように書くこともある．同一の関数を適宜 $f(x)$ と書いたり f と書いたりもする．

関数というのは，数から数への対応の規則なので，一つの式で表される必要はない．例えば，

$$f(x)=\begin{cases}-2x-1 & (\ x \leqq -1 \text{ のとき}) \\ x^2 & (-1 \leqq x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\ 0 \leqq x \text{ のとき})\end{cases}$$

も「一つの」関数である．

写像に関する，合成，全射・単射，逆写像の操作は，そのまま関数についてもあてはまる．また写像のグラフもまたそのまま関数のグラフに適用することができる．実数域で定義され，値域もまた実数である関数 $y=f(x)$ において，xy 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\{(a,\ b) \mid b=f(a),\ a \in \mathbb{R}\}$$

を関数 $f(x)$ のグラフという．関数のさまざまの性質が，グラフの図形的な性質によって言い表すことができる．関数を図示し視覚的に考えることが，関数 $f(x)$ の解析にとって重要な方法なのである．

整式関数，有理関数，無理関数　対応の規則 f が x の式で定められているときに，その式が x の整式であるなら整式関数 (多項式関数，有理整関数) と呼ぶ．その次数によって一次関数，二次関数，などと呼ぶ．

これを「整関数」ということがあるがこれは正しくない．後に述べるが，任意の閉区間で一様に収束する巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を「整関数」という．つまり，次数という点から見ると無限次数の多項式も含めて「整関数」である．また，複素関数論の分野になるのだが定義域を複素数にすると「整関数」は複素数を定義域とする関数で複素数全体で微分可能な関数と同等の意味になる．

整式関数はもちろん整関数なのだけれど $\sin x,\ e^x$ なども整関数である．高校の参考書で整式関数のことを整関数といっているものがあるが，数学全体で言葉は統一して使うべきである．

整式 $u(x)$ と $v(x)$ を用いて $\dfrac{v(x)}{u(x)}$ と書かれる式を有理式といい，$f(x)$ が有理式のとき関数 $y=f(x)$ を有理関数という．また，整式 $u(x)$ を用いて $u(x)^{\frac{n}{m}}$ と分数べきで書かれる部分をもつ式を無理式という．$f(x)$ が無理式とき関数 $y=f(x)$ を無理関数という．

三角関数，指数関数についてはいくつかの準備が必要なので，後に定義する．

実数の連続と関数の連続　実数の公理にもとづいて，関数の連続性を考察する．とくに大切なのは閉区間で連続な関数に関する，**中間値の定理**と**最大値・最小値の存在定理**である．高校解析はここを出発点としている．これが実数の公理，およびその後示された諸定理からどのように導かれるのかを考える．高校では「知られている」として示されることがどれだけの背景をもつことであることを理解したい．なお，高校解析では表だっては出てこないが，実は**連続の一様性**など一様性に関する諸問題が高校数学においても重要である．それにも注意を促すようにしたい．

数列の収束を有限の言葉で論述するために $\epsilon - N$ 論法は不可欠であった．関数の連続性や収束性を論述するためにも $\epsilon - \delta$ 論法を用いる．連続性の厳密な定義そのものが $\epsilon - \delta$ 論法を必要としている．

関数は実数の部分区間 I で定義されたものとする．I は閉区間 $[a,\ b]$，開区間 $(a,\ b)$，半開区間 $[a,\ b)$，$(a,\ b]$ 等である．ただし，区間の端点が開いている場合，a としては $-\infty$，b としては ∞ もあるものとし，$(-\infty,\ \infty) = \mathbb{R}$，半開区間 $[a,\ \infty)$，$(-\infty,\ b]$ 等も考えるものとする．

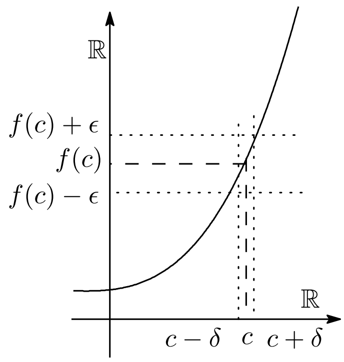
実数の区間 I で定義され実数値をとる関数を f とする．f は集合 I から実数の集合 $\mathbb{R}$ への写像に他ならない．以下 f はこのような関数であるとする．

定義 14 (関数の連続)　関数 $f(x)$ と区間 I の点 c がある．任意の正の実数 ϵ に対して，正の実数 δ で

$$|x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon \qquad (*)$$

となるものが存在するとき，関数 $f(x)$ は $x = c$ で連続である，という．■

関数 $f(x)$ のグラフが点 $(c,\ f(c))$ でつながっている，ということである．そのことを有限の言葉で言い表したのが定義である．これをもう少し日常的な言い方にかえると,「どのような正の実数 ϵ が指定されても，条件 $(*)$ を満たすように正の実数 δ がとれるとき，関数 $f(x)$ は c で連続である」ということである．これが関数の定義域内の点 c での連続性の定義である．



次のように数列の収束性の問題としてとらえることもできる．

定理 25　関数 $f(x)$ が $x = c$ で連続であるための必要十分条件は，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c\ (x_n \in I) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$$

が成立することである．■

証明　$f(x)$ が (定義の意味で) 点 c で連続であるとする．c に収束する区間 I 内の任意の数列 $\{x_n\}$ をとる．正の実数 ϵ を定める．正数 δ で $|x - c| < \delta$ なら $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ となるものが存在する．この δ に対して N が存在し，$n \geqq N$ のとき

$$|x_n - c| < \delta$$

となる．したがって $n \geqq N$ のとき

$$|f(x_n) - f(c)| < \epsilon$$

がなり立つ．これは $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ を示している．

逆を示す．定義の条件が成立しないとする．つまり正の実数 ϵ で次の条件がなり立つものが存在するとする．

$$\forall\delta(>0), \exists x; |x - c| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(c)| \geqq \epsilon$$

ここで $\delta = \dfrac{1}{n}$ にとり，それに対して存在する上記の x を x_n とする．このとき，

$$|x_n - c| < \frac{1}{n} \text{ かつ } |f(x_n) - f(c)| \geqq \epsilon$$

となる．これは $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ の否定である．よって対偶が示せた．□

存在定理　関数 $f(x)$ が区間 I の各点 x で連続であるとき，$f(x)$ は I で連続であるという．解析学の土台となる二つの存在定理を証明しよう．

定理 26 (中間値の定理)　閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ について次のことが成立する．

(1) $f(a) < 0$，$f(b) > 0$ ならば，$f(c) = 0$ となる c が区間 $(a,\ b)$ に少なくとも一つ存在する．

(2) $f(a),\ f(b)$ が異なるとき，その中間の任意の値 γ に対し，$f(c) = \gamma$ となる c が区間 $(a,\ b)$ に少なくとも一つ存在する．■

証明

(1)　区間 I の部分集合 A を

$$A = \{\ x \mid f(x) < 0, x \in I\ \}$$

で定める．$f(a) < 0$ より $a \in A$ である．A は $A \subset I$ なので有界である．よって $\sup A$ が存在する．それを c とする．もし $f(c) < 0$ なら，$0 < \epsilon < -f(c)$ に対して $|x - c| < \delta$ のとき $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ となる δ が存在する．つまり $(c - \delta,\ c + \delta)$ の x に対して $-\epsilon + f(c) < f(x) < \epsilon + f(c) < 0$ となる．これは c が $f(x) < 0$ となる部分集合の上限であることに反する．よって $f(c) \geqq 0$ である．

同様に $f(c) > 0$ なら，$(c - \delta,\ c + \delta)$ の x に対して $f(x) > 0$ となりやはりこれは c が $f(x) < 0$ となる部分集合の上限であることに反する．

よって $f(c) = 0$ である．$f(a) < 0,\ f(b) > 0$ より $c \neq a,\ b$，つまり $c \in (a,\ b)$ である．

(2)　$f(a) < \gamma < f(b)$ のとき．$g(x) = f(x) - \gamma$ とすると $g(a) < 0,\ g(b) > 0$ となり $c \in (a,\ b)$ で $g(c) = 0$ となるものが存在する．このとき $f(c) = \gamma$ である．逆の場合も同様である．□

定理 27 (最大値・最小値の存在)　閉区間で連続な関数は，その閉区間において最大値および最小値をとる．■

まず，次の補題を示す．

補題 1　閉区間 I で連続な関数 $f(x)$ は有界である．■

証明　有界でないとする．すると自然数 n に対して $|f(x)| > n$ となる $x \in I$ が存在する．その一つを x_n とする．x_n はすべて I に属するので数列 $\{x_n\}$ は有界である．したがって定理 19 によって収束部分列が存在する．それを $x_{\varphi(n)}$ とし $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = c$ とする．I は閉区間であるから $c \in I$ である．$f(x)$ は I で連続なので

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(c)$$

である．つまり数列 $\{\left|f(x_{\varphi(n)})\right|\}$ は収束する．ところが $\left|f(x_{\varphi(n)})\right| > \varphi(n) \geqq n$ であるから数列 $\{\left|f(x_{\varphi(n)})\right|\}$ は収束しない．これは矛盾なので，閉区間 I で連続な関数 $f(x)$ は有界であることが示された．□

定理 27 の証明　$f(x)$ は I で有界であるから，$A \subset \mathbb{R}$ を $f(x)$ の値域とするとき A は有界であり A の上限，下限が存在する．$\sup A = M,\ \inf A = m$ とする．

$f(\alpha) = M$ となる α の存在を示す．

A に属する y で $M - \dfrac{1}{n} < y \leqq M$ となるものが存在する．存在しないということは A の要素 y がすべて $y \leqq M - \dfrac{1}{n}$ となるので，M が上界の最小値であることに反するからである．このような y の一つを y_n とする．数列 $\{y_n\}$ $(y_n \in A)$ は $\lim_{n\to\infty} y_n = M$ を満たす．

A は値域なので $y_n = f(x_n)$ となる $x_n\ (\in I)$ が存在する．数列 $\{x_n\}$ は有界であるから，定理 19 によって収束部分列が存在する．それを $x_{\varphi(n)}$ とし $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \alpha$ とする．I は閉区間であるから $\alpha \in I$ である．$f(x)$ は I で連続なので

$$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = M$$

である．すなわち，$f(x)$ は $x = \alpha$ で最大値 $f(\alpha) = M$ となる．

最小値 m を与える x の値の存在も同様に示される． □

これら二つの存在定理は高校解析では「知られている」こととして提示される．そしてそれを根拠に「ロルの定理」,「平均値の定理」を証明する．二つの存在定理自体の証明は実数論をもとに大学初年級の数学でおこなう．

高校数学での中間値の定理などを，存在定理を感覚的な理解に留めるのではなく，高校，大学の役割分担を明示して，一貫した体系で教えなければならない．そのために，高校生に数学を教えるものは，その全体をつかみ，必要に応じて生徒に問いかけ，また答えることができなければならない．

もちろん，数学の歴史でもはじめから実数について今日のような理解があったわけではない．長い歴史のうえに今日があることを追体験したいものである．

3.3 一様連続

一様性をつかむ 解析の基礎において重要な問題は実は「一様連続」といわれる概念である． 高校の級数の収束や積分の定義などあらゆるところで現れている．しかし明示的には示されない．そこでこれを取り出して定義しておきたい．歴史的には，一様連続性の概念をつかむことによって，解析学の基礎が飛躍的に深まった．なお「一様連続性」とは「一様連続」が成立する関数のある性質，の意味である．

定義 15 (関数の一様連続性) 区間 I で定義された関数 $f(x)$ がある．任意の正の実数 ϵ に対して，正の実数 δ で

$$I \text{ の } x \text{ と } c \text{ に対し } |x-c| < \delta \text{であるなら } |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

となるものが存在するとき，関数 $f(x)$ は区間 I で一様連続である，という． ■

一様連続でない例を考えるとよくわかる．区間 I が閉区間なら，I で連続なら I で一様連続になることが次に示される．したがって開区間を考えなければならない．

例 3.3 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ は区間 $[0,\ 1)$ で一様連続ではない．

証明 $x_n = 1 - \dfrac{1}{2n},\ c_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ とすると $|x_n - c_n| = \dfrac{1}{2n}$ であるが $|f(x_n) - f(c_n)| = n$ である．したがって与えられた ϵ に対しどのように δ をとっても n を大きくとれば $|x_n - c_n| < \delta$ であるが $|f(x_n) - f(c_n)| \geqq \epsilon$ となる x と c が存在し，一様連続の条件はみたさない． □

これは，x が 1 に近づくと x が少し動いても y が大きく動くことになり，区間によらない δ がとれないのである．

閉区間ではこのようなことは起こらない．

定理 28　閉区間 I で連続な関数 $f(x)$ は I で一様連続である． ■

証明　背理法で示す．$f(x)$ について一様連続の条件が成立しないとする．ある ϵ をとるとすべての δ に対しある $x,\ c \in I$ が存在して，

$$|x-c|<\delta,\ |f(x)-f(c)| \geqq \epsilon$$

となる．$\delta = \dfrac{1}{n}$ とし，x と c を $x_n,\ c_n$ とする．数列 $\{x_n\}$ は有界数列なので，定理 19 によって収束部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}$ が存在する．その極限値を α とする．$x_{\varphi(n)}$ に対応する $c_{\varphi(n)}$ からなる数列も，$\left|x_{\varphi(n)}-c_{\varphi(n)}\right| < \dfrac{1}{\varphi(n)} \leqq \dfrac{1}{n}$ であるから同じ α に収束する．I は閉区間なので $f(x)$ は $x=\alpha$ で連続である．よって

$$\lim_{n\to\infty}\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right)-f\left(c_{\varphi(n)}\right)\right| = |f(\alpha)-f(\alpha)| = 0$$

これは，$\left|f(x_{\varphi(n)})-f(c_{\varphi(n)})\right| \geqq \epsilon$ と矛盾する．

ゆえに閉区間 I で連続な関数 $f(x)$ は I で一様連続であることが示された． □

関数列の一様収束　関数列 $\{f_n(x)\}$ とは自然数を添え字とする関数の集合である．

関数 $f(x)$ と関数列 $\{f_n(x)\}$ がある．x を固定したとき $\{f_n(x)\}$ は一つの数列である．x が一定の区間にあるとき，動くのは x と n である．ここで，収束関数列の一様収束性の概念が生まれる．これについて基礎的事項を示していこう．

定義 16 (関数列の一様収束)　区間 I で定義された関数 $f(x)$ と同じ区間で定義された関数の列 $\{f_n(x)\}$ がある．任意の正数 ϵ が与えられたとき，I に属する任意の x に対して，x によらない自然数 N で，$n>N$ ならば

$$|f(x)-f_n(x)|<\epsilon$$

となるものが存在するとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ は関数 $f(x)$ に一様収束するという． ■

定理 29　区間 I で定義された関数 $f(x)$ と同じ区間で定義された関数の列 $\{f_n(x)\}$ がある．関数列 $\{f_n(x)\}$ は関数 $f(x)$ に一様収束し，すべての自然数 n に対して $f_n(x)$ が I で連続なら，$f(x)$ も I で連続である． ■

証明　任意の正数 ϵ が与えられたとき，I に属する x に対して，x によらない自然数 N で，$n \geqq N$ ならば

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

となるものが存在する．また $f_N(x)$ は連続なので，区間 I の任意の c に対し，正数 δ で，$|x-c|<\delta$ ならば

$$|f_N(x)-f_n(c)| < \frac{\epsilon}{3}$$

となるものが存在する．このとき

$$\begin{aligned}|f(x)-f(c)| &\leqq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(c)|+|f_N(c)-f(c)| \\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

ゆえに $f(x)$ は I で連続である． □

数列の基本数列，あるいはコーシー数列といわれる収束数列の概念と同様に，関数列に対してもコーシー列が定義される．

定義 17 (コーシー関数列)　区間 I で定義された関数の列 $\{f_n(x)\}$ がある．任意の正数 ϵ が与えられたとき，I に属する任意の x に対して，x によらない自然数 N で，$m,\ n > N$ ならば

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

となるものが存在するとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ は**コーシー関数列**であるという．■

定理 30　区間 I で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ がコーシー関数列であれば，関数列 $\{f_n(x)\}$ は I を定義域とするある関数 $f(x)$ に一様収束する．$f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ が連続なら $f(x)$ も連続である．■

証明　$x = c$ を固定すると関数値の数列 $\{f_n(c)\}$ はコーシー数列である．実数の完備性によってある実数値に収束する．その値を $f(c)$ とする．$c \to f(c)$ によって関数 $f(x)$ が定まり x を固定するごとに収束する．ところが $m,\ n > N$ ならば

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

となる N が存在するので，この両辺を m の数列と見て $m \to \infty$ とすると，

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

が得られ，N は x によらないので，関数列 $\{f_n(x)\}$ は関数 $f(x)$ に一様収束する．連続性に関する命題は定理 30 より従う．■

関数を項とする級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ についても，実数を項とする級数と同様に，部分和 $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n$ によって定まる関数列 $\{S_N(x)\}$ の極限として定義される．関数列 $\{S_N(x)\}$ が f に一様収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は f に一様収束するという．f をその和といい，$f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ と表す．

定理 31　I で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ からできる級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が一様収束するための必要十分条件は，任意の正数 ϵ が与えられたとき，x $(\in I)$ によらない番号 N で，$N \leqq m < l$ ならば

$$|f_m(x) + f_{m+1}(x) + \cdots + f_l(x)| < \epsilon$$

となるものが存在することである．■

証明　これは定理 21 からただちに従う．□

系 31.1　正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束し，区間 I で定義された関数 f_n を項とする級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ について

$$|f_n(x)| \leqq M_n \quad (x \in I,\ n \in \mathbb{N})$$

が成立すれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ は一様収束し，和について

$$\left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)(x) \right| \leqq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right)(x) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

が成り立つ．■

証明　I の x について

$$\begin{aligned}|f_m(x)+f_{m+1}(x)+\cdots+f_l(x)| &\leqq |f_m(x)|+|f_{m+1}(x)|+\cdots+|f_l(x)| \\ &\leqq M_m+M_{m+1}+\cdots+M_l\end{aligned}$$

が成り立つ．定理 31 から従う．　□

これらの定理は後に関数の級数展開，微分方程式の解の存在定理を論じる基礎になる．

3.4　初等関数

円弧の長さ　定点から 1 の長さにある点の集合を単位円という．その円周は 2π といわれる．ところで円周とは何なのか？　そもそも曲線の長さとはどのように定めるのか．積分の定義の後で曲線の長さを定義する．それが定義 35 である．

円とは 1 点からの距離が一定であるような点 P の集合である．曲線の長さの定義にもとづいて円周もまた定義される．半径 1 の時の円周の長さを 2π と定める．

円の場合，円に内接する多角形の周囲の長さも決まる．また円に外接する多角形の周囲の長さも決まる．

$$\text{内接する多角形の辺長の和の上限} = \text{外接する多角形の辺長の和の下限} = \text{円周長}$$

となる．

円弧の長さも，その 2 点を結び円弧に内接する多角形の部分の周の長さの上限と，その 2 点を結び円弧に外接する多角形の部分の周の長さの下限が一致すれるので，これを円弧の長さと定めることができる．

これらは定義 35 とその後の関連定理で示される．そこでの論証では，以下で円周を用いて定義される三角関数が使われることはない．したがって論理が循環することはない．

弧度法　円周の長さ，この長さが確定した．では角をどのように定めるのか．これは高校数学に登場する．単位円周上の 2 点 A，B に対する円弧の長さを A から B へ左回りのとき正，右回りのとき負とする．円弧は左回りを正，右回りを負とすれば何回でも回れるので，弧長は任意の実数値をとる．

そこで，弧長が x となる円弧に対し，その中心角を x (ラジアン) と定めるのである．弧度法による角は任意の実数値をとる．

三角関数

定義 18 (正弦関数，余弦関数)　直交座標平面に原点を中心として単位円をえがく．円弧状の 1 点 A(1, 0) を固定し他の点 P をとる．円弧 AP の長さが x，つまり A から P への中心角を x とし，P$(s,\ t)$ とする．このとき，実数 x の関数を

$$\text{余弦関数}: \cos x = s,\ \text{正弦関数}: \sin x = t$$

で定める．　■

分母が 0 にならないとき

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

でそれぞれの関数を定める．

　このとき

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

が成り立つ．三角関数については次の 2 点が基本である．

定理 32　(1) $\sin x$，$\cos x$ は実数全体で一様連続である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ である．■

証明　$0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$|\sin x| < |x|,\ \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{1}$$

が成り立つ．これを示す．

　$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき．点 O を中心とする半径 1 の円において，中心角 x の扇形 OAB を考える．点 B から OA に垂線 BH を引く．点 B において円に接線 BC を引く．円弧の長さが内接多角形の長さの上限であり，外接多角形の長さの下限であったので

$$\mathrm{BD} < 弧\,\mathrm{BD} < \mathrm{BC} + \mathrm{CD}$$

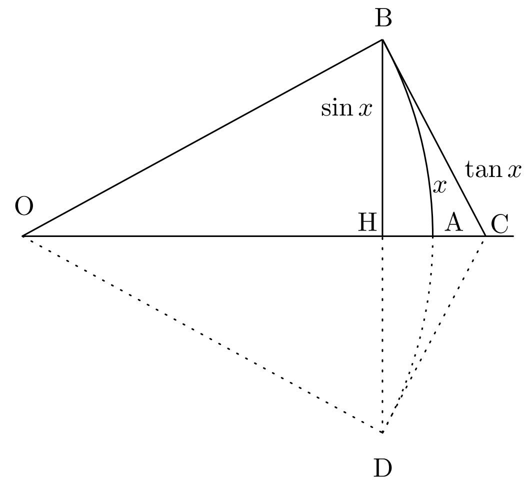
である．これから

$$0 < \sin x = \mathrm{BH} < x < \tan x$$

$\sin x > 0$ なので各辺を $\sin x$ で割り逆数をとると，

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

が得られる．



　x が負のとき，$x = -y$ とおくと

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$$

より同様の関係が成り立つ．これをもとに定理を示す．

(1) $|x-y| < \epsilon$ のとき．

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| < \epsilon$$

より $\sin x$ は一様連続．$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ より

$$|\cos x - \cos y| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right| < |x - y|$$

より $\cos x$ も一様連続である．

(2) $\cos x$ の連続性から

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

であるから不等式 1 より

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

である．

注意 3.1　日本の高校数学では，不等式 1 を円の面積から導く．しかし，面積を求めるときに使った三角関数の微分・積分そのものはどのようにして導かれたのか，と考えると定理 1 の極限 (2) を基本的に用いて三角関数の微分をしていることに気づく．とするとここには循環論法が潜んでいる．

逆三角関数　三角関数は周期関数である．一般に周期関数の逆関数は多価関数になる．そこで周期関数の逆関数を考えるときは，まず周期関数の定義域を一価関数となるように制限し，その上で逆関数をとることが多い．多くの場合次のようにとる．

	定義域	値域
$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,\ 1]$
$\cos x$	$[0,\ \pi]$	$[-1,\ 1]$
$\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(-\infty,\ \infty)$

この区間で $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ はそれぞれ単調増加，単調減少，単調増加で連続である．したがってこの値域を $[-1,\ 1]$ を定義域とする逆関数が定まる．それを $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ で表す．このように主値を限定した逆関数を $\mathrm{Sin}^{-1}x$，$\mathrm{Cos}^{-1}x$，$\mathrm{Tan}^{-1}x$ のように表すことも多い．

	定義域	主値
$\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$[0,\ \pi]$
$\arctan x$	$(-\infty,\ \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$

注意 3.2　$[-1,\ 1]$ の a に対して $\mathrm{Sin}^{-1}a = b$，$\mathrm{Cos}^{-1}a = c$ とおく．ただし，$b \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$c \in [0,\ \pi]$ である．このとき

$$\sin b = \cos c \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos c$$

なので $b + c = \frac{\pi}{2}$．つまり一般に

$$\mathrm{Sin}^{-1}x + \mathrm{Cos}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．これは後に $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の原始関数を考えるとき (例 5.3) に意味をもつ．

自然対数の底　自然対数の底 e は本来は

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

で定める．そして

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

を示す．ところがこの方式では数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ の収束や，また

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

を示すのが簡単でないということで，最近の日本高校でははじめから $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の極限を収束性の証明なしに定義に用いている．本来の定義に立ちかえり，実数の連続性をもとに自然対数の底を定義しよう．

定理 33

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

とする．数列 $\{a_n\}$ は収束する．■

証明　数列 $\{a_n\}$ が単調増加で有界であることを示せばよい．

二項定理から

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + {}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{n} + {}_n\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\{n-(k-1)\}}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} \\
&\quad + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\{n-(n-1)\}}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

この和の各項は n とともに単調に増加し，また項数が n とともに増加し，その各項は正である．よって，a_n は単調増加である．

一方，$k \geqq 2$ のときその一般項は

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_k\cdot\frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} \\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} < \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} < 3\end{aligned}$$

より有界である．

よって数列 $\{a_n\}$ が単調増加かつ有界なので収束する． □

この極限値を自然対数の底といい e と表す．

区間縮小法を用いる別証明も重要である．先の証明のように二項定理を用いても出来るのだが，いろいろ役立つ便利な補題を紹介しよう．

補題 2　任意の自然数 n と相異なる正数 $a,\ b$ に関して不等式

$$\left(\frac{na+b}{n+1}\right)^{n+1} > a^n b$$

が成り立つ． ■

証明

$$\begin{aligned}\frac{na+b}{n+1} &= \frac{a+a+\cdots+a+b}{n+1}\\ &> (a\cdot a\cdot\cdots\cdot a\cdot b)^{\frac{1}{n+1}} = (a^n b)^{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

両辺 $n+1$ 乗すれば補題が得られる． □

定理 33 の別証明　補題を $a=\dfrac{n+1}{n},\ b=1$ で用いると，$\dfrac{na+b}{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}$ なので，

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

これは数列 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が単調増加であること示している．

次に補題を $a=\dfrac{n-1}{n},\ b=1$ で用いると，

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

逆数をとって

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

これは数列 $b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ が単調減少であること示している．また $a_n<b_n<b_1=(1+1)^2=4$ なので

$$b_n-a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}=a_n\frac{1}{n}<\frac{4}{n}$$

より $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ である．したがって区間 $I_n = [a_n,\ b_n]$ に区間縮小法を適用すると，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は同一の極限に収束することがわかる． □

これで e の値もある程度計算できる．

	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$
$n=1$	2	4
$n=2$	2.25	3.375
$n=3$	2.370	3.160
	$\cdots$	
$n=10$	2.5937	2.8531

例 3.4

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

証明

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}$$

ここで分母が 1 に収束することを示す．

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1 - {}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n^2} + {}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^4} - \cdots + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^{2n}}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\left|\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right| &= \left|-{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n^2} + {}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^4} - \cdots + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^{2n}}\right| \\
&\leqq {}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n^2} + {}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^4} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^{2n}} \\
&< \frac{1}{n} + \frac{1}{2!n^2} + \frac{1}{3!n^3} + \cdots + \frac{1}{n!n^n} \\
&< \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \to 0
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

□

系 33.1

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

証明　$h \to +0$ のときは $x = \dfrac{1}{h}$ とおく．

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

を示せばよい．

$$n \leqq x < n+1$$

となる n，つまり $n=[x]$ をとる．逆数をとって

$$\frac{1}{n} \geqq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$$

これから

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

つまり

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ところが

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\end{aligned}$$

なので，はさみうちの原理から

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

である．

$h \to -0$ のときは．

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

を示せばよい．同様にして $-(n+1) < x \leqq -n$ となる n をとると，

$$1-\frac{1}{n+1} > 1+\frac{1}{x} \geqq 1-\frac{1}{n}$$

これから

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)}$$

となり先の例題からこの場合も成立する． □

これで自然体数の底といわれる定数 e は定義された．次に指数関数

$$f(x) = a^x$$

を定義しよう．指数関数は x が自然数の範囲，正数の範囲，有理数の範囲と拡大されてきた．底は実数値が一意に定まるために制限されてきた．いま有理数の範囲では $a>0$ の定数に対して

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

と定まっているものとする．次のようにこれが実数に拡大できることを示す．

補題 3　a を $a>1$ である定数とする．自然数 N をとり閉区間 $I=[-N,\ N]$ において

$$f(x)=a^x\ (x\in I\cap\mathbb{Q})$$

とおく．このとき $f(x)$ は $I\cap\mathbb{Q}$ で一様連続である．

証明　$s,\ t\in I\cap\mathbb{Q}$ のとき

$$|f(s)-f(t)|=\left|a^s-a^t\right|=a^t\left|a^{s-t}-1\right|\leqq a^N\left|a^{s-t}-1\right|$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$ であるから，正数 ϵ に対して $n\geqq n_0$ なら

$$|s-t|<\frac{1}{n}\ \text{ならば}\ \left|a^{s-t}-1\right|<a^{-N}\epsilon$$

となる n_0 がある．このとき

$$|f(s)-f(t)|<\epsilon$$

となり，一様連続である．　□

定義 19 (指数関数の定義)　a は 1 でない正の定数とする．有理数の x に対して関数値 $f(x)=a^x$ は一意に定義されているものとする．任意の実数 x に対して x に収束する有理数列 $\{x_n\}$ をとり．

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$$

で定義する．これによって実数を定義域とする一様連続関数が定義される．　■

証明　補題の設定を用いる．$x\in I$ に対し x に収束する $I\cap\mathbb{Q}$ 内の数列 $\{x_n\}$ をとる．補題によって数列 $\{x_n\}$ は $\mathbb{R}$ 内の基本列であり，極限値をもつ．よって $f(x)$ は $I=[-N,\ N]$ の一様連続関数に拡張される．N は任意であるから $f(x)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}_+$ への一様連続関数に拡張された．ただし $\mathbb{R}_+=\{x\mid x>0\}$ とする．

$0<a<1$ のときも同様である．　□

連続性から有理数における指数法則

$$a^{s+t}=a^s\cdot a^t,\ (a^s)^t=a^{st}$$

は実数においても成立する．

指数関数 $f(x)=a^x$ の逆関数を $f^{-1}(x)=\log_a x$ と表す．$\log_a x$ は $\mathbb{R}_+=\{x\mid x>0\}$ を定義域とし $\mathbb{R}$ を値域とする一様連続関数である．指数法則に対応して

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y,\ \log_a x=\frac{\log_c x}{\log_c a}\ (0<c<1,\ 1<c)$$

が成り立つ．実際，第 1 式は $x=a^s,\ y=a^t$ とおくと

$$\log_a xy=\log_a a^s\cdot a^t=\log_a a^{s+t}=s+t=\log_a x+\log_a y$$

よりわかり，第 2 式は $a=c^s,\ x=a^t$ とおくと $x=(c^s)^t=c^{st}$ なので

$$\log_c a\log_a x=st=\log_c x$$

よりわかる．

以上によって，整式関数，有理関数，無理関数，三角関数と逆三角関数，指数関数と対数関数が定義された．これらを**初等関数**という．

4　微分の方法

4.1　微分可能

量の比から関数の変化率へ　「甘い」「からい」「速い」「濃い」「粗い」などでで言いあらわされるいわゆる量が，二つの量の比であることが認識されたのはいつの頃なのであろうか．3 時間で 15km 進めば「速さ」は 1 時間あたり $15 \div 3 = 5$ km 進む量としてとらえられる．この量を 5 km/h のように表すのだった．

しかしこの値は平均化されたものである．車の速度計は刻々変化する．自由落下では重力による加速度によって速度は増加する．このように日常的には平均化された値が使われ (それは一次近似なのだが) るが，実際は，はかる時点や場所によって変化する局所的な量である．

濃度は，100g の塩水に 10g の塩が含まれている場合，これを濃度 0.1 という．しかしこれは濃さが均質なときであって，塩の分布が一様でなければ，塩水の位置によって濃度は変化する．ある点の近くでのことが全体に広がっていると仮定して濃いとか辛いとかいってい．つまり，濃度は本来局所的な量である．一様でないとき，0.1 という数は，平均の濃度を表す．ただし，それは口に入れた点でのことで，それが均質に一様に広がっているかどうかはわからない．一様でない場合，どのように考えてゆけばよいのか．

このような考察が，関数概念の獲得と一体になって，平均変化率，そして微分へと進んだのはまちがいないであろう．

現実を近似し解析するために実数を準備した．これによって現実の諸関係が関数によって表現された．さらに現実の物理現象など深く解析するために，関数 $f(x)$ の解析方法を準備しなければならない．もちろん濃度のように，空間の位置を表すために三つの実数が必要なこともある．また速度も方向まで考えれば少なくとも 2 次元のベクトルで考えなければならない．つまり，x や y を多元量としてとらえなければならない．

最も簡単で基礎的なのが量が一つの実数に対応する一次元の場合である．まず二つの実数 x と y のあいだの関数 $y = f(x)$ について考える．一変数の量となる例は，時間と位置の関係，その変化の比としての速度などであるが，そのような具体的な量を念頭におきながらも，実数の関数の問題として考える．こうして後に現実の量を解析するための方法を準備する．

微分の定義と微分可能性　関数 $f(x)$ の定義域内の相異なる 2 数 $a,\ b$ に対して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を関数 $f(x)$ の a と b の間の平均変化率という．

定義 20 (微分可能)　区間 $I = (a,\ b)$ で定義された関数 $f(x)$ がある．定義域内の c をとる．c を除く I で定義された関数 $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ に対し，極限値

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

が存在するとき，関数 $f(x)$ は c で**微分可能**であるという．その極限値を c における f の**微分係数**といい，$f'(c)$ と表す．■

$x-c=h$ とおく．$x=c+h$ なので $x \to c$ のとき $h \to 0$ である．微分係数を次式の極限値の存在で定義してもよい．

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

定義 21 (導関数)　区間 $I=(a,\ b)$ で定義された関数 $f: I \to \mathbb{R}$ がある．区間の各点 x において微分可能，つまり極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が区間の各 x で存在するなら，関数 $y=f(x)$ はその区間において微分可能であるという．この場合，極限値は x の関数になる．この関数を $f(x)$ の**導関数**といい $f'(x)$ と書き表す．

関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを関数 $f(x)$ を**微分する**という．■

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を表す記号はさまざまに用いられてきた．関数 f の導関数 f' のように変数を書かないこともある．$f'(x)$ は $\dfrac{d}{dx}f(x)$ とも表す．さらに関数 $y=f(x)$ と y が定まっているときは，y' や $\dfrac{dy}{dx}$ などのようにも表す．$\dot{y}$ はニュートンに由来する記号であるが近年は余り用いない．いずれにせよ次の記号はそれぞれの歴史があり，また記号のかたちの意味づけもできるが，導関数を定義した段階では同じものを表すとしてよい．

$$y',\ f',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ \dot{y}$$

連続性

定理 34　関数 $f(x)$ が区間 $I=(a,\ b)$ で微分可能なら区間 I で連続である．■

証明　区間 I で連続でないとする．つまり区間の点 c と正の実数 ϵ で，任意の正の実数 δ に対して

$$|x-c|<\delta \quad \text{かつ} \quad |f(x)-f(c)| \geqq \epsilon$$

となるものが存在するとする．このとき

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right| > \frac{\epsilon}{\delta}$$

なので，正の実数 a に対して

$$\frac{\epsilon}{\delta} > a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\epsilon}{a} > \delta$$

となる δ をとれば

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right| > a$$

となる．つまり極限値

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

が存在しない．微分可能という仮定に反する．したがって $f(x)$ は I で連続である．□

このように $f(x)$ が微分可能であれば $f(x)$ は連続であるが，逆は成り立たない．$f(x)=|x|$ は実数全体で連続であるが，$x=0$ で微分可能ではない．

四則と微分

定理 35 　f と g が区間 I で微分可能であるとする．定数 α，β に対して

$$\alpha f+\beta g\ ,\quad f\cdot g\ ,\quad \frac{g}{f}\ \ (I\text{ で }f\neq 0\text{ のとき})$$

はいずれも I で微分可能で

(1) $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$

(2) $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

(3) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'=\dfrac{fg'-f'g}{f^2}$

となる． ■

証明

(1)

$$\begin{aligned}\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\alpha f(x+h)+\beta g(x+h)-\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\alpha f(x+h)-\alpha f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\beta g(x+h)-\beta g(x)}{h}\\ &= \alpha f'(x)+\beta g'(x)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\{f(x)\cdot g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)\\ &= f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\quad (f(x)\text{ は連続なので.})\end{aligned}$$

(3)

$$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}'=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

を示せば (3) は (2) から従う．$f(x)$ の連続性から

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{f(x+h)}-\dfrac{1}{f(x)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}=-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{f(x+h)f(x)}=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}\end{aligned}$$

である． □

合成関数，逆関数の微分

定理 36 (4) $f(x)$ と $g(x)$ が区間 I で微分可能であるとする．このとき合成関数 $f \circ g(x)$ も微分可能で

$$\{f \circ g(x)\}' = f'(g(x))g'(x)$$

となる．

(5) $f(x)$ が区間 I で微分可能で値域が区間 J であり，かつ逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在するとする．区間において $f'(x) \neq 0$ なら，$f^{-1}(x)$ は区間 J で微分可能である．

■

証明

(4) 実数 h に対して

$$g(x+h) = g(x) + k$$

とおくと $g(x)$ の連続性から $h \to 0$ のとき $k \to 0$ である．したがって

$$\begin{aligned}
\{f \circ g(x)\}' = \{f(g(x))\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

(5) $y = f^{-1}(x)$ $(x \in J)$ とおくと $x = f(y)$ $(y \in I)$ である．また $y + k = f^{-1}(x+h)$ とおくと $f(y+k) = x + h$ である．

$$\frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{(x+h) - x} = \frac{(y+k) - y}{f(y+k) - f(y)}$$

となり，$f(x)$ の連続性から $h \to 0$ のとき $k \to 0$ で，このとき $\dfrac{f(y+k) - f(y)}{k}$ が 0 でない x による有限値に収束する．よって $\dfrac{(y+k) - y}{f(y+k) - f(y)}$ も 0 でない有限値 $\dfrac{1}{f'(y)}$ に収束する．つまり $f^{-1}(x)$ は区間 J で微分可能である． □

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成は，変数を区別して

$$y = f(x),\ z = g(y) = g(f(x))$$

とすることで定義することもできる．この場合，定理 36 の合成関数の微分公式は

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

とも表される．

注意 4.1 逆関数の微分可能性を前提にすれば，次のように合成関数の微分法から逆関数の微分を決定できる．

$$f^{-1}(f(y)) = y$$

であるから合成関数の微分により

$$\{f^{-1}\}'(f(y))f'(y) = 1$$

である．これより

$$\{f^{-1}\}'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad (x \in J,\ y \in I)$$

またこの公式は

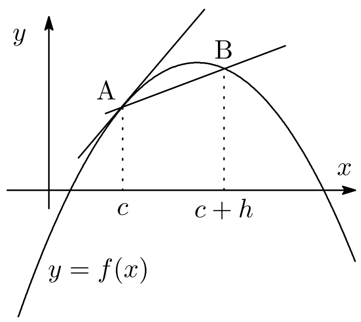
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

とも表される．

微分係数の図形的な意味　一般に標準的な直交座標が入った平面に直線があるとする．直線上の 2 点 A$(x_1,\ y_1)$ と B$(x_2,\ y_2)$ に対して，x 方向の変化と y 方向の変化の比

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

を直線 AB の**傾き**という．これは x 軸を水平としたときの直線の勾配である．



関数 $f(x)$ は定義域で微分可能とする．定義域内の c に対し微分係数 $f'(c)$ は関数 $y = f(x)$ のグラフでは何を表すのか．グラフ上の 2 点を A$(c,\ f(c))$ と B$(c+h,\ f(c+h))$ とすると，平均変化率

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

は直線 AB の傾きである．ここで h を 0 に近づけると，直線 AB は点 A での接線に近づく．
したがって傾きの極限

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

は点 A での接線の傾きである．しかし逆に曲線の接線とは何かと考えるとよくわからない．実は，曲線が関数 $y = f(x)$ のグラフであるとき，その上の点 $(c,\ f(c))$ での接線をこの点を通り傾きが $f'(c)$ の直線

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

と定める．

関数の増減　区間で定義された関数 $f(x)$ が単調増加関数であるとは, 区間の 2 点 $x_1,\ x_2$ を $x_1 < x_2$ であるようにとると，

$$f(x_1) \leqq f(x_2)$$

が成りたつことをいう．$f(x)$ が増加関数で a を区間の点とする．$x < a$ なら $f(x) \leqq f(a)$，$x > a$ なら $f(x) \geqq f(a)$ なので平均変化率はつねに

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqq 0$$

である．よって

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqq 0$$

$f(x) = x^3$ は $x \neq 0$ に対して $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 > 0$ であるが，$f'(0) = 0$ である．このように増加関数ではいくつかの点を除いて導関数は正である．

逆に区間において微分可能で $f'(x) \geqq 0$ が成り立つとき，$f(x)$ はこの区間で単調増加している．これを証明するためには平均値が必要である．平均値の定理の系として示す．

以上の議論は関数の減少についても同様である．

関数の極大，極小

定義 22　関数 $f(x)$ で次のことが成り立つとする．

$$\exists \epsilon (> 0); |x - a| < \epsilon, x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

このとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で**極大である**という．

$f(x) > f(a)$ が成り立つとき極小であるという．■

$y = |x|$ は $x = 0$ で極小である．この場合のように微分できない点でも，極大や極小であり得る．それに対して，$f(x)$ が微分可能な場合に $f(x)$ が $x = a$ で極大であることは

$f'(a) = 0$ で $f'(x)$ は $x = a$ の前後で正から負に変わる．

ことと同値である．

4.2　微分計算

整式関数　$f(x)$ が定数関数なら $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$ なので $f'(x) = 0$．$f(x)$ が整式のとき．$f(x)$ は定数と x^n を定数倍したものの和なので，x^n の微分ができれば，$f(x)$ の微分もできる．

x^n の微分　n を自然数とする．x の n 乗である x^n を微分する方法は 3 つある．

方法 1

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

となることを，次数 n に関する数学的帰納法で示す．$n = 1$ のときは明らかに成立．$n = k$ で成立とする．このとき

$$\frac{d}{dx} x^{k+1} = \frac{d}{dx} x \cdot x^k = x^k + x \cdot (k x^{k-1}) = (k+1) x^k$$

なので $n = k + 1$ でも成立し，すべての n で成立する．

方法 2　直接示す方法の一つは二項定理を用いる．二項定理とは，$(x + y)^n$ の展開式が組合せの場合の数を表す記号 ${}_n\mathrm{C}_k$ を用いて

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k} y^k = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots$$

と表されることをいう．これを用いて x^n を微分しよう．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left\{x^n+nx^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots\right\}-x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots\right\}=nx^{n-1}\end{aligned}$$

方法 3　もう一つは，因数分解

$$X^n-Y^n=(X-Y)(X^{n-1}+X^{n-2}Y+\cdots+XY^{n-2}+Y^{n-1})$$

を用いる方法である．この因数分解で $X=x+h$，$Y=x$ とすると

$$\begin{aligned}&(x+h)^n-x^n\\ =\ &(x+h-x)\left\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right\}\\ =\ &h\left\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{h\to 0}(x+h)^{n-1}=\lim_{h\to 0}(x+h)^{n-2}x=\cdots=x^{n-1}$$

なので，これから

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

となる．□

有理数 α に対して x^α の微分は指数関数と対数関数の微分からも求まる．が，直接求めることもできる．以下 m, n は自然数とする．

x^{-n} の微分　商の微分から

$$\frac{d}{dx}x^{-n}=\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$$

$x^{\frac{1}{n}}$ の微分　$y=x^{\frac{1}{n}}$ は，区間 $[0,\ \infty)$ で単調増加な関数 $f(x)=x^n$ の逆関数である．逆関数の微分から

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$x^{\frac{m}{n}}$ の微分　$x^{\frac{m}{n}}=(x^m)^{\frac{1}{n}}$ なので 2 つの関数 x^m と $x^{\frac{1}{n}}$ の合成関数である．合成関数の微分から

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{n}\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot(mx^{m-1})=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

三角関数

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{-2\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} = -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}$$

なので

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ より

$$\frac{d}{dx}\sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

また

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

逆三角関数　逆三角関数の定義 3.4 にしたがってそれぞれの定義域に注意する．

$y=\arcsin x$ とする．$x=\sin y$ より $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ 範囲の y に対して $\cos y=\sqrt{1-x^2}$ である．

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

同様に $y=\arccos x$ $(0<y<\pi)$ とする．$x=\cos y$ よりこの範囲の y に対して $\sin y=\sqrt{1-x^2}$ である．

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y=\arctan x$ $\left(|y|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．$x=\tan y$ よりこの範囲の y に対して $\cos^2 y=\dfrac{1}{1+x^2}$ である．

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

対数関数　1 章 2 節の系 33.1 より

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

なので

$$\frac{d}{dx}\log x = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}$$

である．また 1 でない正数 a に対して

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\log x}{\log a} = \frac{1}{x\log a}$$

指数関数

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

ここで $e^h-1=X$ とおく．$h=\log(X+1)$ である．

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{X}{\log(X+1)} = \frac{1}{\log(X+1)^{\frac{1}{X}}}$$

$h\to 0$ のとき $X\to 0$ なので

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{X\to 0}\frac{1}{\log(X+1)^{\frac{1}{X}}} = \frac{1}{\log e} = 1$$

よって

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

また 1 でない正数 a に対して $a^x = e^{x\log a}$ であるから

$$\frac{d}{dx}a^x = (\log a)a^x$$

x^r の微分　ここで r は任意の実数，定義域は $x>0$ とする．$y=x^r$ とする．$\log y = r\log x$ の両辺を x で微分する．

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x}$$

これから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x}\cdot y = rx^{r-1}$$

このように対数をとって微分する方法を対数微分という．

4.3　関数解析

関数の解析　微分の方法は関数の諸性質を解析するもっとも基礎となる方法である．そのためのいくつかの基本定理を証明する．

平均値の定理　平均値の定理は微分法における最も重要な定理である．平均値の定理を証明するために, まずロルの定理を示す.

　ロルの定理は，実数の完備性を根拠とする存在定理の典型である．

定理 37 (ロルの定理)　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続, 開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であり，かつ $f(a)=f(b)=0$ をみたすものとする. このとき

$$f'(c)=0 \quad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する．■

証明　$f(x)$ が定数なら $f'(x)=0$ なので明らか．定数でないなら関数 $f(x)$ は閉区間で連続なので最大値と最小値が存在する．$f(a)=f(b)$ なので最大値か最小値のいずれかは $f(a)=f(b)$ ではない．それを $f(c)$ とする．$f(c)$ が最大値であるとする．

$f(c)$ は最大値なので，$c+h$ が区間に属するすべての h に対して $f(c+h)-f(c) \leqq 0$ である．$f(x)$ は $x=c$ で微分可能なので，分母の符号を考え

$$f'(c)=\lim_{h\to -0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0$$

$$f'(c)=\lim_{h\to +0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0$$

ゆえに

$$f'(c)=0$$

である．$f(c)$ が最小値のときも同様である．□

これを一般化することで平均値の定理が得られる．

定理 38 (平均値の定理)　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続, 開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとする．このとき

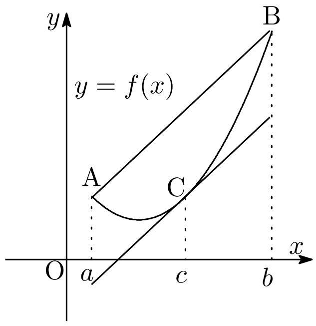
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する．■

まず，平均値の定理はグラフでは何を意味するか．関数 $f(x)$ のグラフは，ひとつながりになったなめらかな (連続かつ微分可能) 曲線である．その端点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を結ぶ線分 AB の傾き

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

をとる．この傾きと，$x=c$ における接線の傾き $f'(c)$ が等しくなる点 $\mathrm{C}(c,\ f(c))$ が曲線の端点 A と B の間に存在する．



平均値の定理の証明　関数 $f(x)$ に対し，定数 k を $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ で定める．k を用いて関数 $g(x)$ を

$$g(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$$

で定める．$g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続, 開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であり，

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a)-f(a)-k(a-a)=0 \\ g(b) &= f(b)-f(a)-k(b-a)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a)=0 \end{aligned}$$

であるから，ロルの定理より

$$g'(c)=0 \quad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する．$g'(x)=f'(x)-k$ より

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

つまり題意をみたす c が存在した． $\square$

系 38.1　開区間 $I=(a,\ b)$ で微分可能な関数 $f(x)$ が I で定数、単調増加、単調減少となる必要十分条件は

$$
\begin{array}{lll}
f:\ \ I\text{で定数} & \Longleftrightarrow & f'(x)=0\ (x\in I)\\
f:\ \ I\text{で単調増加} & \Longleftrightarrow & f'(x)\geqq 0\ (x\in I)\\
f:\ \ I\text{で単調減少} & \Longleftrightarrow & f'(x)\leqq 0\ (x\in I)
\end{array}
$$

である． $\blacksquare$

証明　必要性は「関数の増減」で示されている．逆に，$f'(x)$ についてそれぞれの条件が成り立つとする．このとき $a<x_1\leqq x_2<b$ なる任意の $x_1,\ x_2$ に対してそれぞれ

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0,\ \geqq 0,\ \leqq 0$$

が成り立つ．したがって

$$f(x_2)-f(x_1)=0,\ \geqq 0,\ \leqq 0$$

が成り立つ． $\square$

系 38.2　開区間 $I=(a,\ b)$ で微分可能な関数 $f(x)$ が $a<x_1\leqq x_2<b$ なる $x_1,\ x_2$ に対して

$$m\leqq f'(x)\leqq M\quad (x\in I)$$

ならば

$$(x_2-x_1)m\leqq f(x_2)-f(x_1)\leqq (x_2-x_1)M$$

が成り立つ． $\blacksquare$

証明　同様に

$$m\leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqq M$$

が成り立つ．これから結論が得られる． $\square$

系 38.3　$f(x)$ と $g(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続, 開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとする．このとき

$$f'(x)\leqq g'(x)\ (x\in I)$$

ならば

$$f(b)-f(a)\leqq g(b)-g(a)$$

が成り立つ． $\blacksquare$

証明　$F(x)=f(x)-g(x)$ とし，$a<x_1\leqq x_2<b$ なる $x_1,\ x_2$ に対して $M=0$ で系 38.2 を用いると，

$$f(x_2)-f(x_1)\leqq g(x_2)-g(x_1)$$

関数の連続性から結論を得る． $\square$

系 38.4　関数 $f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続, $(a,\ b)$ で微分可能であるとする．このとき

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\theta(b-a)) \quad (0<\theta<1)$$

となる θ が少なくとも 1 つ存在する． ■

証明　平均値の定理 38 で $b-a=h$ とおくと, $0<c-a<b-a$ となるので $0<\theta<1$ の範囲にある θ を用いて $c-a=\theta(b-a)$，つまり $c=a+\theta(b-a)$ と書ける． □

導関数の連続性　$x=a$ で微分可能な関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である．しかしその導関数 $f'(x)$ が連続であるとは限らない．

例 4.1

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

で定まる関数について

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|=\lim_{h\to 0}\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right|\leqq\lim_{h\to 0}|h|=0$$

より微分係数が存在し $f'(0)=0$ である．

$x\neq 0$ でも微分可能で，そこでの導関数は

$$f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

ところが

$$\lim_{x\to 0}f'(x)$$

は収束せず，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ は存在しない．よって $f'(x)$ は $x=0$ で連続ではない．

この例は，その点での極限が存在しないことによって，連続ではないことになった．しかし，導関数については

$$\lim_{x\to c}f'(x) \text{ は存在するが } f'(c) \text{ とは異なる．}$$

という型の不連続性は起こらない．次の命題が成立する．

定理 39 開区間 $I=(a,\ b)$ で連続な関数 $f(x)$ が $(a,\ c)$, $(c,\ b)$ でそれぞれ微分可能で $\displaystyle\lim_{x\to c}f'(x)=l$ が存在すれば $f(x)$ は c でも微分可能で $f'(c)=l$ である．つまり $f'(x)$ は $x=c$ でも連続である．
■

証明　I の x で c と異なるものをとる．$f(x)$ は区間 $[x,\ c]$ または $[c,\ x]$ で平均値の定理の条件を満たしている．よって，

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(\xi)$$

となる $(x,\ c)$ または $(c,\ x)$ の ξ が存在する．

$x\to c$ のとき $\xi\to c$ で，$\displaystyle\lim_{\xi\to c}f'(\xi)$ が存在して l となるので，

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{\xi\to c}f'(\xi)=l$$

となり，$f(x)$ は c でも微分可能で $f'(c)=l$ である． □

コーシーの平均値の定理　平均値の定理を二つの関数の商の形に一般化することができる．

定理 40　関数 $f(x)$，$g(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能で，かつこの区間でつねに $g'(x) \neq 0$ とする．

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < b)$$

をみたす c が存在する．■

証明　平均値の定理から

$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(\alpha) \neq 0 \ \ (a < \alpha < b)$$

となる α が存在する．そこで

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

とおき，関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(a) - k\{g(x) - g(a)\}$$

で定める．$F(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能で，$F(a) = F(b) = 0$ であるから，ロルの定理によって

$$F'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が $a < c < b$ に存在する．□

コーシーの平均値の定理も系 38.4 と同様に，次の等式を満たす θ の存在とすることもできる．

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))} \quad (0 < \theta < 1)$$

注意 4.2　コーシーの平均値の定理 40 において $g(x) = x$ とすれば平均値の定理 38 そのものになる．この意味でコーシーの平均値の定理は平均値の定理の一般化である．

不定形の極限　二つの関数 $f(x)$，$g(x)$ と定義域内の c がある．

$$\lim_{x\to c} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to c} g(x) = \beta$$

商 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ の $x \to c$ の極限は次のような場合は確定する．

(1) $\alpha \neq 0$ のとき．$\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\beta}{\alpha}$

(2) $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$ かつ c の近くで $f(x)$ の符号が一定．このときは，$\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}$ は $+\infty$ または $-\infty$ である．

ところが $\alpha = \beta = 0$ のときはさまざまの状況が起こり，**不定形**といわれるものの一つである．複雑な関数で不定形になる場合のうち，コーシーの平均値の定理を応用して計算できる場合がある．

系 40.1 (ロピタルの定理)　二つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が c の近くで連続，c 以外では微分可能とし，

$$f(c) = g(c) = 0,\ f'(x) \neq 0$$

とする．L を有限確定値かまたは $\pm\infty$ とする．このとき

$$\lim_{x\to c} \frac{g'(x)}{f'(x)} = L \text{ ならば } \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = L$$

■

証明　$x \neq c$ とする．x と c の間の ξ が存在して

$$\frac{g(x) - g(c)}{f(x) - f(c)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$$

となるものがある．$x \to c$ のとき $\xi \to c$ なので右辺の極限値が L なら左辺の極限値も L である．□

注意 4.3　この系の証明では，x と c の間での平均値の定理しか用いていないので，$x \to c$ の代わりに $x \to c+0$ または $x \to c-0$ としても成り立つ．

系 40.2　二つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $(c,\ +\infty)$ で微分可能で

$$f'(x) \neq 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

とする．$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ が存在するか，$\pm\infty$ が確定すれば

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$$

■

証明　$x = \dfrac{1}{t}$ の置きかえをし

$$p(t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{t}\right) & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases} \qquad q(t) = \begin{cases} g\left(\dfrac{1}{t}\right) & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

とする．これらは $x \to +\infty$ のとき $t \to 0\ (t > 0)$ であり，$t = 0$ で連続，$t \neq 0$ で微分可能である．

$$p'(t) = -t^{-2} f'\left(\frac{1}{t}\right),\ q'(t) = -t^{-2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$$

なので系 40.1 から

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{t\to0} \frac{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0} \frac{q'(t)}{p'(t)} = \lim_{t\to0} \frac{q(t)}{p(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$$

□

当然ロピタルの定理はくりかえして使うこともできる．

例 4.2

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} &= \lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2\\
\lim_{x\to0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2} &= \lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

注意 4.4　このようにロピタルの定理は有用なものであるが次のような場合は使ってはならない．

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{1}=1$$

なぜかといえば，$\sin x$ や e^x の微分にこれらの不定形の極限を使うから，これでは循環論法になる．

4.4　高次微分

関数 $f(x)$ が与えられている．この関数を 0 回微分した関数は $f(x)$ 自身として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して n 回微分を帰納的に次のように定義する．$n-1$ 回微分した関数を $f^{(n-1)}(x)$ とする．$f^{(n-1)}(x)$ がふたたび微分可能なとき $f(x)$ は n **回微分可能**であるといい，$f^{(n-1)}(x)$ の導関数 $(f^{(n-1)}(x))'$ を $f^{(n)}(x)$ と書く．これを $f(x)$ の**第 n 次導関数**という．これによって，帰納的に第 n 次導関数が定義される．

定理 41　関数 f と g は n 回微分可能であるとする．定数 α，β に対して $\alpha f+\beta g$，$f\cdot g$ はそれぞれ n 回微分可能で

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}$

(2) $(f\cdot g)^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$

となる．　■

証明　数学的帰納法で示す．$n=1$ のときは定理 35 より成立．
n のときに成立するとする．$n+1$ のとき．

$$\begin{aligned}
(\alpha f+\beta g)^{(n+1)} &= \{(\alpha f+\beta g)^{(n)}\}'=\{\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}\}'\\
&= \alpha\{f^{(n)}\}'+\beta\{g^{(n)}\}'=\alpha f^{(n+1)}+\beta g^{(n+1)}\\
(f\cdot g)^{(n+1)} &= \left\{\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\right\}'=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\{f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\}'\\
&= \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\{f^{(n-k+1)}\cdot g^{(k)}+f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}\}\\
&= \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\{f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+f^{(n+1-(k+1))}\cdot g^{(k+1)}\}\\
&= f^{(n+1)}g+\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{C}_{k+1})f^{(n+1-(k+1))}\cdot g^{(k+1)}\\
&= f^{(n+1)}g+\sum_{k=0}^{n}{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}f^{(n+1-(k+1))}\cdot g^{(k+1)}
\end{aligned}$$

$$= \quad f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)}$$

となり $n+1$ のときも成立する．よってすべての自然数に対して定理が成立する． □

つぎの定理は定理 35 の (3)，および定理 36 の (4)(5) を $n=1$ のときとし，後はこれらをくりかえし用いることで数学的帰納法によって成立する．ただ一般形を書くことは，$n=1$ の場合のように簡単ではない．

定理 42 関数 f と g は n 回微分可能であるとする．

(3) $f(x) \neq 0$ のとき $\dfrac{g}{f}$ も n 回微分可能である．

(4) 合成関数 $f \circ g$ も n 回微分可能である．

(5) 逆関数 f^{-1} は $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ であるところで n 回微分可能である．

が成り立つ． ■

例 4.3 高次導関数の例：証明はいずれも数学的帰納法による．n 次導関数から $n+1$ 次導関数を導くところを示す．

(1) $f(x) = x^r$.

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)x^{r-n}$$

これは r が自然数 m のときは，$m>n,\ m=n,\ m<n$ に応じて

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n},\ n!,\ 0$$

となることを含んでいる．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx}r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)x^{r-n} \\
&= r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)\{r-(n+1)+1\}x^{r-(n+1)}
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x$.

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),\ g^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(-x-\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}+x+\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) \\
\frac{d}{dx}g^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = -\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(-x-\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}+x+\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

第二次導関数　開区間 I で微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がふたたび微分可能であるとき $f(x)$ は**二回微分可能**であるという．$f'(x)$ の導関数を**第二次導関数**といい $f''(x)$ と書く．第二次導関数については次のような記号も用いる．

$$y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

第二次導関数の計算公式などは次の第 n 次導関数のところで統一して示す．ここでは，第二次導関数の幾何的意味について考える．第二次導関数の符号が一定なら，接線の傾きが単調に変化することを意味し，グラフの形状が，いわゆる「上に凸」や「下に凸」といわれるものになる．これらの概念をもう少し正確に考えていこう．そのためにいくつかの定義を導入し，いくつかの定理を証明する．

凸領域

定義 23　平面の領域 D 内の任意の 2 点 P，Q に対し線分 PQ が D に含まれるとき，領域 D は**凸領域**であるという．■

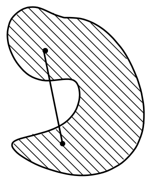


図 1

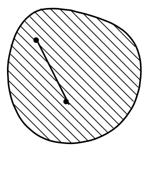


図 2

図 1 は凸領域でなく図 2 は凸領域である．

第二次導関数の符号一定

定理 43　関数 $f(x)$ は I で定義され，この区間で二回微分可能であり，かつこの区間で $f''(x) > 0$ とする．定義域内の任意の二つの x の値 x_1，x_2 と $0 < t < 1$ なる実数 t に対して

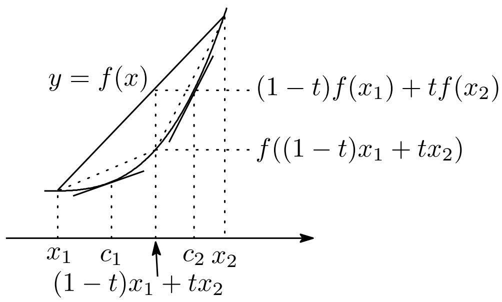
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

が成立する．■

証明　$x_1 = x_2$ のときは等号が成立する．
いま $x_1 < x_2$ とする．すると

$$x_1 < (1-t)x_1 + tx_2 < x_2$$

である．区間 $[x_1,\ (1-t)x_1 + tx_2]$ と $[(1-t)x_1 + tx_2,\ x_2]$ に平均値の定理を用いる．それぞれに対応する開区間内の c_1，c_2 を用いて



$$\frac{f((1-t)x_1 + tx_2) - f(x_1)}{(1-t)x_1 + tx_2 - x_1} = f'(c_1),\ \frac{f(x_2) - f((1-t)x_1 + tx_2)}{x_2 - (1-t)x_1 - tx_2} = f'(c_2)$$

となるものが存在する．$f''(x) > 0$ より $f'(x)$ が単調増加なので $f'(c_1) < f'(c_2)$，つまり

$$\frac{f((1-t)x_1 + tx_2) - f(x_1)}{(1-t)x_1 + tx_2 - x_1} < \frac{f(x_2) - f((1-t)x_1 + tx_2)}{x_2 - (1-t)x_1 - tx_2}$$

これを整理して

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

を得る．$x_1 = x_2$ で等号のときとあわせて本定理が示された．□

これは次のように一般化される．

系 43.1 関数 $f(x)$ は区間 $I=[a,\ b]$ で定義され，この区間で二回微分可能であり，かつこの区間で $f''(x)>0$ とする．n を二以上の自然数とする．定義域内の任意の n 個の x の値 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ と正で $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ なる実数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ に対して

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$$

が成立する． ■

証明 数学的帰納法で示す．$n=2$ のときは定理 43 から成立．

n 個の場合に成立するとし $n+1$ 個の場合に成立することを示す．

$q=p_1+p_2+\cdots+p_n$ とおく．$\dfrac{p_1}{q}+\dfrac{p_2}{q}+\cdots+\dfrac{p_n}{q}=1$ および $q+p_{n+1}=1$ であることに注意する．

$$\begin{aligned}
&p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)+p_{n+1}f(x_{n+1})\\
=\ &q\left\{\frac{p_1}{q}f(x_1)+\frac{p_2}{q}f(x_2)+\cdots+\frac{p_n}{q}f(x_n)\right\}+p_{n+1}f(x_{n+1})\\
&\text{数学的帰納法の仮定から}\\
\geqq\ &qf\left(\frac{p_1}{q}x_1+\frac{p_2}{q}x_2+\cdots+\frac{p_n}{q}x_n\right)+p_{n+1}f(x_{n+1})\\
&\text{定理 43 から}\\
\geqq\ &f\left(q\left\{\frac{p_1}{q}x_1+\frac{p_2}{q}x_2+\cdots+\frac{p_n}{q}x_n\right\}+p_{n+1}x_{n+1}\right)\\
=\ &f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_{n+1}x_{n+1})
\end{aligned}$$

ゆえに $n+1$ の場合も成立した．等号成立は $x_1=\cdots=x_{n+1}$ のとき．よって一般の n に対して題意が示された． □

$f''(x)<0$ のときは不等号の向きが逆になる．その他は同じである．この不等式は多くの絶対不等式を作り出す．

例 4.4 $f(x)=\log x$ とすると，定義域は $I=(0,\ +\infty)$ で $f''(x)=-x^{-2}<0$ である．$p_1=p_2=\cdots=p_n=\dfrac{1}{n}$ で用いると

$$\log\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geqq \frac{\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n}{n}=\log(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

である．これから相乗平均・相加平均の不等式が得られる．

凸関数

定義 24 閉区間 $I=[a,\ b]$ で定義された関数 $f(x)$ がある．$\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ とする．xy 平面におけるグラフの曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ と線分 AB で囲まれた領域 D が凸であるとき，関数 $f(x)$ を凸関数という．

$f(x)$ が区間 $(-\infty,\ \infty)$ や $(a,\ \infty)$，また $(a,\ b)$ などの，端点が $\pm\infty$ である場合を含む開区間で定義されているときは，その区間内の任意の閉区間で凸関数であるとき，$f(x)$ を凸関数であるという． ■

D はつぎのように記述される．$y = g(x)$ を直線 AB の方程式とする．$g(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ である．

$$D = \{(x,\ y) \mid f(x) \leqq y \leqq g(x) \text{ または } g(x) \leqq y \leqq f(x) \text{ が成立.}\ (x \in I)\ \}$$

系 43.2　関数 $f(x)$ は区間 $I = [a,\ b]$ で定義され，この区間で二回微分可能であり，かつこの区間で $f''(x)$ の符号が一定である．このとき $f(x)$ は凸関数である．■

証明　$f''(x) > 0$ とする．$g(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ とするとき I において $g(x) - f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示す．$F(x) = g(x) - f(x)$ とおく．

$$F'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$$

である．平均値の定理から $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ となる c が区間 $(a,\ b)$ に存在する．$F'(c) = 0$ かつ $F''(x) = -f''(x) < 0$ より $F(x)$ は $x = c$ で極大で最大である．$F(a) = F(b) = 0$ となるので，I で $F(x) \geqq 0$ であることが示された．よって領域

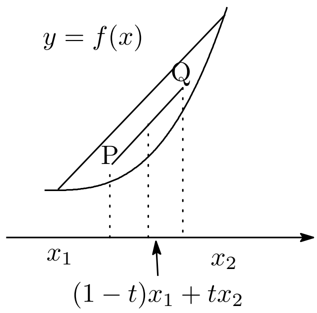
$$D = \{(x,\ y) \mid f(x) \leqq y \leqq g(x)\ (x \in I)\ \}$$

が凸であることを示せばよい．D の 2 点 P, Q をとり $\mathrm{P}(x_1,\ y_1),\ \mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とする．また線分 PQ 上の点 R を $0 < t < 1$ の範囲の実数 t を用いて

$$\mathrm{R}\left((1-t)x_1 + tx_2,\ (1-t)y_1 + ty_2\right)$$

とおく．P, Q が D の点なので

$$f(x_1) \leqq y_1 \leqq g(x_1)$$
$$f(x_2) \leqq y_2 \leqq g(x_2)$$



が成り立つ．それぞれ $1 - t > 0,\ t > 0$ を乗じて加えることにより

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \leqq (1-t)y_1 + ty_2 \leqq (1-t)g(x_1) + tg(x_2)$$

が成り立つ．$g(x)$ は $g(x) = c(x-a) + f(a)$ と 1 次関数なので，

$$(1-t)g(x_1) + tg(x_2) = g((1-t)x_1 + tx_2)$$

である．定理 43 から

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

なので

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqq (1-t)y_1 + ty_2 \leqq g((1-t)x_1 + tx_2)$$

が成立する．つまり点 $\mathrm{R}\left((1-t)x_1 + tx_2,\ (1-t)y_1 + ty_2\right)$ も領域 D に属することが示された．よって D は凸領域であり，$f(x)$ は凸関数である．$f''(x) < 0$ のときもまったく同様に示される．□

4.5 級数展開

平均値の定理の拡張　平均値の定理を第 n 次導関数の場合に一般化することで，関数の展開定理の基礎となるテーラーの定理が得られる．

定理 44 (テーラーの定理)　関数 $f(x)$ を区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で n 回微分可能な関数とする．このとき，次のような c が存在する．

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \quad a < c < b$$

証明

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + K(b-x)^n$$

とする．ここで K は

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + K(b-a)^n$$

で定める．すると

$$F(a) = f(b), \qquad F(b) = f(b)$$

よって, ロルの定理 37 により，$a < c < b$ の範囲の c で，$F'(c) = 0$ となるものが存在する．ここで

$$F'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1} \right] - Kn(b-x)^{n-1}$$

であるから,

$$F'(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} - Kn(b-c)^{n-1} = 0$$

が成り立つ．つまり

$$K = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

である．よって

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{n}(c)}{n!}(b-a)^n$$

である．　□

この証明は平均値の定理とまったく同様である．つまり，適切な関数 $F(x)$ をとりロルの定理から c の存在を示している．

展開定理　関数 $f(x)$ を区間 I で n 回微分可能な関数とする．区間に属する $a,\ x$ に対し，テーラーの定理 (定理 44) から a と x の間の c を用いて

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n \quad \left(R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \right)$$

と展開される．R_n のことを**剰余項**という．ここで $f(x)$ およびその高次導関数がすべて I で有界：

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqq M \ (x \in I,\ n \in \mathbb{N})$$

であれば，

$$|R_n| \leqq \frac{|x-a|^n}{n!}M$$

となる．これは，関数 $f(x)$ を $n-1$ 次多項式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ で近似すると，誤差が $\dfrac{|x-a|^n}{n!}M$ で評価されることを意味している．さらに定理 44 を $a=0, b=x$ で用い，c を $c=\theta x\ (0<\theta<1)$ と表すと次のようになる．

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

関数を展開する　平均値の定理を n 次導関数にまで拡張することで，テーラーの展開定理が得られた．これを 1 章 3 節 5 小節の「関数列の収束」と結びつけることで，関数の級数展開定理が得られる．

系 44.1　$f(x)$ を区間 I で無限回微分可能な関数とし，r を $|r|<1$ の範囲の定数とする．

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqq M\ (x\in I,\ n\in\mathbb{N})$$

であれば，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と展開され，この級数は閉区間 $[a-r,\ a+r]\subset I$ で一様収束である．■

証明　R_n を剰余項とする展開

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n \qquad \left(R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\right)$$

で

$$|R_n| \leqq \frac{|x-a|^n}{n!}M \leqq \frac{Mr^n}{n!}$$

他の項も

$$\left|\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqq \frac{Mr^k}{k!}$$

である．ダランベールの判定法系 22.2 によって正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Mr^n}{n!}$ は収束する．したがって 1 章 3 節 5 小節系 31.1 により，本結論が従う．□

この級数を**テーラー級数**という．また関数 $f(x)$ のこの展開を**テーラー展開**という．

特に $a=0$ にとった

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

を**マクローリンの公式**，**マクローリン級数**という．

例 4.5　$f(x)=e^x$ のとき．$f^{(n)}(x)=e^x$ であるから $f^{(n)}(0)=1$．また $|x|\leqq r$ のとき $|f^{(n)}(x)|=|e^x|\leqq e^r$ なので任意の $r\ (>0)$ に対する区間 $[-r,\ r]$ で

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{k!}x^k+\cdots+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

と展開される．収束半径は $+\infty$ である．

例 4.6　$f(x)=\sin x$ のとき．$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ であるから

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n=2k)\\ (-1)^k & (n=2k+1)\end{cases}$$

また $|f^{(n)}(x)|\leqq 1$ なので任意の $r\ (>0)$ に対する区間 $[-r,\ r]$ で

$$f(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots$$

収束半径は $+\infty$ である．

例 4.7 (一般二項展開)　実数 α に対し $f(x)=(1+x)^\alpha$ とする．$k\geqq 1$ に対して，

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

したがって，

$$\begin{aligned}&(1+x)^\alpha\\ =\ &1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}\\ &\qquad+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n}\cdot x^n\end{aligned}$$

α が自然数 n の場合，最終項は

$$\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}(1+\theta x)^0x^n={}_n\mathrm{C}_nx^n$$

また，x^k の係数はちょうど ${}_n\mathrm{C}_k$ となっているので

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

となる．これは二項定理そのものである．α が自然数でな場合，剰余項の評価は簡単ではない．しかし，$|x|<1$ なら

$$(1+x)^\alpha=1+\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}\alpha\\2\end{pmatrix}x^2+\cdots+\begin{pmatrix}\alpha\\n\end{pmatrix}x^n+\cdots$$

ここで

$$\begin{pmatrix}\alpha\\n\end{pmatrix}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

とする．これを**一般二項展開**という．

巾級数で定まる関数　ここでは数列 $\{a_n\}$ の添え字 n を 0 を含めた自然数にとる．自然数に 0 を含めた集合を $\mathbb{N}'$ と表した．

関数の級数展開とは逆に，級数の形が与えられたとき，それが関数を定める条件を考えよう．次の定理が数列の収束と関数列の収束を結びつける．

定理 45　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対する実数列 $\{a_n\}$ がある．関数列 $\{f_n(x)\}$ を

$$f_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

で定める．r を 0 でない実数とする．数列 $\{f_n(r)\}$ が収束するとき，$0<c<|r|$ となる c をとると閉区間 $I=[-c,\ c]$ で関数列 $\{f_n(x)\}$ は一様収束し，開区間 $(-|r|,\ |r|)$ で収束する．　■

証明　級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ が収束しているので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nr^n=0$ である．したがって数列 $\{a_nr^n\}$ は有界である．$|a_nr^n|\leqq M\ (n\in\mathbb{N}')$ とする．$|x|\leqq c<|r|$ の x に対して

$$|a_nx^n|\leqq|a_n|\,c^n=|a_nr^n|\left(\frac{c}{|r|}\right)^n\leqq M\left(\frac{c}{|r|}\right)^n\ \ (n\in\mathbb{N}')$$

となる．$0<\dfrac{c}{|r|}<1$ なので正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}M\left(\frac{c}{|r|}\right)^n$ は収束する．系 31.1 によって巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は $I=[-c,\ c]$ で一様収束する．開区間 $(-|r|,\ |r|)$ の x に対し，$|x|\leqq c<|r|$ となる c をとり，x を含む閉区間 $[-c,\ c]$ に対して前半を用いると x で収束するがわかる．　□

本定理の対偶として次の系が成り立つ．

系 45.1　級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ が発散すれば，$|r|<|c|$ なるすべての c で級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nc^n$ は発散する．■

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ に対し，x に r を代入したとき級数が収束するような r の集合を A とする．$x=0$ のときは a_0 に収束するので，A は空ではない．$x=c$ のとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nc^n$ が発散するような $c\ (\neq 0)$ が存在するとする．すると $|c|<|r|$ なる r では発散するのであるから集合 A は有界である．したがってまた A の要素の絶対値の集合も有界で，上限が存在する．この上限を R とする．

$$\sup\{|r|\mid r\in A\}$$

また発散するような 0 でない c が存在しないとき，つまり $A=\mathbb{R}$ のときは $R=+\infty$ とする．このとき定理 45 は次のように述べられる．

> 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は開区間 $(-R,\ R)$ の各点で絶対収束し，$(-R,\ R)$ に含まれる任意の閉区間で一様収束する．$|c|>R$ のとき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は発散する．

R のことを級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の**収束半径**という．巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は区間 $I=(-R,\ R)$ では一つの関数を定めている．I に含まれる任意の閉区間での収束は一様なので，その関数は連続である．巾級数で定まる関数を **(実) 解析関数**という．

系 45.2　巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ において，数列 $\left\{\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right\}$ が R に収束すれば，R は巾級数の収束半径である．　■

証明　巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に $x=c$ を代入した級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ において，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}c^{n+1}}{a_n c^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}c}{a_n}\right| = \frac{|c|}{R}$$

であるから，ダランベールの判定法 (系 22.2) によって級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ は $0<|c|<R$ のとき絶対収束し，$R<|c|$ のときは収束しない． □

系 45.3　二つの巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ の収束半径がともに R のとき，二つの巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n$$

はともに収束半径 R をもち，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)x^n &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\end{aligned}$$

である． ■

証明　これは 1 章 2 節 6 小節の定理 24 の結果である． □

定理 46 (アーベルの定理)　R を収束半径とする巾級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ がある．右辺の級数が $x\to R$ で収束すれば，$\lim_{x\to R} f(x)$ も収束し

$$\lim_{x\to R} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

である． ■

証明　$Rt=x$ とし $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n t^n$ を t の巾級数とすれば，その収束半径は 1 で，$x\to R$ のとき $t\to 1$ である．よってはじめから $R=1$ とし，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を示せばよい．

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するので任意の正数 ϵ に対して N で

$$\sigma_m = \sum_{n=N}^{N+m} a_n, \quad |\sigma_m| < \epsilon \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となるものが存在する．

このとき $0 \leqq x \leqq 1$ に対して $x^n - x^{n+1} \geqq 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=N}^{N+m} a_n x^n\right| &= \left|\sigma_0 x^N + \sum_{n=N+1}^{N+m} (\sigma_{n-N} - \sigma_{n-N-1}) x^n\right| \\
&= \left|\sigma_0 x^N + \sum_{n=N+1}^{N+m} \{\sigma_{n-N} x^n - \sigma_{n-N-1} x^{n-1} + \sigma_{n-N-1}(x^{n-1} - x^n)\}\right| \\
&= \left|\sigma_0 x^N + \sigma_m x^{N+m} - \sigma_0 x^N + \sum_{n=N+1}^{N+m} \sigma_{n-N-1}(x^{n-1} - x^n)\right| \\
&= \left|\sigma_0(x^N - x^{N+1}) + \cdots + \sigma_{m-1}(x^{N+m-1} - x^{N+m}) + \sigma_m x^{N+m}\right| \\
&\leqq |\sigma_0|(x^N - x^{N+1}) + \cdots + |\sigma_{m-1}|(x^{N+m-1} - x^{N+m}) + |\sigma_m| x^{N+m} \\
&\leqq \epsilon\{(x^N - x^{N+1}) + \cdots + (x^{N+m-1} - x^{N+m}) + x^{N+m}\} = \epsilon x^N < \epsilon
\end{aligned}
$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ はコーシー列となり一様収束する．その結果 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は連続．

$$
\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n
$$

が成り立つ． □

巾級数の微分　多項式関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ の導関数 $f'(x)$ は各項の微分の和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$ に一致する．これと同様に巾級数においても，一様収束のもとでは項別微分が可能である．

定理 47　巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R であり，この巾級数によって定まる関数を $f(x)$ とする．

1. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径は R である．

2. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ によって定まる関数を $g(x)$ とすると，$f'(x) = g(x)$ である． ■

証明

1.　x を $|x| < R$ にとり，$|x| < r < R$ なる r をとる．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ は収束するので $\{a_n r^n\}$ は有界である．$|a_n r^n| \leqq M$ $(n \in \mathbb{N})$ とする．

$$
|n a_n x^n| = \left|n a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n\right| \leqq M n \left|\frac{x}{r}\right|^n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)
$$

$\left|\dfrac{x}{r}\right| < 1$ なので級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M n \left|\frac{x}{r}\right|^n$ は収束する．よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ は絶対収束し，収束半径をもつ．それを R' とすると，$R \leqq R'$ である．

次に $|x| < R'$ とする．このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ は絶対収束するので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ も絶対収束する．$|a_n x^n| \leqq |n a_n x^n|$ であるから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ も絶対収束する．これから $R' \leqq R$ となり，あわせて $R' = R$

が示された．

2. $0 < r < R$ とする．$\delta > 0$ を $r + \delta < R$ であるようにとる．そのうえで $|x| < r$ であるような x の値，および $|h| < \delta$ であるような h の値を考える．$f(x)$ の導関数の定義にしたがって $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を考えるが，そのために分子を評価する．

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{(x+h)^n - x^n\}$$

平均値の定理から x と $x+h$ の間の数 x_n が存在して，

$$(x+h)^n - x^n = n x_n^{n-1} h$$

と書ける．よって

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x_n^{n-1}$$

次にこれを用いて $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ と $g(x)$ との差を評価する．

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x_n^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \{x_n^{n-1} - x^{n-1}\}\end{aligned}$$

ここで再び平均値の定理を用いる．x_n と x の間の数 y_n が存在して

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n y_n^{n-2} (x_n - x)$$

である．ここで、$|y_n| < r + \delta < R$，$|x_n - x| < |h|$ である．したがって

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)|a_n||y_n|^{n-2}|h| \\ &\leqq |h| \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)|a_n|(r+\delta)^{n-2}\end{aligned}$$

1. を 2 回適用すれば，$f(x)$ を 2 回微分して得られるべき級数の収束半径も R なので，右辺の $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)|a_n|(r+\delta)^{n-2}$ も有限値に収束する．その値と h は関係しない．したがって $h \to 0$ のとき，右辺も 0 に収束する．つまり $|x| < r$ であるすべての x に対し，それを固定するごとに f は x において微分可能で，その微分係数が $g(x)$ に等しいことが示された．つまり $f(x)$ は x の関数として微分可能で，その導関数は $g(x)$ である．□

本定理をくりかえし用いることによりつぎの系が得られる．

系 47.1 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R であり，この巾級数によって定まる関数を $f(x)$ とすると，$f(x)$ は無限回微分可能で

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n! a_n x^{n-k} \quad (|x| < R)$$

である．■

関数列と微分　関数列 $\{f_n(x)\}$ の収束と微分可能性の関係はやや複雑である．

定理 48　開区間 $I=(a,\ b)$ で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ がある．各 n に対して関数 $f_n(x)$ は I で微分可能であり，かつ関数 $f(x)$ に一様収束する．さらに導関数の列 $\{f_n'(x)\}$ が関数 $g(x)$ に一様収束するとする．このとき，関数 $f(x)$ も微分可能でその導関数は $g(x)$ に一致する．■

証明　区間内の x_0 と任意の正数 ϵ が与えられたとする．

$\{f_n'(x)\}$ は一様収束するので整数 N で，$N \leqq l,\ m$ ならば $x \in I$ に対して

$$|f_l'(x)-f_m'(x)|<\frac{\epsilon}{3}$$

となるものが存在する．

次に関数 $f_l(x)-f_m(x)$ に x と x_0 ではさまれた区間で平均値の定理を用いることにより

$$\frac{f_l(x)-f_m(x)-\{f_l(x_0)-f_m(x_0)\}}{x-x_0}=f_l'(\xi)-f_m'(\xi)$$

となる ξ が存在する．

$$\begin{aligned} f_l(x)-f_l(x_0)-\{f_m(x)-f_m(x_0)\} &= f_l(x)-f_m(x)-\{f_l(x_0)-f_m(x_0)\} \\ &= \{f_l'(\xi)-f_m'(\xi)\}(x-x_0) \end{aligned}$$

なので

$$|f_l(x)-f_l(x_0)-\{f_m(x)-f_m(x_0)\}|<\frac{\epsilon}{3}\,|x-x_0| \quad (x\in I,\ l,\ m \geqq N)$$

l は $l \geqq N$ であればよいので $l\to\infty$ とすることにより，$(x\in I,\ m\geqq N)$ のとき

$$|g(x)-f_m'(x)|<\frac{\epsilon}{3}$$

$$|f(x)-f(x_0)-\{f_m(x)-f_m(x_0)\}|<\frac{\epsilon}{3}\,|x-x_0|$$

が成り立つ．また導関数の定義から $|x-x_0|<\delta$ なら

$$|\{f_m(x)-f_m(x_0)\}-(x-x_0)f_m'(x_0)|<\frac{\epsilon}{3}\,|x-x_0|$$

となる正数 δ が存在する．

以上から

$$\begin{aligned} & |f(x)-f(x_0)-(x-x_0)g(x_0)| \\ \leqq\ & |f(x)-f(x_0)-\{f_m(x)-f_m(x_0)\}|+|\{f_m(x)-f_m(x_0)\}-(x-x_0)f_m'(x_0)| \\ & \quad +|x-x_0|\,|g(x_0)-f_m'(x_0)| \leqq \epsilon\,|x-x_0| \end{aligned}$$

区間内の x_0 と任意の正数 ϵ に対して，正数 δ で $|x-x_0|<\delta$ なら

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)\right|<\epsilon$$

となるものが存在することが示せたので定理が証明された．□

注意 4.5 導関数列の一様収束性が必要である．例えば $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin nx$ とすると，$f_n(x)$ は 0 に一様収束するが，$f_n'(x)=\cos nx$ であるから $f_n'(x)$ は収束しない．

関数値の近似　関数 $f(x)$ をより簡単な関数で近似することができないか．

この問題に $f(x)$ が n 回微分可能でそれら高次導関数がすべて I で有界：

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqq M \ (x \in I,\ n \in \mathbb{N})$$

であるならば，テーラー展開がそれに対する解答であった．関数 $f(x)$ を $n-1$ 次多項式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ で近似すると，誤差が $\dfrac{|x-a|^n}{n!}M$ で評価されるのだった．

一次近似，二次近似　$n=2,\ 3$ のときは，一次近似，二次近似という．

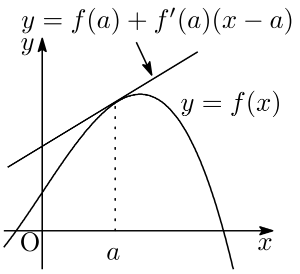
一次近似は日常的に用いている．時速 30km といえばある時刻での速度によってその運動の時速を近似していることになる．塩水のある一点でからいといえば，その辛さが塩水の辛さと考えている．このようにある点での傾向，傾きをもって全体の傾向，傾きと考えるのは，まさに一次近似である．

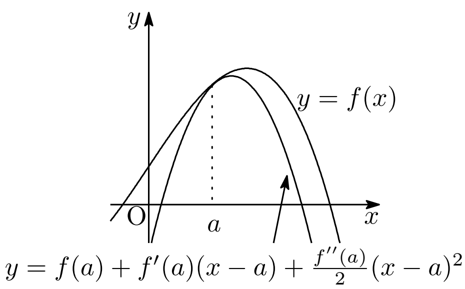
逆にいえば内包量を外延量の比で考えることは一次近似を考えていることに過ぎないことがわかる．内包量が微分を考えてはじめて量として十全に把握されることも理解できる．

近似式は $h=x-a$ とおくことで実用的な近似式となる．h が十分小さいとき

$$\begin{aligned} f(a+h) &\fallingdotseq f(a)+f'(a)h \\ f(a+h) &\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

グラフで見ると，一次近似は関数のグラフを接線で近似し，二次近似は関数のグラフを放物線で近似することになる．





$a=0,\ h=x$ とおいていくつかの関数の近似式を書いてみる．

$$\begin{array}{lll} (1+x)^\alpha & =1+\alpha x, & 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 \\ \dfrac{1}{1+x} & =1-x, & 1-x+x^2 \\ \sqrt[3]{1+x} & =1+\dfrac{1}{3}x, & 1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{x^2}{9} \end{array}$$

このように n 回微分可能な関数は n 次式による近似ができ，その誤差も評価できる．ただこの近似は一点の周りの近似であって，ある区間での近似ではない．これはいわば関数値の近似である．

連続関数の多項式による一様近似　これに対して，ある閉区間で定義された連続関数を，多項式でその区間で一様に近似することができる．これは「ワイエルシュトラスの定理」といわれる．この定理

は，フーリエ級数論にもとづくより深い証明があるのだが，ここではベルンシュタイン (Bernstein) による初等的な証明を紹介する．

まず二項定理に関する補題を示す．

補題 4　1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} = 1$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} = nx$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx$

証明　二項定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k}$$

に $y = 1-x$ を代入することで 1) を得る．この等式を x で微分し両辺に x を乗ずる．

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k}$$

を得る．ここに $y = 1-x$ を代入することで 2) を得る．二項定理の等式を 2 回微分し x^2 を乗ずる．

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k}$$

を得る．ここに $y = 1-x$ を代入することで 3) を得る．4) は 2) と 3) を加えて得られる．　□

定理 49　閉区間 [0, 1] で連続な関数に対し,n 次多項式 $P_n(x)$ を

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k}$$

で定める．多項式列 $\{P_n\}$ は閉区間 [0, 1] で一様に収束する．　■

証明　$f(x)$ は閉区間で連続であるから，有界で一様連続である．つまり，$|f(x)| \leqq M$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ となる M があり，また任意の正の実数 ϵ に対して，正の数 δ で，

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

となるものが存在する．

補題の等式 1) から

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\,{}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k}$$

なので，

$$P_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k}$$

添え字 k $(0 \leqq k \leqq n)$ を二つに分ける．

$$A = \left\{ k \,\middle|\, \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\},\ B = \left\{ k \,\middle|\, \left| x - \frac{k}{n} \right| \geqq \delta \right\}$$

とする．

$$|P_n(x) - f(x)| \leqq \left| \sum_{k \in A} \right| + \left| \sum_{k \in B} \right|$$

である．それぞれの和を評価する．

$\displaystyle\sum_{k \in A}$ については一様連続性から

$$\left| \sum_{k \in A} \right| \leqq \epsilon \sum_{k \in A} {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} \leqq \epsilon \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} = \epsilon$$

$\displaystyle\sum_{k \in B}$ については，有界性から $|f(x) - f(y)| \leqq |f(x)| + |f(y)| = 2M$ なので

$$\left| \sum_{k \in B} \right| \leqq 2M \sum_{k \in B} {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k}$$

B の k に対しては $1 \leqq \dfrac{1}{\delta^2} \left(x - \dfrac{k}{n} \right)^2$ であるから

$${}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} \leqq \frac{1}{\delta^2} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k}$$

したがって

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in B} \right| &\leqq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} \\ = \ & x^2 \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^{n} k\, {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2\, {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} \\ = \ & x^2 - \frac{2x}{n} \cdot nx + \frac{1}{n^2} \{ n(n-1)x^2 + nx \} = \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

よって，$0 \leqq x \leqq 1$ なので $0 \leqq x(1-x) \leqq 1$ を用いると

$$|P_n(x) - f(x)| \leqq \left| \sum_{k \in A} \right| + \left| \sum_{k \in B} \right| \leqq \epsilon + \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} < \epsilon + \frac{2M}{n\delta^2}$$

である．$n > \dfrac{2M}{\epsilon\delta^2}$ の n をとると

$$|P_n(x) - f(x)| \leqq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

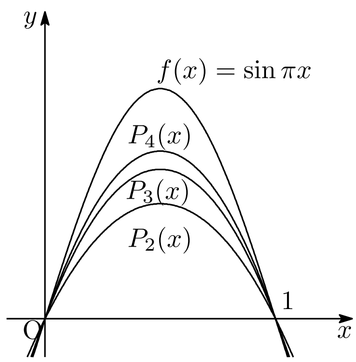
である．よって P_n は f に一様収束する． $\square$

系 49.1　閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ は多項式で一様に近似される． ■

証明　$x = a + (b-a)t$ とおく．$f(a+(b-a)t)$ は閉区間 $[0,\ 1]$ で連続である．定理 49 より多項式列 $P_n(t)$ で $f(a+(b-a)t)$ に一様収束するものがある．$P\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ は $f(x)$ に一様収束する． □

例 4.8
$f(x) = \sin \pi x$ は区間 $[0,\ 1]$ でどのように近似されるのか見てみよう．

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= f(0)\,{}_1\mathrm{C}_0(1-x) + f(1)\,{}_1\mathrm{C}_1 x = 0 \\
P_2(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right){}_2\mathrm{C}_1 x(1-x) = 2x(1-x) \\
P_3(x) &= f\left(\frac{1}{3}\right){}_3\mathrm{C}_1 x^1(1-x)^2 + f\left(\frac{2}{3}\right){}_3\mathrm{C}_2 x^2(1-x) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x) \\
P_4(x) &= f\left(\frac{1}{4}\right){}_4\mathrm{C}_1 x^1(1-x)^3 + f\left(\frac{2}{4}\right){}_4\mathrm{C}_2 x^2(1-x)^2 \\
&\qquad + f\left(\frac{3}{4}\right){}_4\mathrm{C}_3 x^3(1-x) \\
&= 2x(1-x)\{(2\sqrt{2}-3)(x^2-x)+\sqrt{2}\}
\end{aligned}$$



5　積分の方法

5.1　積分可能

有界関数の区間和　問題を広くとらえるために閉区間で有界な関数 $f(x)$ を考える．関数 $y = f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で有界であるとし，この区間における $f(x)$ の上限を M，下限を m とする．

区間 $[a,\ b]$ を n 個の小さい有限個の区間に分割する．x の値の列

$$\Delta \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

に対して n 個の小区間

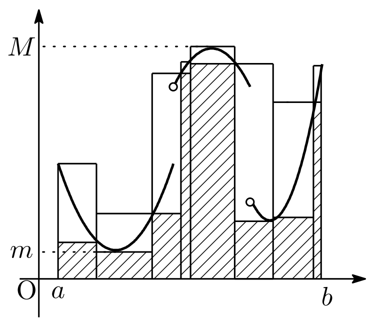
$$\delta_i = [x_{i-1},\ x_i] \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

をつくる．小区間 δ_i における $f(x)$ の上限，下限を

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in \delta_i\},\ M_i = \sup\{f(x) \mid x \in \delta_i\} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

とする．分割 Δ に対して二つの和を考える．

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \ , \quad S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$



すると，$m \leqq m_i \leqq M_i \leqq M$ なので，

$$\begin{aligned} m\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) &\leqq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ \leqq \quad \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) &\leqq M\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

つまり

$$m(b-a) \leqq s_\Delta \leqq S_\Delta \leqq M(b-a)$$

が成り立つ．不等式の両端は分割 Δ によらないので，集合

$$\{ \ S_\Delta \mid 分割\Delta \ \} \ , \quad \{ \ s_\Delta \mid 分割\Delta \ \}$$

はともに有界である．実数の公理によってそれぞれの集合には上限と下限が存在する．$\{S_\Delta\}$ の下限を S，$\{s_\Delta\}$ の上限を s と書く．

ここで二つのことを注意したい．

第一に，関数のグラフで解説したところでわかるように，これはいわば関数と軸で囲まれた領域を有限個の長方形で近似し，そのうえでその上限や下限を考えているということである．はじめから無限個の長方形で近似しているのではない．あらゆる有限個の分割での上限，下限である．

第二に，関数の区間和の図形的意味はグラフで解説されるが，S も s もグラフからは独立に，関数 $f(x)$ に固有の数値として定義されているということである．これらの定義に面積は現れていない．今後の方向を先取りすれば，逆にこの S と s から領域に対してそれが測れるということと，その値としての面積が定義される．

区間の細分　閉区間 $[a,\ b]$ の二つの分割 Δ と Δ' がある．

$$\begin{aligned} \Delta \quad &: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \\ \Delta' \quad &: \quad a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b \end{aligned}$$

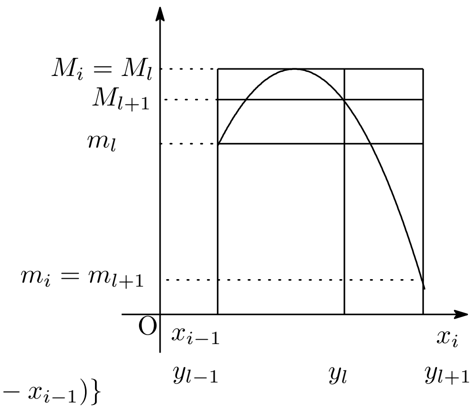
このとき

$$\{x_i| \ 1 \leqq i \leqq n \ \} \subset \{y_j| \ 1 \leqq j \leqq m \ \}$$

であるなら分割 Δ' を分割 Δ の細分といい，$\Delta < \Delta'$ と書く．$\Delta < \Delta'$ のとき，

$$s_\Delta \leqq s_{\Delta'}, \quad S_{\Delta'} \leqq S_\Delta$$

が成り立つ．これを示す．分割 Δ の区間 $[x_{i-1},\, x_i]$ が $x_{i-1} = y_{l-1} < y_l < y_{l+1} = x_i$ と細分されているとする．$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},\, x_i]\}$，$m_l = \inf\{f(x) \mid x \in [y_{l-1},\, y_l]\}$，$m_{l+1} = \inf\{f(x) \mid x \in [y_l,\, y_{l+1}]\}$ とすると下限の定義から



$$m_i \leqq m_l,\ m_{l+1}$$

なので

$$\begin{aligned} m_i(x_i - x_{i-1}) &= m_i\{(x_i - y_l) + (y_l - x_{i-1})\} \\ &\leqq m_{l+1}(y_{l+1} - y_l) + m_l(y_l - y_{l-1}) \end{aligned}$$

が成り立つ．各区間でこれが成り立つので

$$s_\Delta \leqq s_{\Delta'}$$

である．上限を同様に $M_i,\ M_l,\ M_{l+1}$ とすると，

$$M_l,\ M_{l+1} \leqq M_i$$

なので

$$S_{\Delta'} \leqq S_\Delta$$

である．

補題 5　$S = \inf_{\Delta} S_\Delta$，$s = \sup_{\Delta} s_\Delta$ に対し，$s \leqq S$ が成り立つ．　■

証明　任意の二つの分割 $\Delta,\ \Delta'$ に対して

$$s_\Delta \leqq S_{\Delta'}$$

である．なぜなら，二つの分割 Δ と Δ' を

$$\begin{aligned} \Delta &: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \\ \Delta' &: a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b \end{aligned}$$

とするとき，

$$\{x_i \mid 1 \leqq i \leqq n\} \bigcup \{y_j \mid 1 \leqq j \leqq m\}$$

で作った分割を Δ'' とする．これは $\Delta < \Delta''$ かつ $\Delta' < \Delta''$ なので

$$s_\Delta \leqq s_{\Delta''} \leqq S_{\Delta''} \leqq S_{\Delta'}$$

となり，$\{S_\Delta\}$ の各要素の値が $\{s_\Delta\}$ の各要素の値以上となるからである．　□

分割は無数にある．可算ではない．任意の分割で考えることは実際の計算には不便である．ところが実は区間の等分割だけを考えればよい．それを保証するのが次の定理である．分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

に対し，

$$|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leqq i \leqq n\}$$

とおく．

定理 50 (ダルブーの定理)　$|\Delta|$ が 0 に収束する任意の分割列に対し

$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta \\
s &= \lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta
\end{aligned}
$$

が成立する． ■

証明　s について示す．任意の正の実数 ϵ に対して，正の実数 δ で，

$$|\Delta| < \delta \quad \Rightarrow \quad |s - s_\Delta| < \epsilon$$

となるものが存在することを示せばよい．

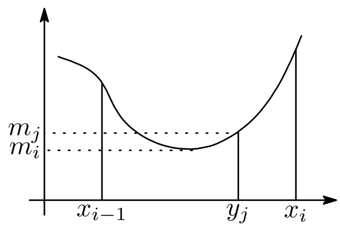
s は分割に関する s_Δ の上限であるから，

$$s - \frac{\epsilon}{2} < s_{\Delta_0} \leqq s$$

となる Δ_0 が存在する．Δ_0 の各小区間の幅の最小値より小さい δ をとる．そして Δ を $|\Delta| < \delta$ にとる．すると Δ の各小区間には Δ_0 の分点が多くても一つしか含まれない．二つの分割の分点を合併した分割を分割 Δ' とする．

$$s_\Delta \leqq s_{\Delta'},\ s_{\Delta_0} \leqq s_{\Delta'}$$

である．Δ の小区間 $[x_{i-1},\ x_i]$ に Δ_0 の分点 y_j が含まれているときを考える．つまり $x_{i-1} < y_j < x_i$ が Δ' の分割となっているとする．s_Δ の一項 $m_i(x_i - x_{i-1})$ が $s_{\Delta'}$ の二項 $m_j(x_i - y_j) + m_i(y_j - x_{i-1})$ になる．その差は次のように評価される．



$$
\begin{aligned}
& m_j(x_i - y_j) + m_i(y_j - x_{i-1}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\
= \ & (m_j - m_i)(x_i - y_j) \leqq (M - m)(x_i - x_{i-1}) \\
\leqq \ & (M - m)\,|\Delta| < (M - m)\delta
\end{aligned}
$$

またこのような y_j を含まない区間については差は 0 である．したがって Δ_0 の小区間の個数を p とすると，

$$s_{\Delta'} - s_\Delta \leqq p(M - m)\delta$$

となる．p は Δ_0 によって固定されているので，δ をさらに

$$p(M - m)\delta < \frac{\epsilon}{2}$$

となるようにとることができる．よって

$$0 \leqq s - s_{\Delta_0} < \frac{\epsilon}{2},\ 0 \leqq s_{\Delta'} - s_\Delta < \frac{\epsilon}{2},\ 0 \leqq s_{\Delta'} - s_{\Delta_0}$$

となる．これから

$$
\begin{aligned}
& s - s_\Delta = s - s_{\Delta_0} - (s_{\Delta'} - s_{\Delta_0}) + (s_{\Delta'} - s_\Delta) \\
\leqq \ & s - s_{\Delta_0} + (s_{\Delta'} - s_\Delta) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

S については不等号を逆にとることで同様に示される． □

ダルブーの定理から，次のことがわかる．関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で有界なとき，$x_i = a + \dfrac{b-a}{n}i$ $(i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ とし，この x_i で区間 $[a,\ b]$ を n 等分する．区間 $[x_{i-1},\ x_i]$ での関数 $f(x)$ の上限と下限を M_i, m_i とするとき，

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i \\ s &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i \end{aligned}$$

となる．

積分可能性

定義 25 区間 $[a,\ b]$ で有界な関数 $f(x)$ に対し，$s = S$，つまり

$$\sup_{\Delta} s_\Delta = \inf_{\Delta} S_\Delta$$

が成り立つとき，$f(x)$ は**積分可能** (リーマンの意味で) であるという．この一致した値を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書き，$f(x)$ の a から b までの**定積分**という． ■

上限，下限の定義に従えば，$f(x)$ が積分可能であることは「条件：任意の整数 ϵ に対して，分割 Δ で $S_\Delta - s_\Delta < \epsilon$ となるものが存在する」が成立することと同値である．そして，$f(x)$ のことを**被積分関数**という．また，定積分で dx のところの x を**積分変数**という．

注意 5.1 積分変数は定積分の中だけで使われる変数で，dx の x と $f(x)$ の x が同じ文字であれば，どのような文字を使ってもかまわない．ただし，被積分関数が $f(x) = 3x^2 - 2tx + 3t$ のように文字を含むときは，dx や dt で，どの文字の関数として積分するのかを指示している．

定積分を後のルベーグ積分と区別するときには**リーマン積分**ともいう．リーマンがはじめて積分を関数固有のものとして定義した．リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826〜1866) は 19 世紀ドイツの数学者，現代にいたるまで何度も何度もその偉大さが再認識されていくという偉人である．

定理 51 区間 $[a,\ b]$ で有界な関数 $f(x)$ が積分可能とする．区間の分割 Δ の各小区間 $\delta_i = [x_{i-1},\ x_i]$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の内の任意の点 ξ_i をとる．このとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

が成立する． ■

証明　それぞれの区間での関数値の上限と下限をこれまでと同様に $M_i,\ m_i$ とする．各 i に対して，$m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$ であるから，

$$s_\Delta \leqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqq S_\Delta$$

$f(x)$ が積分可能なので，

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leqq S_\Delta - s_\Delta$$

したがって，任意の正数 ϵ に対して，正数 δ で

$$|\Delta| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \epsilon$$

となるものが存在する．　□

本定理の右辺の和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ を定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ に対する**リーマン和**という．

系 51.1　区間 $[a,\ b]$ で有界な関数 $f(x)$ が積分可能とする．区間を n 等分し $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$ に対して $x_i = a + \dfrac{b-a}{n} i$ とする．またこの分割を Δ_n とする．このとき，

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n} = \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \end{aligned}$$

証明　前半の等号は定理 50 から，後半の等号は定理 51 から成立する．　□

注意 5.2　2008 年の高校微積教科書で，等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

は，**区分求積法**といわれる．この等式の両辺とも，面積は関係なく定まる．にもかかわらず，これを区分求積法という．その結果，高校生は，まず関数のグラフと座標軸で囲まれた領域に面積というものがあり，それが左辺の数列の和の極限として表され，それを右辺の定積分で計算する公式，として理解する．

系 51.1 によって，連続関数ではこの等式が成立することがわかる．しかし，本来この等式の意味は，系 51.1 によって，連続関数の場合，これが定積分の定義式そのものである，ということである．

面積を大前提とするかぎり，測度を理解することはできない．これが日本の高校数学の事実である．

定理 52　閉区間 $[a,\ b]$ で単調な関数 $f(x)$ は積分可能である．　■

証明　関数 $f(x)$ が単調増加であるとする．区間 $[a,\ b]$ の分割 Δ の小区間を $\delta_i = [x_{i-1},\ x_i]$ $\quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とする．$f(x)$ が単調なので $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して

$$
\begin{aligned}
m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in \delta_i\ \} = f(x_{i-1}) \\
M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in \delta_i\ \} = f(x_i)
\end{aligned}
$$

である．したがって

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\}(x_i - x_{i-1})$$

となる．

任意の正数 ϵ が与えられたとき分割 Δ を

$$|\Delta| < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$$

となるようにとる．このとき

$$
\begin{aligned}
S_\Delta - s_\Delta \quad &< \quad \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\} \cdot \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \\
&= \quad \{f(b) - f(a)\} \cdot \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} = \epsilon
\end{aligned}
$$

よって，単調増加関数は積分可能である．同様に単調減少関数も積分可能である．　□

例 5.1　区間 $[0,\ 1]$ 内の x を $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$ $(a_k = 0,\ 1)$ と二進展開する．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

で定める．$f(x)$ は単調増加関数である．だが連続ではない．$\alpha_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i+1}}$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$ であるが，

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^{i+1}} = \frac{1}{90} \neq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10}$$

なので $f(x)$ は $x = \dfrac{1}{2}$ で連続ではない．一般に $f(x)$ は，奇素数 p に対する $x = \dfrac{p}{2^n}$ で連続ではない．

しかし積分可能である．区間 $[0,\ 1]$ を $\dfrac{1}{2^n}$ 等分し，分点を $x_i = \dfrac{i}{2^n}$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n)$ とする．

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2^n - 1} f\left(\frac{i}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{2^n}$$

であるが．$i = b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \cdots + b_0$ とする．ただし $j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ に対し，$b_j = 0,\ 1$ のいずれかの値である．このとき

$$f\left(\frac{i}{2^n}\right) = f\left(\frac{b_{n-1}2^{n-1} + \cdots + b_0}{2^n}\right) = \frac{b_{n-1}10^{n-1} + \cdots + b_0}{10^n}$$

なので，

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} f\left(\frac{i}{2^n}\right)\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sum\frac{b_{n-1}10^{n-1}+\cdots+b_0}{10^n}$$

ただし，和は $j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ に対し $b_j=0,\ 1$ のすべての場合にわたる．各 b_j は 2^{n-1} 回ずつ現れるので，

$$\sum(b_{n-1}10^{n-1}+\cdots+b_0)=2^{n-1}(10^{n-1}+\cdots+1)=\frac{2^{n-1}(10^n-1)}{9}$$

よって

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}(10^n-1)}{9\cdot 2^n\cdot 10^n}=\frac{1}{18}$$

このように単調であれば不連続点が稠密に入っていても積分可能なことがある．

例 5.2 $f(x)$ を区間 $[0,\ 1]$ において x が有理数なら $f(x)=0$，x が無理数なら $f(x)=1$ で定義する．$f(x)$ は有界である．しかしどのように小区間を構成しても，有理数が稠密にあるので $M_i=1$，$m_i=0$ となる．$s=0,\ S=1$ でこれが一致することはない．積分可能ではない．

定理 53 閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ は積分可能である． ■

証明 $f(x)$ は有界閉区間で連続であるから，一様連続である．任意の正数 ϵ に対して正数 δ で

$$|s-t|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(s)-f(t)|<\frac{\epsilon}{b-a}$$

となるものが存在する．分割 Δ を $|\Delta|<\delta$ となるようにとる．$f(x)$ は連続なので M_i と m_i は小区間 δ_i における最大値と最小値である．$M_i=f(s),\ m_i=f(t)$ とすると $|s-t|<\delta$ なので

$$M_i-m_i=|f(s)-f(t)|<\frac{\epsilon}{b-a}$$

である．よって

$$\begin{aligned}S_\Delta-s_\Delta &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\\ &< \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\epsilon\end{aligned}$$

よって，連続関数は積分可能である． □

注意 5.3 1969 年の日本書院の教科書の数学 III で，定積分は次のように定義されている．

関数 $y=f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続とする．この区間を図のように $(n-1)$ 個の点

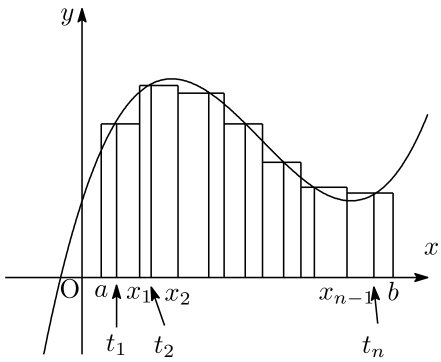
$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

で n 個の小区間

$$[a,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1},\ b]$$

に分ける．それら小区間内にそれぞれ任意の点

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n \quad \cdots ①$$



をとって，和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k-x_{k-1})$$

を作る．すべての小区間の長さが，いずれも 0 に近づくように n を限りなく大きくするとき，① の点のとり方にかかわらず，和 S_n は一定の極限値に近づくことが知られている．この極限値を，関数 $f(x)$ の区間 $[a,\ b]$ における**定積分**といい

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

で表す． ■

この定義は高校生のための定積分の定義として優れている．リーマン積分の理論と断絶することなく，そこに開かれている.「収束」の意味，区間和の上限，下限などを学習し，連続関数なら S_n が収束すること，積分可能であることをつかんだ段階で，高校での定義を再認識することができる．高校教科書はこのようでなければならない．

5.2　基本定理

積分と微分は逆演算であるといえるか　$f(x)$ が積分可能である区間で a を定数，x を任意の点として

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

とおくと，$F(x)$ は同じ区間の関数になる．

定理 54　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で有界である．この区間内で関数

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

は連続である． ■

証明　区間で $|f(x)| \leqq M$ となる M が存在する．絶対値が十分小さい h に対して

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(x)\,dx-\int_a^x f(x)\,dx=\int_x^{x+h} f(x)\,dx \leqq M\,|h|$$

よって

$$\lim_{h\to 0}\{F(x+h)-F(x)\}=0$$

となり，$F(x)$ は連続である． □

注意 5.4　$F(x)$ は連続ではあるけれども，必ずしも微分可能ではない．微分可能であることが保証される (つまり微分可能であるための十分条件) のは，$f(x)$ が連続な場合である．それが次定理である．

定理 55　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続である．このとき，区間内の範囲の x に対し

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

が成り立つ．■

証明　$a < x < b$ の範囲にある x に対し $f(t)$ は区間 $[a,\ x]$ でも積分可能なので，$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおく．区間 $(a,\ b)$ の 2 点 x と $x+h$ をとる．

$0 < h$ のとき定理 61 より

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

であるから，区間 $[x,\ x+h]$ の分割 Δ に対して

$$\inf\{f(t)\}h \leqq s_\Delta \leqq F(x+h) - F(x) \leqq S_\Delta \leqq \sup\{f(t)\}h$$

つまり

$$\inf\{f(t)\} \leqq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqq \sup\{f(t)\}$$

$h < 0$ でも同様で，$f(x)$ は連続なので

$$\lim_{h\to 0}\inf\{f(t)\} = \lim_{h\to 0}\sup\{f(t)\} = f(x)$$

よって，$F'(x) = f(x)$ である．□

定義 26 (原始関数)　関数 $f(x)$ が与えられたとき，$f(x)$ を導関数とする関数，つまり $F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．■

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数なら任意の定数 C に対して $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である．定理 55 は，$f(x)$ が連続関数なら $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ は $f(x)$ の原始関数である，つまり $f(x)$ には原始関数が存在することを意味している．

定義 27 (不定積分)　関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で積分可能であるとき，区間内の変数 x に対する定積分 $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ を，x の関数とみるとき，これを $f(x)$ の**不定積分**という．■

注意 5.5　定理 55 によって，$f(x)$ の不定積分 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

逆に，$f(x)$ の任意の原始関数は，$f(x)$ のある不定積分と定数差を除いて一致する．

昨今の高校数学では，このことを前提に，関数 $f(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ となる原始関数 $F(x)$ をとり，これを用いて定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

で定義する．なお $F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ のように記すことも多い．

不定積分 $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ で，a を別の a' にかえると

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_{a'}^x f(x)\,dx + \int_{a'}^a f(x)\,dx$$

から $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ とは定数分だけ異なる．

a を特に指定しないで x の関数として $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ を考えると，これは定数分を除いて定まる．そこで，この関数を

$$\int f(x)\,dx$$

とのように書き，計算して結果に対して積分定数 C をつけて，定数分を除いて定まることを示すこともある．

これが現行の高校教科書の方法である．

平均値の定理　函数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で有界，上限を M 下限を m とする．このとき

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

したがって

$$m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M$$

とくに $f(x)$ が連続なら中間値の定理によって区間内に

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

となる c が存在する．

$f(x)$ が連続という条件の下では $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が存在するので，微分の平均値の定理から

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c)$$

となる c が存在する．つまり微分の平均値の定理を原始関数に適用したものに他ならない．これは次のように拡張される

定理 56 (積分法の第一平均値定理)　　函数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続，$\varphi(x)$ は積分可能で，一定の符号を有する．このとき $a<c<b$ の c で

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

となるものが存在する．■

定理 57 (積分法の第二平均値定理)　　函数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で積分可能，$\varphi(x)$ は有界で単調とする．このとき区間内の c で

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,dx + \varphi(b)\int_c^b f(x)\,dx$$

となるものが存在する．■

これら二定理の証明は略する．

巾級数と原始関数　巾級数が表す関数には原始関数が存在する．

定理 58　関数 $f(x)$ が収束半径 R で巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と展開されるとする．このとき $f(x)$ には原始関数が存在し

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C \quad (|x| < R)$$

で与えられる． ■

証明　x を $|x| < R$ にとり，$|x| < r < R$ なる r をとる．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ は収束するので $\{a_n r^n\}$ は有界である．$|a_n r^n| \leqq M$ $(n \in \mathbb{N})$ とする．このとき，巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ の項について

$$\left|\frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right| = \left|\frac{a_n}{n+1} r^{n+1} \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}\right| \leqq RM \left|\frac{x}{r}\right|^n \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$\displaystyle\left|\frac{x}{r}\right| < 1$ なので級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} RM \left|\frac{x}{r}\right|^{n+1}$ は収束する．よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ は絶対収束し，収束半径をもつ．この関数を $F(x)$ とする．$F(x)$ を項別に微分して得られる巾級数が $f(x)$ であるから，定理 47 によって両者は同じ収束半径をもち，$F'(x) = f(x)$ である． □

5.3　積分計算

積分計算の工夫　定積分や不定積分を具体的に計算することは一般に大変困難である．連続関数にかぎっても，不定積分が具体的に書ける関数はごく少ない．演習問題では工夫をすれば計算できる場合のみが出題されるわけであるから，どのような場合も計算できるように思うこともあるが実際にはそうではない．いくつかの計算の工夫方法と，原始関数の実例を示す．

線形性

定理 59　関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で積分可能であるとする．任意の実数 $\alpha,\ \beta$ に対して関数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ も積分可能で等式：

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

が成立する． ■

証明　定理 51 および数列の収束に関する定理 9 より従う □

定理 60　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で積分可能で，この区間で $f(x) \geqq 0$ であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$$

が成立する．さらに区間内の x_0 で，$f(x_0) > 0$ かつ $f(x)$ は $x = x_0$ で連続となるものが存在すれば

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

となる． ■

証明　前半は明らか．連続性から x_0 を含む区間 $[p,\ q]$ で，この区間では $f(x)>0$ となるものが存在する．よって

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx > 0$$

である．　□

定理 61　閉区間 $[a,\ b]$ で積分可能な関数 $f(x)$ は，$a<c<b$ の c に対し，閉区間 $[a,\ c]$ と $[c,\ b]$ でも積分可能で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．　■

証明　任意の正数 ϵ に対して $|\Delta|<\delta$ なら $S_\Delta - s_\Delta < \epsilon$ となる分割が存在する．分割に新たに分点をつけ加えても，区間幅の最大値は増加しないので，c が分割 Δ の分点 x_k であるとしてよい．分割 Δ が点 c によって閉区間 $[a,\ c]$ と $[c,\ b]$ の分割 Δ_1，Δ_2 になるとすると，

$$\begin{aligned}
s_\Delta &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = s_{\Delta_1} + s_{\Delta_2} \\
S_\Delta &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2}
\end{aligned}$$

$$S_{\Delta_1} - s_{\Delta_1} < \epsilon - (S_{\Delta_2} - s_{\Delta_2}) < \epsilon$$

等より，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ c]$ と $[c,\ b]$ で積分可能である．よって

$$s_\Delta = s_{\Delta_1} + s_{\Delta_2} \leqq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leqq S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} = S_\Delta$$

より，定理の等式が成立する．　□

注意 5.6

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\ , \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定めれば，積分可能な区間内の任意の a，b，c で成立する．

置換積分　関数 $\varphi(t)$ は定義域が $[\alpha,\ \beta]$，値域が $[a,\ b]$ で，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$．さらに定義域において微分可能で，かつ導関数 $\varphi'(t)$ は連続である．また，関数 $f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ を含む区間 $[c,\ d]$ で連続である．このとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)\,dt$$

が成立する．

これを示す．$f(x)$ は連続なので原始関数が存在する．それを $F(x)$ とおく．合成関数の微分法から

$$\frac{d}{dt}F\{\varphi(t)\} = \frac{d}{dt}F'\{\varphi(t)\}\cdot\varphi'(t) = f\{\varphi(t)\}\cdot\varphi'(t)$$

よって t を変数とする関数 $F\{\varphi(t)\}$ は $f\{\varphi(t)\}\cdot\varphi'(t)$ の原始関数である．条件から $f\{\varphi(t)\},\ \varphi'(t)$ は連続であるから積分可能である．ゆえに

$$\int_\alpha^\beta f\{\varphi(t)\}\cdot\varphi'(t)\,dt = F\{\varphi(\beta)\} - F\{\varphi(\alpha)\} = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

が成立する．

部分積分　$f(x)$ と $g(x)$ は定義域で微分可能でその導関数 $f'(x),\ g'(x)$ も連続であるとする．積の微分法から

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

これから

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}f(x)g(x)\,dx - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \\ &= \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\end{aligned}$$

原始関数の例

例 5.3

$f(x)$	定義域	$\int f(x)\,dx$
$x^r\ (r \neq -1)$	r による．$(0,\ \infty)$ は共通	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$\log\lvert x\rvert$
$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,\ \infty)$	$\mathrm{Tan}^{-1}x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\mathrm{Sin}^{-1}x\ \left(-\mathrm{Cos}^{-1}x\right)$
$\cos x$	$(-\infty,\ \infty)$	$\sin x$
$\sin x$	$(-\infty,\ \infty)$	$-\cos x$
$a^x\ (a>0)$	$(-\infty,\ \infty)$	$\frac{1}{\log a}a^x$

いくつかの注意．

1.　$\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx$ について．

$\dfrac{1}{x}$ は $x=0$ で不連続である．$(0,\ \infty)$ の関数としては

$$\int\frac{1}{x}\,dx = \log x + C$$

である．$(-\infty,\ 0)$ の関数とする．$t=-x$ の置換をすることにより

$$\int\frac{1}{x}\,dx = \int\frac{1}{-t}\,(-dt) = \log t + C = \log(-x) + C$$

併せて上記表のようになる．

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ について．

逆三角関数の定義の注意 3.2，および初等関数の微分の逆三角関数の微分からわかるように，$\mathrm{Sin}^{-1}x$, $-\mathrm{Cos}^{-1}x$ はともに $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の原始関数である．

例 5.4 a を正の定数とする．

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

を計算しよう．

方法 1 $x = a\tan\theta$ とおく．ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ にとる．$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{a}{\cos^2\theta}$ で，$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = a\cos\theta$ なので，

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\,d\theta + \int \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\,d\theta\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\log(1-\sin\theta) + \log(1+\sin\theta)\right\} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + C = \frac{1}{2}\log\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} + C \\
&= \log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + C = \log\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right) + C
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}(\sqrt{x^2+a^2})$$

より $\dfrac{1}{a}$ の対数を積分定数に入れて，次の結果を得る．

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

方法 2 $x = \dfrac{a}{2}(e^t - e^{-t})$ とおく．$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a}{2}(e^t + e^{-t})$ で，$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{2}{a(e^t+e^{-t})}$ なので，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int dt = t + C$$

$\dfrac{2x}{a}e^t = e^{2t} - 1$ より

$$e^t = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a}\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

よって $\dfrac{1}{a}$ の対数を積分定数に入れて，次の結果を得る．

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

定積分の例

例 5.5

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

$I(m,\ n) = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ とおく．

$$\begin{aligned} I(m,\ n) &= \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx \\ &= \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx \\ &= \frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1) \end{aligned}$$

これから

$$\frac{I(m,\ n)}{m!n!} = \frac{I(m+1,\ n-1)}{(m+1)!(n-1)!}$$

ゆえに

$$\frac{I(m,\ n)}{m!n!} = \frac{I(m+n,\ 0)}{(m+n)!0!} = \frac{1}{(m+n)!0!}\int_0^1 x^{m+n}\,dx = \frac{1}{(m+n+1)!}$$

より従う．

例 5.6 $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおくと，I_n には漸化式ができる．

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)'\,dx \\ &= \Big[-\sin^{n-1} x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

$$\therefore\quad I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

ここで

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 \end{aligned}$$

さらに，

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

一方，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対し $0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ であるから

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ である．

$$\therefore \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots$$

これをウォリスの公式という．

一般に

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

が成り立つ．これは $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ と置換することでわかる．したがって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ も同じ漸化式を満たす．

5.4　広義積分

定義の拡張　ここまでは閉区間で有界な関数の範疇で，積分可能性を定義しその基本性質を考えてきた．区間が無限である場合，および有界でない場合にも積分を考えることが重要であり，後に例をあげるように実用上大切な積分がこのようななかに存在している．

関数 $f(x)$ は区間 $(a,\ b]$ で連続であるとする．極限

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

が存在すれば，その極限値をもって a から b までの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とする．b についても同様に考える．したがってまた区間 $[a,\ b]$ 内の c で不連続，あるいは定義されていないときも，二つの極限

$$\lim_{\epsilon_1\to 0}\int_{a}^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx\ ,\quad \lim_{\epsilon_2\to 0}\int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

がともに存在すれば，それらの極限値の和をもって定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とする．

$a = -\infty$ や $b = +\infty$ のときも同様に考える．つまりそれぞれの極限値が存在する場合，

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{s\to -\infty}\int_s^b f(x)\,dx$$

で定める．

定理 62　$f(x)$ が区間 $(a,\ b]$ で連続で $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ である．$0 < r < 1$ の r で

条件：a に近い x に対し，正数 M で $(x-a)^r f(x) \leqq M$ となるのものが存在する．

を満たすものが存在するならば，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が存在する． ■

証明　条件から a に近い c で区間 $(a,\ c)$ では $f(x)>0$ かつ条件の不等式が成り立つものがとれる．$a<t<c$ に対し

$$I(t)=\int_t^c f(x)\,dx$$

とおくと

$$0\leqq I(t)\leqq M\int_t^c \frac{dx}{(x-a)^r}=M\Big[\frac{(x-a)^{1-r}}{1-r}\Big]_t^c<\frac{M(c-a)^{1-r}}{1-r}$$

より $I(t)$ は上に有界で $t\to a$ のとき単調に増加する．よって $a<t<c$ での上限が存在し $\displaystyle\lim_{t\to a} I(t)$ に一致する．この結果

$$\lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\,dx=\lim_{t\to a}\int_t^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

が存在する． □

定理 63　　$f(x)$ が区間 $[a,\ \infty)$ で連続で $f(x)>0$ のとき，$1<r$ なる r で

　　条件：正数 M で $x^r f(x)\leqq M\ (a\leqq x<\infty)$ となるのものが存在する．

を満たすものが存在するならば，定積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が存在する． ■

証明　$a\leqq t$ に対し

$$I(t)=\int_a^t f(x)\,dx$$

とおく．

$$I(t)\leqq M\int_a^t \frac{dx}{x^r}=M\Big[\frac{x^{1-r}}{1-r}\Big]_a^t\leqq\frac{M}{(r-1)a^{r-1}}$$

より $I(t)$ は上に有界で $t\to\infty$ のとき単調に増加する．よって $a\leqq t$ での上限が存在し $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I(t)$ に一致する．すなわち $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,d$ が存在する． □

例 5.7　　a を正の定数とする．

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^r}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{(r-1)a^{r-1}} & (r>1)\\ +\infty & (r\leqq 1)\end{cases}$$

$r>1$ のとき．$a<t$ とすると

$$\int_a^t \frac{1}{x^r}\,dx=\Big[\frac{x^{1-r}}{1-r}\Big]_a^t=\frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{t^{r-1}}-\frac{1}{a^{r-1}}\right)$$

である．$r-1>0$ なので

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{1}{x^r}\,dx=\frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{a^{r-1}}$$

$r\leqq 1$ のとき．$a<t$ とすると

$$\int_a^t \frac{1}{x^r}\,dx>\int_a^t \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_a^t=\log t-\log a$$

よって

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{1}{x^r}\,dx = +\infty$$

関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフの $1\leqq t$ の部分を考える．$t\to\infty$ のとき，グラフと x 軸で囲まれた部分の面積 $\displaystyle\int_1^t \frac{dx}{x}$ は発散する．一方，x 軸周りの回転体の体積 $\displaystyle\pi\int_1^t \frac{dx}{x^2}$ は収束する．

ベータ関数　$p>0,\ q>0$ に対して右辺の定積分が定まる．

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は

$$\begin{aligned} p<1 \text{ のとき } &: \lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty \\ q<1 \text{ のとき } &: \lim_{x\to 1-0} f(x)=+\infty \end{aligned}$$

となり定義されない．しかし

$$\begin{aligned} p<1 \text{ のとき } &: x^{1-p}f(x)=(1-x)^{q-1} \text{は } 0 \text{ の近くで有界}, 0<1-p<1 \\ q<1 \text{ のとき } &: (1-x)^{1-q}f(x)=x^{p-1} \text{は } 1 \text{ の近くで有界}, 0<1-q<1 \end{aligned}$$

なので，定理 62 から 0 と 1 への極限が存在し定積分が定義される．これを**ベータ関数**という．

ガンマ関数　$s>0$ に対して右辺の定積分が定まる．

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

$f(x)=e^{-x}x^{s-1}$ とおく．積分区間は $[0,\ +\infty)$ である．

$s<1$ のとき．ベータ関数の場合と同様に

$$x^{1-s}f(x)=e^{-x}<1\ (0<x),\ 0<1-s<1$$

であるから

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^b f(x)\,dx$$

が存在する．

次に，

$$e^x=\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}>\frac{x^n}{n!}\ (x>0)$$

である．任意の正数 s に対し $s<n$ となる自然数 n をとる．このとき

$$x^{n+1-s}f(x)=x^ne^{-x}<n!$$

より $x^{n+1-s}f(x)$ は有界．$n+1-s>1$ なので定理 63 から

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx$$

が存在する．これで上記定積分が定まる．これを**ガンマ関数**という．

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-x}x^s\,dx \\ &= \Big[-e^{-x}x^n\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \\ &= s\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx = s\Gamma(s)\end{aligned}$$

これから任意の自然数 n に対して

$$\frac{\Gamma(n+1)}{n!} = \frac{\Gamma(n)}{(n-1)!}$$

であるが

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty = 1$$

なので

$$\frac{\Gamma(n+1)}{n!} = \frac{\Gamma(1)}{(1-1)!} = 1$$

ゆえに

$$\Gamma(n+1) = n!$$

である．

積分可能関数の列　原始関数をもつ関数の列が一様収束すれば，その極限関数はまた原始関数をもつ．

定理 64　開区間 $I=(a,\ b)$ で定義された関数の列 $\{f_n(x)\}$ が次の条件を満たす．

(1) $\{f_n(x)\}$ は一つの関数 $f(x)$ に一様収束する．

(2) $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n(x)$ は原始関数 $F_n(x)$ をもつ．積分定数は $F_n(c)=0$ となるようにする．

このとき原始関数の列 $\{F_n(x)\}$ はある関数 $F(x)$ に一様収束し，

$$F'(x) = f(x), \qquad F(c) = 0$$

となる．■

証明　$\{F_n(x)\}$ が一様収束することを示す．そのためには $\{F_n(x)\}$ がコーシー関数列 (定義 17) であることを示せばよい．$\{f_n(x)\}$ は I で一様収束するので，コーシー関数列である．よって正数 ϵ に対して自然数 N で，$N<l,\ m$ なら I の任意の x に対して

$$|f_l(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

となるものが存在する．この $x,\ l,\ m$ に対し，x と c ではさまれる区間で関数 $F_l(x)-F_m(x)$ に平均値の定理を用いる．x と c の間の ξ を用いて

$$\begin{aligned}F_l(x)-F_m(x) &= F_l(x)-F_m(x)-\{F_l(c)-F_m(c)\} \\ &= \{f_l(\xi)-f_m(\xi)\}(x-c)\end{aligned}$$

よってこのとき

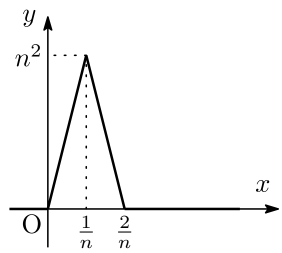
$$|F_l(x) - F_m(x)| = |f_l(\xi) - f_m(\xi)|\,|x-c| \leqq \epsilon\,|x-c| \leqq \epsilon\,|b-a|$$

$\epsilon\,|b-a|$ を改めて ϵ にとることにより，$\{F_n(x)\}$ がコーシー関数列であることが示された．ゆえに $\{F_n(x)\}$ は一つの関数 $F(x)$ に収束する．各 F_n が連続であるから，極限の関数 F も連続である．その結果 $F_n(c) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ より $F(c) = 0$ が従う．

$F'(x) = f(x)$ であることは微分と関数列の定理である定理 48 より従う． □

注意 5.7　$\{f_n(x)\}$ の一様収束性が重要である．次のような関数を考えよう (柴田『微分積分』より)．定義域は実数全体である．

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(x \leqq 0,\ \dfrac{2}{n} < x\right) \\ n^3 x & \left(0 < x \leqq \dfrac{1}{n}\right) \\ -n^3 x + 2n^2 & \left(\dfrac{1}{n} < x \leqq \dfrac{2}{n}\right) \end{cases}$$



この関数列は固定された x_0 に対しては，$\dfrac{2}{x_0} < n$ のとき $f_n(x_0) = 0$ であるから，0 に収束する．しかし n は x_0 に依存しているので一様ではない．

$f_n(x)$ に対し原始関数 $F_n(x)$ を，連続かつ $F_n(0) = 0$ になるように積分定数をとって構成する．

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0) \\ \dfrac{n^3 x^2}{2} & \left(0 < x \leqq \dfrac{1}{n}\right) \\ -\dfrac{n^3 x^2}{2} + 2n^2 x - n & \left(\dfrac{1}{n} < x \leqq \dfrac{2}{n}\right) \\ n & \left(\dfrac{2}{n} \leqq x\right) \end{cases}$$

となる．

$$\lim_{n\to\infty} F_n(1) = +\infty$$

であるので数列 $\{F_n\}$ は収束しない．

5.5　古典測度

測度とは何か　関数 $f(x)$ に対してその定積分、およびその原始関数という概念が定義され，一定の条件のもとでこの二つが同一の内容を指示していることが示された．これらは関数に固有の問題であった．

近年の高校数学では，$f(x)$ が負でない場合，$f(x)$ のグラフと x 軸および二直線 $x = a,\ x = t$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とおくと，$S'(t) = f(t)$ となること，つまり $S(x)$ が $f(x)$ の原始関数であることが解説される．一方，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を原始関数の差 $S(a) - S(b)$ として定義する．その結果，定積分は x 軸とグラフとそして y 軸に平行な二本の直線で囲まれた領域の面積となる．唯一の数学的な内容は $S'(t) = f(t)$ である．図形の面積に依拠して積分が定義されるということになっている．

しかし実は定積分の定義は面積とは独立に，関数に固有のものとしてなされた．リーマン和もその極限も面積とは独立に定義され，計算できるときは計算された．そのため逆に，では定積分がどのような意味で面積なのかということが問題として浮かびあがってくる．この問題を最初に考えたのは，十九世紀末フランスの数学者ジョルダン（Marie Ennemond Camille Jordan、1838〜1922）ではないだろうか．ここではジョルダンによる面積の定義をふりかえり，定積分がこれとどのように結びつくのかを考えたい．

空間の部分集合に数を対応させる規則 m がある．互いに共通部分をもたない部分集合の列 E_i $(i \in I)$ があり，それぞれ値 $m(E_i)$ は定まるとき，その和集合にも m の値が定まり次の等式が成り立つことを，**加法性**いう．

$$m\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i m(E_i)$$

i の動く添え字の集合 I はどのような範囲か．実は，有限集合にかぎる立場と，可算無限を許す立場がある．それがジョルダン測度とルベーグ測度である．共通なことは，距離が導入された空間の部分集合に，負でない実数を対応させる関数 m で加法性をもつものを**測度**という．

測度論は，長さ，面積，体積，質量分布，確率分布などをとらえるための数学理論である．この問題を徹底して考えたのがフランスの数学者ルベーグ (Henri Lebesgue，1875〜1941) であった．1902 年の論文『積分・長さおよび面積』で「測る」ということをとらえなおした．つまり m の構成から問題をとらえなおした．ルベーグ測度論である．そしてそのうえに積分論を再構築した．

ここには，測ることにおいて，有限個の長方形で近似するところから，可算無限個の長方形で近似することへの飛躍があった．上の加法性を表す添え字 I もまた，有限個から可算無限個に飛躍する．新しい現代解析学の基礎づけである．このような歴史をおさえておきたい．

そのうえでわれわれの『解析基礎』はそれ以前，古典的な測度，ジョルダン測度の段階である．量を測るという観点からいえば，平面上の直線の長さと長方形の面積を与えられたものとして用いて，関数のグラフで囲まれた平面の部分集合の面積を，それに含まれる有限個の長方形の面積の上限と，それを含む有限個の長方形の面積の下限が一致するとき，その部分集合は「測れる」ものとし，その値を面積として定義する．

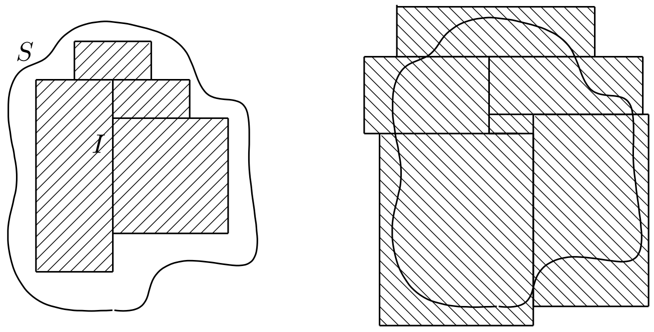
外部面積と内部面積　xy 平面 $\mathbb{R}^2$ におかれた領域 S の面積を次のように定義しよう．領域とは平面上の有界な点の集合とする．平面での有界性は S を含む円板が存在することとして定義することもできる．

まず xy 平面内の半開長方形

$$0 \leqq x < a,\ 0 \leqq y < b$$

を考えこの面積を ab とする．**有限個**の長方形が重ならないように並べられた図形を I とする．I の面積を構成する長方形の面積の和として定め $|I|$ と書く．

I で S に含まれるものと，I が S を含むものを考える．



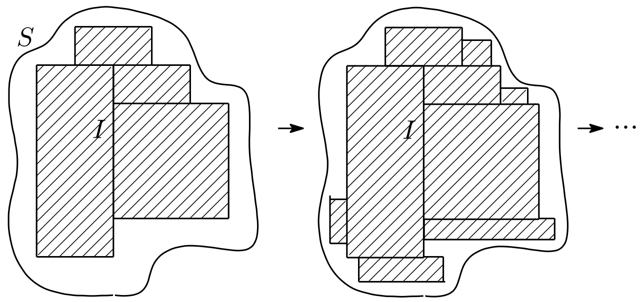
$I \subset S$ $\qquad\qquad$ $S \subset I$

そこで

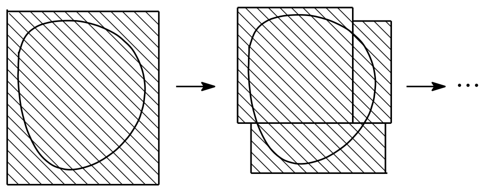
$$|S|_* = \sup\left\{ |I| \;\middle|\; I \subset S \right\}$$
$$|S|^* = \inf\left\{ |I| \;\middle|\; S \subset I \right\}$$

とおく．$|S|_*$ が存在するときこれを S の**内部面積**という．$|S|^*$ が存在するときこれを S の**外部面積**という．

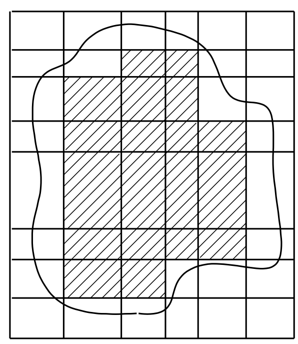
内部面積とは，小さい長方形を加えていって内から S を埋めていくときの上限である．



外部面積とは，S を含む長方形の集合の長方形をより小さい長方形いくつかで置きかえていくときの下限である．



I は次のように構成してもよい．S は有界なので，まずこれを長方形で覆う．そのうえで二つの辺を n 分と m 分する．その分点から辺に平行な線分をひき，それらによって構成される長方形を考える．それぞれの辺の分割を Δ_1, Δ_2 とし，この組を Δ とする．



S に含まれる長方形すべての和集合を i_Δ，S と共有点をもつすべての長方形の和集合を I_Δ とする．$|S|_*$ と $|S|^*$ が存在するときは

$$|S|_* = \sup_\Delta\{\ i_\Delta\ \}\ , \qquad |S|^* = \inf_\Delta\{\ I_\Delta\ \}$$

となる．

これは次のことから従う．

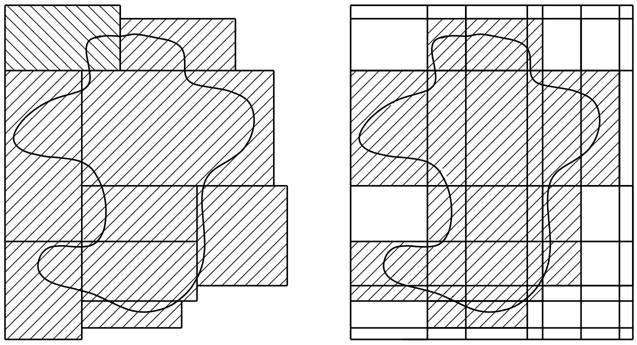
(1) 分割を細かくすれば i_Δ は増加し I_Δ は減少する．

(2) 長方形の重なりのない和集合 I と S を含む長方形に対し，その辺を延長することで，

$$\begin{aligned} I \subset S \text{ なら} \quad & I \subset i_\Delta \\ S \subset I \text{ なら} \quad & I_\Delta \subset I \end{aligned}$$

となる分割ができる．

例えば，$S \subset I$ の場合についてみると次のようになる．



$$|S|^* \leqq |I_\Delta| \leqq |I|$$

より，外部面積 $|S|^*$ が存在するとき，

$$|S|^* \leqq \inf_\Delta \{|I_\Delta|\} \leqq \inf_I \{|I|\} = |S|^*$$

となるからである．

ジョルダン測度　平面の領域に対してその測度を次のように定義する．

定義 28　平面の領域 S で

$$|S|_* = |S|^*$$

となるとき，領域 S はジョルダンの意味で**計測可能**，略して**可測**であるという．この値を $m(S)$ と表し S の **(ジョルダン) 測度**という．

それはルベーグ測度に対して古典測度ともいうべきものである．

注意 5.8　測度は平面領域だけではなく，距離の定義されたユークリッドで考えることができる概念である．**平面領域の測度を面積**という．三次元領域の測度は体積といわれる．測度で統一するのなら，外部面積，内部面積も「外測度，内測度」というべきであるが，ここはあえて「外部面積，内部面積」にしておき，それが一致した場合を「測度」で表した．

注意 5.9　平面上の領域 $[1,\ 2] \times [1,\ 3]$ から領域 $[1,\ 2] \times [2,\ 3]$ に含まれる有理点, つまり x 座標も y 座標も有理数からなる点を除いた点集合を S とする．するとこの場合

$$|S|_* = 1,\ |S|^* = 2$$

となり，S は可測ではない．つまり S は面積が定まらない．このように面積というものは，はじめから存在する値ではなく，定義しなければならない量である．

さてそこで問題はジョルダン測度の加法性である．

定理 65 　有界な領域 S は互いに共通な部分をもたない有限個の領域 S_i $(1 \leqq i \leqq n)$ の和である．つまり

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n \quad , \quad Si \cap S_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

このとき，各 S_i が可測であるなら S も可測であり，かつ

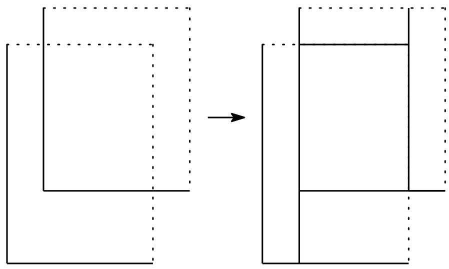
$$m(S) = m(S_1) + m(S_2) + \cdots + m(S_n)$$

となる．■

証明 　$S_i \subset I_i$ となる長方形の和集合をとる．$S \subset (I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n)$ である．

一般に二つの長方形が共通部分をもつとき，この和集合を共通部分のない長方形の和に分けることができる．

したがって $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ と一致する共通部分のない長方形の和を I とすれば $S \subset I$ となる．



$$|I| = |I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n| \leqq |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_n|$$

I_1，I_2，$\cdots$，I_n を動かした下限をとることにより

$$|S|^* \leqq \inf |I| \leqq \inf |I_1| + \inf |I_2| + \cdots + \inf |I_n| = |S_1|^* + |S_2|^* + \cdots + |S_n|^*$$

各 S_i は可測なので，

$$|S|^* \leqq |S_1|_* + |S_2|_* + \cdots + |S_n|_*$$

である．一方，$I_i \subset S_i$ となる長方形の和 I_i をとる．S_i は互いに共通部分がないので I_i も共通部分がない．よって $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ が S に含まれる一つの長方形の和である．

$$\sup \left(|I_1| + \cdots + |I_n|\right) = |S_1|_* + |S_2|_* + \cdots + |S_n|_* = \sup |I| \leqq |S|_*$$

これから

$$|S|^* \leqq |S|_*$$

となる．逆の不等号は明らかなので

$$|S|^* = |S|_*$$

つまり S は可測である．またこの証明内の不等式はすべて等号となり，

$$m(S) = m(S_1) + m(S_2) + \cdots + m(S_n)$$

が示された．□

このように有界な平面領域の可測性が定義された上は，定積分の可能性との関連が次のように明確になる．

定理 66　区間 $I = [a,\ b]$ で定義された有界で非負値関数 $f(x)$ が積分可能であるための必要十分条件は，領域

$$S = \{(x,\ y) \mid x \in I,\ 0 \leqq y \leqq f(x)\ \}$$

が可測となることである．このとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = m(S)$$

が成り立つ． ■

証明　有界関数なので区間 I において $f(x) \leqq M$ となる M が存在する．$x = a,\ x = b$ および $y = 0,\ y = M$ で定まる長方形 I に S は含まれる．この長方形の x 方向を n 分した分割 Δ をとる．それぞれの小区間における上限と下限を $M_i,\ m_i$ とし，x 軸と平行な直線 $y = M_i,\ y = m_i$ をとる．x 軸の分割とあわせた小長方形で S に含まれるものの面積の和が s_Δ，S と共通部分に含まれるものの面積の和が S_Δ である．これをもとに積分可能性と可測性の同値性が導かれる． □

6　次元の拡大

6.1　多次元空間

次元の拡張　ニュートンにあっては，引力の発見にみられるように，何より自然現象の深い洞察が土台である．万有引力の法則のような定性的な性質の発見は，ただちに位置，速度，加速度のような定量的な洞察を導く．自然の洞察が数学的飛躍を促し、それによって得られた数学的方法による自然の解析がニュートンによって遂行された．こうして、近代になって数学が爆発的に豊かになった．ニュートンの方法を今に再構成したい．

そのためには解析学の方法をもう少し拡げておかねばならない．これまで考えてきた関数の変数は一つであり，値域もまた実数一次元であった．しかしこの世界を見ればわかるように，平面上の位置によって定まる高さのように変数が二つということもあれば，時間という一つの変数に対し三次元空間の位置が定まるということもある．

このようにいくつかの変数の組を扱うためには，これまでの実数から飛躍して，実数 $\mathbb{R}$ の N 個の直積である $\mathbb{R}^N$ を考えなければならない．$\mathbb{R}^N$ は加法や実数倍の演算が定義されベクトル空間となるが，さらに，ここに距離を入れ N 次元ユークリッド空間として $\mathbb{R}^N$ を考えなければならない．距離というもの，およびそれと一体である内積の一般的な定義については『線型代数の考え方』を見てほしい．ここでは実数 N 個の直積 $\mathbb{R}^N$ である N 次元ベクトル空間に距離を次のように定義する．

$\mathbb{R}^N$ の二つの要素 $\mathrm{P} = (p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_N)$ と $\mathrm{Q} = (q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_N)$ に対し，距離 $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ を

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_N - q_N)^2}$$

で定める．距離の定義されたベクトル空間 $\mathbb{R}^N$ を N 次元ユークリッド空間という．N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の要素を点という．実数体 $\mathbb{R}$ の要素が数直線上の点と同一視できるように，$\mathbb{R}^N$ の要素は空間の点やさらに N 次元ベクトルと同一視できる．

ベクトルの概念は元来，現象空間に現れる (速度，加速度，力のように) 大きさ，方向，向きを持ち，有向線分によって表される量として導入された．これはまたいくつかの数の組としてもつか

むことができた．数一つで表される量をスカラー量といい，複数の数の組で表される量をベクトル量という．

点 A に対し，正の実数 r を用いて条件

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{A}) \leqq r$$

を満たす点 P の集合を**超球**という．$N = 2,\ 3$ のときは，それぞれ円，球という．

$\mathbb{R}^N$ の点の集合 D が**有界**であるとは，D のすべての要素を含む超球が存在することとする．

関数　$\mathbb{R}^N$ の部分集合 D から $\mathbb{R}^M$ への写像 f を関数という．f は具体的には

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N) = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_M)$$

のように表され，各 y_i が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N$ の関数となる．簡単のために，$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$，$\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_M)$ とベクトルの変数を用いて

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

とも表す．

このような関数の解析をベクトル解析という．これは三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲がった管や滑らかな物体 Ω における流体や電磁場を微積分学を用いて解析する数学手法のことである．ベクトル解析は電磁場の理論を明確に述べるために開発され，物理学や工学等への応用が多い．ここでは後に必要なことにかぎって，その基本部分を構成しておきたい．

まず問題はこのような関数の連続性である．それを定義するためには，これまで実数の定義にもとづいて構成し証明してきた諸定義と諸定理を，n 次元の場合に拡張しなければならない．しかしそれは，$\mathbb{R}$ の場合に絶対値をもとに行ってきた諸々のことを，距離 d に置きかえて遂行すればよい．

点列の収束　$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ が点 A に収束するとは，任意の正数 ϵ に対して

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad d(\mathrm{P}_n,\ \mathrm{A}) < \epsilon$$

となる n_0 が存在することとし，これを

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \mathrm{A}$$

と書く．

$N = 2$ のとき成分で表し $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$，$\mathrm{A}(a,\ b)$ とすると，

$$d(\mathrm{P}_n,\ \mathrm{A}) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$$

である．三角不等式から

$$\frac{1}{2}\left\{|x_n - a| + |y_n - b|\right\} \leqq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leqq |x_n - a| + |y_n - b|$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \mathrm{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

である．一般の次元でも同様である．この同値性から，点列の収束に関する諸性質が，実数列の収束に関する定理から導かれる．

定理 67 (ボルツァノーワイエルストラスの定理)　有界な点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ は収束部分列をもつ．■
証明　点列の x_1 座標の集合は有界なので収束部分列がある．その収束部分列を x_1 座標とする部分点列の x_2 座標の集合も有界なので収束部分列をもつ．同様の操作を順次行うと x_N 座標の収束部分列が得られる．この部分列に対応する部分点列において，その $x_1,\ \cdots,\ x_{N-1}$ 座標はそれぞれ途中で構成した部分列の部分列だから同じ値に収束し，その結果部分点列も収束する．□

定理 68 (基本列)　点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ がある．その座標を $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n,\ \cdots)$ とする．点列が収束するための必要十分条件は，点列のそれぞれの座標成分で定まる N 個の数列 $\{x_n\},\ \{y_n\},\ \cdots$ がともに基本数列であることである．■
証明　点列の収束と，全成分の収束の同値性から明らか．□

$\mathbb{R}^N$ の点の集合 D が**閉集合**であるとは，

D 内の点列が収束するとき，極限点が D に属する．

が成り立つこととする．$\mathbb{R}^N$ の点集合 D が**開集合**であるとは，

点列が D 内の点に収束するなら，点列の有限個の項を除く他の項はすべて D に属する．

が成り立つこととする．
開集合 D に対して，D を含むすべての閉集合の交わりを D の**閉包**といい $\overline{D}$ と表す．

$$\overline{D}=\bigcap[D\ \text{を含む閉集合}]$$

$\overline{D}$ は D を含む最小の閉集合である．
本書で領域といえば，開集合のことをいうものとする．

連続関数　以下は $\mathbb{R}^N$ の部分集合 D から $\mathbb{R}$ への写像，つまり実数値関数 f を考える．その定義域は $\mathbb{R}^N$ の点集合 D とする．f が点 A で**連続**であるとは，任意の正数 ϵ に対して，正数 δ で，

$$\mathbf{x}\in D,\ d(\mathbf{x},\ \mathrm{A})<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(\mathbf{x})-f(\mathrm{A})|<\epsilon$$

となるものが存在することである．
f が A で連続であることは次の条件とも同値である．
D 内の A に収束する任意の点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}f(\mathrm{P}_n)=f(\mathrm{A})$$

が成り立つ．

注意 6.1　次元が 2 以上になると，$\mathbf{x}$ が A に近づくといっても近づき方は，はるかに複雑になる．したがって連続性の定義は，「どのような近づき方をしても」関数値が一定の値に近づくということを要請している．
例えば，2 変数関数

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & :(x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0 & :(x,\ y)=(0,\ 0)\end{cases}$$

を考える．

y を $y=b\ (\neq 0)$ に固定しこの方向から原点に近づくと

$$\lim_{x\to 0} f(x,\ b) = \lim_{x\to 0}\frac{bx}{x^2+b^2} = 0$$

である．しかし $y=kx\ (k\neq 0)$ の方向から原点に近づくと

$$f(x,\ kx) = \frac{k}{1+k^2} \neq 0$$

と定数になる．また渦巻き状に近づくとどうなるか．$x=e^{-t}\cos t,\ x=e^{-t}\sin t$ とおいて見る．

$$\lim_{t\to\infty} f(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t) = \lim_{t\to\infty}\cos t\sin t$$

となり，収束しない．

このように f は原点では連続でない．変数が多くなると連続性でもこのように複雑になる．

定理 69 (最大値・最小値の定理)　実数値をとる関数 f が D で連続で D が有界閉集合であるとする．このとき f は D で最大値，最小値をとる．■

証明　f が D で有界でないとする．D の点列 P_n で $|f(\mathrm{P}_n)|>n$ となるものが存在する．

一方，D が有界閉集合なので P_n の部分列 $\mathrm{P}_{\varphi(n)}$ で D の点 A に収束するものが存在する．f が連続であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(\mathrm{P}_{\varphi(n)})\right| = |f(\mathrm{A})|$$

と有限確定値に収束する．他方

$$\left|f(\mathrm{P}_{\varphi(n)})\right| \geqq \varphi(n) \geqq n$$

であるから，矛盾である．よって f は D で有界であり，$\sup\{f(\mathrm{P})\mid \mathrm{P}\in D\}$ が存在する．この値を M とする．上限の定義から集合 $\{f(\mathrm{P})\mid \mathrm{P}\in D\}$ の要素を項とする数列 $\{f(\mathrm{P}_n)\}$ で

$$\lim_{n\to\infty} f(\mathrm{P}_n) = M$$

となるものが存在する．数列 $\{\mathrm{P}_n\}$ に対し，ボルツァノーワイエルストラスの定理から収束部分列 $\{\mathrm{P}_{\varphi(n)}\}$ が存在する．この極限値を A とする．D が閉集合なので $\mathrm{A}\in D$ である．f が連続なので

$$\lim_{n\to\infty} f(\mathrm{P}_{\varphi(n)}) = f(\mathrm{A}) = M$$

となり，f は D で最大値 M をもつ．最小値についても同様である．□

多変数の場合中間値の定理はどのようになるのだろうか．一変数の場合の中間値の定理では区間 $I=[a,\ b]$ で考えた．複雑な閉区間は考えていない．二変数となると定義領域 D についての考察がさらに難しくなる．次のような形の定理は，一変数の場合から明らかであるが，D が複雑な場合は難しい．N 変数でもまったく同様なので二変数の場合に述べる．

定理 70 (中間値の定理)　実数値をとる二変数の関数 f が D で連続で D 内の二点 A, B での値について $f(\mathrm{A})<f(\mathrm{B})$ とする．

二点 A, B が D 内を通る連続曲線 C(定義 35 参照) で結ばれているとする．

$f(\mathrm{A})<\gamma<f(\mathrm{B})$ である γ に対して，A, B の間の曲線上の点 C で $f(\mathrm{C})=\gamma$ となるものが存在する．■

証明　連続曲線 C を，区間 $[a,\ b]$ で定義された連続関数を用いて $(\varphi(t),\ \psi(t))$ と成分で表す．

$$\mathrm{A}(\varphi(a),\ \psi(a)),\ \mathrm{B}(\varphi(b),\ \psi(b))$$

とする．本定理は一変数の連続関数

$$t\ \rightarrow\ f(\varphi(t),\ \psi(t))$$

に関する中間値の定理 (定理 26) そのものである．　□

距離の公理　多次元空間の概念をさらに抽象し，一般の距離空間と完備距離空間の概念を確立する．

定義 29 (距離の公理)　集合 X の上に 二変数実数値の写像 $d(x,\ y)$ が定義されていて、X の任意の要素 $x,\ y,\ z$ に対して，d が**距離の公理**とよばれる次の性質を全て満たすとする．

(i) 非負性 (半正定値性): $d(x,\ y) \geqq 0$,

(ii) 同一性 (非退化性): $d(x,\ y)=0 \iff x=y$,

(iii) 対称性: $d(x,\ y)=d(y,\ x)$,

(iv) 三角不等式： $d(x,\ y)+d(y,\ z) \geqq d(x,\ z)$

このとき d を集合 X 上の**距離**あるいは**距離関数**といい，対 $(X,\ d)$ または d を区別しなくてよいときは単に X を**距離空間**という．　■

距離空間の要素のことを点ということもある．X の点列 $\{x_n\}$ が点 a に収束するとは，任意の正数 ϵ に対して，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad d(a,\ x_n)<\epsilon$$

となる自然数 N が存在することとする．

例 6.1　実数体 k 個の直積である k 次元空間 $\mathbb{R}^k$ は次のように距離関数を定めるとき距離空間となる．$\mathbb{R}^k$ の二つの要素 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$，$\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_k)$ とする．

(1) $d(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_k-y_k)^2}$

(2) $d_1(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=|x_1-y_1|+\cdots+|x_k-y_k|$

(3) $d_\infty(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\max\{|x_1-y_1|,\ \cdots,\ |x_k-y_k|\}$

これらがいずれも距離の公理を満たすことを確認しておいてほしい．不等式

$$d_\infty(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \leqq d(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \leqq d_1(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \leqq k d_\infty(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$$

が成立するので，$\mathbb{R}^k$ における点列の収束はどの距離をとっても同じことになり，k 個の座標ごとの収束と一致する．

定義 30 (基本列)　$(X,\ d)$ を距離空間とし，X の点列 $\{x_n\}$ は，任意の正数 ϵ に対して，

$$m,\ n \geqq N \quad \Rightarrow \quad d(x_m,\ x_n)<\epsilon$$

となる自然数 N が存在するとき，$(X,\ d)$ の**基本列**，または**コーシー列**という．　■

定義 31 (完備距離空間)　距離空間 $(X,\ d)$ は，そのすべての基本列が X の点に収束するとき完備であるといい，$(X,\ d)$ を**完備距離空間**であるという． ■

定義 32 (連続写像)　$(X_1,\ d_1)$ と $(X_2,\ d_2)$ を距離空間とする．$a \in X_1$ に対して写像 $f : X_1 \to X_2$ が次の条件：

$$\forall \epsilon (>0),\ \exists \delta\ ;\quad |d_1(x,\ a)| < \delta\ \Rightarrow\ |d_2(f(x),\ f(a))| < \epsilon$$

を満たすとき，f は a で**連続**であるという．
任意の $a \in X_1$ で連続なとき，f は X_1 で連続であるという． ■

連続関数に関する定理 25 がそのまま距離空間の関数の連続性でも成り立つ．
f が a で連続であれば a に収束する X の点列 $\{x_n\}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

が成り立つ．f の連続性から，任意の正数 ϵ に対して，

$$d_1(x_n,\ a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_2(f(x_n),\ f(a)) < \epsilon$$

となる δ が存在する．この δ に対し $\{x_n\}$ が a に収束することから

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad d_1(x_n,\ a) < \delta$$

となる N が存在する．この N に対して

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad d_2(f(x_n),\ f(a)) < \epsilon$$

なので，所期の等式が得られる．
逆に，a に収束する X の点列 $\{x_n\}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

が成り立つなら，f は連続である．この証明も，連続関数に関する定理 25 の証明と同様になされる．
距離空間においても点列の収束性が定義されるので，X の閉集合，開集合も定義される．つまり X の点の集合 G が**閉集合**であるとは，

G 内の点列が収束するとき，極限点が G に属する．

が成り立つこととする．X の点集合 G が**開集合**であるとは，

点列が G 内の点に収束するなら，点列の有限個の項を除く他の項はすべて G に属する．

が成り立つこととする．
開集合 G に対して，G を含むすべての閉集合の交わりを G の**閉包**といい $\overline{G}$ と表す．

定理 71　距離空間 $(X,\ d)$ の部分集合を E とする．

(1) 距離空間 $(X,\ d)$ が完備で E が閉集合なら，距離関数を E に制限することで得られる部分距離空間 $(E,\ d)$ も完備である．

(2) 部分距離空間 $(E,\ d)$ が完備なら E は X の閉集合である． ■

この証明は定義にもとずいて論理を展開するだけなので省略する．

連続関数空間　完備距離空間の一例として連続関数空間を取りあげる．これが完備であること，この根拠が第 1 章で展開した実数の完備性であることを確認しよう．

閉区間 $I = [a,\ b]$ で定義された連続関数の集合を $C(I)$ とする．I の変数を t で表す．$C(I)$ の要素は関数であるがこれを $x(t)$ のように表す．

$$C(I) = \{\ x \mid x(t) : \text{連続}\ (t \in I)\ \}$$

である．$C(I)$ は次のような構造をもっている．

1. 定値関数は $C(I)$ に属する．実数 γ を $x(t) = \gamma$ という定値関数と同一視すれば $\mathbb{R} \subset C(I)$ である．

2. $x,\ y \in C(I)$，$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \subset C(I)$ とする．このとき，

$$\alpha x + \beta y \in C(I),\ xy = yx \in C(I)$$

つまり $C(I)$ は $\mathbb{R}$ 上の可換環である．

3. $x,\ y \in C(I)$ に対し，

$$\begin{aligned}&(x \vee y)(t) = \max\{x(t),\ y(t)\}\\&(x \wedge y)(t) = \min\{x(t),\ y(t)\}\\&|x|(t) = |x(t)|\end{aligned}$$

これらは $C(I)$ に属する．

$$x \vee y,\ x \wedge y,\ |x| \in C(I)$$

4. $x \in C(I)$ のとき $x = x(t)$ は I で一様連続であり (定理 28)，I で最大値，最小値ををとる (定理 27)．

$x,\ y \in C(I)$ に対し $|x(t) - y(t)| \in C(I)$ であり，区間 I における最大値が存在する．そこで，$C(I)$ に実数値関数 d を次のように定義する．

$$d(x,\ y) = \max\{\ |x(t) - y(t)| \mid t \in I\ \}$$

d は $C(I)$ における距離関数である．実際

(i) $d(x,\ y) \geqq |x(t) - y(t)| \geqq 0$，

(ii) もし $x \neq y$ なら $|x(t) - y(t)| > 0$ となる t が存在する．
よって $d(x,\ y) = 0 \iff x = y$，

(iii) $|x(t) - y(t)| = |y(t) - x(t)|$ より $d(x,\ y) = d(y,\ x)$，

(iv) $|x(t) - z(t)| \leqq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \leqq d(x,\ y) + d(y,\ z)$．
よって $d(x,\ z) \leqq d(x,\ y) + d(y,\ z)$ ．

定理 72　$C(I)$ は距離 d に関して完備である．■

証明　$C(I)$ の基本列 $\{x_n\}$ をとる．つまり任意の正数 ϵ に対して

$$m,\ n \geqq N \quad \Rightarrow \quad d(x_m,\ x_n) < \epsilon$$

となる N が存在するとする．ところがこのとき任意の $t \in I$ に対して

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leqq d(x_m,\ x_n) < \epsilon$$

が成立するので，関数列として $\{x_n(t)\}$ はコーシー関数列 (定義 17) である．したがって定理 30 によって関数列 $\{x_n(t)\}$ は定義域を I とするある連続関数 $a(t)$ に一様収束する．

すなわち任意の正数 ϵ に対し

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad \forall t \in I;\ |a(t) - x_n(t)| < \epsilon$$

となる N が存在する．よって $a(t) \in C(I)$ で

$$d(x_n,\ a) < \epsilon$$

が成立する．つまり $C(I)$ の点列 $\{x_n\}$ は a に収束する．つまり $C(I)$ は完備である．　□

6.2　不動点定理

不動点の存在　実数の完備性を根拠としていくつかの存在定理を証明してきた．それをふまえて，完備距離空間の縮小写像に関する不動点定理を証明する．この存在定理は,『解析基礎』の一つの目的である陰関数の存在定理とある種の微分方程式の解の存在定理の根拠となる．

X をある与えられた集合とし，f を X から X への写像とする．X の要素で $f(x_0) = x_0$ となるものを f の**不動点**という．

例 6.2　X を閉区間 $[-1,\ 1]$ とし f を X から X への連続写像とする．f は不動点をもつ．　■

証明　$-1 \leqq f(x) \leqq 1$ である．$f(-1) = -1$ なら $x = -1$ が，$f(1) = 1$ なら $x = 1$ が不動点である．$-1 < f(-1),\ f(1) < 1$ とする．$0 < f(-1) - (-1),\ f(1) - 1 < 0$ なので連続関数 $f(x) - x$ に関する中間値の定理によって，$f(x_0) - x_0 = 0$ となる x_0 が存在する．x_0 が f の不動点である．□

次の例は大学入試 (92 神戸大) で出題された．

例 6.3　自然数 n に対して，1 から n までのすべての自然数の集合を N とする．N から N への写像 f が次の条件

$$i,\ j \in N \text{ かつ } i \leqq j \text{ ならば，つねに } f(i) \leqq f(j)$$

をみたすとき，f は不動点 k をもつ．つまり $f(k) = k$ となる $k \in N$ が存在する．　■

証明　$1 \leqq f(i) \leqq n\ \ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ である．$f(1) = 1$ なら k として 1 をとればよい．$f(n) = n$ なら k として n をとればよい．そこで $1 < f(n) < n$ とする．

このとき，$f(1) > 1$ かつ $f(n) < n$ なので $f(i) > i$ となる i の中の最大のものが存在する．それを i_0 とする．$i_0 < n$ である．$i_0 + 1$ は $f(i) > i$ を満たさないので $f(i_0 + 1) \leqq i_0 + 1$．ところが $i \leqq j$ ならば，つねに $f(i) \leqq f(j)$ なので

$$i_0 < f(i_0) \leqq f(i_0 + 1) \leqq i_0 + 1$$

ここでもし $f(i_0+1) < i_0+1$ なら，隣りあう 2 つの自然数 i_0 と i_0+1 の間にさらに自然数が存在し不合理.

$$\therefore \quad f(i_0+1) = i_0+1$$

$i_0+1 \leqq n$ なので i_0+1 が f の不動点である． □

定義 33 (縮小写像) $(X,\ d)$ を距離空間とする．X から X への写像 $f : X \to X$ に対し，1 より小さい正数 r $(0 < r < 1)$ が存在して

$$x,\ y \in X \Rightarrow d(f(x),\ f(y)) \leqq rd(x,\ y)$$

が成り立つとき，f を X の**縮小写像**という． ■

縮小写像の条件から，縮小写像は連続である．

定理 73 (リプシツの不動点定理) f を完備距離空間 X の縮小写像とする．このとき f はただ一つの不動点をもつ． ■

証明 X の点 x_1 を任意に選び

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ )$$

で点列 $\{x_n\}$ を定める．

$$d(x_{n+1},\ x_{n+2}) = d(f(x_n),\ f(x_{n+1})) \leqq rd(x_n,\ x_{n+1})$$

より

$$d(x_n,\ x_{n+1}) \leqq r^{n-1} d(x_1,\ x_2)$$

従って

$$\begin{aligned} d(x_n,\ x_{n+l}) &\leqq d(x_n,\ x_{n+1}) + d(x_{n+1},\ x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+l-1},\ x_{n+l}) \\ &\leqq d(x_1,\ x_2)(r^{n-1} + r^n + \cdots + r^{n+l-2}) \\ &\leqq d(x_1,\ x_2) \cdot \frac{r^{n-1}}{1-r} \end{aligned}$$

$0 < r < 1$ であるから点列 $\{x_n\}$ は基本列である．$(X,\ d)$ は完備であるから収束する．

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

とする．f は縮小写像なので連続．従って

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a)$$

となり a が不動点であることがわかる．

$f(b) = b$ となる点があるとする．

$$d(a,\ b) = d(f(a),\ f(b)) \leqq rd(a,\ b)$$

から

$$(1-r)d(a,\ b) \leqq 0$$

$1-r>0$ より $d(a,\ b)=0$．距離関数の非退化性から $b=a$ である． □

この定理は単純であるが，大変有用である．積分方程式や微分方程式の解の存在，およびその解に収束する関数列の構成に応用することができる．

縮小写像より一般的な連続写像に関する不動点定理は位相幾何学の分野である．例えば次のような定理が成り立つ．

定理 74　n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の閉じた単位球

$$S=\{\ \mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ |\mathbf{x}|\leqq 1\}$$

がある．S から S への連続写像 f は不動点をもつ． ■

$n=1$ のときが例 6.2 である．一般的な証明は位相幾何学の準備がいる．例えば文献『位相幾何学』[20] のような位相幾何学の入門書を見てほしい．ここでは文献『直観幾何学』[19] によって，$n=2$ つまり円板の場合にこれを証明しよう．

$n=2$ のときの証明

円板 S 上に f の不動点が存在しないと仮定し矛盾が起こることを示す．

S を中心を原点にして xy 平面に置く．S は不等式 $x^2+y^2\leqq 1$ で表される．$0<r\leqq 1$ に対し円 $x^2+y^2=r^2$ を C_r とする．S の任意の点 P に対し $f(\mathrm{P})\neq\mathrm{P}$ なので，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}f(\mathrm{P})}$ をとることができる．f が連続なのでこのベクトルの大きさも向きも連続的に変化する．

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}f(\mathrm{P})}$ が x 軸の正の方向となす角を θ_0 $(0\leqq\theta_0<2\pi)$ とし，点 P を C_r 上反時計回りに一周させたときの変化量を $\phi(r)$ とする．$\theta=\theta_0+\phi(r)$ とおく．一周すれば元に戻るのだから $\phi(r)$ は 2π の整数倍である．

$\phi(1)$ を求める．点 P での円 C_1 の接線ベクトルのうち，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}f(\mathrm{P})}$ を左側に見るものが x 軸の正の方向となす角を α とする．最初点 P を C_1 上の $(0,\ -1)$ にとる．このとき $0<\theta_0<\pi$ である．P を反時計回りに一周する．α は 0 から 2π まで変化する．

仮に θ の変化量 $\phi(1)$ が 2π でないと仮定する．すると 1 周まわったとき角 θ は 4π 以上か 0 以下である．2 つの角の差 $\theta-\alpha$ は，最初 $0<\theta-\alpha<\pi$ にあり，一周して点 P が $(0,\ -1)$ に戻ったとき，$|\theta-\alpha|\geqq 2\pi$ である．$\theta-\alpha$ は連続的に変化するので，途中で $\theta-\alpha=0$ となるか $\theta-\alpha=\pi$ となるときがある．一方，$f(\mathrm{P})$ が S の周か内部にあり $\mathrm{P}\neq f(\mathrm{P})$ にあるので $\theta-\alpha\neq 0,\ \pi$ である．矛盾が起こる．つまり $\phi(1)=2\pi$ である．

r の変化に対して角 θ は連続的に変化するので $\phi(r)$ も連続的に変化する．ところが $\phi(r)$ は 2π の整数倍しかとり得ないので，すべての r に対して $\phi(r)=2\pi$ である．

しかし $r\to 0$ のとき $\mathrm{P}\to\mathrm{O}$ (原点) であり，f の連続性から角 θ の変化量も 0 に収束する．これは矛盾である．従って f は不動点をもつ． □

位相幾何，あるいは函数解析といわれる広大な分野に近づいてきているが，ここで踵を返し，多次元の微積に戻らなければならない．

6.3　陰関数定理

多変数関数の微分　以下では $N=2$ とし，平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D で定義された関数 f を考える．これを N 次元に一般化することは難しいことではないが，ときには N 次の線型代数を必要とする．f の従属変数を x と y にとり $z=f(x,\ y)$ のように表す．f が連続な場合，$z=f(x,\ y)$ によって $(x,\ y,\ z)$ を座標系とする三次元空間 $\mathbb{R}^3$ に置かれた曲面が定まる．

定義領域 D の点 $(a,\ b)$ をとる．y を b に固定し x の関数としての $x=a$ における微分係数が存在するときそれを $f_x(a,\ b)$ と書き，$(a,\ b)$ における x についての偏微分係数という．x を a に固定し y の関数としての $y=b$ における微分係数が存在するときそれを $f_y(a,\ b)$ と書き，$(a,\ b)$ における y についての偏微分係数という．

$$f_x(a,\ b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,\ b)-f(a,\ b)}{h},\quad f_y(a,\ b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,\ b+h)-f(a,\ b)}{h}$$

である．

f が D の各点で x についての偏微分係数をもつとき，$(x,\ y)$ にその偏微分係数値を対応させる関数を $f_x(x,\ y)$ と書き，f_x を x についての偏導関数という．

$$f_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ \frac{\partial z}{\partial x}$$

などと書く．f が D の各点で y についての偏微分係数をもつとき，$(x,\ y)$ にその偏微分係数値を対応させる関数を $f_y(x,\ y)$ と書き，f_y を y についての偏導関数という．

$$f_y,\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ \frac{\partial z}{\partial y}$$

などと書く．偏微分 $f_x(a,\ b)$ は，$z=f(x,\ y)$ で定まる曲面を xz 平面に平行な平面 $y=b$ で切った断面上の曲線上の点 $(a,\ b,\ f(a,\ b))$ での接線の傾きを表す．$f_y(a,\ b)$ についても同様である．これはまだ $z=f(x,\ y)$ の微分可能性を特徴づけたものではない．

一変数の場合の微分係数を顧みる．$\mathbb{R}$ の区間で定義された関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ とは，$y=f(x)$ のグラフである曲線の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きであり，

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

が接線の方程式であった．$x=a$ における微分可能性とは，点 $(a,\ f(a))$ における接線の存在に他ならなかった．いいかえると $f(x)$ の $x=a$ における微分可能性とは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-\{A(x-a)\}}{x-a}=0$$

となる (a のみによる) 定数 A の存在と同値である．これを二変数の場合に拡張する．

定義 34 (微分可能)　$D\subset\mathbb{R}^2$ の変数で定義された関数 $f(x,\ y)$ と D の点 $(a,\ b)$ に対し，

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)}\frac{f(x,\ y)-f(a,\ b)-\{A(x-a)+B(y-b)\}}{|x-a|+|y-b|}=0$$

となる ($a,\ b$ のみによる) 定数 $A,\ B$ が存在するとき，$f(x,\ y)$ は点 $(a,\ b)$ で**微分可能**であるという．関数 f が D の各点で微分可能なとき f は D において微分可能であるという．■

定義 34 の条件は次の表現と同値である．

$D\subset\mathbb{R}^2$ の変数を $\mathbf{x}$，定点を P とする．

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathrm{P}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathrm{P})-\mathbf{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P}\mathbf{x}}}{d(\mathbf{x},\ \mathrm{P})}=0$$

となるベクトル $\mathbf{c}=(A,\ B)$ が存在する．ただし，$\mathbf{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P}\mathbf{x}}$ は内積を表す．■

注意 6.2　本定義における「微分可能」を**全微分可能**ということも多い．ここは『解析概論』の用語に従った．

$f(x,\ y)$ が点 $(a,\ b)$ で微分可能であるとする．$\rho(x,\ y)=f(x,\ y)-f(a,\ b)-\{A(x-a)+B(y-b)\}$ とおくと $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)}\rho(x,\ y)=0$ なので，$f(x,\ y)$ は点 $(a,\ b)$ で連続である．さらに，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,\ b)-f(a,\ b)}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(A+\frac{\rho(x,\ b)}{x-a}\right)=A$$

なので $A=f_x(a,\ b)$，同様に $B=f_y(a,\ b)$ である．一次式

$$f_x(a,\ b)(x-a)+f_y(a,\ b)(y-b)$$

を**全微分**，平面

$$z=f(a,\ b)+f_x(a,\ b)(x-a)+f_y(a,\ b)(y-b)$$

を曲面 $z=f(x,\ y)$ の点 $(a,\ b)$ における**接平面**という．

定理 75　$D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が偏導関数 $f_x,\ f_y$ をもち，$f_x,\ f_y$ が D で連続ならば，f は D において微分可能である．■

証明　D の点 $(a,\ b)$ をとり

$$\rho(x,\ y)=f(x,\ y)-f(a,\ b)-\{f_x(a,\ b)(x-a)+f_y(a,\ b)(y-b)\}$$

とおく．一変数の平均値の定理によって

$$\begin{aligned}f(x,\ y)-f(a,\ y)&=f_x(c_1,\ y)(x-a)\quad(c_1\text{は } a \text{ と } x \text{ の間})\\ f(a,\ y)-f(a,\ b)&=f_y(a,\ c_2)(y-b)\quad(c_2\text{は } b \text{ と } y \text{ の間})\end{aligned}$$

と表される．よって

$$\rho(x,\ y)=\{f_x(c_1,\ y)-f_x(a,\ b)\}(x-a)+\{f_y(a,\ c_2)-f_y(a,\ b)\}(y-b)$$

となる．$f_x,\ f_y$ は連続なので，正数 ϵ に対し

$$\begin{aligned}&|x-a|<\delta,\ |y-b|<\delta\\ \Rightarrow\quad&|f_x(x,\ y)-f_x(a,\ b)|<\epsilon,\ |f_y(x,\ y)-f_y(a,\ b)|<\epsilon\end{aligned}$$

となる正数 δ が存在する．よって

$$|\rho(x,\ y)|\leqq\epsilon\{|x-a|+|y-b|\}$$

つまり

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)}\frac{\rho(x,\ y)}{|x-a|+|y-b|}=0$$

ゆえに f は $(a,\ b)$ で微分可能．$(a,\ b)$ は D の任意の点であるから，f は D で微分可能である．□

注意 6.3　本定理は $f_x,\ f_y$ の存在と，いずれか一方の連続性のみを仮定すれば成立する．これについては『解析概論』**定理 26** を参照のこと．

系 75.1　領域 D で関数 $z = f(x,\ y)$ が微分可能であるとする．D 内の微分可能な曲線 $C : (\varphi(t),\ \psi(t)),\ t \in [a,\ b]$ がある．関数 $z(t) = f(\varphi(t),\ \psi(t))$ に関して

$$\frac{dz}{dt} = f_x(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t)$$

が成り立つ． ■

証明　記号は定理 75 を用いる．区間 $[a,\ b]$ 内の点 c をとる．

$$\begin{aligned}
& f(\varphi(t),\ \psi(t)) - f(\varphi(c),\ \psi(c)) \\
= \quad & f_x(\varphi(c),\ \psi(c))(\varphi(t) - \varphi(c)) + f_y(\varphi(c),\ \psi(c))(\psi(t) - \psi(c)) + \rho(\varphi(t),\ \psi(t))
\end{aligned}$$

と表せる．ここで $t \to c$ のとき

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho(\varphi(t),\ \psi(t))}{t - c} \right| \\
= \quad & \left| \frac{\rho(\varphi(t),\ \psi(t))}{|\varphi(t) - \varphi(c)| + |\psi(t) - \psi(c)|} \right| \times \left| \frac{|\varphi(t) - \varphi(c)| + |\psi(t) - \psi(c)|}{t - c} \right| \\
& \to 0 \times (|\varphi'(c)| + |\psi'(c)|) = 0
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \to c} \frac{f(\varphi(t),\ \psi(t)) - f(\varphi(c),\ \psi(c))}{t - c} \\
= \quad & f_x(\varphi(c),\ \psi(c)) \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c} + f_y(\varphi(c),\ \psi(c)) \frac{\psi(t) - \psi(c)}{t - c} + \frac{\rho(\varphi(t),\ \psi(t))}{t - c} \\
= \quad & f_x(\varphi(c),\ \psi(c))\varphi'(c) + f_y(\varphi(c),\ \psi(c))\psi'(c)
\end{aligned}$$

である．これが任意の $c \in D$ で成立するので命題が示された． □

陰関数　xy 平面の開集合 G で定義された連続関数 $F(x,\ y)$ がある．G の点 $(a,\ b)$ で $F(a,\ b) = 0$ であるとする．このとき，a を含む実数のある開区間 J で定義された連続関数 $y = \varphi(x)$ で

$$\varphi(a) = b, \qquad F(x,\ \varphi(x)) = 0$$

を満たすものを，方程式 $F(x,\ y) = 0$ が定める**陰関数**という．

陰関数の存在に関して，次の定理が成り立つ．

定理 76 (陰関数定理)　xy 平面の開集合 G で定義された連続関数 $F(x,\ y)$ がある．G の点 $(a,\ b)$ で $F(a,\ b) = 0$ であり，かつ

$$F_y(x,\ y) = \frac{\partial F}{\partial y} \text{ が連続,} \qquad F_y(a,\ b) \neq 0$$

である．このとき，a を含むある開区間 I で連続で，$\varphi(a) = b$ かつ $F(x,\ \varphi(x)) = 0$ となる関数 $\varphi(x)$ がただ一つ存在する．

さらに，F_x が連続なら $\varphi(x)$ は微分可能で

$$\varphi'(a) = -\frac{F_x(a,\ b)}{F_y(a,\ b)}$$

となる． ■

証明　$F_x(a,\ b)=c$ とし，

$$H(x,\ y)=y-\frac{F(x,\ y)}{c}$$

とおく．$H(x,\ y)$ は次の条件を満たしている．

$$H(x,\ y),\ H_y(x,\ y)\text{ は }G\text{ で連続．}\quad H(a,\ b)=b,\ H_y(a,\ b)=0$$

$0<r<1$ をとる．G が開集合であり，$H_y(x,\ y)$ が G で連続で $H(a,\ b)=0$ なので，

$$R=\{(x,\ y)\mid |x-a|\leqq h,\ |y-b|\leqq k\}\subset G$$

をとり，$(x,\ y)\in R$ に対して

$$H_y(x,\ y)<r$$

となる $h>0$，$k>0$ が存在する．さらに H が連続で $H(a,\ b)=b$ なので，k を十分小さく，$|x-a|<h$ のとき

$$|H(x,\ b)-b|<(1-r)k$$

となるように，とることができる．平均値の定理から $(x,\ y_i)$ $i=1,\ 2$ に対し

$$|H(x,\ y_1)-H(x,\ y_2)|\leqq r\,|y_1-y_2|$$

である．よって $(x,\ y)\in R$ に対し

$$\begin{aligned}|H(x,\ y)-b| &\leqq |H(x,\ y)-H(x,\ b)|+|H(x,\ b)-b|\\ &\leqq r\,|y-b|+(1-r)k\leqq rk+(1-r)k=k\end{aligned}$$

となる．

次に閉区間 $I=[a-h,\ a+h]$ での連続関数空間 $C(I)$ において，$y_1,\ y_2\in C(I)$ に対して，距離を $d(y_1,\ y_2)=\max\{y_1(x)-y_2(x)\mid x\in I\}$ で定める．そして部分空間 E を

$$E=\{y\mid y\in C(I),\ |y(x)-b|\leqq k\ (x\in I)\}$$

にとると，距離空間 E は d に関して完備である．

y $(\in E)$ に対して $T(y)(x)=H(x,\ y(x))$ とおく．

$$|T(y)(x)-b|=|H(x,\ y(x))-b|\leqq k$$

であるから，T は E から E への写像である．

さらに，$y_1,\ y_2\in E$ に対して，

$$\begin{aligned}|T(y_1)(x)-T(y_2)(x)| &= |H(x,\ y_1(x))-H(x,\ y_2(x))|\\ &\leqq r\,|y_1(x)-y_2(x)|\leqq rd(y_1,\ y_2)\end{aligned}$$

である．よって

$$d\left(T(y_1)-T(y_2)\right)=\max|T(y_1)(x)-T(y_2)(x)|\leqq rd(y_1,\ y_2)$$

が成り立ち，T は縮小写像である．

不動点定理 73 によって，T はただ一つの不動点をもつ．それを $\varphi(x)$ とすると，

$$\varphi(x) = H(x,\ \varphi(x)) = \varphi(x) - \frac{F(x,\ \varphi)}{c}\ (x \in I)$$

が成り立つ．つまり

$$F(x,\ \varphi(x)) = 0\ (x \in I)$$

である．

条件を満たす φ は R の関数としてただ一つである．つまり，$(x,\ y) \in R$ で $F(x,\ y) = 0$ であるとするとき，$y = \varphi(x)$ が成り立つ．次のように示される．

$F(x,\ y) = 0$ より $y = H(x,\ y)$ なので，

$$|y - \varphi(x)| = |H(x,\ y) - H(x,\ \varphi(x))| \leqq r\,|y - \varphi(x)|$$

が成り立つ．$0 < r < 1$ より $y - \varphi(x) = 0$．つまり $y = \varphi(x)$ が成り立つ．とくに，$(a,\ b) \in R$ で $F(a,\ b) = 0$ なので $b = \varphi(a)$ である．

さらに，F_x も連続なら定理 75 によって F は全微分可能である．よって $f(t) = F(a+th,\ b+tk)$ について，区間 $[0,\ 1]$ で平均値の定理を用いることにより，その系 75.1 から

$$\begin{aligned} & F(a+h,\ b+k) - F(a,\ b) \\ = \ & F_x(a+\theta h,\ b+\theta k)h + F_y(a+\theta h,\ b+\theta k)k \end{aligned}$$

である．k を $k = \varphi(a+h) - \varphi(a)$ にとると，

$$F(a+h,\ \varphi(a+h)) - F(a,\ b) = 0 - 0 = 0$$

なので，

$$\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = -\frac{F_x(a+\theta h,\ b+\theta k)}{F_y(a+\theta h,\ b+\theta k)}$$

$h \to 0$ をとって

$$\varphi'(a) = -\frac{F_x(a,\ b)}{F_y(a,\ b)}$$

を得る． □

系 76.1　関数 $f(x)$ が開区間で微分可能で，その区間内の c で $f'(c) \neq 0$ であり，$\gamma = f(c)$ なら，$f(x)$ は γ を含む開区間で定義された逆関数 $y = \varphi(x)$ をもつ．そして，

$$\varphi'(\gamma) = \frac{1}{f'(c)}$$

となる． ■

証明

$$F(x,\ y) = x - f(y)$$

とおく．

$$F(\gamma,\ c) = 0,\ F_y(x,\ y) = -f'(y),\ F_y(\gamma,\ c) = -f'(c)$$

であるから，$f'(c) \neq 0$ のとき陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在し，

$$F(x,\ \varphi(x)) = x - f(\varphi(x)) = 0, \varphi(\gamma) = c$$

である．

さらに

$$F_x(x,\ y) = 1 \neq 0$$

なので，

$$\varphi'(\gamma) = -\frac{1}{-f'(c)} = \frac{1}{f'(c)}$$

である． □

6.4 微分と幾何

平面曲線

定義 35 区間 $I = [a,\ b]$ から xy 平面 $\mathbb{R}^2$ への写像を**平面曲線** C という．$t \in I$ に対応する点 $\mathrm{P}(t)$ を，二つの関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ を用いて $(\varphi(t),\ \psi(t))$ と表す．関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ が連続であるとき C を**連続曲線**という．$\varphi(t)$ と $\psi(t)$ が微分可能であるとき C を**微分可能曲線**という．

$\mathrm{P}(a) = \mathrm{P}(b)$ となる連続曲線を**閉曲線**という． ■

以下，混乱しないときは単に曲線という．

C は $\mathbb{R}^2$ の点 $\mathrm{P}(t)$ の集合

$$C = \{\ \mathrm{P}(t) \mid \mathrm{P}(t) = (\varphi(t),\ \psi(t)),\ t \in [a,\ b]\ \}$$

である．また変数と区間を明示するときは $C(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ のようにも表すものとする．これらの定義は，空間曲線についても同様である．

曲線の長さ 二点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ に対して線分 PQ の長さが

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

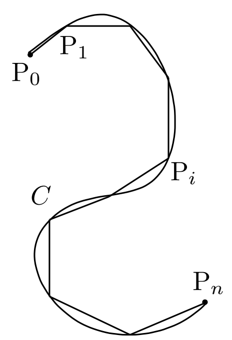
で定義されているとする．これをもとに，曲線の長さを定義しよう．

定義 36 (曲線の長さ) 区間 I の分割を

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

とする．この分割を λ と書く．

曲線 C 上の点 $(\varphi(t_i),\ \psi(t_i))$ を $\mathrm{P}(t_i)$ と表す．これによって 2 点 $\mathrm{P}(t_0)$ と $\mathrm{P}(t_n)$ を端点とする折れ線 $\mathrm{P}(t_0)\mathrm{P}(t_1)\cdots\mathrm{P}(t_n)$ ができる．この長さを $L(\lambda)$ とする．



$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{P}(t_i)\mathrm{P}(t_{i+1})$$

$L(C)$ を λ が区間 $[a,\ b]$ のすべての分割を (n も変化して) 動くとき $L(\lambda)$ の上限

$$L(C) = \sup_{\lambda} L(\lambda)$$

が存在すればそれを曲線 C の長さと定義する． ■

分割の小区間 $[t_{i-1},\ t_i]$ をさらに分割して $[t_{i-1},\ s]$, $[s,\ t_i]$ とする．三角形 $\mathrm{P}(t_{i-1})\mathrm{P}(s)\mathrm{P}(t_i)$ における三角不等式から

$$\mathrm{P}(t_{i-1})\mathrm{P}(t_i) \leqq \mathrm{P}(t_{i-1})\mathrm{P}(s) + \mathrm{P}(s)\mathrm{P}(t_i)$$

が成立する．したがって分割の細分に対して $L(\lambda)$ は単調に増加する．

定理 77　閉区間 $I = [a,\ b]$ と二つの関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ がある．$\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は区間 $I = [a,\ b]$ を含むある開区間で微分可能で，かつその導関数は区間 I で連続である．さらに，$t \in I$ に対して

$$(\varphi'(t),\ \psi'(t)) \neq \overrightarrow{0}$$

である．このとき曲線 $C(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ は長さ $L(C)$ が定まり，$L(C)$ の値は

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$$

で与えられる． ■

証明
1.　折れ線の長さ $L(\lambda)$ が有界であることを示す．区間の分割 λ をとる．$\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ は閉区間で連続であるから有界で一様連続である．区間 I で $|\varphi'(t)| \leqq M$, $|\psi'(t)| \leqq M$ とする．分割 λ の小区間 $[t_i,\ t_{i+1}]$ で平均値の定理を用いる．この小区間内の点 ζ_i, ξ_i が存在して

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(t_i)\mathrm{P}(t_{i+1}) &= \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2} \\ &= (t_i - t_{i+1})\sqrt{\varphi'(\zeta_i)^2 + \psi'(\xi_i)^2} \leqq \sqrt{2}M(t_i - t_{i+1})\end{aligned}$$

よって

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{P}(t_i)\mathrm{P}(t_{i+1}) \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{2}M(t_i - t_{i+1}) = \sqrt{2}M(b-a)$$

よって $L(\lambda)$ には上限が存在し，曲線 C は長さ $L(C)$ をもつ．
2.　次に $L(C)$ が定積分で与えられることを示す．
　まず，$\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$ は連続であるから積分可能である．
　次に正数 ϵ を任意に定める．
　$\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ の一様連続性から区間の任意の s と t に対して

$$|t-s| < \delta \quad \Leftarrow |\varphi'(t) - \varphi'(s)| < \epsilon,\ |\psi'(t) - \psi'(s)| < \epsilon$$

となる正数 δ が存在する．
　曲線の長さ $L(C)$ と定積分がそれぞれ存在するので，分割を十分細かく，かついずれの小区間の幅も δ より小さくとって

$$0 \leqq L(C) - L(\lambda) = L(C) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{P}(t_i)\mathrm{P}(t_{i+1}) < \epsilon$$

$$\left| \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt - \sum_{i=0}^{n-1}(t_i - t_{i+1})\sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} \right| < \epsilon$$

とすることができる．そこで

$$
\begin{aligned}
&\left| L(C) - \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt \right| \\
\leqq\ & |L(C) - L(\lambda)| + \left| L(\lambda) - \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i+1}) \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} \right| \\
&\quad + \left| \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i+1}) \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} - \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt \right|
\end{aligned}
$$

において第二の項を評価する．

一般に 4 実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$
\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \right| \leqq \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \leqq |a-c| + |b-d|
$$

第一の不等式は三点 O, A$(a,\ b)$, B$(c,\ d)$ に対する三角不等式 $|\mathrm{OA} - \mathrm{OB}| \leqq \mathrm{AB}$ である．さらに両辺平方すれば明らかなように $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \leqq |a-c| + |b-d|$ である．上記不等式はこれから従う．

この結果，先の小区間での平均値の定理とあわせて

$$
\begin{aligned}
&\left| L(\lambda) - \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i+1}) \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} \right| \\
=\ & \left| \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i+1}) \sqrt{\varphi'(\zeta_i)^2 + \psi'(\xi_i)^2} - \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i+1}) \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} \right| \\
\leqq\ & \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i+1}) \left| \sqrt{\varphi'(\zeta_i)^2 + \psi'(\xi_i)^2} - \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} \right| \\
\leqq\ & \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i+1}) \left\{ |\varphi'(\zeta_i) - \varphi'(t_i)| + |\psi'(\xi_i) - \psi'(t_i)| \right\} \\
\leqq\ & \sum_{i=0}^{n-1} 2\epsilon (t_i - t_{i+1}) = 2\epsilon(b-a)
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\left| L(C) - \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt \right| < \epsilon + 2\epsilon(b-a) + \epsilon
$$

ϵ は任意の正数なので

$$
L(C) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt
$$

が示された． □

系 77.1　関数 $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ から $x = b$ までの長さ L は

$$
L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx
$$

で与えられる． ■

証明　グラフは $(t,\ f(t))$ で表されるので，定理 77 より明らかである． □

円周の長さ　これによって円周の長さの存在が示される．円は1点からの距離が一定であるような点Pの集合である．xy 平面で考え中心がO半径 r の半円周上の点Pは $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{r^2-t^2})$ と表され，連続かつ微分可能である．したがって半円周の長さが存在することがわかる．したがって円の弧長をもとにした三角関数も循環論法に陥ることなく定義される．また，曲線の長さの定義から，

$$\text{内接する多角形の辺長の和の上限} = \text{円周の長さ}$$

となる．このとき「外接する多角形の辺長の和の下限」も存在し円周の長さに一致することがわかる．

例 6.4 (放物線の弧長)　放物線 $y^2 = 4px$ の頂点 $(0,\ 0)$ から点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ $(x > 0)$ までの弧長を s とおく．放物線を $\left(\dfrac{t^2}{4p},\ t\right)$ とすると

$$s = \int_0^y \sqrt{\left(\frac{t}{2p}\right)^2 + 1}\, dt$$

ここで $\dfrac{t}{2p} = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$ とおくと，$\dfrac{dt}{du} = 2p\cdot\dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$ となる．また $t = y$ のとき $e^u = \sqrt{\dfrac{y^2}{4p^2}+1} + \dfrac{y}{2p}$ である．この u の値を α とする．$\alpha = \log\left(\sqrt{\dfrac{y^2}{4p^2}+1} + \dfrac{y}{2p}\right)$，$-\alpha = \log\left(\sqrt{\dfrac{y^2}{4p^2}+1} - \dfrac{y}{2p}\right)$ となる．また $\dfrac{y}{2p} = \sqrt{\dfrac{x}{p}}$ でもあるので $\alpha = \log\left(\sqrt{\dfrac{x}{p}+1} + \sqrt{\dfrac{x}{p}}\right)$，$-\alpha = \log\left(\sqrt{\dfrac{x}{p}+1} - \sqrt{\dfrac{x}{p}}\right)$ でもある．

$$\begin{aligned}
s &= \frac{p}{2}\int_0^\alpha (e^u + e^{-u})^2\, du = \frac{p}{2}\int_0^\alpha (e^{2u} + 2 + e^{-2u})\, du = \frac{p}{4}\Big[e^{2u} + 4u - e^{-2u}\Big]_0^\alpha \\
&= \frac{p}{4}\left\{\left(\sqrt{\frac{x}{p}+1} + \sqrt{\frac{x}{p}}\right)^2 + 4\log\left(\sqrt{\frac{x}{p}+1} + \sqrt{\frac{x}{p}}\right) - \left(\sqrt{\frac{x}{p}+1} - \sqrt{\frac{x}{p}}\right)^2\right\} \\
&= \sqrt{x(x+p)} + p\log\left(\sqrt{\frac{x}{p}+1} + \sqrt{\frac{x}{p}}\right)
\end{aligned}$$

例 6.5 (楕円の弧長)　楕円 C を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(b < a)$ とする．媒介変数では $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と表される．点 $(a,\ 0)$ からの弧長を s とすると

$$s = \int_0^\theta \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta = a\int_0^\theta \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\, d\theta \quad .$$

ここで $e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ は離心率である．この定積分は**楕円積分**といわれ初等関数で表すことはできない．

空間曲線　本小節では $\mathbb{R}$ の区間 $[a,\ b]$ から三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への関数 f を考える．

$$f : t\ (\in [a,\ b]) \quad \to \quad (x(t),\ y(t),\ z(t))\ (\in \mathbb{R}^3)$$

である．f による区間の像を，三次元空間に置かれた曲線という．$z(t)=0$ (一定) のときが平面曲線である．f によっては通常の曲線とはいえないものもできる．これについては『解析概論』を見てほしい．そこで次の二つの条件を加える．

(1) $t \ne a,\ b$ のとき $t \ne t'$ なら $f(t) \ne f(t')$ が成り立つ．このような曲線を**単一曲線**，あるいは**ジョルダン曲線**という．

(2) $t\ \in [a,\ b]$ に対し $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$ が存在し，

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \ne 0$$

が成り立つ．

これを**滑らかな曲線**という．このような曲線を解析するためには，ベクトルの微分が必要である．空間 $\mathbb{R}^3$ の要素であるベクトルには内積と外積が定められる．これらと微分との関連を整理する．この部分は曲線や曲面の微分法による解析，あるいは曲面上の微積，という方向に発展していく．それが微分幾何学である．ここでは当面の必要に従い内積と外積を定義しその微分を考え，曲率等の基本事項をまとめるにとどめる．

内積の定義と微分　$\mathbb{R}^3$ では，その要素 $\mathbf{u}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ に対し，大きさを

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$$

が定まっている．これを用いて $\mathbf{u}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathbf{v}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ に対して内積が定義される．

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left\{|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right\} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

を $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の**内積**とする．内積はまた**スカラー積**ともいう．「$\cdot$」を略して $\mathbf{uv}$ と書くこともあれば，$(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ のように書くこともある．これに関することは『線型代数の考え方』－「ベクトル空間と線型写像」－「内積とベクトルの大きさ」を見てほしい．

$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の間の角を θ とすれば，

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$$

となる．特に

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$$

である．

ベクトル $\mathbf{u}=(x,\ y,\ z)$ の各成分が実数 t の関数であるとき，ベクトル

$$(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)) = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)$$

を $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ あるいは $\mathbf{u}'$ と書き表すことにする．$\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ も $\mathbb{R}^3$ に値をとる関数となる．二つのベクトル $\mathbf{u},\ \mathbf{v}$ の各成分がそれぞれ t の関数のとき

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})' = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$$

が成り立つ．特に $\mathbf{u}$ が方向のみ変化して，つねに大きさが 1 のとき，つまり $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=1$ のとき，

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})' = 2\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u} = 0$$

となる．この場合 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{u}'$ は直交している．

外積の定義と微分　二つのベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ があり，その成分を $\mathbf{u}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathbf{v}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とする．ベクトル $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ を

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1)$$

で定め，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の**外積**という．**ベクトル積**ともいう．

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}=(y_1z_2-y_2z_1)x_1+(z_1x_2-z_2x_1)y_1+(x_1y_2-x_2y_1)z_1=0$$

同様に，$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}=0$ も成り立つ．よって $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の双方に直交している．

$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおく．

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| &= \sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2}\\ &= \sqrt{({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}\\ &= \sqrt{|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta\end{aligned}$$

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ の大きさはそれぞれの大きさとなす角 θ のみで決まる．双方に直交しているので，方向が決まれば図形的性質が確定する．

$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ を連続的に回転し，$\mathbf{u}$ が x 軸上に $\mathbf{v}$ が xy 平面上にあるように置く．この回転で

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (a,\ 0,\ 0)\ (a>0)\\ \mathbf{v} &= (b\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)\quad(b>0,\ 0<\theta<\pi)\end{aligned}$$

となったとする．$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ も連続的に変化するので，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ との位置関係は変わらない．このとき外積は

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(0,\ 0,\ ab\sin\theta)$$

となり，$\mathbf{u}$ から $\mathbf{v}$ へ右ネジを回したときの進む方向になっている．よって $\mathbf{u}$ から $\mathbf{v}$ の外積 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ は，ベクトル $\mathbf{u}$ からベクトル $\mathbf{v}$ へ右ネジを回転させたとき，ネジの進む方向であることがわかる．

注意 6.4　三次の行列式を用いて平行六面体の向きつき体積の考察を行っておくと，もう少し簡明な議論をすることができる．これについても『解析概論』など参照してほしい．

外積は次のような計算法則を満たす．

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= -\mathbf{v}\times\mathbf{u}\\ \mathbf{u}\times\mathbf{u} &= \overrightarrow{0}\\ \mathbf{u}\times(k\mathbf{v}) &= k(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\ (k:\text{は実数})\\ \mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}\end{aligned}$$

外積と微分　$\mathbf{u}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と $\mathbf{v}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ の各成分が t の関数のとき，

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\frac{d}{dt}(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1)$$

を考えると，x 成分についてみれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y_1z_2-y_2z_1) &= \frac{dy_1}{dt}z_2+y_1\frac{dz_2}{dt}-\left(\frac{dy_2}{dt}z_1+y_2\frac{dz_1}{dt}\right)\\ &= \left(\frac{dy_1}{dt}z_2-\frac{dy_2}{dt}z_1\right)+\left(y_1\frac{dz_2}{dt}-y_2\frac{dz_1}{dt}\right)\end{aligned}$$

となる．他の成分についても同様なので，

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})'=\mathbf{u}'\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}'$$

が成り立つ．

曲線の曲率　関数 f で定まる滑らかな空間曲線を C とする．C は

$$C:\{(x(t),\ y(t),\ z(t))\ (\in\mathbb{R}^3)\mid t\ \in[a,\ b]\}$$

という $\mathbb{R}^3$ の部分集合である．C 上の点の位置ベクトルを $\mathbf{u}=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ とする．以上の準備のもと，空間曲線の局所的な性質について考える．

t は一般的な媒介変数である．C をそのままに，媒介変数 t を別の変数に置換することを考える．新しい媒介変数として，曲線の始点 $t=a$ からの距離 s をとる．空間曲線においても平面曲線の長さと同様に，

$$s=s(t)=\int_a^t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

である．この s で C を表す．$\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}$ であるから

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=1$$

である．t による微分と区別するために s による微分を $\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}$ とし，

$$\dot{\mathbf{u}}=(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$$

と書く．ここのところの記号は『解析概論』と違うので注意してほしい．この等式は

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds}=\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right)$$

を意味する．するとベクトル $\dot{\mathbf{u}}$ は単位ベクトルである．従って，ベクトル $\dot{\mathbf{u}}$ とその微分 $\ddot{\mathbf{u}}=\dfrac{d\dot{\mathbf{u}}}{ds}$ は直交している．

s に対応する点を P とする．$|\ddot{\mathbf{u}}|$ の値を曲線 C の点 P における**曲率**といい $\kappa(s)$ と置く．その逆数を**曲率半径**という．$\mathbf{e_1}=\dot{\mathbf{u}}$ とし，これに平行な直線を**主法線**，$\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$ を含む平面を**接触平面**という．次に $\ddot{\mathbf{u}}$ に平行な単位ベクトル $\mathbf{e_2}$ を

$$\mathbf{e_2}=\frac{1}{\kappa(s)}\ddot{\mathbf{u}}$$

で定める．さらに P における接触平面の垂線と平行な単位ベクトル $\mathbf{e_3}$ を

$$\mathbf{e_3}=\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2}$$

で定める．$\mathbf{e_3}$ で定まる接触平面の垂線を**従法線**という．すると，

$$\dot{\mathbf{e_3}}=\dot{\mathbf{e_1}}\times\mathbf{e_2}+\mathbf{e_1}\times\dot{\mathbf{e_2}}=\kappa(s)\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_2}+\mathbf{e_1}\times\dot{\mathbf{e_2}}=\mathbf{e_1}\times\dot{\mathbf{e_2}}$$

ゆえに $\dot{\mathbf{e_3}}$ は $\mathbf{e_1}$ に垂直である．$|\mathbf{e_3}|=1$ より $\dot{\mathbf{e_3}}$ は $\mathbf{e_3}$ に垂直．つまり $\dot{\mathbf{e_3}}$ は $\mathbf{e_2}$ に平行である．ここで

$$\dot{\mathbf{e_3}} = -\tau\mathbf{e_2}$$

とおいて $\tau(s)$ を曲線 C の**第二曲率**または**捩率**といい，その逆数を**捩率半径**という．

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e_2}} &= (\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1})' = \dot{\mathbf{e_3}}\times\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}\times\dot{\mathbf{e_1}} \\
&= -\tau\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}\times(\kappa\mathbf{e_2}) = -\kappa\mathbf{e_1} + \tau\mathbf{e_3}
\end{aligned}$$

従って以上の定数を用いると，$\dot{\mathbf{e_1}}$，$\dot{\mathbf{e_2}}$，$\dot{\mathbf{e_3}}$ を $\mathbf{e_1}$，$\mathbf{e_2}$，$\mathbf{e_3}$ を用いて表すことができる．

$$\begin{cases}
\dot{\mathbf{e_1}} = & \kappa\mathbf{e_2} & \\
\dot{\mathbf{e_2}} = -\kappa\mathbf{e_1} & & +\tau\mathbf{e_3} \\
\dot{\mathbf{e_3}} = & -\tau\mathbf{e_2} &
\end{cases}$$

これを**フルネ・セレーの公式**という．

例 **6.6**　常螺旋 (heilix) は次のように定義される．

$$\mathbf{u}(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)\quad (a>0)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$$

より $\left|\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$ なので

$$s = \int_0^t \left|\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right| dt = \sqrt{a^2+b^2}\cdot t$$

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ とおき $\mathbf{u}$ を s で表すと

$$\mathbf{u}\left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}s\right)$$

よって

$$\begin{aligned}
\mathbf{e_1} &= \dot{\mathbf{u}} = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right) \\
\dot{\mathbf{e_1}} &= \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right) \\
\kappa &= |\dot{\mathbf{e_1}}| = \frac{a}{c^2} \\
\mathbf{e_2} &= \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{e_1}} = \left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right) \\
\mathbf{e_3} &= \mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2} = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right) \\
\dot{\mathbf{e_2}} &= \left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c},\ 0\right) = -\frac{a}{c^2}\mathbf{e_1} + \frac{b}{c^2}\mathbf{e_3}, \\
\tau &= \frac{b}{c^2} \\
\dot{\mathbf{e_3}} &= -\tau\mathbf{e_2}.
\end{aligned}$$

常螺旋では曲率 κ も捩率 τ も定数になる．

ここから、空間曲線の大域的な理論，空間曲面の局所理論，大域理論へと進むのであるが，それが微分幾何学である.『解析基礎』としてはここでおかねばならないが，最後に平面曲線の場合の曲率についてよく知られた公式と関係を見ておこう.

平面曲線の曲率　平面曲線は $z=0$ に固定した場合である．空間曲線では曲率を非負にとり，捩率を符号をもつ量とした．平面曲線の場合は，曲率段階で符号を決めることができる．

接線ベクトル $\dfrac{d\mathbf{u}}{ds}=(\dot{x},\ \dot{y})$ が x 軸の正の方向となす角を θ とする．$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e_2}$ にとる．このとき曲率 κ を

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2}=(\ddot{x},\ \ddot{y})=\kappa\mathbf{e_2}$$

とする．$(\dot{x},\ \dot{y})=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であるから

$$(\ddot{x},\ \ddot{y})=\left(-\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{ds},\ \cos\theta\cdot\frac{d\theta}{ds}\right)=\frac{d\theta}{ds}\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

となる．つまり

$$\kappa=\frac{d\theta}{ds}=\frac{-\ddot{x}}{\dot{y}}=\frac{\ddot{y}}{\dot{x}}$$

である．これは，曲線の長さを媒介変数に取ったときである．一般の媒介変数 t で曲率はどのようになるか.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{dx}{ds}=\frac{dt}{ds}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{x'}{s'}\\
\dot{y} &= \frac{y'}{s'}\\
\ddot{x} &= \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\frac{x'}{s'}=\frac{1}{{s'}^3}\cdot(x''s'-x's'')\\
\ddot{y} &= \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\frac{y'}{s'}=\frac{1}{{s'}^3}\cdot(y''s'-y's'')
\end{aligned}$$

この二式から s'' を消去する．

$$\ddot{y}x'-\ddot{x}y'=\frac{1}{{s'}^2}(x'y''-x''y')$$

ここで

$$\ddot{y}=\kappa\dot{x},\ \ddot{x}=-\kappa\dot{y},\ x'=\dot{x}s',\ y'=\dot{y}s'$$

を代入し，$\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$ を用いると

$$\kappa=\frac{x'y''-x''y'}{{s'}^3}=\frac{x'y''-x''y'}{({x'}^2+{y'}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

を得る.

曲線が $y=f(s)$ という明示的な関数のグラフである場合．曲線 C は $(t,\ f(t))$ となるので，

$$\kappa(t)=\frac{f''(t)}{\left\{1+f'(t)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

となる.

例 6.7 指数螺旋

$$\mathbf{u}(x,\ y) = e^{at}(\cos t,\ \sin t)$$

の曲率を求める．

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' &= ae^{at}(\cos t,\ \sin t) + e^{at}(-\sin t,\ \cos t) \\
&= e^{at}(a\cos t - \sin t,\ a\sin t + \cos t) \\
\mathbf{u}'' &= ae^{at}(a\cos t - \sin t,\ a\sin t + \cos t) \\
&\qquad + e^{at}(-a\sin t - \cos t,\ a\cos t - \sin t) \\
&= e^{at}((a^2-1)\cos t - 2a\sin t,\ (a^2-1)\sin t + 2a\cos t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x'y'' - x''y' &= e^{2at}\left[(a\cos t - \sin t)\{(a^2-1)\sin t + 2a\cos t\}\right. \\
&\qquad \left. -(a\sin t + \cos t)\{(a^2-1)\cos t - 2a\sin t\}\right] = (a^2+1)e^{2at}
\end{aligned}$$

$$|\mathbf{u}'|^2 = (a^2+1)e^{2at}$$

なので

$$\kappa(t) = \frac{(a^2+1)e^{2at}}{\{(a^2+1)e^{2at}\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}e^{at}}$$

である．

平面曲線に関しても伸開線，縮閉線の話題や，包絡線の一般論などさまざまに論ずべきことがあるが，ここは当初の目的である力学の数学的な基礎部分に絞ってここで終え，次に進まなければならない．

6.5 多次元積分

多変数関数の積分 $\mathbb{R}^2$ 内の有界領域 D で定義された実数値をとる有界関数 $f(x,\ y)$ がある．$\mathbb{R}^2$ 内の長方形 $R = [a,\ b] \times [\alpha,\ \beta]$ で $D \in R$ となるものを取る．区間 $[a,\ b]$，$[\alpha,\ \beta]$ をそれぞれ分割し，

$$\Delta\colon \begin{array}{l} a = x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n = b \\ \alpha = y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_m = \beta \end{array}$$

とする．R を小長方形 $\omega_{ij} = [x_{i-1},\ x_i] \times [y_{j-1},\ y_j]$ に分割する．関数 f を $f(x,\ y) = 0,\ (x,\ y) \notin D$ とすることで R で定義された関数に拡張する．

そして

$$m_{ij} = \inf\{f(x,\ y) | (x,\ y) \in \omega_{ij}\}, \quad M_{ij} = \sup\{f(x,\ y) | (x,\ y) \in \omega_{ij}\}$$

とし，

$$s_\Delta = \sum_{ij} m_{ij}\,|\omega_{ij}|\,, \quad S_\Delta = \sum_{ij} M_{ij}\,|\omega_{ij}|$$

とする．分割 Δ の細分 Δ' に対して

$$s_\Delta \leqq s_{\Delta'}, \quad S_\Delta \geqq S_{\Delta'}$$

となる．そして

$$s = \sup_\Delta s_\Delta, \quad S = \inf_\Delta S_\Delta$$

とする．s や S が存在する場合は，R を含むより大きな長方形 R' を取っても s と S の値は不変である．よって R のとり方にはよらない．

$s = S$ が成り立つとき，f は D において**積分可能**といい，この値を

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy$$

のように書く．これが基本的な重積分の定義であり，一変数のときのリーマン積分と同じ思想圏内の定義である．

定理 78　関数 f が D で連続で D が可測なら，f は D で積分可能である．■

証明　D は有界であるから f は D で一様連続である．s_Δ と S_Δ を定義する和 $\displaystyle\sum_{ij}$ を $\omega_{ij} \subset D$ となるものにわたる和 $\sum{}'$ と，$\omega_{ij} \not\subset D,\ \omega_{ij} \cap D \neq \emptyset$ にわたる和 $\sum{}''$ に分ける．D と交わらない ω_{ij} においては $M_{ij} = m_{ij} = 0$ である．

正の数 ϵ が与えられたとする．正の数 ϵ' を仮にとる．$\omega_{ij} \subset D$ に対しては，f の一様連続性から細分化された分割 Δ_1 で

$$M_{ij} - m_{ij} < \epsilon'$$

となるものが存在する．従って

$$\sum{}'(M_{ij} - m_{ij})\,|\omega_{ij}| < \epsilon'\sum{}'\,|\omega_{ij}| \leqq \epsilon'(b-a)(\beta-\alpha)$$

また $\omega_{ij} \not\subset D,\ \omega_{ij} \cap D \neq \emptyset$ においては D が可測であることから細分化された分割 Δ_2 で

$$\sum{}''\,|\omega_{ij}| < \epsilon'$$

となるものがある．D において f は有界なので $f \leqq M$ となる定数がある．従って

$$\sum{}''(M_{ij} - m_{ij})\,|\omega_{ij}| < \epsilon' \quad M$$

2 つの分割からなる細分された分割を Δ_3 とする．この分割に対しては

$$\sum(M_{ij} - m_{ij})\,|\omega_{ij}| < \epsilon'\{(b-a)(\beta-\alpha) + M\}$$

が成立する．従って ϵ' を

$$\epsilon'\{(b-a)(\beta-\alpha) + M\} = \epsilon$$

となるようにとれば，与えられた正の数 ϵ に対して

$$S_{\Delta_3} - s_{\Delta_3} < \epsilon$$

となる分割 Δ_3 が存在することが示された．つまり

$$\inf S_\Delta = \sup s_\Delta$$

となり，f が積分可能であることが示された．□

体積　領域 D で定義された関数 $f(x,\ y)$ が積分可能なとき，積分値 $\displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$V = \{(x,\ y,\ z) \mid z = f(x,\ y),\ (x,\ y) \in D\ \}$$

の**体積**という．二次元の場合のように三次元空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合の可測性について論じることもできる．

累次積分　重積分の計算は，一変数の積分のくりかえし (累次積分) で計算する．f は領域 D で定義されているものとするが，D が可測なときは D の外で f の値を 0 とすることで f を長方形に拡張した．f が D で積分可能なら，f はこの長方形で定義された関数として長方形で積分可能である．従って長方形で積分可能な関数が与えられているとする．

定理 79　関数 $f(x,\ y)$ が長方形 $R=[a,\ b]\times[\alpha,\ \beta]$ で有界で積分可能とする．$x\in[a,\ b]$ を固定するたびに，$f(x,\ y)$ が y について α から β まで積分可能であるとする．このとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy$ は x の関数として a から b まで積分可能で，

$$\iint_R f(x,\ y)dxdy=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy\right)dx$$

が成り立つ．■

証明　記号はこれまでと同じものとする．

$\xi_i\in[x_{i-1},\ x_i]$ に対して

$$m_{ij}(y_j-y_{j-1})\leqq\int_{y_{j-1}}^{y_j}f(\xi_i,\ y)\,dy\leqq M_{ij}(y_j-y_{j-1})$$

である．従って

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j-y_{j-1})\leqq\int_\alpha^\beta f(\xi_i,\ y)\,dy\leqq\sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j-y_{j-1})$$

(x_i-x_{i-1}) をかけて i について加えると $(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})=|\omega_{ij}|$ なので

$$s_\Delta=\sum_{ij}m_{ij}\,|\omega_{ij}|\leqq\sum_{i=1}^n\left(\int_\alpha^\beta f(\xi_i,\ y)\,dy\right)(x_i-x_{i-1})=\sum_{ij}M_{ij}\,|\omega_{ij}|=S_\Delta$$

f が R で積分可能なので $\sup s_\Delta=\inf S_\Delta$ である．よってはさみうちの原理から $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy$ は x の関数として積分可能で，

$$\iint_R f(x,\ y)dxdy=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy\right)dx$$

が成り立つ．□

以上は二変数の場合について論じたが，同様にして任意の次元の重積分と累次積分の関係に拡張される．また一変数の場合の置換積分の理論に対応する，変数変換 $x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v)$ と積分の理論も重要である．ここでは証明は行わないが次の定理が成り立つ．証明は『解析概論』§ 96「変数の変換」を見てほしい．

定理 80　$x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v)$ が uv 平面上の領域 D と xy 平面上の領域 M の間の一対一対応を与え，関数 $f(x,\ y)$ が M で積分可能であるならば $f(x(u,\ v),\ y(u,\ v))$ は D で積分可能であり

$$\iint_M f(x,\ y)\,dxdy=\iint_D f(x(u,\ v),\ y(u,\ v))\,|J(u,\ v)|\,dudv$$
$$J(u,\ v)=\begin{vmatrix}x_u(u,\ v)&y_u(u,\ v)\\x_v(u,\ v)&y_v(u,\ v)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial u}\\\dfrac{\partial x}{\partial v}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

となる．■

$J(u,\ v)$ のことを**関数行列式**または**ヤコビアン**という．また変数を明示して

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$$

と表すことも多い．すぐに確認できるが

$$x = x(u,\ v),\ y = y(u,\ v),\ u = u(s,\ t),\ v = v(s,\ t)$$

であるとき．

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(s,\ t)} = \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(s,\ t)}$$

が成り立つ．

例 6.8　極座標変換．$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると，

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

つまり

$$\iint_M f(x,\ y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,drd\theta$$

この応用として等式

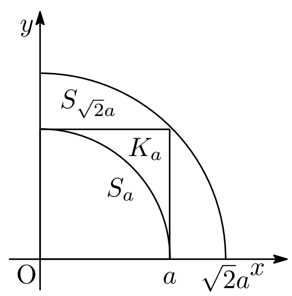
$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2}$$

を示そう．

関数 $f(x,\ y) = e^{-(x^2+y^2)}$ と領域 $K_a = \{(x,\ y) \mid 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a\}$ をとり，この領域での f の重積分を $I(a)$ とする．

$$\begin{aligned} I(a) &= \iint_{K_a} f(x,\ y)\,dxdy = \int_0^a\int_0^a e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\ &= \int_0^a e^{-y^2}\,dy\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \left(\int_0^a e^{-t^2}\,dt\right)^2 \end{aligned}$$

次に同じ f の領域 $S_a = \{(x,\ y) \mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq a^2\}$ での重積分を $J(a)$ とする．これを極座標で計算する．



$$\begin{aligned} J(a) &= \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{S_a} e^{-r^2}r\,drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^a e^{-r^2}r\,dr\right]d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)d\theta = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right) \end{aligned}$$

$f(x,\ y) \geqq 0$ で $S_a \subset K_a \subset S_{\sqrt{2}a}$ であるから

$$J(a) \leqq I(a) \leqq J(\sqrt{2}a)$$

ところが

$$\lim_{a\to\infty} J(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-a^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{a\to\infty} J(\sqrt{2}a) = \lim_{a\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2a^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

なのではさみうちの原理から

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = \left(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

となり等式 (2) が得られた．

曲線に沿う積分　平面上の領域 D 上で定義された連続関数 $f(x,\ y)$ と D 内の曲線

$$C : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,\ b]$$

がある．曲線を分割し

$$\Delta \quad : (x(a),\ y(a)) = (x_0,\ y_0),\ (x_1,\ y_1),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n) = (x(b),\ y(b))$$

とする．ただし，$(x_i,\ y_i) = (x(t_i),\ y(t_i))$ となる t_i が

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

となるようにとられているものとする．曲線 C の点 $(x_{i-1},\ y_{i-1})$ と点 $(x_i,\ y_i)$ で切られる部分上の $t = \tau_i$ に対応する点 $(x(\tau_i),\ y(\tau_i))$ をとり，和

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i),\ y(\tau_i))\,(x_i - x_{i-1})$$

をとる．$|\Delta|$ は分割された隣りあう二点間の距離の最大値とする．τ_i をどのように選んでも，極限

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i),\ y(\tau_i))\,(x_i - x_{i-1})$$

が存在し一定であるとき，その極限値を $f(x,\ y)dx$ の C に沿う**線積分**といい

$$\int_C f(x,\ y)dx$$

と表す．同様に $\displaystyle\int_C f(x,\ y)dy$ も定義される．特に C が閉曲線のとき一周して積分することを示すために

$$\oint_C f(x,\ y)dx$$

と表すことも多い．

曲線 C が，有限個の点を除いて滑らかであるとき，つまり x 成分と y 成分がともに有限個の点を除いて微分可能であるとき，これを**区分的に滑らか**ということにする．

定理 81　　曲線 C が区分的に滑らかなら C に沿う線積分が存在し，

$$\int_C f(x,\ y)dx = \int_a^b f(x(t),\ y(t))\frac{dx}{dt}\,dt \tag{3}$$

で与えられる． ■

証明　曲線 C に微分不能な点があるとき，それらの点で曲線を滑らかな部分に分割し，その各々の部分で等式 (3) が成立することが示されれば，その後それらの両辺を加えればよい．従って C は滑らかであるとして示せばよい．

$x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1})$ に平均値の定理を用いると，

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

となる c_i $(t_{i-1} < c_i < t_i)$ がとれ

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_i,\ y_i)\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f\,(x(t_i),\ y(t_i))\,x'(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

となる．

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(x(c_i),\ y(c_i))\,x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x(t),\ y(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

一方，線積分が存在するので

$$\begin{aligned}\int_C f(x,\ y)dx &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i),\ y(\tau_i))\,(x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(x(c_i),\ y(c_i))\,x'(c_i)(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

となる．よって等式 (3) が示された．　□

注意 6.5　線積分は C の分割で定義されている．従って媒介変数 t のとり方によらない．

曲線 C が単一閉曲線であるとは，

$$C : \mathrm{P}(t) = (x(t),\ y = y(t)),\ t \in [a,\ b]$$

とするとき，$x(t),\ y(t)$ は連続で

$$\mathrm{P}(a) = \mathrm{P}(b),\ \text{かつ}\quad t \neq t',\ \mathrm{P}(t) = \mathrm{P}(t') \Rightarrow (t,\ t') = (a,\ b)\ \text{か}\ (b,\ a)$$

が成り立つことであった．

また，平面上の領域が弧状連結であるとは，その領域内の任意の二点に対して，その二点を結び領域内を通る連続曲線が存在することとする．

次の定理が成り立つ．

定理 82 (ジョルダンの曲線定理)　平面上の単一閉曲線 C は，平面を二つの弧状連結な部分に分割される．その一方は有界であり，他方は有界でない．一方の部分の点と他方の部分の点を結ぶ連続曲線は，C と共有点をもつ．　■

この厳密な証明は簡単ではない．

平面上の単一閉曲線 C で分けられる二つの部分のうち有界な部分を**内部**といい，内部が左になるように進む曲線上の方向を**正の向き**，反対方向を**負の向き**という．

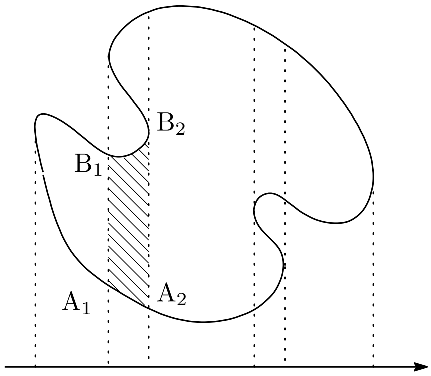
定理 83　曲線 C は xy 平面上の区分的に滑らかな単一閉曲線であるとする．C 上正の方向に動くとき，x 方向の増加と減少が変化する点が有限個であり，y 方向の増減についても同様であるとする．このとき曲線内部の面積 S は

$$\oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) \tag{4}$$

で与えられる．ただし，線積分は C の正の方向にとるものとする．■

証明　$C : \mathrm{P}(t) = (x(t),\ y = y(t)),\ t \in [a,\ b]$ とし，t が増加するとき点 $\mathrm{P}(t)$ は曲線上を正の向きに動くものとする．$x(t)$ の増減が変化する x の値で y 軸平行な直線を引き曲線と曲線内部を分割する．図のように二点 $\mathrm{A}_1 = \mathrm{P}(t_1),\ \mathrm{A}_2 = \mathrm{P}(t_2)\ (t_1 < t_2)$ ではさまれた曲線 C の部分を C_A とし，同じ x の値で定まる二点 $\mathrm{B}_1 = \mathrm{P}(s_1),\ \mathrm{B}_2 = \mathrm{P}(s_2)\ (s_2 < s_1)$ ではさまれた曲線 C の部分を C_B とする．

このとき $C_A,\ C_B$ および二直線で囲まれた領域の面積は



$$\begin{aligned}
&\int_{x(s_1)}^{x(s_2)} y\,dx - \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} y\,dx \\
=\ & -\int_{s_2}^{s_1} y(t)x'(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dx \\
=\ & -\left(\int_{C_B} y\,dx + \int_{C_A} y\,dx\right).
\end{aligned}$$

このような部分面積の総和が面積 S なのでこれらを加えることにより

$$S = -\oint_C y\,dx$$

を得る．y 方向の積分で考えるときは，y の増加の方向と t の増加の方向が x 軸で考えるときの逆になるので

$$S = \oint_C x\,dy$$

となる．この二つを加えることにより等式 4 が得られる．□

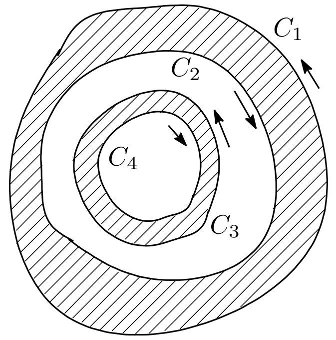
曲線内部の面積 S を t の積分で表せば

$$S = \int_a^b x(t)y'(t)\,dt = -\int_a^b y(t)x'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt$$

となる．

領域の境界　有限個の互いに共有点をもたない単一閉曲線が偶数個あり，順にそれが定める領域の内部にあるとする．それを $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_{2m}$ とする．奇数番を左回り，偶数番を右回りにとると，C_{2i-1} と C_{2i} の進む方向の左側にある部分 (曲線自身は含まない) として領域が定まり，それらの和で領域 D が定まる．このような領域が互いに交わることなく有限個ある場合も同様に考えることができる．

領域 D



このとき，有界な領域 D は，有限個の単一閉曲線群によって定まっているという．そして，これらの方向付けられた曲線の群を領域 D の**境界**といい ∂D と表す．境界は D の閉包 $\overline{D}$ から D 自身を除いた集合に，向きをつけたものに他ならない．

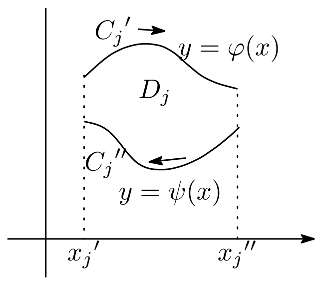
以上の準備のもとに定理 83 の拡張である，平面の場合のグリーンの定理を示す．本来のグリーンの定理は空間におけるベクトル解析の重要な定理である．

定理 84 (グリーンの定理)　有界な領域 D が，有限個の区分的に滑らかな単一閉曲線群によって (先に述べたように) 定まっているとする．この曲線群を定める各曲線において x 方向の増加と減少が変化する点が有限個であるとする．二つの関数 $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ が領域 D で偏微分可能で，それら導関数が閉領域 $\overline{D}$ で連続であるとする．

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) \tag{5}$$

が成り立つ．■

証明　x 方向の増減が変化する x の値，および x 成分の微分係数が存在しない x の値で y 軸平行な直線を引き，領域 D とその境界 ∂D を分割する．その一つ ${x_j}'$ と ${x_j}''$ で区切られた部分を D_j とし，分割された境界 ∂D の部分を ${C_j}'$ と ${C_j}''$ とする．曲線 ∂D の媒介変数表示を $(u(t),\ v(t))$ とすると，${C_j}'$ の部分では $x = u(t)$ は一対一であり逆関数を持つ．それを $t = u^{-1}(x)$ とすると ${C_j}'$ は $y = v(t) = v(u^{-1}(x))$ と x と y の関数で表される．これを $y = \varphi(x)$ と表すことができる．



${C_j}''$ についても同様である．これを $y = \psi(x)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\iint_{D_j} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy &= \int_{{x_j}'}^{{x_j}''} \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\right) dx = \int_{{x_j}'}^{{x_j}''} (P(x,\ \psi(x)) - P(x,\ \varphi(x)))\, dx \\ &= -\int_{{C_j}'} P(x,\ y)dx - \int_{{C_j}''} P(x,\ y)dx\end{aligned}$$

これらをすべて加えると重積分の積分領域は D となり，線積分の積分域は境界 ∂D となる．よって

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = -\int_C P(x,\ y)\, dx$$

同様に x 軸平行な直線で分けることにより，

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \int_C Q(x,\ y)\, dy$$

が示され等式 5 が得られる．□

注意 6.6　定理 83 は本定理において $P = -y$，$Q = x$ としたものである．

グリーンという人はどのような人だったのか.『数学セミナー』2003 年 7 月号に「知られざるグリーン」(岡本久著) がある．その伝記部分を引用させてもらい紹介したい．

> グリーンの公式を見い出したジョージ・グリーンは大変興味深い人物である．1793 年に生まれ，1841 年に病没しているが，詳しいことは分かつていない．彼がグリーン

の公式を含む論文 (エッセイと名付けられている) を発表したのはイギリス中部のノッチンガム (Nottingham) という工業都市であった．その論文ではグリーンの公式ももちろん導かれているが，もっと重要なのはいわゆるグリーン関数というものを定義したことである．この考え方はきわめて革新的なものであった．彼の論文は著名な専門雑誌に載ったわけではなく，自費出版に近いものであったようである．ノッチンガムはロビン・フッドの冒険で有名な都市であるが，学問の中心であるケンブリッジとかオックスフォードとはあまり縁のなさそうな場所である．そのようなところでどうして革新的なアイデアが生まれたのであろうか？　グリーンの父親は地元で繁盛したパン屋さんで，事業を拡大して粉屋も開業し，産業革命の発展による賃金労働者 (その人々は当然パンを自分で作るのではなくお金で買うことになる) の爆発的な増加のおかげて相当な資産家になったという．

家業を継いだグリーンは高等教育は受けていなかったのだが，独学でフランスの論文 (ケンブリッジやオックスフォードではないことに注意されたい) を読んで，自分流の考えを発展させたらしい．らしいというのはよくわかっていないからで，彼の偉大な論文も 20 年ほどはまったく忘れ去られ，死後にウィリアム・トムソン (William Thomson) によってそのアイデアの革新性が認識されるまでまわりに理解されなかったのである．彼の遺族もグリーンがそのような偉大な人物であるとは思わず，さまざまな資料が散逸してしまったようである．もちろん肖像画などが残ることもなかった．

さて，彼は粉屋の仕事を続けながら独学をしていたが，若い頃は父親の学問に対する無理解もあって学問に専念できなかった．父の死後，家業を番頭格の人物に預けて学問に本格的に進み，35 歳で最初の，そして歴史に残る偉大な論文をたった一人で書き上げたのである．独学の天才はグリーン以外にもいる．電磁誘導の発見などで有名なファラデーもほぼ同時代の人物で，大学を出たわけではないが，実験物理学で不朽の業績をあげている．しかし，ファラデーの場合は王立研究所の助手として出発し，優れた研究環境が彼のまわりに存在していた．これに対し，グリーンはアドバイスをしてくれる人物もなく完全な独学であった点は多いに強調されるべきであろう．このような仕事が一地方都市で，しかも数学者としては異例の晩生人間によって，独学で達成されたのは当時のイギリスという国の底力を表しているようにも思える．(もちろん江戸時代の我が国にも上流階級出身でないのに和算で名をなした人物もいるけれど…)

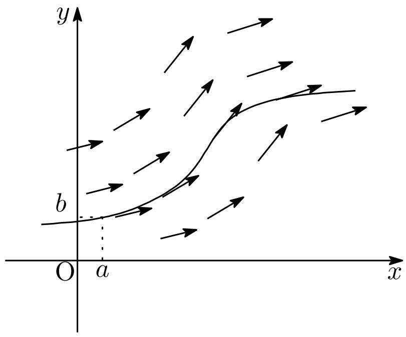
残念なことにあまりに革新的な考え方はすぐには認められず，長生きしなかったせいもあって，長い間彼に栄誉が与えられることはなかった．しかし，グリーンのアイデアは現在の数理物理学には不可欠のものとなっており，その名誉を讃え，現在ではウエストミンスター寺院のアイザック・ニュートンの近くに葬られているという．

実に感慨深い話しではないか．

7　微分方程式

7.1　解の存在定理

微分方程式　xy 平面で定義された関数 $f(x,\ y)$ を考える．



定点 $(a,\ b)$ を通り，その上の点 $(x,\ y)$ で傾きが $f(x,\ y)$ となるような曲線の方程式を決定するということを考えよう．これは

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y)$$

となるような x の関数 $y = y(x)$ で $b = y(a)$ を満たすものをもとめることに他ならない．

このように $y,\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 等の未知関数とその導関数が，他の定まった関数と結びついて作られる

$$\frac{dy}{dx} + e^x y - 2x = 0$$

のような等式を**微分方程式**という．これは $f(x,\ y) = -e^x y + 2x$ の場合である．微分方程式を未知関数 $f(x)$ を用いたり，導関数を y' 等で書きあらわすことも出来る．例えば先の等式は

$$f'(x) + e^x f(x) - 2x = 0 \quad , \quad y' + e^x y - 2x = 0$$

などとも書ける．f が多変数の場合は

$$e^y \frac{\partial}{\partial x} f + \frac{\partial}{\partial y} f + 3e^{2x} = 0$$

のように偏微分が加わることになる．

未知な関数とその導関数，および定関数を含む等式として，微分方程式は大変広い一般的な概念であり，また発展する概念である．未知関数も複数個あり，それらのなすベクトル値関数が未知関数となってもよい．含まれる導関数の最も高い次数が n であるとき，これを **n 階微分方程式**という．ベクトル値関数の各成分を構成する未知関数が一変数の微分方程式を**常微分方程式**，多変数の微分方程式を**偏微分方程式**ということが多い．さらに，

$$u^{(m)}(x) + a_{m-1}(x)u^{(m-1)}(x) + \cdots + a_1(x)u'(x) + a_0(x) = 0$$

型の常微分方程式を**線型常微分方程式**という．

与えられた微分方程式を満たす関数を微分方程式の**解**といい，解を求めることを微分方程式を**解く**という．

後に示すように微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y$ は解 $y = Ce^x$ をもつ．実際これが微分方程式を満たすことは確認できる．微分方程式を解いて表れる定数 C のことを**任意定数**という．任意定数を含んだ解を**一般解**，任意定数に特別の値を与えて得られる解を**特殊解**という．$x = 0$ のとき $y = 1$ のような条件をつければ $y = e^x$ と一意に定まる．いくつかの変数値に対する与えられた関数値を微分方程式の**初期条件**という．

微分方程式は，実在する世界の現象を数学的にとらえるためのもっとも基本的な方法である．数学の側では，ある種の基本的な微分方程式について，その解の存在定理を実数の完備性にもとづいて証明しなければならない．

一階正規形微分方程式　縮小写像における不動点の存在定理をもちいてある種の簡単な場合について，微分方程式の解の存在を示そう．

本節冒頭の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y) \tag{6}$$

を考える．この形の微分方程式を**一階正規形**という．xy 平面の領域 D で定義された関数 $f(x,\ y)$ が与えられたとき，$(a,\ b) \in D$ を初期条件とする解とは，a を含む x のある開区間 J で定義された関数 $y = y(x)$ で

$$b = y(a),\ y'(x) = f(x,\ y(x))$$

を満たすもののことをいう．

解が常に存在する，あるいは一意に存在するということは，一般的には成り立たない．初期条件を満たすものが一意に存在する十分条件として f につての**リプシツの条件**がある．

リプシツの条件　xy 平面の領域 D で定義された関数 $f(x,\ y)$ がある．

$$(x,\ y_1),\ (x,\ y_2) \in D \quad \Rightarrow \quad |f(x,\ y_1) - f(x,\ y_2)| < \alpha\,|y_1 - y_2|$$

となる正の定数 α が存在するとき，関数 f は D で定数 α の**リプシツの条件**を満たすという．

$f(x,\ y)$ が D において偏導関数 $f_y(x,\ y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,\ y)$ をもち，f_y が有界連続なら，平均値の定理から f はリプシツの条件を満たす．

定理 85　$f(x,\ y)$ は xy 平面の領域 D で定義された有界連続関数で，D で定数 α のリプシツの条件を満たす．このとき $(a,\ b) \in D$ を初期条件とする微分方程式 6 の解が a を含むある開区間で一意に存在する．■

証明　f は D で有界なので $|f(x,\ y)| \leqq M\ ((x,\ y) \in D)$ となる定数 M が存在する．

正数 h と k に対し，点 $(a,\ b)(\in D)$ を中心とする二辺の長さが $2h,\ 2k$ の長方形 T をとる．

$$T = \{(x,\ y) \mid |x - a| \leqq h,\ |y - b| \leqq k\ \}$$

このとき正数 h と k を，リプシツ条件の定数 α と有界性の定数 M に対して

$$T \subset D,\ h\alpha < 1,\ hM < k$$

となるように選ぶ．これは可能である．

閉区間 $[a - h,\ a + h]$ 上の連続関数空間 $C(I)$ に距離 d を

$$d(y_1,\ y_2) = \max\{|y_1(x) - y_2(x)| \mid x \in I\}$$

で定め，

$$E = \{y \mid |y(x) - b| \leqq k\ (x \in I)\ \}$$

とする．E は $C(I)$ の閉部分集合である．定理 71 から部分距離空間 $(E,\ d)$ は完備である．

E から E への写像 F を次のように定める．

$$v = F(u), \quad v(x) = b + \int_a^x f(t,\ u(t))\,dt \quad (x \in I)$$

$$
\begin{aligned}
|v(x)-b| &= \left|\int_a^x f(t,\ u(t))\,dt\right| \leqq \int_a^x |f(t,\ u(t))|\,dt \\
&\leqq M|x-a| \leqq Mh \leqq k
\end{aligned}
$$

であるから $v \in E$ である．

F は縮小写像である．なぜなら，$u_1,\ u_2 \in E$ とし $v_1 = F(u_1),\ v_2 = F(u_2)$ とすると

$$
\begin{aligned}
|v_2(x) - v_1(x)| &= \left|\int_a^x \{f(t,\ u_2(t)) - f(t,\ u_1(t))\}\,dt\right| \\
&\leqq \left|\int_a^x |f(t,\ u_2(t)) - f(t,\ u_1(t))|\,dt\right| \\
&\leqq \left|\int_a^x \alpha|u_2(t) - u_1(t)|\,dt\right| \leqq \alpha d(u_2,\ u_1)|x-a| \leqq h\alpha d(u_2,\ u_1)
\end{aligned}
$$

$0 < h\alpha < 1$ であるから F は縮小写像である．

定理 73 によって F はただ一つの不動点 $y = F(y),\ \ y \in E$ をもつ．

$$
y(x) = b + \int_a^x f(t,\ y(t))\,dx \tag{7}
$$

を満たすので，

$$
y(a) = b,\ y'(x) = f(x,\ y(x)) \quad x \in I
$$

となり，$y(x)$ は所期の条件を満たす解である．　□

証明の勘所は微分方程式 6 と初期条件を，一つの積分方程式 7 になおす．$F(y)$ が関数空間の縮小写像であることから，$y = F(y)$ となる y の存在を示す．このような道筋をたどるのであった．

定理 73 の証明で構成した数列は，この解の構成方法でもある．それを次の例で見てみよう．

例 7.1　$f(x,\ y) = y$ とする．初期条件を $(0,\ 1)$，つまり $1 = y(0)$ とし，

$$
\frac{dy}{dx} = y
$$

を満たす解 $y = y(x)$ を考える．リプシツ条件は $\alpha = 1$ で成立するから，初期条件を満たす解がただ一つ存在する．この場合縮小写像 F は

$$
v = F(u), \quad v(x) = 1 + \int_0^x u(x)\,dx
$$

である．$u_0(x) = 1$ (定数) からはじめて $u_{n+1} = F(u_n)$ で関数列 $\{u_n\}$ を定める．これは

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= 1 + \int_0^x 1\,dx = 1 + x \\
u_2(x) &= 1 + \int_0^x (1+x)\,dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\
u_3(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\
&\cdots \\
u_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

となり，確かに $u_n(x)$ は $y = e^x$ に収束する．これが解であることは，代入して確認できる．

逆にリプシツ条件を満たさないときは，存在しない場合や一意でない場合が現れる．よく知られた一意性の崩れる場合を例示しよう．

例 7.2　$f(x,\ y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ とする．

$$\frac{{y_1}^{\frac{2}{3}} - {y_2}^{\frac{2}{3}}}{y_1 - y_2} = \frac{{y_1}^{\frac{1}{3}} + {y_2}^{\frac{1}{3}}}{\left({y_1}^{\frac{1}{3}} + {y_2}^{\frac{1}{3}}\right)^2 - {y_1}^{\frac{1}{3}}{y_2}^{\frac{1}{3}}}$$

であるから $y = 0$ の近くではこの比がいくらでも大きくなりリプシツ条件は満たさない．

$y(x) = x^3$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2,\ f(x,\ y(x)) = 3(x^3)^{\frac{2}{3}} = 3x^2$$

なので，これは初期条件 $(0,\ 0)$ の解である．ところが，$x_1 < 0 < x_2$ に対して

$$y(x) = \begin{cases} (x - x_1)^3 & (x \leqq x_1) \\ 0 & (x_1 < x < x_2) \\ (x - x_2)^3 & (x_2 \leqq x) \end{cases}$$

とすると，これも初期条件 $(0,\ 0)$ の解である．

7.2　二階線形型

解の存在　二階線形微分方程式の解の存在と解の構造についてまとめよう．まず，二階線形微分方程式の解の存在を示そう．方針は一階正規形の場合と同様に，微分方程式と初期条件を一つの積分方程式 $y = F(y)$ に還元し，$F(y)$ が縮小写像であるようにとれることを示し，解の存在を示す．初期条件が複雑な分だけ F の構成が複雑である．

定理 86　$p(x),\ q(x),\ r(x)$ を実数 $\mathbb{R}$ で定義された連続な関数とする．二階線形微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{8}$$

の解で，初期条件 $(0,\ \alpha,\ \beta)$ を満たす，つまり

$$y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta$$

となるものが一意に存在する．■

証明　$y''(x) = u(x)$ とおく．y'' についての初期条件はないので，これをもとに初期条件を満たす $y',\ y$ を構成する．

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \beta + \int_0^x u(s)\,ds \\
y(x) &= \alpha + \int_0^x y'(t)\,dt = \alpha + \int_0^x \left(\beta + \int_0^t u(s)\,ds\right)dt \\
&= \alpha + \beta x + \int_0^x \left(\int_0^t u(s)\,ds\right)dt \\
&= \alpha + \beta x + \left[t\int_0^t u(s)\,ds\right]_0^x - \int_0^x tu(t)\,dt \\
&= \alpha + \beta x + x\int_0^x u(s)\,ds - \int_0^x tu(t)\,dt \\
&= \alpha + \beta x + \int_0^x (x - t)u(t)\,dt
\end{aligned}$$

これらが微分方程式を満たすように $u(x)$ が決定できればよい．積分変数をそろえて微分方程式に代入する．

$$\begin{aligned} & u(x)+p(x)\left(\beta+\int_0^x u(t)\,dt\right)+q(x)\left(\alpha+\beta x+\int_0^x (x-t)u(t)\,dt\right)=r(x) \\ \iff \quad & u(x)+\beta p(x)+(\alpha+\beta x)\,q(x)+\int_0^x \{p(x)+(x-t)q(x)\}\,u(t)\,dt=r(x) \end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= r(x)-\beta p(x)-(\alpha+\beta x)\,q(x) \\ K(x,\ t) &= -p(x)-(x-t)q(x) \end{aligned}$$

とおくと

$$u(x)=\int_0^x K(x,\ t)u(t)\,dt+\varphi(x) \tag{9}$$

となる．これを満たす $u(x)$ が一意に存在することを示せばよい．

任意の正数 a をとり，区間 $I=[-a,\ a]$ 上の連続関数空間を $C(I)$ とする．$C(I)$ から $C(I)$ への写像 F を

$$v=F(u),\quad v(x)=\int_0^x K(x,\ t)u(t)\,dt+\varphi(x)$$

で定める．

$K(x,\ t)$ は連続であるから，$x,\ t\in I$ のとき $|K(x,\ t)|\leqq M$ としてよい．

$u_1,\ u_2\in C(I)$ をとる．

$$\begin{aligned} |F(u_1)(x)-F(u_2)(x)| &= \left|\int_0^x K(x,\ t)\{u_1(t)-u_2(t)\}\,dt\right| \\ &\leqq \left|\int_0^x |K(x,\ t)\{u_1(t)-u_2(t)\}|\,dt\right| \\ &\leqq M\left|\int_0^x |u_1(t)-u_2(t)|\,dt\right| \\ &\leqq Md(u_1,\ u_2)|x| \end{aligned}$$

$u_1,\ u_2$ を $F(u_1),\ F(u_2)\in C(I)$ に変えてもよい．

$$\begin{aligned} \left|F^2(u_1)(x)-F^2(u_2)(x)\right| &\leqq M\left|\int_0^x |F(u_1)(t)-F(u_2)(t)|\,dt\right| \\ &\leqq M\left|\int_0^x Md(u_1,\ u_2)|t|\,dt\right| \\ &\leqq M^2 d(u_1,\ u_2)\frac{|x|^2}{2} \end{aligned}$$

自然数 k に対して

$$\left|F^k(u_1)(x)-F^k(u_2)(x)\right|\leqq\frac{(M|x|)^k}{k!}d(u_1,\ u_2) \tag{10}$$

と仮定すると，

$$\begin{aligned} \left|F^{k+1}(u_1)(x)-F^{k+1}(u_2)(x)\right| &\leqq M\left|\int_0^x \frac{(M|t|)^k}{k!}d(u_1,\ u_2)\,dt\right| \\ &\leqq \frac{(M|x|)^{k+1}}{(k+1)!}d(u_1,\ u_2) \end{aligned}$$

より，数学的帰納法によって仮定 10 が一般に成り立つ．$x \in I$ であるから

$$d\left(F^k(u_1),\ F^k(u_2)\right) \leqq \frac{(Ma)^k}{k!} d(u_1,\ u_2)$$

ところが $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{(Ma)^k}{k!} = 0$ なので，k を大きくとることにより $\displaystyle\frac{(Ma)^k}{k!} < 1$ にとることができる．

この k について F^k は $C(I)$ の縮小写像であり，定理 73 によって F^k はただ一つの不動点 $y = F^k(y)$, $y \in C(I)$ をもつ．このとき

$$F(y) = F^{k+1}(y) = F^k\left(F(y)\right)$$

となり，$F(y)$ も F^k の不動点である．F^k の不動点は一意であるから，

$$F(y) = y$$

であり．つまり y は F の不動点である．F の不動点は F^k の不動点でもあるから，一意である．よって F はただ一つの不動点 y をもつことが示された．

いいかえると任意の正数 a に対して，積分方程式 9 の解 $y = y(x)$ (定義域I=[-a, a]) が一意に存在することが示された．

これは微分方程式 8 に対して，$I = [-a,\ a]$ で定義され $(-a,\ a)$ で微分可能な解が存在することを意味している． □

実数の完備性にはじまり微分方程式の解の存在に至る道を，とにかく歩き通すことができた．二階線形微分方程式の解の集合は空ではない．解の集合の構造を考えよう．

解集合の構造　特に $r(x) = 0$ であるものを**同次方程式**という．これに関して次の定理が成り立つ．

定理 87　実数で定義された連続な関数 $p(x),\ q(x)$ に対する二階線形微分方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ において

(1) $y_1,\ y_2$ が解ならば，任意の定数 $c_1,\ c_2$ に対して $c_1y_1 + c_2y_2$ も解である．

(2) $y_1,\ y_2$ が解で，かつ定義域のすべての x に対して

$$W(y_1,\ y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{vmatrix} \neq 0$$

が成り立つなら，任意の解は適当な定数 $c_1,\ c_2$ を用いて $c_1y_1 + c_2y_2$ と表される．

$W(y_1,\ y_2)(x)$ を**ロンスキアン**という．

証明

(1)

$$\begin{aligned} & (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ = \ & c_1({y_1}'' + p(x){y_1}' + q(x)y_1) + c_2({y_2}'' + p(x){y_2}' + q(x)y_2) = 0 \end{aligned}$$

より，$c_1y_1 + c_2y_2$ も解である．

(2)　任意の解 y をとる．行列 $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{pmatrix}$ は，$y_1{y_2}' - y_2{y_1}' \neq 0$ より逆行列をもつ．そこで

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とおく．つまり

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} y &= uy_1 + vy_2 \\ y' &= u{y_1}' + v{y_2}' \end{aligned}$$

となる．第一式を微分して $y' = u{y_1}' + u'y_1 + v{y_2}' + v'y_2$ となる．第二式と比較して $u'y_1 + v'y_2 = 0$ となる．第二式を微分して $y'' = u{y_1}'' + u'{y_1}' + v{y_2}'' + v'{y_2}'$ となる．ここで

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + p(x)y' + q(x)y \\ &= u{y_1}'' + v{y_2}'' + u'{y_1}' + v'{y_2}' \\ &\qquad + p(x)(u{y_1}' + v{y_2}') + q(x)(uy_1 + vy_2) \\ &= u\{{y_1}'' + p(x){y_1}' + q(x)y_1\} + v\{{y_2}'' + p(x){y_2}' + q(x)y_2\} \\ &\qquad + u'{y_1}' + v'{y_2}' \\ &= u'{y_1}' + v'{y_2}' \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'{y_1}' + v'{y_2}' &= 0 \end{aligned}$$

となる．つまり

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．$y_1{y_2}' - y_2{y_1}' \neq 0$ より

$$u' = 0,\ v' = 0$$

を得る．つまり u と v は定数である．よってこれを $c_1,\ c_2$ とおくと

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

と表された．　□

実数で定義され二階微分可能な実数値関数の集合を X とおく．X は実数上のベクトル空間である．X から X への写像 L を

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y$$

で定める．定理の証明と同様に L は X の線型写像である．定理 87 は $y_1,\ y_2$ が $L^{-1}(0)$ の基底となるための条件を示している．

微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

の解とは，$r(x)$ の原像 $L^{-1}(r(x))$ に他ならない．従って一つの解 y_0 が求まれば，他の解はすべて

$$y_0 + y, \quad y \in L^{-1}(0)$$

で得られる．常微分方程式の実用的な解法については，多くの参考書がある．

8 惑星の運動

8.1 物理法則

数学を用いて物理現象を解明する　集合論を基礎に整数の公理によって整数の集合を定義し，それをもとに有理数を構成した．実数の公理を立て，有理数をもとにしてその公理を満たす集合を構成した．実数の連続性，完備性を土台にして，関数の微分と積分を定義し，その基本性質を調べた．その上で，次元を拡大して考え，さらに微分方程式の解の存在証明までおこなった．これはすべて数学の内部でなされた．

このようにして準備された数学は，物理現象を近似してとらえる．とらえられた現象は数学の言葉をもって記述される．いくつかの基本的な物理現象の性質は，物理法則といわれる．これまで準備した数学では，ニュートン力学を記述し，その基本法則から演繹的に，いくつかの物理現象が起こる根拠を解明することができる．

これまで数学として準備してきたことをもとに，ニュートンが万有引力の法則からケプラーの法則を導いた内容を，再構成してみよう．

ニュートンの法則　自然現象をとらえるにも，そこには一つの考え方の枠組が先行して存在する．ニュートンが時代を画したのは，何よりまずそのような枠組を提示したことである．それは**ニュートンの法則**として定式化されている．

第一法則：慣性の法則．静止または一様な直線運動をする物は，これに力が作用しないかぎり，その状態を保つ．

第二法則：物体が力の作用を受けるとき，力の向きに，力の大きさに比例した加速度が生じる．

第三法則：作用反作用の法則．力を他に及ぼした物体は、同じ大きさの反対向きの力を及ぼされる．

運動法則の意義　ニュートンの第二法則は数学と物理学を結びつけている．

ベクトル $\overrightarrow{r}$ や行列 A の各成分が変数 t の関数であるときに，各成分を t で微分したベクトルや行列を $\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{r}$ や $\dfrac{d}{dt}A$ と記す．各成分を時間の関数とするベクトル $\overrightarrow{r} = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ を位置を表すベクトルとする．各成分を t で微分したベクトル $\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{r} = (x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$ を速度ベクトルという．同様に，二次微分 $\dfrac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r}$ も考えられる．それを加速度ベクトルという．これは数学の範囲にある量である．これがその位置にある質点に働いた力と比例するというのが第二法則である．「力」は物理量だ．力もベクトルなのでこれを $\overrightarrow{F}$ と記し，比例定数を m とすれば，ニュートンの第二法則は，

$$m\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{F}$$

となる．これは定数係数の二階線形微分方程式である．この微分法則で定まる定数 m を質点の質量という．厳密には慣性質量という．これは物質に固有の量である．

数学的には第一の慣性の法則は第二法則から出る．第二法則で加わる力 $\overrightarrow{F}$ を $\overrightarrow{0}$ にすると，加速度が 0，つまり速度一定が出る．ではなぜ第一の法則を立てる必要があるのか．それは，第一の法則は，この世界を慣性系としてとらえるということの宣言だからである，慣性系であるから，例えば速度と質量を独立にとらえることが出来る．慣性系でなければそもそも第二法則がそのままでは意味がない．だから第二法則の前提として第一法則があるのであって，逆ではない．

また第一の法則で「一様」といわれる．これは時間の客観的な存在を前提にしてはじめて意味ある言葉である．つまりニュートンの法則にはその前提として絶対空間と絶対時間がある．第二法則は座標系とは独立した時間の存在をも宣言している．

このように自然現象をとらえる枠組をニュートンは提示した．この枠組でとらえられた物理学がニュートン力学である．このような枠組は，ニュートンが主著『自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)』(1687 年 7 月 5 日) で示した．

万有引力の法則　ニュートンはもう一つの基本法則である万有引力の法則を発見した．

> 二つの物体の間には、互いに逆方向の引力が働き、その力 $\overrightarrow{F}$ の大きさは，G を万有引力定数、物体の質量は $M,\ m$，物体間の距離を r とすると，
>
> $$|\overrightarrow{F}| = \frac{GmM}{r^2}$$
>
> となる．方向は二つの質点を結ぶ線に平行である．

この式から定まる質量 m と M のことを重力質量という．これをどのようにして導いたのか．ニュートンは運動の法則を発見するとともに，ケプラーの法則などをもとに万有引力の法則を導き出したといわれている．

ケプラーの法則　惑星が楕円軌道をまわることを最初に発見したのはケプラーだ．それは次のような内容からなる．

第一法則：惑星は太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く．

第二法則：惑星と太陽とを結ぶ線分の描く面積は単位時間あたり常に一定である．

第三法則：惑星の公転周期の 2 乗は軌道の半長径の 3 乗に比例する．

この辺りの歴史的事実，あるいは慣性質量と重力質量などについては『数学対話』「惑星は楕円軌道を描く」を見てほしい．

ケプラーは三つの法則をいちどに発見したのではない．まず面積速度が一定であることを発見した．そこから，天体の運行には何らかの法則があることを知り，その内容をさらに追求した．そしてついに，惑星の軌道を楕円と仮定すると，観測結果を説明できることが分かった．

例 8.1 地球がほぼ円軌道をまわるとして，万有引力の法則を導き出す．円軌道であれば，面積速度一定というケプラーの法則は等速円運動を意味する．その半径を r，周期を T とすると位置ベクトル $\overrightarrow{r}$ は

$$\overrightarrow{r} = r\left(\cos\frac{2\pi}{T}t,\ \sin\frac{2\pi}{T}t\right)$$

と時間の三角関数で表される．2 回微分して加速度は

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r} = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(-\cos\frac{2\pi}{T}t,\ -\sin\frac{2\pi}{T}t\right)$$

ケプラーの第 3 法則から $T^2 \propto r^3$ であるから中心に向かう加速度の大きさが $\dfrac{1}{r^2}$ に比例することがわかる．つまり惑星が太陽に引かれる力が $\dfrac{1}{r^2}$ に比例する．

ニュートンは，月をその軌道に保つのに必要な力と地表面上の重力を比較してみた．その結果，きわめてよい近似で満足な結果が得られた．こうしてニュートンはケプラーの法則から万有引力の法則を導き出した．がそれに留まらず，ニュートンの法則と万有引力の法則のもとでは，ケプラーの法則が導き出されることを示した．

微分法則と積分法則　万有引力の法則は運動している物体の時間に関する変化率を含む法則であり，その意味で局所的である．それに対してケプラーの法則は軌道全体にわたる大域的なものだ．

次のような例でも，物理法則の表現が局所的なものと大域的なものの二通りあることがわかる．このように法則を数学的に把握することは，歴史的には，ガリレオの研究がはじまりである．

例 8.2　ガリレオは落体の運動を研究して，自由落下する物体の速度は落下開始からの時間に比例することを見つけた．これは

$$\frac{dx}{dt} = gt$$

と表される．これは一階微分方程式である．そして，このように速度が時間に比例する運動においては，物体が時間 t のうちに距離 x だけ落下するとすれば $x(t) = \dfrac{g}{2}t^2$ となることを得た．彼は条件 $x(0) = 0$ のもとでこれを満たす関数 $x(t)$ を求めた．

力学の発展によって，これはさらに落下する物体の加速度が一定であるととらえられた．

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

という二階微分方程式である．ガリレオの解は条件 $x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ で解かれた．

例 8.3　放射性物質が単位時間に崩壊する量は，現在量に比例する．時刻 x における放射性物質の量 y を $y = \varphi(x)$ とすれば，この現象は次のように表される．

$$\frac{dy}{dx} = -ky$$

$x = 0$ のとき $y = a$ であるとすれば，x 時における物質量 y は x のどのような関数になるか．

$$y = ae^{-kx}$$

となる．実際代入すればわかる．第一式は微分方程式である．第二式は量を時間の関数で表す関数式である．

自然界の同じ法則が，一つは微分の形で，一つは具体的な関数の形で表された．微分方程式で表された法則を**微分法則**という．これは局所的な法則が一定の範囲で成り立つことを表している．それに対して，それを解いて得られた $y = ae^{-kx}$ は各時刻における物質量を明示的に表している．

このように表された法則を**積分法則**という．このような命名はアインシュタインによる．例 8.1 よりはもちろん精密にしなければならないが，ニュートンの法則の下でケプラーの法則という積分法則から万有引力の法則という微分法則が導き出される．

逆に，万有引力の法則が成り立つならケプラーの法則が成り立つことが示される．「太陽と惑星の間に距離の二乗に反比例する引力が働く」という微分法則が成り立つとき，これを満たす関数を位置関数決定することによって，「ケプラーの三法則」という積分法則を満たすことが示される．ニュートンはこの問題を解決し，彼の主著「プリンキピア」(1687) でその解法を公表した．その過程で，微分法，積分法が開始された．このように解析学は微分方程式を解いて自然現象を解明するところからはじまった．これは本質的に微分方程式を解いて，積分法則を導くことであり，実質的にニュートンがはじめておこなったことである．この過程を，これまで準備したことをもとに追体験することが最後の目的である．

8.2　運動方程式

惑星の運動法則　そこで，ニュートンの法則と万有引力の法則を結びつける．太陽と地球の間の運動は，いわゆる二体問題である．だから太陽と地球全体の重心を問題にしなければならない．しかし，太陽の質量は地球に比べてはるかに大きい．したがって，太陽と地球全体の重心は，太陽に一致するとしてよい．その結果，太陽は動かず地球が太陽の周りを動くとして考えてよい．次に太陽も地球も巨大な物体である．しかし剛体の運動はその重心に質量がある点の運動と考えることが出来る．

太陽の質量を M，地球の質量を m，万有引力定数を G とする．太陽を基準点とする地球の位置をベクトル $\overrightarrow{r}$ で表す．時を t で表す．するとニュートンの法則と万有引力の法則から

$$m\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r} = \frac{GMm}{|\overrightarrow{r}|^2}\left(\frac{-\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|}\right) \tag{11}$$

が成立する．最後の $\dfrac{-\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|}$ は地球から太陽に向かう方向の単位ベクトルで，つまりは引力の方向を表す大きさ 1 のベクトルである．

等式 11 はベクトル成分の微分方程式である．多次元の微積で準備したことと微分方程式で準備したことをもとに，この微分方程式 11 からケプラーの法則を導きだそう．

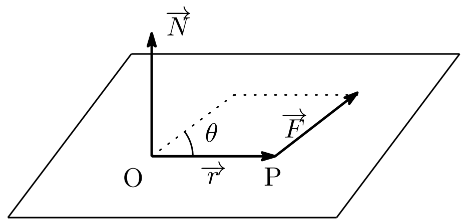
惑星運動は平面運動である　いま考えているベクトルは空間ベクトルであるが，しかし次のことを示せば，あとは平面ベクトルだけを考えればよい．ここで中心力とは，二つの質点の間で二つの質点を結ぶ直線方向に働く力のことである．

定理 88　記号の意味は微分方程式 11 と同様とする．太陽と地球の間に中心力のみが働いている場合，つまり

$$m\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r} = f(r)\frac{-\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|} \tag{12}$$

とかける場合，地球は一つの平面上を運動する．■

力のモーメント　証明の準備をする．



図のように，力 $\overrightarrow{F}$ が位置ベクトル $\overrightarrow{r}$ の質点 P に作用するとき，ベクトル $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{F}$ を力 $\overrightarrow{F}$ の基準点 O の周りにもつ**モーメント**という．$\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{F}$ のなす角を θ とすると，ベクトル $\overrightarrow{N}$ の大きさは $|\overrightarrow{r}|\cdot|\overrightarrow{F}|\sin\theta$ である．$|\overrightarrow{F}|\sin\theta$ はちょうど力 $\overrightarrow{F}$ の $\overrightarrow{r}$ と直交する方向の大きさになるので，**力のモーメント**の大きさは点 O の周りの回転させる力の強さを表す．

角運動量　一般に，質点 P にある物理量 $\overrightarrow{G}$ と基準点 O に関する P の位置ベクトル $\overrightarrow{r}$ に対して，外積 $\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{G}$ を $\overrightarrow{G}$ が点 O の周りにもつモーメントという．

$\overrightarrow{G}$ が運動量

$$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}=m\frac{d}{dt}\overrightarrow{r}$$

であるとき，この運動量 $\overrightarrow{p}$ のモーメント $\overrightarrow{r}\times m\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{r}$ を**角運動量**という．

角運動量保存則の証明　等式 12 の両辺のモーメントをとる．左から $\overrightarrow{r}$ を外積でかける．

$$\overrightarrow{r}\times\left(m\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r}\right)=\frac{-f(r)}{|\overrightarrow{r}|}\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{r}$$

右辺は $\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{r}=\overrightarrow{0}$ より $\overrightarrow{0}$ である．左辺において定数以外の部分を変形すると

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{r}\times\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r}\\=\;&\frac{d}{dt}\overrightarrow{r}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{r}+\overrightarrow{r}\times\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r}\\=\;&\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{r}\right)\end{aligned}$$

である．したがって

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{r}\right)=\overrightarrow{0}$$

つまり，

$$\overrightarrow{r}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{r}=\overrightarrow{c}\ (\text{定ベクトル})$$

が成り立つ．運動量ベクトルは $m\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{r}$ なのでこれはまさに角運動量が時間に対して一定であることを示している．

一方，これは二つのベクトル $\overrightarrow{r}$ と $\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{r}$ がつねに $\overrightarrow{c}$ と直交していることを示す．運動は時間に関して連続的であるから，二つのベクトル $\overrightarrow{r}$ と $\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{r}$ がつねに同一の平面上にあることが示された． □

8.3　面積速度

極座標と運動方程式　これからは，太陽を原点とするある平面で考えればよいことになった．ここでベクトル $\overrightarrow{r}$ を

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

と極座標で表そう．ここで $r = |\overrightarrow{r}|$ としている．r も角 θ も時 t の関数であるとして，速度ベクトルと加速度ベクトルを求めなければならない．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\overrightarrow{r} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta \\ r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この結果は

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix}$$

と書ける．

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r} &= \frac{d}{dt}\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\cdot\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r'' \\ r'\theta' + r\theta'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r'\theta' \\ r\theta'^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r'' - r\theta'^2 \\ 2r'\theta' + r\theta'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$2r'\theta' + r\theta'' = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

である．だからまとめると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\overrightarrow{r} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dr}{dt} \\ r\dfrac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \\ \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ニュートンの法則は惑星運動では

$$m\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) \end{pmatrix} = -\frac{GMm}{r^2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

となる．
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を左からかけると，

$$\begin{aligned} m\begin{pmatrix} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) \end{pmatrix} &= -\frac{GMm}{r^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= -\frac{GMm}{r^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これから

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\dfrac{GM}{r^2} \\ \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

を得る．

面積速度一定　等式 13 から

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \quad (\text{一定})$$

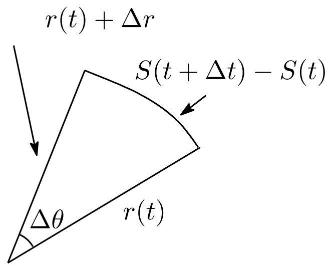
が得られる．

極方程式で表された運動の，面積速度の式を求めよう．$r(t),\ \theta(t)$ に対し時間の変化量を Δt とし．

$$\begin{aligned} r(t+\Delta t) &= r(t) + \Delta r \\ \theta(t+\Delta t) &= \theta(t) + \Delta\theta \end{aligned}$$

とおこう．また，動径の通過面積を $S(t)$ とする．時間 t から $t+\Delta t$ までの間の動径の最大値と最小値を R と r とすれば

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\theta \leqq S(t+\Delta t) - S(t) \leqq \frac{1}{2}R^2\Delta\theta$$



である．したがって

$$\frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \leqq \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \leqq \frac{1}{2}R^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ のとき $R,\ r \to r(t)$ なので

$$\frac{d}{dt}S = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

となる．かくしてケプラーの第二法則：面積速度一定が示された．

8.4　楕円軌道

運動方程式の変形　さてわれわれの得た微分方程式をもとに，惑星の軌道が楕円であることを導こう．

$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{h}{r^2}$ なので整理すると

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{14}$$

となる．

r は質点間の距離であるが，距離，速度，加速度，といった数学的な量に対して，位置エネルギー(本当は「ポテンシャル」というべき所だ)，運動量，力，といった物理学的な量が，特にそれが保存量である場合に，基本的な量である．

二つの質量 $m,\ M$ をもつ質点が万有引力で引き合い，距離 r のときそれぞれ速度が $v,\ V$ となったとする．万有引力による位置エネルギー U は

$$U = \int_{\infty}^{r} -\frac{GmM}{r^2}\,dr = -\frac{GmM}{r}$$

で定まる．これはエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = E$$

である．この U は，中心力が働く場でのポテンシャルといわれる．ポテンシャルは $\dfrac{1}{r}$ に比例している．$s = \dfrac{1}{r}$ と変数を変換する．t での微分を作ったうえで，θ での微分に置きかえていく．

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{s^2}\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{s^2}\frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{ds}{d\theta}\\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -h\frac{d^2s}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2s}{d\theta^2}\cdot hs^2\end{aligned}$$

よって

$$-h^2\frac{d^2s}{d\theta^2}\cdot s^2 = h^2s^3 - GMs^2$$

となる．これから

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} = -s + \frac{GM}{h^2}$$

が得られる．つまり

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(s - \frac{GM}{h^2}\right) = -\left(s - \frac{GM}{h^2}\right)$$

ここで $f(\theta) = s - \dfrac{GM}{h^2}$ とおくと，

$$\frac{d^2f}{d\theta^2} = -f \tag{15}$$

となった．この微分方程式を解けばよい．

惑星の軌道は楕円である　$\cos\theta$ と $\sin\theta$ はともに二階微分方程式 15 を満たし，そのロンスキアンは

$$W(\cos\theta,\ \sin\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$$

である．よって 15 の解はすべて $c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta$ とかける．これは合成すると $A\cos(\theta+\alpha)$ となる．角 θ の始点をとりなおすことで $A\cos(\theta)$ としてよい．$f(\theta) = s - \dfrac{GM}{h^2}$ であったから

$$s = \frac{GM}{h^2} + A\cos\theta$$

となる．$r = \dfrac{1}{s}$ より

$$r = \frac{1}{\dfrac{GM}{h^2} + A\cos\theta} = \frac{\dfrac{h^2}{GM}}{1 + \dfrac{Ah^2}{GM}\cos\theta}$$

となった．

$e = \dfrac{Ah^2}{GM}$，$l = \dfrac{h^2}{GM}$ とおくと

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

これは確かに e を離心率とする二次曲線である．実際に惑星の軌道は閉じているのでこれは楕円でなければならない．これがケプラーの第一法則である．もちろん彗星などでは放物線になることもある．

ケプラーの第三法則　軌道が楕円であることが確定すれば，ケプラーの第三法則は数学の問題である．

この楕円の長軸は $\theta = 0,\ \pi$ での r の和だから

$$2a = \frac{l}{1+e} + \frac{l}{1-e} = \frac{2l}{1-e^2}$$

また短軸は

$$2b = 2\sqrt{a^2 - e^2a^2} = \frac{2l}{\sqrt{1-e^2}}$$

ゆえに

$$a = \frac{l}{1-e^2},\ b = \frac{l}{\sqrt{1-e^2}}$$

つまり

$$al = b^2$$

面積速度は

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2}$$

なので，周期を T とすると楕円の面積は $\dfrac{Th}{2}$ である．

一方，面積は πab でもあるので

$$\frac{Th}{2} = \pi ab$$

$$\therefore \quad \frac{T^2h^2}{4} = \pi^2a^2b^2 = \pi^2la^3$$

つまり「惑星の公転周期の 2 乗は軌道の半長径の 3 乗に比例する」というケプラーの第三法則が示された．

参考文献

[1] 赤攝也：集合論入門　増補版，培風館，1959

[2] 内田伏一：集合と位相　裳華房，1986

[3] 竹内外史：集合とはなにか　新装版，講談社，2001

[4] J.W.R. デーデキント：数について，河野伊三郎訳，岩波書店，1961

[5] E. ランダウ：数の体系，蟹江幸博訳，数学クラシックス，丸善出版，2014

[6] 高木貞治：解析概論，岩波書店，初版 1938，第三版 1961

[7] 高木貞治：数学雑談，共立社書店，1930

[8] 高木貞治：数の概念，岩波書店，1949

[9] 足立恒雄：数ー体系と歴史，朝倉書店，2002

[10] 足立恒雄：数とは何か　そしてまた何であったか，共立出版，2011

[11] 足立恒雄：数の発明，岩波書店，2013

[12] 笠原皓司：微分積分学，サイエンス社，1974

[13] 柴田敏男：微分積分，培風館，1978

[14] 黒崎達：数学原論，槇書店，1964

[15] 今岡光則 (他 3)：教員のための数学 I，培風館，2007

[16] 池畠良 (他 2)：教員のための数学 II，培風館，2007

[17] 中根美知代：$\epsilon-\delta$ 論法とその形成，共立出版，2010

[18] コルモゴロフ，フォミーン：函数解析の基礎，山崎三郎訳，岩波書店，1962

[19] ヒルベルト，コーンフォッセン：直観幾何学，芹沢正三訳，みすず書房，1966

[20] 河田敬義編：位相幾何学，現代数学演習叢書 2，岩波書店，1968

[21] 矢島信男：常微分方程式，理工系の数学入門コース 4，岩波書店，1989

[22] 山本義隆：重力と力学的世界，現代数学社，1981

[23] 山本義隆：古典力学の形成，山本義隆，日本評論社，1997

[24] 山本義隆：磁力と重力の発見，全 3 巻，みすず書房，2003

[25] 吉田武：ケプラー・天空の旋律，共立出版，1999

青空学園『数学対話』

- 対角線論法と不完全性定理

- 数列の極限と e の定義
- 定積分の定義
- 計量ということ
- 微分方程式とは
- 円周率を表す
- 惑星は楕円軌道を描く