# 幾何学の精神

青空学園数学科

2013 年 1 月 9 日

# 目 次

# 第1章　序

## 1.1　はじめに

**射影幾何学習帳**　これは2010年の1月にはじまる私の射影幾何学習帳である．それまでも『数学対話』のなかで，射影幾何に関連する話題を取りあげてきた．その内容は高校範囲かそれに地続きな領域内でのことであった．それら『数学対話』の中の射影幾何に関するものを見直し，私自身の勉強として，改めてその根拠を掘り下げるため，パスカルに立ちかえって読み解き，それをふまえて公理的方法によって射影幾何を再構成したいと考えた．

私は，教育に携わる人や，そのときもっている知識をもとに自分で考えてゆこうとする意欲的な高校生の，その勉強の一助になればと考え，電脳空間の仮想学園，青空学園をやってきた．青空学園の願いは，制度としてある教育体制から自由なところで，高校数学とそれにつながる領域を掘りさげる場となり，そして何より，高校数学を学問として学び考える力をつける場となることであった．

学問とは根拠を問うことであり，根拠を問うとは、現象を批判し存在を根本において捉えようとすることであり，さらにそれをも捉え直そうとする永続運動である．青空学園はこの根拠を問う永続運動としての学問の復興を願ってきた．教育とは具体的な課題の勉強と研究を通して，この意味における学問を身につけることでなければならないと考えてきた．

ユークリッド幾何を学問の典型としそれを土台に築かれた西洋文明，それを人類の経験として引き受けてゆくためには，幾何的分野はもっと日本の高校数学のなかで重視されねばならない．そのための前提は，19世紀に至る幾何学を人類の遺産として受けとめ，それを今日の言葉で再構成することである．

そのように考え，パスカルを数学をとおして読み直し，幾何学の精神を学ぶところから始めた．パスカルは近代の初頭，根拠を問うことを徹底した先駆者である．パスカルを読むうえでの基礎作業を，私の力でできるところまでやっておこうと，自身の勉強をかねて始めた．自分でようやく理解できたというところも多く，学習帳それ自身はまったく教育的ではない．もっと初学者にも分かりやすく書きたいが，今はそのための基礎作業の段階である．

**基本構成**　この作業はもとより数学史自体を目的にするものではない．パスカルが実際にどのような証明をおこなったかということは，その精神の一端に触れ今日への教訓と視座を得るうえで重要であり，可能なかぎり跡づけたい．しかしまた遺された資料から限界もある．

大切なことは，パスカルの考え方を取り出すことである.『円錐曲線試論』そのものの読解をとおしてそれを行い，それを踏まえて射影幾何の再構成に進み，そして19世紀の代数幾何につながる段階まで進みたい．大きく四部の構成を考えている．

**第一**は，パスカル十六歳の試論である『円錐曲線試論』を翻訳し解読する.『円錐曲線試論』の本文の検討をおこなったルネ・タトン (Runé Taton) の論文 [12] がある．それをもとに読む．これを通して，今から350年前にパスカルが何を書き残したのか，それをつかむ．パスカルとデザルグによって現れた射影幾何を捉える．

そのうえで『円錐曲線試論』のすべての命題について，日本の高等学校の数学で届く範囲の証明をつける．その中にはパスカルの定理のパスカルによる証明も含まれる．そしてそれらの証明を吟味する．証明の根拠を考える．するとそこにいろいろな論理の欠陥が見つかる．典型的な問題は複比である．歴史的に複比は長さの比として定義された．しかしパスカルの時代に見出された射影幾何は長さから自由である．長さの比としての複比を用いた射影幾何の定理の証明は論理に陥穽がある．これはどういうことなのか．これらの証明を甦らせることは出来るのか．この問いを明確にする．

**第二**は，公理的な射影幾何の構成である．ここで時空を越え，19 世紀から 20 世紀初頭にかけて基礎が出来上がった公理の方法をとる．単純な公理系を立て，そこから射影幾何のすべてを再構成する．真理としての公理を立て，そこから論証することはユークリッド以来の数学の方法であったが，今日においては，公理は真理であるということではなく，数学の構造を探求する方法として公理を立て演繹を試みる．

このようにして構成された射影幾何のなかで改めて複比を定義し，複比を長さから解放する．そして円錐曲線を定義し，複比によるパスカルの定理を再構成する．これは 19 世紀の数学の基本課題であった．ポンスレによって大きく展開された古典的な射影幾何の方法を，この公理的に再構成された射影幾何の中で生かす．パスカルの定理のいくつかの別証明を行う．二次曲線は，双一次形式に由来する線型的な二次形式の側面と，代数幾何の対象である多様体の次数の低い場合としての側面とをあわせもつ．パスカルの定理でこれを確認し，証明をする．

**第三**は，ポンスレの定理である．ポンスレの定理の古典的な証明，射影幾何的証明，線型代数の証明，代数的証明，楕円積分による証明をすべて再構成する．

その上で 20 世紀中葉になって再発見された，ポンスレの定理とケーリーの定理の楕円関数，また楕円曲線による証明の骨格をつかむ．これはリーマンやアーベルにはじまり現代につながる代数幾何の方法である．ここは研究ノートとして，再構成できたことを順次書いてゆく．

**第四**は，方向性以外は，2012 年秋の時点においてまったく開かれたままの問題であが，数学の場とそして文明の場でパスカルの現代における意味を考える．

パスカルやデザルグにはじまる射影幾何から，ポンスレを中心とする 19 世紀の射影幾何，そして 20 世紀に再び 19 世紀の代数幾何と結びついたその代数幾何への道について，パスカルの幾何学の精神が数学の場でどのように展開したのか，その内的発展過程を跡づける．

さらにパスカルの幾何学の精神がどのように時代の中で矛盾をいく抜く糧であり力であり方法であったのかを考えることを通して，西洋近代文明が一般化した現代文明の場を生きるわれわれに，何を示唆するのか考えたい．

**教育数学**　近年ようやくに「教育数学」が言われはじめた．数理解析研究所講究録 1711 の『教師に必要な数学能力に関する研究』[46] や 1801 の『教育数学の構築』[47] を読むと，それぞれの論文で「教育数学」に関していくつかの定義が試みられている．「数学教育とは，出来上がった数学 (カリキュラム) をどう教えるかを問題にするものであり，教育数学は教育の諸々の諸相から実際に数学者がかかわることの出来る部分を取り出す営為である」というのが，この共同研究の主宰者・蟹江幸博氏の定義である．このような研究がさらにひろく展開されることを願っている．

その上で私は「数学教育の根幹にはわかる喜びの継承がなければならない」と考える．高校生に数学を教えることを生業としてきたが，授業というのはわかる喜びを体験する場なのだということが，経験を通しての確信である．生徒が自ら問題を正しくつかみ，自分で考え「わかって，にっこり」する．それが「学問としての高校数学」を生きた学問にする．「理解はできるが，納得できない」段階からの飛躍である．その指導に数学教育の難しさと醍醐味がある．

しかしそれを可能にする前提として，教えるもの自らがわかる喜びを経験していなければならない.「わかった」という経験のないものが数学を教えるなら，生徒たちがわかる喜びを経験するように指導することは難しい.「わかる喜びの継承」は文化である．授業を通してわかる喜びを次代に伝える，ここに数学教育の根幹があり，それを可能にするのが教育数学である．

つまり教育数学とは，わかる喜びの継承を根幹とする数学教育において，それに携わる者自身がそれを研究することをとおして自らわかる喜びを経験する場，としての数学でなければならない．とすれば，この射影幾何の学習は，筆者の「わかった」という場であり，それ自身が教育数学の素材であると言える．少なくとも自分でそう言えるものを目指したい．

**大震災と核惨事**　勉強をはじめて1年ほどした2011年3月11日，東北地方に大地震が起こり，続いて福島第一原発の核惨事に至った．核惨事が一段落といえるまでには百年を超える時間がかかるだろう．核惨事は日本の文教政策とも深くかみあった大きな問題であった．

明治以来，日本という国家の文教政策は，自分で根拠を問い批判的に考える子供を育てるのではなく，目先のことを大過なくやり過ごし，大きな問題は言われるままに従う子供を作ることであった．根拠を問わないように小学生の時期から大学教育まで，生徒や学生を誘導してきた．根拠を問うことなく結果を受け入れることは，大局を見るよりも自己の目前の利害を優先することでもあり，こうして官僚制と原子力村が形成された．

根拠を問うことは，現実を批判することと一体である.「原発は安全だ」に対して,「どうしてそんなことが言えるのか．その根拠は？」と問い，自ら少し調べれば，たちまち安全の根拠は何もないことがわかる．ところが研究者の世界でも，地域住民の中でも，根拠を問うものはつねに少数派であった．それは日本の近代教育の結果であり，その果てに福島の核惨事が起こった．

東電にだまされたという声を聞く．数学で考える力を鍛え，いかなる言明もその根拠を問い，根拠の有無を自ら考えることができれば，だまされない人が育つ．だまされたのなら，それを教訓として二度とだまされない子供を育てなければならない．国の文教政策に抗ってでも，世間の人々のなかで育てなければならない．それが「しっかりと数学を学び，この時代を生きる智慧と力をつけよう！」という青空学園の願いでもある．

人間は生きるために自ら考え闘ってきた．それが本当の世の礎である．福島核惨事を契機に，自分で考え行動をはじめた人々が出てきた．この同時代に，世界の各地で新たな人々の崛起がはじまった．激動は人間を鍛える．土と言葉を大切に生活に根ざした協働体が育まれ，その土台のうえに世があらたまることを青空学園は心から期待している．そのとき，パスカルの生き様とその心は大きな助言になると確信している．

## 1.2　考える葦

**何より人間として**　ブレーズ・パスカル（Blaise Pascal,1623年6月19日〜1662年8月19日）は，近代初頭のフランスに生まれた数学者にして物理学者，哲学者，思想家，キリスト者，いやそのような区分は後の世のものにすぎない．パスカルはただ何より人間であろうとして，それを徹底しえた天才である．死後刊行された『パンセ』の中の言葉

> 人間は一本の葦に過ぎない．自然のなかでもいちばん弱いものだ．だが，それは考える葦である．

はよく知られている．彼は人間を，闇にあって深い思いを抱いて考える葦，ととらえていた．パスカルは『パンセ』の中で，

> 人から「数学者である」とか「説教家である」とか「雄弁家である」とか言われるのではなく,「彼はオネットムである」と言われるようでなければならない.

と言っている．17 世紀フランスでは貴族階級のなかで人間の理想のあり方として「オネットム」が言われた．オネットム (honêtte homme) とは誠実であるだけでなく，自分の専門の事柄にとらわれずあらゆる話題に精通した知識ある教養人のこととされた．が，パスカルにあってオネットムは，もっと激しい原理的なことであった．彼は

> 人は普遍的であるとともに，すべてのことについて，知りうるすべてのことを知ることができない以上は，すべてのことについて少し知らなければならない．なぜなら，すべてのことについて何かを知るのは，一つのものについてすべてを知るよりずっと美しいからである．このような普遍性こそ，最も美しい．もしも両方を兼ね備えられるならばもっとよいが，もしもどちらかを選ばなければならないのだったら，このほうを選ぶべきである.

とも述べている．パスカルは，個別分野の探究は人間の普遍を知ることにつながらなければ無意味だと言っている．個別学問を大きな普遍性のもとに位置づける知性こそ，なにより大切だと言っている．だからまた，人間は一体何のために学ぶのか，そのことが土台にない学問であってはならないとも言っている．そして，このことにおいて人は何より「オネットム」でなければならないと言う.

幾何学の精神とは，数学においても，単なる方法論ではなく，現象の根拠を問い，それを普遍的にとらえようとする心のあり方そのものである．そしてそれは，数学を越えて，この世界と人間に対する基本的な態度であり思想そのものである.

**パスカルが照らすこと**　「『パンセ』の数学的思考」[11]（142 頁）に教えられたのだが，著名な数学史の本の中に次のような評価がある．本書のその前後を引用する.

> **パスカルへの誤解をとこう**
>
> 　ところが、数学史家のあいだでのパスカルの人間的・思想的評価は、異常なほどに低いと言わざるを得ません。最後にその点を指摘して、おわりにしたいと思います。
>
> 　つぎの文章を読んでみてください。
>
> 　「パスカルはきわめて有能な数学者であったが、その自虐的マゾヒズム的傾向と当時の宗派的論争についての無益な考察とのために、今日、宗教的神経症患者といわれるものに堕落したのであると考えたい。」「大変有能な人間がその才能を埋めたという、まさにその例がパスカルであり、中世の心［という皮袋］が一七世紀の科学という新しい酒をもらおうとして破れさけたというのが、実にパスカルの場合であった。彼の偉大な才能は、やどるべき人間をあやまったのである。」
>
> 　これは、原書初版が 1973 年に出て、その後半世紀以上にわたって広く読まれているE・T・ベルの『数学をつくった人びと』（田中勇・銀林浩訳）のなかからの引用です。これが例外や、なにかのまちがいでないことをおわかりいただくために、もうひとつだけ紹介しておきます。
>
> 　「彼は稀な数学的才能と優れた文体を備えていた。しかし、その短い生涯は肉体的にも精神的にも慢性病によって悩まされた。彼の傑出した知的能力は、もっぱら彼の

> 時代の修道会間の宗教上の論争によって引き起こされた不毛な神学的思索において発揮されている。」
>
> これは、原書が 1988 年に出たスチュアート・ホリングデールの『数学を築いた天才たち』(岡部恒治監訳)からの引用です。
>
> ここにある解釈は、たんなる無知を通り超えています。悪意のある非難中傷としてしか、わたしには読めません。百歩譲っても，もっともまちがったパスカル観だと言わざるをえません。

吉永氏は「まちがったパスカル観」と言う．が，二人の数学史家が同じ趣旨の言葉を公にしているということは，彼らのパスカル理解が「誤解」ではないことを示している．二人の数学史家はいずれもパスカルの考え方を宗派論争でゆがめられた異様なものとすることで，彼の数学とそれを支えた考え方を分離し，パスカルその人の思想を避けているのではないか．

ポール・ヴァレリー（Ambroise-Paul-Toussaint-Jules Valéry, 1871 年 10 月 30 日 - 1945 年 7 月 20 日）は，フランスの作家，詩人，小説家，評論家であり，多岐に渡る旺盛な著作活動によってフランス第三共和政を代表する知性と称される人であるが，彼もまたパスカルについて次のように言っている．これは『パスカルとその時代』[7]（245 頁）に教えられたものであり，ここでもこの書の関連箇所を紹介する．

> しかし、問題は『パンセ』のもつ、あの独白の世界である。単なる現世の否定や神の発見にとどまらない。そして、ヴァレリー Paul Valéry は、そこに「人類の敵」を見、怖るべきアンテティ・ユマニスムを見た。ヴアレリーはのべている。「かれによる人間的価値の全般的破壊作業の端緒は、おそらくかれの自己愛のなんらかの個人的な苦痛のうちに見出されるものである。全人類を打ち低めることによってでなければ、打ち低めることの叶わぬような、恐るべき敵というものがあるのだ。」このような、人間的価値の一切を破壊するペシミスムを…。

パスカルは，西洋において公認され支配的であった立場から見れば，許されない異端であったのではないか．あるいはアンリ・ルフェーブルが『パスカル』[6]（306 頁）で指摘するように

> パスカルの教説のうちには，…，人間のさまざまな矛盾に関する一つの体系と，それ自身矛盾したもう一つの体系と，この二つのものが同時に存在する…．

パスカルとは何なのか．多くのパスカル研究がこの日本でも行われてきたが，それはいまもまだ開かれたままの問題である．ここで先行研究をを踏まえての見解を出す力はこちらにはないし，そのような近代日本の学問としてのパスカル研究をここでここで行おうということでもない．現代の日本の数学教育に携わる人間として，パスカルの人間としての問題提起を，いささかでも数学をとおして受けとめ次代に伝えたいというのが，わが立場である．

そのうえでいえば，パスカルが異端とされたのは，近代西洋資本主義文明をささえた合理主義や身心二元論に対する根源的な批判の故ではないか．もしそうであるなら，先の数学史家の見解やポール・ヴァレリーの言葉を西洋知性の言葉として受けとめ，そのうえでそのような知のあり方を，西洋近代のはじめにおいて，自らの病苦に苦しむ人生をあげて批判していたパスカルを，もう一つの西洋の知性でありその人間性として受けとめ，また取り出さねばならにのではないか．

パスカルは早すぎた晩年，ポール・ロワイヤルを中心とするジャンセニスム運動の渦中にあった．ジャンセニスムの評価もまた手に余るが，しかしパスカルを読み込むとき『ジャンセニスム』[8] の「むすび」の次の言葉に同意する．それ以上にジャンセニズムの議論をここですることは出来ない．

> （ジャンセニズムについて）少なくとも、次の二点は一目瞭然である。**第一**に、妥協も譲歩もせず生き抜きたいという、極度に厳しいキリスト教の概念である。…**第二**に、権威の絶対主義と対決する個人の権利について、とりわけ個人の思想についての強い意識である。… 厳格と絶対の宗教、同時に拒絶の宗教であるジャンセニスムは、おのれの現存だけで、国家理由と権威の論拠を相手どって自己の権利要求を掲げる。… この意味でジャンセニスムは、近代的良心への道を準備するのに貢献している。

最晩年,『パンセ』を準備しつつあったパスカルは，ジャンセニスムをも超えた一人のキリスト者であった．現実のジャンセニスムは，絶対王制の支配権力の弾圧で後退を余儀なくされ，ポール・ロワイヤルの多くのジャンセニストがジャンセニスムを異端とする信仰宣誓文への署名を現実的政治的妥協として容認しようとした．このときパスカルは自らの宗教的経験をもとに，まさに「オネットム」としての生き方において世俗の権力への妥協に反対した．そしてパスカルはまったくの独りになってしまう．そして間もなくその生涯を終える．考える葦としての生涯をまっとうした．

パスカルは矛盾の中を生き抜いた人であった．それだけがいま言えることである．そのパスカルの激しさを支えた柱が幾何学の精神であった．彼は幾何学の精神を一つの柱として生涯考え続け，また祈り続けた．それは，近代から現代に至る西洋文明のもとにある人間の，良心を支える柱であった．

**時代を生きる智慧と力**　西洋文明は今や世界大に行きわたった．これは現実でありまた不可避である．しかしその矛盾と限界もまた明らかになる現代である．もとより，近代的人間の形成という問題は普遍的であり，これを観念で飛び越えることは出来ないし，この歴史段階の下でわれわれもまた生きてゆかねばならない．ならば，これをその始まりのときに批判したパスカルと，それを支えた幾何学の精神，そしてそれがパスカルの中でどのように息づいていたのかを学ぶことは，大きな意味がある．

近代日本は，その制度や体制やそれによって作り出される権威から自由になって，人間としての足場からもういちどはじめから考えなければならないところに来ている．今の日本は，近代的人間の形成という問題においていえば，ちょうどパスカルの時代のフランスの段階であるとも言える．

青空学園では「しっかりと数学を学び，この時代を生きる智慧と力をつけよう！」と呼びかけてきた．この「数学」は幾何学の精神の「幾何学」とほぼ同じ意味である．数学を学ぶことが，惑わされることなく自分の意見をしっかりもち，どんなことにおいてもその根拠を探究し，世の多数に迎合することなく生きることにつながると信じてきた．

彼の円錐曲線論とその後の展開を学ぶことを通して幾何学の精神に触れ，青空学園での呼びかけを深めたいと思う．それがこの書の意図である．

## 1.3　方法の問題

**再構成ということ**　射影幾何をいったん単純な公理系によって定義する．そしてそこから演繹してすべてを再構成する．こうすることで，複比の原理となぜそれがパスカルの定理の証明に機能するのかを解明する．本書は，数学は現実であり，数学的現象は現実に存在している，と考える．射影幾何は事実である．しかし人間がそれをつかむためには方法が必要である．

その方法が公理の方法である．確実な根拠から射影幾何を構成するためには，その数学的現象の構造を調べ，その骨格を公理にまとめ，そこから演繹する．演繹過程で公理系そのものを再検討しさらに改良する．それが公理の方法である．つまり，現象をどのような枠組でとらえるのかを考え

る．その枠組を公理として設定しそこから演繹的論証を積みあげ論を展開する．そしてその世界をもういちど検討し，公理自体も再検討する．

数学の入門として公理的方法それ自身が教育的に優れているかといえば，それはそうとはかぎらない．教育的には数学的現象とそこからの帰納の過程を述べることが重要である．しかしパスカルの原文を読んだうえでは，それを再構成することが問題となり，そのときには公理的方法が重要となる．公理を立てそこから演繹的に論証を進めることは，数学的行為そのものである．パスカルの読解とその初等的証明の後で，公理系をたてそれをもとに論証をのべる．これがエウクレイデス『数学原論』にはじまる公理的方法である．

**エウクレイデス（ユークリッド）**　幾何学のはじまりは，ユークリッドである.「ユークリッド」は英語発音である．本来の音に近いのは「エウクレイデス」である．エウクレイデス（Eukleides，紀元前 365 年?〜紀元前 275 年?，英語表記 Euclid）は古代ギリシアの数学者，天文学者とされる人で，アテナイで学びプトレマイオス 1 世治下のアレクサンドリアで教えた．ちなみにプトレマイオス 1 世とは，アレクサンドロス 3 世（アレキサンダー大王）の部下であったマケドニア地方出身のギリシア人で，大王の死後，エジプトの支配を継ぎ，プトレマイオス朝を創始した．

「マホメット」も英語発音であり「ムハンマド」である.「ユークリッド」も「マホメット」も西洋の視点での発音である．これにたいして近年は本来の読みで書く方向にようやくなってきている．ただ,「ユークリッド」はあまりにも定着しているので，人を指すときは「エウクレイデス」，数学用語に用いるときは「ユークリッド」を使う．

『原論』はラテン語圏，アラビア語圏にもたらされ，その後各地で二千数百年にわたって幾何学，いや数学そのものの基本となる書物であった．この書は 13 巻から成り，1〜6 巻は平面幾何，7〜9 巻は数論，10 巻は無理量，11〜13 巻は立体幾何を取り扱っている．図形以外では，最大公約数を求める方法であるユークリッドの互除法，素数の個数は無限であることの背理法による証明，などが書かれている．

数学では証明によって推論を進めていくが，証明するときに用いた根拠となる命題も，また，他の命題に基づいて証明しなければならない．更に，その根拠とした命題の証明も必要となり，このようにして，順次たどっていくと，どこまでもさかのぼってきりがない．そこで，あらかじめ，いくつかの基本となる命題が成り立つものと定めておくと，それらを出発点にして，あとの命題が順々に証明される．論証の出発点となる基本的な命題を公理という．

公理を立て，公理からはじめて論証を進め，新たに発見された事実を揺るぎないものとして示すという幾何の論証はエウクレイデスにはじまる．それをまとめたものが『(幾何学) 原論』である．これは複数人の共著であり，その一人がエウクレイデスであるといわれている．

『原論』では，概念の定義から始まり，公準（要請）・公理・命題とその作図・証明・結論という形式で書かれている． 公準とは公理のように自明ではないが，公理と同様，証明不可能な命題を意味する．近代ではこれを含めて公理とすることが一般的である.「公準」と訳されるものもここでは公理に統一する．

『原論』はこのような形式で数学を論述する．自明であるとすることをまず言い表し，そこからはじめて厳格な論証によって数学的現象を論述していく，この学問記述の方法は，二千年以上にわたって，数学のみならす学問一般の模範であった．いまもその精神は受け継がれるべきものである．

**『原論』と公理的方法**　このように公理を論のはじめにおくことはエウクレイデスにはじまる．しかし公理の意味はその後の経験を踏まえ『原論』の時代より深くとらえねばならない．エウクレイデスの時代，公理群は真理を集めたものとして，存在の記述，真理の記述と考えられてきた．しか

し『原論』の中の平行線の公理は，他の公理に比べて複雑であり，これを他の公理から証明しようという試みが，くりかえしなされた．

そのうえで，近代にいたってユークリッドの公理群を満たさない幾何が見出された．これは転換であった．平行線の公理は真理なのではなく，一つの設定であり，他の設定を行うとまた異なる幾何が可能であることを，近代の人々は知ったのである．

公理を立てることは，絶対的な真理という位置づけから，構造を探究する方法となった．公理にもとづいて数学を構成することで，対象の内部構造をつかみ，それを通して数学そのものをとらえようとする方法である．もとより数学はさまざまの数学的現象から帰納的に結論を予測し，結論の根拠となる事実を掘りさげて，予測された事実が成立することを論証してゆく．そしてその根拠がどのような構造をもつのかということを追求する．そのときに重要な方法が公理の方法である．

射影幾何についていえば，射影的事実を成り立たせている根拠となっているのはどのようなことなのか，これを考えようとすれば，一定の公理系を立て，そこから演繹して何が言えるのかを研究しなければならない．その結果，本書における「図」はもはや実平面に存在する図ではない．共線，共点関係の象徴的な記号である．公理系から作られた射影幾何の命題を実数平面に描いて考える．ここに点と直線とそれらの共線，共点関係だけから構成された射影幾何は，それが可能である．逆に言えば，公理的方法とは，「射影幾何」としてくくることのできる様々なモデルの共通構造を研究することであり，それによってその構造の本質をつかもうという方法である．

**幾何学の精神は人類の宝**　デザルグやパスカルにはじまる射影幾何は 19 世紀にいたって大きく花開いた．19 世紀中葉は西洋がもっとも輝いていた時代である．この西洋の繁栄は 15 世紀以来の奴隷貿易や植民地支配の物資的基礎のうえに得られたものである．非西洋のわれわれからすれば，そのような多くの犠牲のうえに実現した西洋の輝きに一体どれだけの価値があるのかということにもなる．このような西洋の輝きの一方における，アフリカやアジアの困難こそわれわれの直面する問題である．

しかし，同時にその西洋の輝きとその思想的な結実は，大きな犠牲のうえに実現した人類の成果であり，そうであるのならその成果を，まさに大きな犠牲を払って人類が得たこととして，大切に引き継がなければならないとも言える．これがわれわれが数学を学ぶ立場，青空学園の立場である．

21 世紀初頭，西洋世界の行き詰まりがはっきりとする一方で，新たな時代の形はまだ明らかでないという段階が継続している．このときには，この数百年の西洋の経験から引き継ぐべきことと克服すべきことを吟味してゆくことが求められる．このとき，パスカルの幾何学の精神は人類が引き継ぐべき宝（たから）である．多くの人が耕しそして「た（田）から」得られたことである．それを射影幾何の再構成を実行することで確認し，まとめてゆきたい．

## 1.4　言葉の問題

**パスカルとフランス語**　パスカルの生きた時代は，宗教戦争を経て絶対王制の近代フランスがようやくに基礎を固めつつあったときである．言葉は，話し言葉であったフランス語が，古典語のラテン語にかわって書き言葉としても定着しはじめた．モンテーニュの主著『Essais(エセー)』が 1580 年に刊行され，幾度もの改訂と刊行によって近代フランス語が確立したばかりのときである．この著もまた「Essais」であり，日本語では「随想録」などと訳されているが，まさに「試み」でありフランス語で考えることの「試論」そのものであった．

近代フランスの黎明期の思索の深まりは，ラテン語から独立したフランス語の確立と一体であった．モンテーニュは何よりフランス語に明晰さを求めた．心のうちの暗さ，陰影，姿を現しつつあ

る全体像，そこに思いを集め，よく考え，もっとも適切で納得できる言葉をおき，明確な命題に表す．この実践をパスカルはモンテーニュに学んだ．納得の根拠は，現実生活に根ざす実感である．
パスカルは『エセー』を愛読した．モンテーニュは宗教対立が続くなかで「それぞれの人が人間的条件のすべてを担っている」(エセー三の二) と述べる．二人に相通じるのは，近代が見出した「人間」を考える基礎におき，慣習となった概念や学問体系に惑わされることなく，人間のすべてをあげて「人間」を直接探求するという基本的な態度であった．それを支えたのが近代フランス語であった．
それはまた明治以来百五十年を経て成熟と閉塞の中にある現代日本における知と学の課題そのものである．フランスの経験に学ぶなら，われわれもまた日本語の問題をおろそかにすることはできない．日本語は歴史的に和歌や俳句で表現が練られてきただけではなく，文章においても長い推敲の歴史がある．日本語もまた的確な表現を追求してきた言葉である．数学が人間としての営みであるのならば，そのことわりを探求しそれを表すことにおいても，的確で明晰でなければならない．明晰な言葉を追求することに真剣でなければ，パスカルに学ぶことにはならない．人間に立ちかえり考えるかぎり，ことわりにおいて明晰な表現とその言葉は日本語においてもまったく可能である．

**射影幾何と射影幾何学**　そのとき「射影幾何」と「射影幾何学」はどのように違うのかが問題である．日本の『数学辞典』[42] の項目名は「射影幾何学」であり，その中に「ユークリッド幾何学と同様に射影幾何学もいくつかの公理から構成される.」との一文がある．しかし「射影幾何」といえば数学的に存在するものであり，その「射影幾何」を学の対象とするのが「射影幾何学」ではないだろうか．そして「公理から構成される」のは「射影幾何」であり「ユークリッド幾何」ではないのか．とすれば，ここにある「射影幾何学」も「ユークリッド幾何学」も「射影幾何」,「ユークリッド幾何」といわねばならない．
学の対象としての射影幾何，射影幾何を対象とする学問としての射影幾何学，これはまったく別の範疇に属する．もちろん，幾何をどのようにつかむのかという把握の方法自体が学であるから，対象のあり方と学のあり方は相互に深く関係し合うのであるが，別であることに変わりはない．このように日本語では対象とその学問の分離と統一が可能な表現をもつ．これはその区別を言葉が重視しているということであり，そうであるなら「射影幾何」か「射影幾何学」かいずれであるかについても明晰でなければならない．このような言葉の問題はたいへん難しいが，しかし考えぬいておきたい．
数学にかぎらずおしなべて，学問の基本的な枠組に関する考察を近代日本は必ずしも十全には行っていない．そのために，与えられた問題を解くことにおいて優れてきたが，問題を提起すること，基本的な枠組を提起すること，これらのことについて，日本近代が貢献したとは言い難い．
なぜその日本語で「射影幾何」というべきところが「射影幾何学」となるのか．これは射影幾何が内在的に展開してきたものではなく，明治近代になってはじめて紹介された学ぶ対象であったからである.「射影幾何」は何より学ぶ対象であり，学ぶことにおいて学問そのもであったのだ．だから存在としての「射影幾何」とそれを学ぶ「射影幾何学」の境界が曖昧であった．
このような問題は数学それ自体の問題ではないという考えもあるだろう．しかし，パスカルが「数学者である前に人間でなければならない」といったことの顰みにならえば，数学においても言葉を慈しまねばならない．言葉の問題は文化の枠組の問題である．数学の枠組においても，これを疎かにしてはならない．

**精神，心，魂**　客観的に存在する数学現象としての射影幾何と，それをとらえるという人間としての立場を明確にしなければならない．その意味で,「射影幾何」と「射影幾何学」の分離と統一，こ

れが重要である．そのうえで射影幾何を研究する学の精神として「幾何学の精神」である．

そもそも本稿は「幾何学の精神」と題している．では「精神」とは何を意味するのか.「精神」は日本の近代に使われるようになった言葉である.『徒然草』一七二に「老いぬる人は、精神おとろへ」とある．しかしこれは物事に執着する気持や目的を達成しようとする心の働き，つまりは気力のことを言い,「幾何学の精神」の「精神」とは違う．

「精神」に近似する言葉は「心」である．心とは，人の内にあって，その人の感情や思ったり考えたりすること，またその下で行動し活動することなど，あらゆる生命としての営みを統括している働きであり，またその内容そのものである．機能的にとらえられることもあれば，実体的にとらえられることもある.「思い」がものによってひきおこされ人の内にこもるのに対して,「心」は外に向かって働きかけていこうとする．さらにそのような働きの根底に「魂」があるとされてきた．

「『○○とかけて××と解く．その心は』『□□』」はよく用いられる.「○○」がどのようなくくりで「××」といえるのか，その根拠が「□□」である．ここから意味が広がり，ものに内在しそのものの本質をなすことも「心」という.「こころ」は古くからの言葉である.『古今集』仮名序に「古へのことをも、歌のこころをも知れる人」とあるように，学問や芸道の本質的なあり方や中心的なすじみちをも意味する．この意味において，パスカルのいう「l'esprit de géométrie」を日本語に翻訳するなら「幾何学の心」とすべきなのである．

ではなぜ本稿では「心」といわず「精神」というのか.「心」の大切なことは，その内在性である．すでに内部に存在している．しかし「幾何学の精神」は，明治近代になって西洋から入ってきたことであり，内在しているとは言い難い．内在せず外部にあってそれを学ぼうとするとき，これを「精神」といってきた．また，人間の「心」を外部から見ようとするときもこれを「精神」としてとらえてきた．だから「精神」は明治以降の近代の言葉である.「歌の心」といい「大和魂」というが「歌の精神」,「大和精神」とは言わない．かつて「日本精神」という言葉があったが，これは軍国主義思想を外部から持ちこむときに使われたのであり，外部にあって学ばねばならないものとしての「日本精神」であった．パスカルにおいては「l'esprit de géométrie」は内在のものである．しかしわれわれには外在して学ぶべきものである．

「幾何学の精神」は，西洋文明のもとで，人間として生きることを支えてきた「心」でありそのまさに根拠としての「魂」である．本稿では，パスカルの「幾何学の精神」を，近代合理主義よりももっと深く，闇もかかえながらそこに理の光を見出そうとする心のあり方ととらえている．西洋文明が世界大に行きわたり，その一方で西洋世界の相対化が進む今こそ，これを深く学びとらなければならないと考えている．

よって「幾何学の精神」は「l'esprit de géométrie」の翻訳ではない．翻訳なら「幾何学の心」である．翻訳ではなく，日本語の主体において「l'esprit de géométrie」を「幾何学の精神」ととらえるのである．パスカル自身がその著『幾何学の精神』で語る方法としての幾何学の精神よりも，また『パンセ』で「繊細の精神」と対にして提起した幾何学の精神よりも大きく，パスカルが生涯を通して示した学問と真理を探究する原動力をうちにもつ心を精神ととらえる．これが本稿の立場である．

### 記号について

記述を簡明にするため，■で定義，定理，命題等の陳述の終わりを示し，□で証明の終わりを示すことにする.「系」とは定理からただちに導かれる命題，または定理の圏内にあって，関連する他の命題と結合することで示される命題を意味し，番号は「定理番号−系番号」となっている．

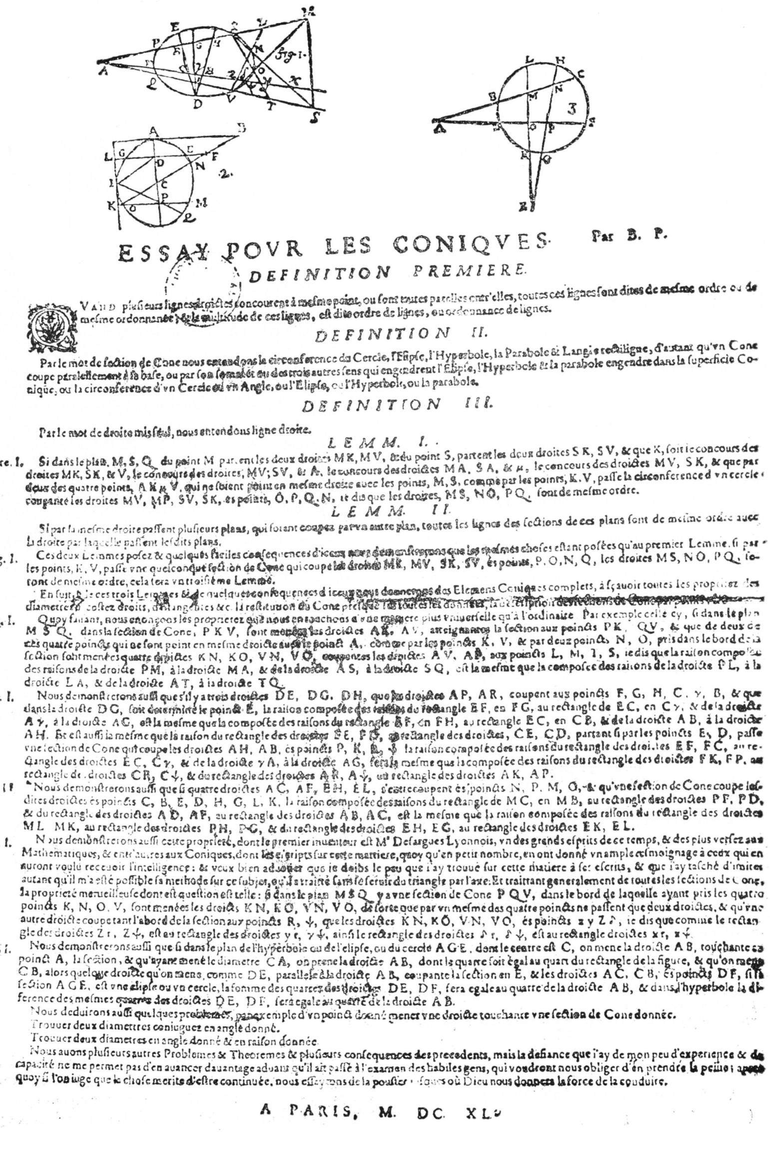
公理も陳述文であるが，これには記号■はつけない．また定義は定義として立てることもあるが，単に用語を定めるだけのときなど，文中においてなされることもある．

# 第2章　円錐曲線試論

## 2.1　本文

### 2.1.1　典拠と留意点

パスカル十六歳の著作『円錐曲線試論』を読み解くことからはじめよう．それは一枚の紙に印刷された文書であり，証明ぬきに考え方と結論を書き記したものである．原文が残っている．次は『幾何学大辞典 1』[43] に写真版で紹介されているものである．



ESSAY POVR LES CONIQVES. Par B. P.

DEFINITION PREMIERE.

QVAND plusieurs lignes droictes concourent à mesme point, ou sont toutes paralleles entr'elles, toutes ces lignes sont dites de mesme ordre ou de mesme ordonnance, & la multitude de ces lignes, est dite ordre de lignes, ou ordonnance de lignes.

DEFINITION II.

Par le mot de section de Cone nous entendons la circonference du Cercle, l'Elipse, l'Hyperbole, la Parabole & l'angle rectiligne, d'autant qu'vn Cone coupe parallelement à sa base, ou par son sommet, ou des trois autres sens qui engendrent l'Elipse, l'Hyperbole & la parabole engendre dans la superficie Conique, ou la circonference d'vn Cercle ou vn Angle, ou l'Elipse, ou l'Hyperbole, ou la parabole.

DEFINITION III.

Par le mot de droite mis seul, nous entendons ligne droite.

LEMM. I.

Figure. I. Si dans le plan M, S, Q du point M partent les deux droites MK, MV, & du point S, partent les deux droites SK, SV, & que K, soit le concours des droites MK, SK, & V, le concours des droites, MV, SV, & A, le concours des droictes MA, SA, & $\mu$, le concours des droictes MV, SK, & que par deux des quatre points, A, K, $\mu$, V, qui ne soient point en mesme droite auec les points, M, S, comme par les points, K, V, passe la circonference d'vn cercle coupante les droites MV, MP, SV, SK, és points, O, P, Q, N, ie dis que les droites, MS, NO, PQ, sont de mesme ordre.

LEMM. II.

Si par la mesme droite passent plusieurs plans, qui soient coupez par vn autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de mesme ordre auec la droite par laquelle passent lesdits plans.

Fig. I. Ces deux Lemmes posez & quelques faciles consequences d'iceux nous demonstrerons que les mesmes choses estant posées qu'au premier Lemme, si par les points, K, V, passe vne quelconque section de Cone qui coupe les droites MK, MV, SK, SV, és points, P, O, N, Q, les droites MS, NO, PQ, seront de mesme ordre, cela sera vn troisiéme Lemme.

Ensuite de ces trois Lemmes & de quelques consequences d'iceux nous donnerons des Elemens Coniques complets, à sçauoir toutes les proprietez des diametres & costez droits, des tangentes &c. la restitution du Cone presque sur toutes les données, la description des sections de Cone par points &c.

Fig. I. Quoy faisant, nous enonçons les proprietez qui nous en touchons d'vne maniere plus vniuerselle qu'à l'ordinaire. Par exemple celle cy, si dans le plan MSQ, dans la section de Cone, PKV, sont menées les droictes AK, AV, atteignantes la section aux poincts PK, QV, & que de deux de ces quatre poincts qui ne sont point en mesme droicte auec le poinct A, comme par les poincts K, V, & par deux poincts N, O, pris dans le bord de la section soient menées quatre droictes KN, KO, VN, VO, coupantes les droictes AV, AP, aux poincts L, M, T, S, ie dis que la raison composée des raisons de la droicte PM, à la droicte MA, & de la droicte AS, à la droicte SQ, est la mesme que la composée des raisons de la droicte PL, à la droicte LA, & de la droicte AT, à la droicte TQ.

Fig. I. Nous demonstrerons aussi que s'il y a trois droictes DE, DG, DH, que les droictes AP, AR, coupent aux poincts F, G, H, C, $\gamma$, B, & que dans la droicte DG, soit determiné le poinct E, la raison composée des raisons du rectangle EF, en FG, au rectangle de EC, en C$\gamma$, & de la droicte A$\gamma$, à la droicte AG, est la mesme que la composée des raisons du rectangle EF, en FH, au rectangle EC, en CB, & de la droicte AB, à la droicte AH. Et est aussi la mesme que la raison du rectangle des droictes FE, FD, au rectangle des droictes, CE, CD, partant si par les poincts E, D, passe vne section de Cone qui coupe les droictes AH, AB, és poincts P, K, R, $\psi$ la raison composée des raisons du rectangle des droictes EF, FG, au rectangle des droictes EC, C$\gamma$, & de la droicte $\gamma$A, à la droicte AG, sera la mesme que la composée des raisons du rectangle des droictes FK, FP, au rectangle des droictes CR, C$\psi$, & du rectangle des droictes AR, A$\psi$, au rectangle des droictes AK, AP.

Fig. III. Nous demonstrerons aussi que si quatre droictes AC, AF, EH, EL, s'entrecoupent és poincts N, P, M, O, & qu'vne section de Cone coupe lesdites droictes és poincts C, B, E, D, H, G, L, K, la raison composée des raisons du rectangle de MC, en MB, au rectangle des droictes PF, PD, & du rectangle des droictes AD, AF, au rectangle des droictes AB, AC, est la mesme que la raison composée des raisons du rectangle des droictes ML, MK, au rectangle des droictes PH, PG, & du rectangle des droictes EH, EG, au rectangle des droictes EK, EL.

Fig. I. Nous demonstrerons aussi cette proprieté, dont le premier inuenteur est Mr Desargues Lyonnois, vn des grands esprits de ce temps, & des plus versez aux Mathematiques, & entr'autres aux Coniques, dont les escripts sur cette matiere, quoy qu'en petit nombre, en ont donné vn ample tesmoignage à ceux qui en auront voulu receuoir l'intelligence: & veux bien aduoüer que ie dois le peu que i'ay trouué sur cette matiere à ses escrits, & que i'ay tasché d'imiter autant qu'il m'a esté possible sa methode sur ce subjet, qu'il a traité sans se seruir du triangle par l'axe. Et traittant generalement de toutes les sections de Cone, la proprieté merueilleuse dont est question est telle: si dans le plan MSQ, y a vne section de Cone PQV, dans le bord de laquelle ayant pris les quatre poincts K, N, O, V, sont menées les droicts KN, KO, VN, VO, de sorte que par vn mesme des quatre poincts ne passent que deux droictes, & qu'vne autre droicte coupe tant l'abord de la section aux poincts R, $\psi$, que les droictes KN, KO, VN, VO, és poincts x y Z $\delta$, ie dis que comme le rectangle des droictes Z r, Z $\psi$, est au rectangle des droictes y r, y $\psi$, ainsi le rectangle des droictes $\delta$ r, $\delta$ $\psi$, est au rectangle droictes x r, x $\psi$.

Fig. II. Nous demonstrerons aussi que si dans le plan de l'hyperbole ou de l'elipse, ou du cercle AGE, dont le centre est C, on mene la droicte AB, touchante en poinct A, la section, & qu'ayant mené le diametre CA, on prene la droicte AB, dont le quarré soit égal au quart du rectangle de la figure, & qu'on mene CB, alors quelque droicte qu'on mene, comme DE, parallele à la droicte AB, coupante la section en E, & les droictes AC, CB, és poincts DF, si la section AGE, est vne elipse ou vn cercle, la somme des quarrez des droictes DE, DF, sera egale au quarré de la droicte AB, & dans l'hyperbole la difference des mesmes quarrez des droictes DE, DF, sera egale au quarré de la droicte AB.

Nous deduirons aussi quelques problemes, par exemple d'vn poinct donné mener vne droicte touchante vne section de Cone donnée.

Trouuer deux diametres coniuguez en angle donné.

Trouuer deux diametres en angle donné & en raison donnée.

Nous auons plusieurs autres Problemes & Theoremes & plusieurs consequences des precedents, mais la defiance que i'ay de mon peu d'experience & de capacité ne me permet pas d'en auancer dauantage auant qu'il ait passé à l'examen des habiles gens, qui voudront nous obliger d'en prendre la peine; apres quoy si l'on iuge que la chose merite d'estre continuée, nous essayerons de la pousser iusques où Dieu nous donnera la force de la conduire.

A PARIS, M. DC. XL.

フランス語原文は『 L’ ≪ Essay pour les Coniques ≫ de Pascal』[12] に校正つきで収められている．訳にあたってはこれを用いた．日本語訳は『パスカル全集　第一巻』[3] に収められている．これを参考にした．

**訳にあたって**　最初にいくつか留意事項を記す．

(1) 定義 I でいくつかの直線が同じ点を通るか互いに平行であることを,「同じ秩序にある (ordre)」や「同じ纏まりにある (ordonnannce)」と定義している．ordonnannce はデザルグに由来する言葉である．次に，その状態にある直線の集合を，それを名詞化した言葉で表している．日本語では「線秩序」や「線纏まり」ということであるが，あまり熟していない．指示される状態がいずれも「線の束」とも表現しうるので,「同じ秩序にある」を「同じ束をなす」と訳し，名詞化した言葉の方は一つの単語にして「線束」と訳した．

(2) 円錐曲線に対して表題では conique が使われている．一方，定義 II で「円錐の切断 (section de Cône) という語で」云々とあり，section de Cône で円錐曲線を表している．文中 conique が使われることはほとんどなく，section de Cône が多用されている．これは円錐曲線を円錐の切断としてとらえようとするパスカルの意志である．それを踏まえたうえで，訳においてはこれらをともに円錐曲線と訳した．

(3) パスカルは定義の III で，直 (droite) という語で直線 (ligne droite) を意味するとしている．そしてこれ以降このように用いている．確かにフランス語では「ligne droite AB」とするより「droite AB」の方が明快であり，形容詞「droite」を名詞化して用いても意味を取り違えることはない．しかし日本語では「直」といっても意味が通じないし，フランス語で二語を要することがらが「直線」という一単語で表せるので，この定義 III も訳した上で，その後も訳では「直線」を用いた．

(4) パスカルは今なら「線分の長さ」というところも「直線」を用いている．この部分は意味を取り違えることはないので直線のままにしておいた．

(5) パスカルは 1 点を共有する「2 線分 AB，AC の長さの積」を「直線 AB，AC による長方形」と表している．これは「直線 AB」でその長さも表しているのと同様に「長方形」でその面積を指示している．つまり「AB，AC を二辺とする長方形の面積」である．この部分は内容を明確にするため「辺 AB，AC の積」と訳した．これについてはさらに検討し，今後表現を変えるかも知れない．

(6) パスカルは 1，2，3 はフランス語数詞で書き，4 以上はアラビア数字を使っている．直線や点の個数など数学的対象の個数を表すときはアラビア数字にそろえた．

(7) 原文の図 1 はいくつもの内容が一つの図に重ねられ，補題を述べるにあたってパスカルは図 1 を四回用いている．これは試論を一枚に収めるための工夫であったのだろうが，たいへん分かりづらい．それで，ルネ・タトン (Runé Taton) の上記論文にならい，それぞれの補題に図 1 の中の必要なところだけを取り出した補助図を，叙述にあわせて加えた．それが図 4 以降のもので，括弧内で指示した．

(8) 比や比の合成というところでは，読みやすくするために対応する分数式を行を変えて書き加えた．

(9) パスカルは最初に三つの命題を「lemme」として掲げ，その後，そこから導かれるいくつかの性質を述べている．今日では，最初の三命題が定理 (基本定理) であって，それに続く命題は「系」と言われることが多い．ここでは「lemme」を補題と訳したが，少し今日と意味が違うかも知れない．

(10) 補題に続いていくつかの性質が述べられる．これには番号がつけられていない．これらについては冒頭括弧内に「(命題 I)」のように番号をつけた．(命題 II) は二つのことがらが述べられてるがこれは分けない．これらの番号はギリシア数字で表した．逆に本文の定理や命題はアラビア数字で表した．

### 2.1.2　訳文

---

## 円錐曲線試論

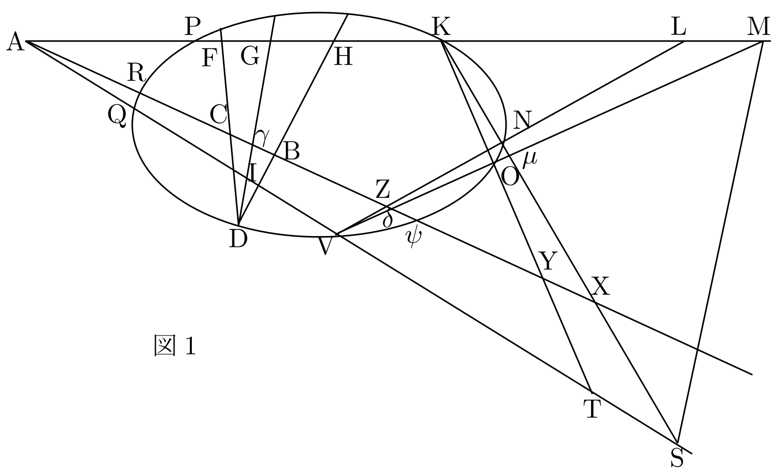



図 1

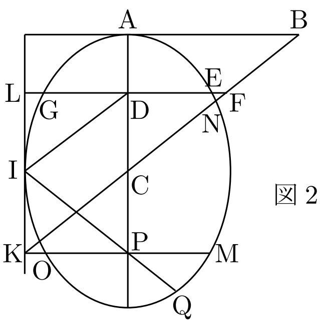



図 2

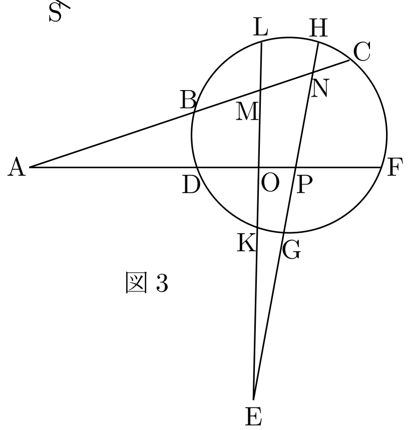



図 3

**定　義　I**

いくつかの直線が 1 点で交わるか，またはすべてたがいに平行であるとき，これらの直線は同じ束をなす，あるいは同じ纏まりにあるといい，これらの直線の集まりを線束という．

**定　義　II**

円錐の切断という語によって，円周，楕円，双曲線，放物線，角をなす 2 直線を意味する．なぜなら，円錐を底面に平行に切るか，頂点を通って切るか，あるいは楕円，双曲線，放物線を生成する三種の仕方で切ることによって，円錐曲面上に円，角をなす 2 直線，あるいは楕円，双曲線，放物線が作られるからである．

### 定　義　III

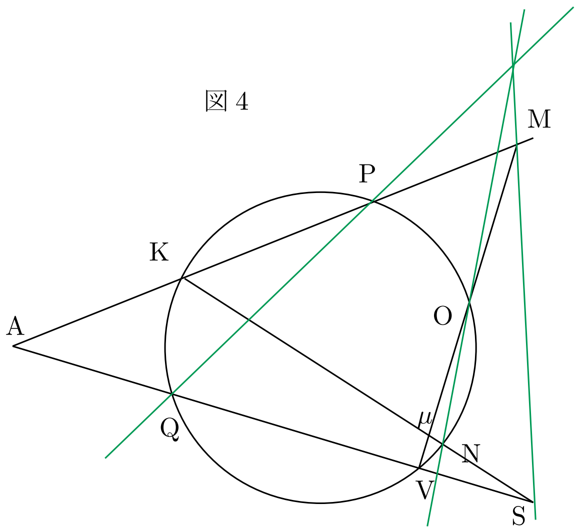
単に直 (droite) という語で直線 (ligne droite) を意味する．

### 補　題　I

M，S，Q で定まる平面上で，点 M から 2 直線 MK，MV を，また点 S から 2 直線 SK，SV を引く．点 K を直線 MK，SK の交点，点 V を直線 MV，SV の交点，点 A を直線 MK，SV の交点，点 $\mu$ を直線 MV，SK の交点とする．

4 点 A，K，$\mu$，V のうちの 2 点で M や S とあわせた 3 点が同一直線上にないもの，例えば K，V をとり，その 2 点を通る円を描き，それが直線 MV，MK，SV，SK を切る点を O，P，Q，N とすれば，直線 MS，NO，PQ は，同じ束をなす．

図 4




### 補　題　II

空間内のいくつかの平面が同一直線を通っている．これを他の平面によって切るなら，これらの平面の切断線は，同じ束をなす．

図 1(図 5)　これら二つの補題と，それから導かれるいくつかの結果から，次のことが示される．補題 I と同じ仮説のもとに，点 K，V を通る任意の円錐曲線が直線 MK，MV，SK，SV を点 P，O，N，Q において切るならば，直線 MS，NO，PQ は，同じ束をなす．これを**第三の補題**とする．

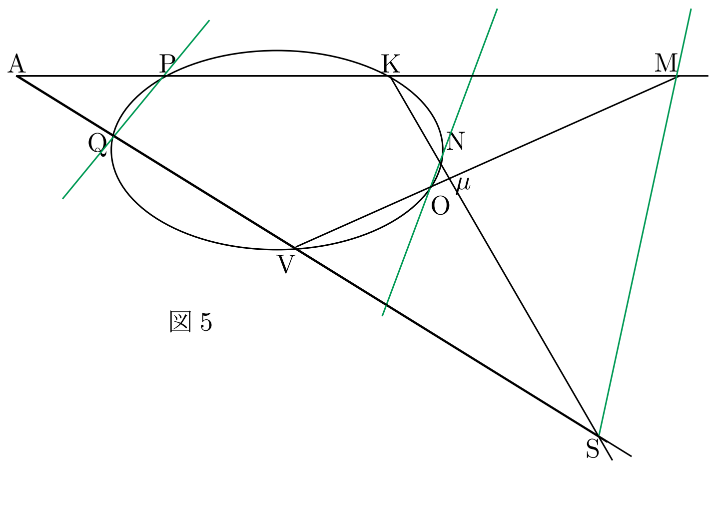



図 5

これら三補題とそこから導かれるいくつかの結果をもとに，完全な円錐曲線論 (Éléments Coniques complets) を表す予定である．そこで，直径や通径，接線のすべての性質，ある条件をみたす円錐曲線が切断面上に乗っている円錐の構成，いくつかの点を通る円錐曲線の作図，等を扱う．

その中で，普通なされているよりもより一般的にとり扱ういくつかの性質をここに述べる．．例えば次のことである．

(**命題 I**)　図 1(図 6)　平面 MSQ，円錐曲線 PKV において，点 P，K，Q，V でこの曲線に交わる直線 AK，AV をとる．これら 4 点のうち点 A と同じ直線上にない 2 点，例えば K，V，および円錐曲線上の 2 点 N，O をとり，4 直線 KN，KO，VN，VO が直線 AV，AP を切る点を S，T，L，M とする．このとき，直線 PM の直線 MA に対する比と，直線 AS の直線 SQ に対する比との合成比は，直線 PL の直線 LA に対する比と，直線 AT の直線 TQ に対する比とを合成したものに一致する．

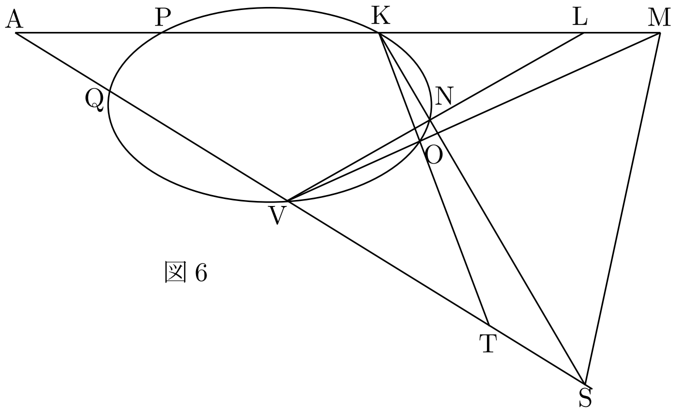


図 6

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{MA}} \cdot \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SQ}} = \frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{LA}} \cdot \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{TQ}}$$

また次のことも示される．

(**命題 II**)　図 1(図 7)　3 直線 DE，DG，DH があり，直線 AP，AR がこの 3 直線を切る点を F，G，H，C，$\gamma$，B とする．直線 DC 上に点 E をとる．辺 EF と FG の積の辺 EC と C$\gamma$ の積に対する比と直線 A$\gamma$ の直線 AG に対する比の合成比は，辺 EF と FH の積の辺 EC と CB の積に対する比と直線 AB の直線 AH に対する比の合成比は等しい．これはまた，辺 FE と FD の積と辺 CE と CD の積の比にも等しい．

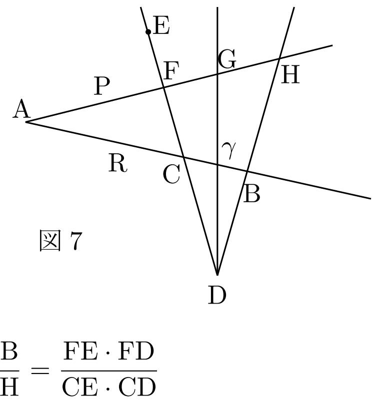


図 7

$$\frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FG}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{C}\gamma} \cdot \frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{AG}} = \frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FH}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{CB}} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{FE}\cdot\mathrm{FD}}{\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CD}}$$

したがって，点 E，D を通る一つの円錐曲線が直線 AH，AB を点 P，K，R，$\psi$ で切るならば，辺 EF と FG の積と辺 EC と C$\gamma$ の積の比と直線 A$\gamma$ の直線 AG に対する比との合成は，辺 FK と FP の積と辺 CR の C$\psi$ の積と辺 AR と A$\psi$ の積と辺 AK と AP の積の比を合成したものに一致する．

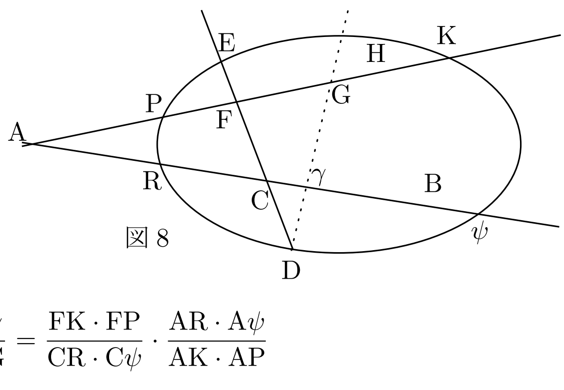


図 8

$$\frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FG}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{C}\gamma} \cdot \frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{AG}} = \frac{\mathrm{FK}\cdot\mathrm{FP}}{\mathrm{CR}\cdot\mathrm{C}\psi} \cdot \frac{\mathrm{AR}\cdot\mathrm{A}\psi}{\mathrm{AK}\cdot\mathrm{AP}}$$

また次のことが成りたつ．

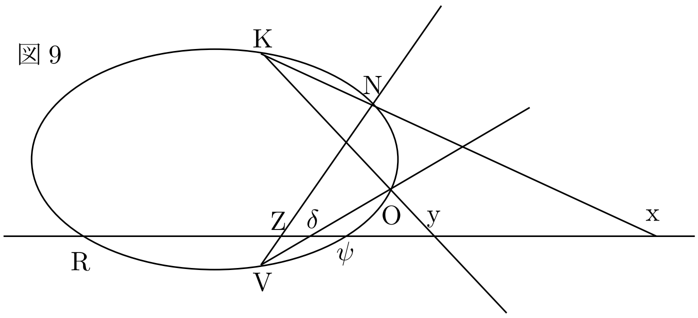
(**命題 III**)　図 3　4 直線 AC，AF，EH，EL が点 N，P，M，O で交わり，一つの円錐曲線がこれらの直線を点 C，B，F，D，H，G，L，K で切るなら，辺 MC と辺 MB の積の辺 PF，PD の積に対する比と，辺 AD と辺 AF の積の辺 AB，AC の積に対する比の合成は，辺 ML と辺 MK の積の辺 PH，PG の積に対する比と，辺 EH と辺 EG の積の辺 EK，EL の積に対する比の合成と一致する．

$$\frac{\mathrm{MC}\cdot\mathrm{MB}}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{ML}\cdot\mathrm{MK}}{\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PG}}\cdot\frac{\mathrm{EH}\cdot\mathrm{EG}}{\mathrm{EK}\cdot\mathrm{EL}}$$

また次のことが成りたつ．これを最初に発見したのはリヨンの人デザルグ氏である．氏は当代の大人物で，数学，とりわけ円錐曲線論に熟達されており，その著作は多くないとはいえ，そこから学ぼうとする人は，熟達の証をたくさん認めた．実は，私がこの分野で発見した僅かのことも，氏の著作に啓発されてのことであって，氏が軸三角形を用いないで円錐曲線を扱ったことについては，できるかぎり氏の方法に倣おうと努めた．ところで，すべての円錐曲線を一般的に扱おうとするとき，問題となる驚くべき性質とは次のようなことである．

(**命題 IV**)　平面 MSQ 上に円錐曲線 PQV があり，その周上に 4 点 K，N，O，V をとって，同じ点は 2 直線しか通らないように直線 KN，KO，VN，VO を引く．他の一直線によって円錐曲線の周を点 R，$\psi$ で切る．このとき辺 ZR，Z$\psi$ の積の辺 yR，y$\psi$ の積に対する比は，辺 $\delta$R と $\delta\psi$ の積の辺 xR と x$\psi$ の積に対する比に等しい．

図 9




$$\frac{\mathrm{ZR}\cdot\mathrm{Z}\psi}{\mathrm{yR}\cdot\mathrm{y}\psi}=\frac{\delta\mathrm{R}\cdot\delta\psi}{\mathrm{xR}\cdot\mathrm{x}\psi}$$

また次のことが成りたつ．

(**命題 V**)　図 2　平面上に C を中心とする双曲線，楕円あるいは円 AGE がある．直線 AB が点 A でこの円錐曲線に接している．直径 CA を引き，直線 AB を，その平方が図の矩形の四分の一になるようにとる．また CB を引く．直線 AB に平行な任意の直線，例えば DE を引く．円錐曲線を E で，直線 AC，CB を点 D，F で切る．円錐曲線 AGE が楕円あるいは円なら，直線 DE，DF の平方の和は直線 AB の平方に等しい．双曲線の場合には，同じ直線 DE，DF の平方の差が直線 AB の平方に等しい．

またいくつか他の問題も扱う．例えば与えられた 1 点から与えられた円錐曲線に接線を引くこと．

与えられた角をなす共役直径を見出すこと．

与えられた角をなし，かつ与えられた比を有する二つの直径を見出すこと．

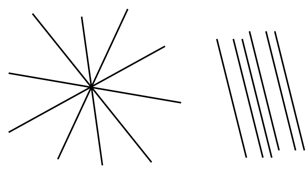
以上の他にも多くの問題や定理，またそこから導かれる多くの結論を得ている．しかし私は経験も浅く能力も乏しいので，先学が検討の労をとって下さるまで，この先に進むことは控えたい．検討された後，続ける意義があると認められたなら，神がことを運ぶ力を与えたまうかぎり，研究を推し進めるつもりである．

パリにて，1640 年

## 2.2 読解

### 2.2.1 本文読解

**定義 I** 1点を共有する直線の集合は束をなすといい，その集合を線束という．ここで，線束に互いに平行な直線の集合を含めている．これはデザルグの先行した研究を受けてのことであるが，平行な場合を別に扱っていない．平行な2直線は「無限遠点で交わる」という射影幾何がすでに形づくられている．



「無限遠点」という考え方は単に頭の中で考えただけのようであるが，じつはそれを自然に含む幾何が実在することをデザルグがつかみ，そのもとで円錐曲線を考えることが円錐曲線の理解のうえでも本質的に重要であることをパスカルが見ぬいた．この幾何を実現し，また記述する方法が二百年ほどかかって模索され整理された．そして姿を現したのが射影幾何である．それをおしすすめた学問の精神がもっとも狭義の幾何学の精神である．

**定義 II** 円錐を平面で切断することによって円錐曲線が得られることは今日広く知られている．日本の高等学校の教科書では「二次曲線は，空間における円錐を，その頂点を通らない平面で切った切り口の曲線として現れることが知られている」と書かれている．

円錐曲線の研究はギリシアにはじまった．円錐曲線を系統的に研究した最初の人は，プラトンの友人であったメナイクモス (Menaechmus，B.C.350 頃) であろうといわれている．メナイクモスはもちろんその後長い間，ギリシア人は円錐曲線を調べるのに，円錐をえがき，それを平面で切って考えてきた．小アジアの都市ベルガのアポロニウス (Apollonios，B.C.260〜200 頃) は平面曲線として円，双曲線，楕円を定義し，今日知られている多くの性質をすでに証明した．

アポロニウスの円錐曲線論はウェブサイト『円錐曲線（題材 : アポロニウスの「円錐曲線論」）』で日本語で読める．訳とそのすべてに図を与える労作である．

アポロニウスは底面と切断平面を固定し，円錐の軸を変化させてさまざまの円錐曲線を作る．これに対してデザルグは直円錐を固定し，切断平面を動かして円錐曲線を作る．アポロニウスからデザルグにおいて，**円錐を動かすことから切断平面を動かすことへの転換**があった．

定義 II は古い時代の円錐曲線ではなく，新しいデザルグの方法に立脚することを述べている．この観点があってはじめて，円での証明を円錐曲線に一般化するパスカルの発見がありえた．

順次，それぞれの内容をつかんでゆこう．

**補題 I** 補題 I は円に関するものである．補題 I では「4点 A，K，$\mu$，V のうちの2点で M や S とあわせた3点が同一直線上にないもの，例えば K，V をとり」と書かれているが，これに替えて A と $\mu$ をとるとどのようになるのか．図を描いてみると，この変更に応じて3直線 MS，NP，OQ が同じ束をなす．この共通の交点を T とおこう．

これを観点を変えてみる．つまり先に円周上の 6 点を考える．図 4 の場合は円周上に 6 点 K，Q，V，N，O，P があり，図 11 の場合は円周上に 6 点 N，A，Q，$\mu$，O，P がある．

これら 6 点をある六角形の頂点になるように配置したとき，3 組の対辺ができる．それら対辺の 3 つの交点が同一直線上にある．図 11 では M，S，T がその 3 交点である．

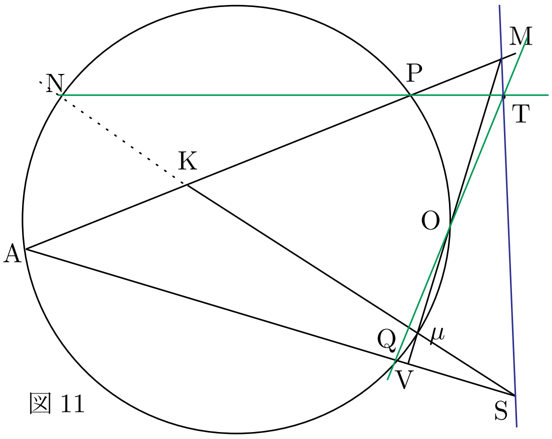
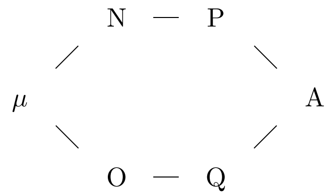


図 11

つまり，図 11 では 6 点を六角形の頂点に



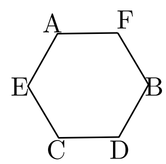

と配置したことになるが，この配置で対辺にあたる直線同士の 3 交点が同一線上にあることを主張している．NP と OQ の交点 T，AP と O$\mu$ の交点 M，N$\mu$ と AQ の交点 S が同一直線上にあることである．これが六角形の頂点への他の配置でもつねに成りたつ．

6 点を図の甲のように六角形に配置してその対辺の交点をとることを，型 $\dfrac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{DEF}}$ と書いて図の乙のように 3 個の交点をとるものとする．図の乙のように点が配置できることと，六角形に配置して対辺を組みあわせることは一対一に対応している．

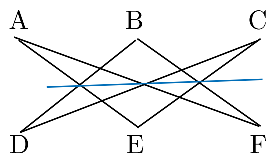
また $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DE}}$ で直線 AE と直線 BD の交点を表す．これはまた $\mathrm{AE} \wedge \mathrm{BD}$ とも記す．

この記号を用いるとパスカルは次の事実が成りたつことを主張している．これが円の場合の**パスカルの定理**である．この証明をパスカルはデザルグの方法で示したのだろう．それを垣間見る証明を後に「複比の方法」のなかでおこなう．

甲

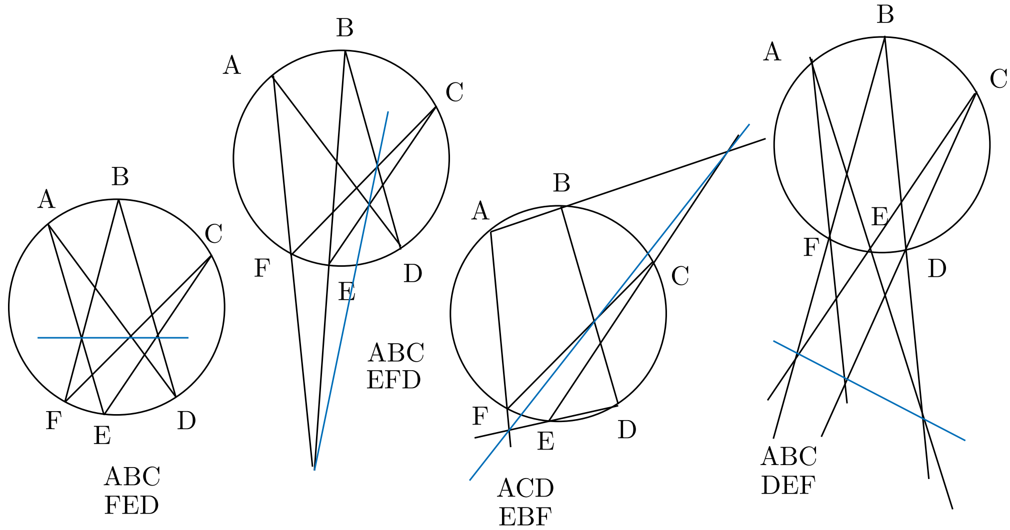



乙



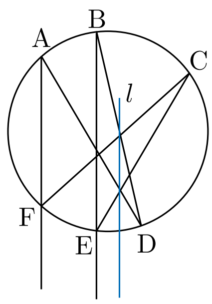

**命題 1**　円周上に 6 点 A，B，C，D，E，F がある．6 点を $\dfrac{\mathrm{XYZ}}{\mathrm{UVW}}$ の型に配置する．この型で定まる 3 点は同一線上にある．■

いくつかの例をあげる．




上にあげたのはいずれも，六角形の対辺となる 2 直線が交点をもつ場合であった．$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{EFD}}$ で AF と BE が平行な場合，この 2 直線と二つの交点を結ぶ直線 $l$ が線束をなすということは，これら平行 2 直線と $l$ が平行である，ということである．

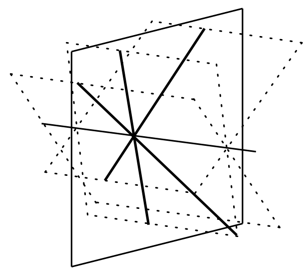
パスカルは，線束という概念を平行な直線集合を含めて定義し,「線束をなす」という中に平行な場合を含めた．この意味で補題 I は例外なくすべての場合を含めた命題となっている．これはまた，AF と BE は無限遠点で交わり，$\mathrm{BD}\wedge\mathrm{CF}$ と $\mathrm{AD}\wedge\mathrm{CE}$ を通る直線も同じ無限遠点を通る，といいかえることが出来る．




あるいはそのようにいいかえることが出来る立場をこれから構築する．つまり平行な場合を例外としない立場，あるいは同じことだが無限遠点を有限点と同じように扱える立場を確立し，円錐曲線の一般的研究をすることが課題である．

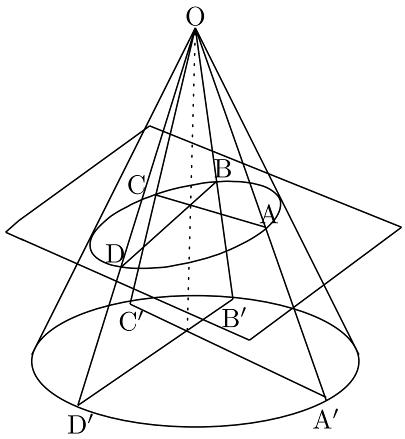
**補題 II と第 III 補題**　補題 II はいわゆるユークリッド空間の平面と平面の交わり図形として考えるかぎり自明である．しかし，無限遠点を例外としない立場でそのような直観が許されるのか．それも今後の問題である．

このことと，デザルグが発見しパスカルがそれを受け継いだ，円錐曲線を円錐を平面で切断する方法とを結びつけると，補題 1 が任意の円錐曲線で成りたつというのである．これが補題 II とそこから帰結する第 III の補題である．



楕円とその周上の 4 点 A，B，C，D に対し，それをある底面が円の直円錐上に置く．円錐の頂点を O とする．これを実現する円錐の存在を示さなければならない．

OA，OB，OC，OD と底面の交点を A′，B′，C′，D′ とする．すると，楕円のある平面上の 2 直線 AC と BD が交わるかどうかは，A′C′，B′D′ が交わるかどうかの問題に帰結する．他の点もあるときこれら交点が同一直線上にあるかという問題も，すべて対応する底円上の点や交点に関して示せばよいことになる．




かくしてパスカルの定理が確立する．ただし今は「2 直線が平行である」という命題を「2 直線が無限遠点で交わる」で置きかえうる理論ができるものとして，パスカルの定理を述べる．その前に新しい語を定義する．

**定義 1**　3 個以上の点が同一直線上にあることを**共線である**という．また 3 個以上の直線が一点で交わることを**共点である**という．■

3 個以上の直線が互いに平行であるとき，これらはある一つの無限遠点で交わると考えるのである．このように考えれば，直線の集合が共点であることと，パスカルの意味で束をなすことは同値である．

**定理 1**　円錐曲線上に 6 点 A，B，C，D，E，F がある．6 点を $\begin{matrix}\mathrm{XYZ}\\\mathrm{UVW}\end{matrix}$ の型に配置する．この型で定まる 3 点は同一線上にある．■

これがパスカルの定理である．パスカルは，円錐曲線に内接する六角形を**神秘六角形**と呼んだ．この第 III 補題にもとづいて，パスカルは 400 個の命題を証明し，円錐曲線の全理論を作ったと言われている．それが補題 II に続いて今後の予定として書かれていることである．しかし，この試論を除いて，それらの論文はそのごく一部以外は失われている．

パスカルは存命中にパリを訪れたライプニッツに会い稿本を渡している．そこにはパスカルの定理をはじめ．これら諸命題の証明があり，ライプニッツはこれを賞賛していた．ライプニッツはパスカルの死後 14 年の 1676 年に，その頃はまだ存在していたパスカルの諸原稿を整理している．それらからある程度は体系がどのようなものであったかをうかがうことはできる．『パスカル全集　第一巻』[3] の「数学論文集，解説」でパスカルの原著を読んでいたライプニッツの書簡などをもとに，その内容が追跡されている．しかし，証明そのものの詳細はわからない．

**命題 I**　命題 I を書き換えると次のようになる．

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MA}}\cdot\frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{LP}}=\frac{\mathrm{SQ}}{\mathrm{SA}}\cdot\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{TQ}}$$

一般に直線上の 4 点 A，B，C，D に対して，直線のいずれかの方向を正とし，逆方向を負として，線分の長さを向きつきで考えるとき，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}$$

を**複比**といい，$(\mathrm{A}, \mathrm{B}; \mathrm{C}, \mathrm{D})$ と表す．複比は次々節で定義し直す．この記号を用いると命題 I は

$$(\mathrm{M}, \mathrm{L}; \mathrm{P}, \mathrm{A}) = (\mathrm{S}, \mathrm{T}; \mathrm{Q}, \mathrm{A})$$

と表される．

**命題 II,III**　命題 II の前半は，複比の性質といわゆるメネラウスの定理から得られる．命題 II の後半，命題 III も順次得られる．ただしこれらは円の場合には簡明であるが，それを円錐曲線に一般化するとき，問題が提起される．円の場合の証明とこれらの問題は次々節に述べる．

**命題 IV**　これは，1639 年にデザルグが見出した定理である．これは複比の相等

$$(\mathrm{Z}, \delta; \psi, \mathrm{R}) = (y, x; \mathrm{R}, \psi)$$

を意味し，それから 2 点ずつの組

$$(\mathrm{R}, \psi),\ (\mathrm{Z},\ y),\ (\delta, x)$$

がそれぞれ射影幾何で定義される**対合**関係にあることを示す定理である．それから逆に考えると，ここでパスカルの等式は

$$\frac{\mathrm{ZR} \cdot \mathrm{yR}}{\mathrm{Z}\psi \cdot \mathrm{y}\psi} = \frac{\delta\mathrm{R} \cdot \mathrm{xR}}{\delta\psi \cdot \mathrm{x}\psi}$$

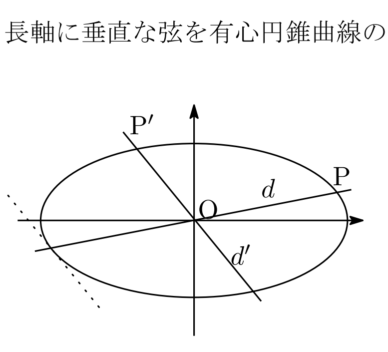
でなければならず，タトン が指摘しているとおり，ここにはパスカルの書き誤りがあると思われる．円での証明を次々節でおこなう．

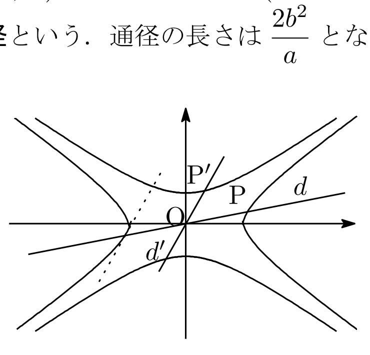
**命題 V**　命題 5 は中心のある円錐曲線，つまり楕円と双曲線に関する定理である．中心をもつ円錐曲線を有心円錐曲線という. さて，命題 V のパスカルの記述には少し勘違いがあるようである. それを読み解こう.

有心円錐曲線の中心を通る直線を**直径**という．有心円錐曲線は直交座標では原点を中心 O にとり，座標を選ぶことで

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad + : \text{楕円},\ - : \text{双曲線}$$

と表される．双曲線の場合 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ となるものを共役双曲線といい，これをあわせて考える．焦点の座標は，楕円で $a > b$ のとき $(\pm\sqrt{a^2 - b^2},\ 0)$，双曲線の場合は $(\pm\sqrt{a^2 + b^2},\ 0)$ である．焦点を通り，長軸に垂直な弦を有心円錐曲線の**通径**という．通径の長さは $\dfrac{2b^2}{a}$ となる．



以下解読を楕円でおこなう．双曲線を含めた証明は次々節でおこなう．

楕円の直径 $d$ をとる．$d$ に平行な弦の中点の軌跡はふたたび直径 $d'$ となる．$d'$ を $d$ に共役な直径という．$d$ が楕円と交わる点における接線と，$d'$ が平行になる．

楕円と直径 $d$，$d'$ の交点の一つを P，P$'$ とし，$\mathrm{OP} = a'$，$\mathrm{OP'} = b'$ とする．また $d$ と $d'$ のなす角を $\omega$ とする．このとき，

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \quad \triangle\mathrm{OPP'}\text{の面積} = \frac{ab}{2}$$

が成りたつ．

さらに $d$，$d'$ 上の点 S，T を，$\mathrm{OS} = X$，$\mathrm{OT} = Y$ であるようにとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} + \overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

とする．点 $Q$ がこの楕円上の点であるための条件は

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

である．つまりこれが $d$ と $d'$ を斜交軸とする斜交座標による楕円の方程式である．

以上の前提でパスカルを読みかえす．タトン の前掲文献の注を解釈すると，パスカルの時代に「図の矩形」は次のものを意味していた．

$a' > b'$ のときを考える．先の斜交座標で $(\sqrt{a'^2 - b'^2},\ 0)$ となる点を通り $d'$ に平行な弦を，この直径に関する通径とする．この長さは $\dfrac{2b'^2}{a'}$ となる．この長さと $d$ の (切りとられる部分の) 長さ $2a'$ の積を「図の矩形 (の面積)」という．つまり $4b'^2$ である．パスカルは次のように言おうとしたのではないか．

> 平面上に C を中心とする双曲線，楕円あるいは円 AGE がある．直線 AB が点 A でこの円錐曲線に接している．A$'$ を CA$'$ が CA に対する共役直径になる円錐曲線上の点とする．直径 CA を引き，直線 AB を CA$'$ に等しく とる．また CB を引く．直線 AB に平行な任意の直線，例えば DE を引く．円錐曲線を E で，直線 AC，CB を点 D，F で切る．円錐曲線 AGE が楕円あるいは円なら，直線 DE，DF の平方の和は直線 AB の平方に等しい．双曲線の場合には，同じ直線 DE，DF の平方の差が直線 AB の平方に等しい．

これなら，先の斜交座標による円錐曲線の方程式を示し，これを用いれば計算で示される．これも後に行う．それにしても，座標幾何もまだ形成されていないこの時代に，いったいパスカルはどのようにしてこれらの結果を得たのだろうか．それを考えると，驚くとともに不思議な感じさえする．

### 2.2.2 神秘六角形

**図形の実験**　幾何学はまず図形の科学としてはじまる．いくつもの図を描いていろいろと実験することが大切である．そのうえで，個々の現象の証明から，さらにその証明を支える根拠，そしてより大きな枠組の構築，その場での新たな問題の発見，と進んでゆく．このように学を展開してゆくこと自体が幾何学の精神ではないか．その意味でいろいろと実験することは幾何学のはじまりで

ある．パスカルの定理の証明の前に，パスカルの定理を前提としながら，いくつか図を描いていこう．われわれもまた，神秘六角形の神秘さに触れようではないか．定理を証明してゆく，あるいは理論の組み立てていくその原動力は，何よりこの神秘さに触れることである．

**パスカル線**　パスカルは，補題 II を根拠にして，共線や共点であることを円の場合に示すことで，それが任意の円錐曲線で成立することを示した．よって実際に神秘三角形を描いてみるときは，円でやってみればよい．

また，3 直線が平行な場合も 1 点で交わる場合も同じように考えることができることを，線束の概念でくくることで示している．このような幾何を実際に見出すことは今後の課題である．それはおさえたうえで，この立場から考える例は，六角形の頂点が一般の位置にある，つまり 2 頂点を結ぶ直線はいずれも平行でないとしてよい．

このような場合についていろいろな例を作ることが大切である．そこで，円周上に左回りに 6 点 A，B，C，D，E，F があるとしよう．パスカルの定理によって，

$$\text{型}\ \frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{EFD}}$$

で定まる 3 直線の交点は共線をなす．パスカルの定理を前提にすれば，型 $\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{EFD}}$ は一つの直線を表す．この直線を**パスカル線**という．

まずパスカル線は何本あるか．記号 $\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{EFD}}$ で，上下の入れかえと $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}}$，$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{F}}$，$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ の並べ替えは同じ 3 交点になるので，パスカル線は

$$\frac{6!}{2\cdot 3!}=60 \quad (\text{本})$$

ある．これはまた，A の位置を固定し他の 5 点を並べ，A の横に並ぶ 2 点の入れかえは同じものになるということから，

$$\frac{5!}{2}=60 \quad (\text{本})$$

とも考えられる．さらにまたこの式は，回転と対称で重ならない 6 点の並べ方の総数，いわゆる環順列の場合の数そのものでもある．

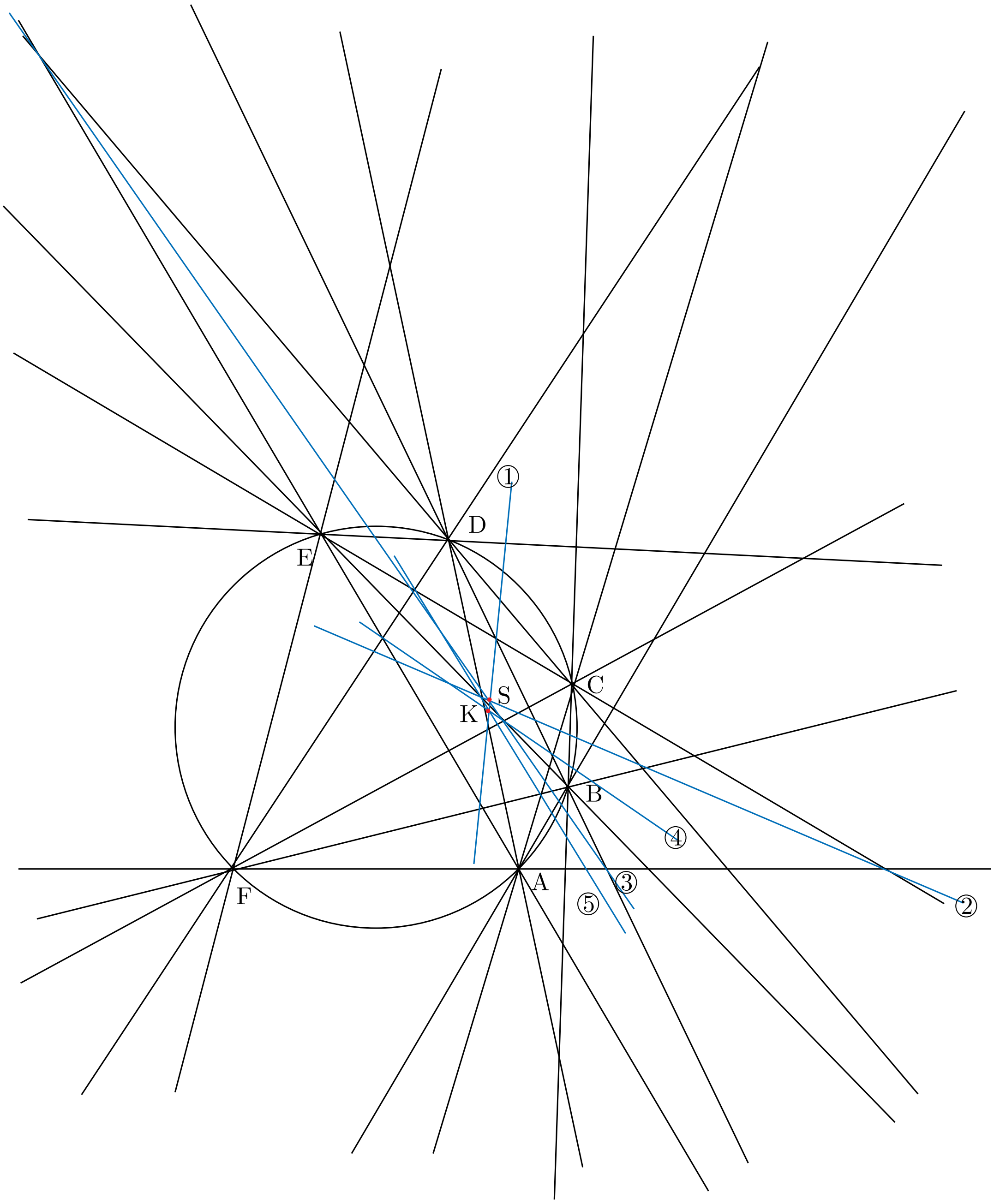
いちどはこれをすべて描いてみたいものだ．その上で次のサイトには，点を動かしたときのパスカル線の変化を実際に見ることができる．制作者に感謝して紹介する．

(1) Pascal's Theorem: What is it?,　Pascal in Ellipse

(2) 円のパスカルの定理，　楕円のパスカルの定理

**パスカル線の相互関係**　そのうちのいくつかを描いてみる．例えば次の型のパスカル線を引いてみよう．

$$\text{①}:\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{FED}},\quad \text{②}:\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{EDF}},\quad \text{③}:\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{DFE}},\quad \text{④}:\frac{\mathrm{FAB}}{\mathrm{EDC}},\quad \text{⑤}:\frac{\mathrm{EFA}}{\mathrm{DCB}}$$




これから見えてくることは，3 本のパスカル線 ①，②，③ は共線ではないか，また 3 本のパスカル線 ①，④，⑤ も共点ではないかということである．実はこれが成りたつ．

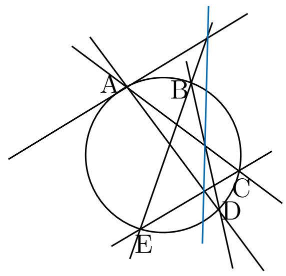
(1) ①，②，③ のように，この記号で，上の 3 点を固定し，下の 3 点を順次ずらした 3 本のパスカル線は共点である．これを**シュタイナーの定理**という．この共点 S をシュタイナー点という．

(2) ①，④，⑤ のように，この記号で，全体を右回りに動かした 3 本のパスカル線は共点である．これを**キルクマンの定理**という．この共点 K をキルクマン点という．

これらについては，ウエブサイト Pascal Lines: Steiner and Kirkman Theorems で実験できる．またその証明は参考文献『幾何学大辞典 6』の「附録」にある．ここには，その他のさらなる相互関係も紹介されている．これらはパスカルの論文からおよそ二百年後，十九世紀中葉に大いに研究され，ほぼそのすべてが解明されたのである．これらがパスカルの定理からその応用として導かれる．

**退化六角形**　六角形の頂点 A と B を結び，その上で点 B を点 A に近づけると，直線 AB は点 A での接線になる．これは接線の定義そのものである．

このような連続的な変化に対して，点 B が A にいくら近づいても異なる点であるかぎりパスカル線は存在するので，点 B を点 A に近づけるとパスカル線も動くが，接線になったときも 3 交点は共線である．これを同様に $\dfrac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{EAD}}$ と記す．これは円周上に 5 点 A，B，C，D，E をとり，AA を結ぶときは点 A での接線をとるものとすることを意味する．




次に，円周上に 4 点 A，B，C，D があり，そのうち 2 本を接線とする場合を考える．次のようにパスカル線が一致する場合などが起こる．この場合パスカル線は何本あるか．4 点のうちどの 2 点で接線を引くかは ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り．例えばそれを A と B とする．C と D の使い方は次の 3 通りである．

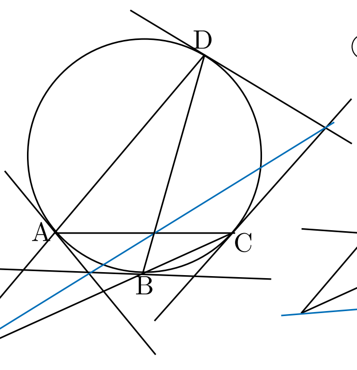
$$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{BAD}},\quad \frac{\mathrm{ABD}}{\mathrm{CAB}},\quad \frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{DAB}}$$

したっがてパスカル線は 18 本描ける．

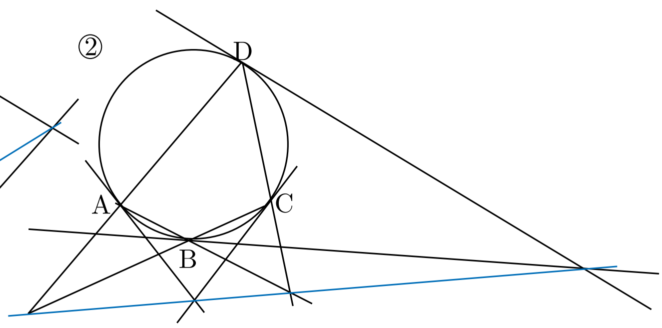
このうち，$\dfrac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{BAD}}$ と $\dfrac{\mathrm{ACD}}{\mathrm{BDC}}$ の 2 本のパスカル線は 2 点 $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}$ と $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DC}}$ を共有し，したがって一致する (下図 ① )．

もう一例．$\dfrac{\mathrm{ACB}}{\mathrm{CAD}}$ と $\dfrac{\mathrm{ABD}}{\mathrm{CDB}}$ の 2 本のパスカル線は 2 点 $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}$ と $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DB}}$ を共有し，したがって一致する．(下図 ② ) このように一致するパスカル線が 2 本ずつあり，合計 6 本のパスカル線は 2 本ずつ重なって 3 本になる．

①




②

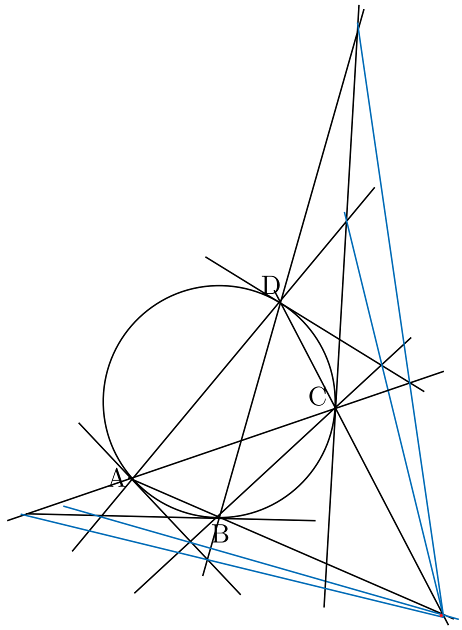


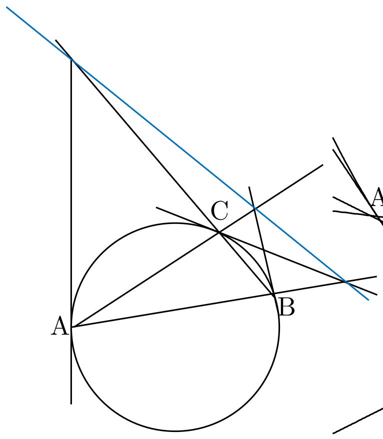
一方，

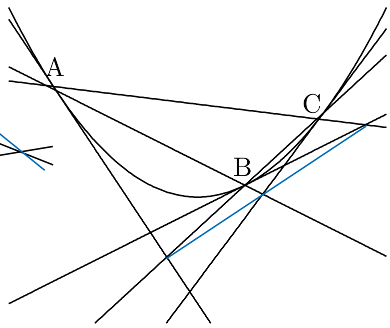
$$\frac{\mathrm{ABD}}{\mathrm{CAB}},\ \frac{\mathrm{ACD}}{\mathrm{CDB}},\ \frac{\mathrm{ABD}}{\mathrm{BCA}},\ \frac{\mathrm{ACD}}{\mathrm{DBC}}$$

の 4 本のパスカル線は 1 点 $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DB}}$ を共有する共点である．このように 1 点を共有するパスカル線が 3 組あり，この型は合計 12 本である．

あわせて 18 本あり，これが 2 点で接線を引く場合である．

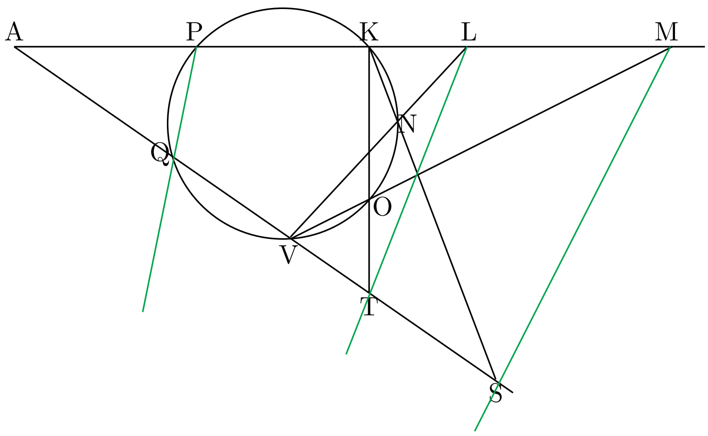



3 点 A，B，C において 3 接線を引く場合は，パスカル線は $\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{CAB}}$ の 1 本しかない．

**命題 1 に関して**　命題 1 の証明は，六角形に関する次の事実とデザルグの定理から示される．ここにも神秘六角形がある．円に内接する六角形 PQVONK をとる．PK と VQ の交点を A とする．KO，KN の AV との交点を T，S とし，VN，VO の AK との交点を L，M とする．このとき 3 直線 PQ，LT，MS は束をなす．




自分でいろいろな図を書いてその神秘さにふれることを心から勧める．

## 2.3 証明の試み

### 2.3.1 初等幾何の二証明

**証明とその吟味** パスカルは直線の集合が 1 点を共有するかまたは互いに平行であることを「束をなす」と定義した．また，円錐を平面で切断することによって，パスカルの定理を円の場合に証明すれば，一般の円錐曲線で成り立つことを指摘した．われわれは厳密にその根拠を尋ねたい．

これをいいかえれば，1 点を共有するか平行であるかを区別しなくてよい一般的な立場や方法があるということである．それはまた，円や楕円など個別の円錐曲線をそれがおかれた平面の変換で互いにうつすことができ，直線が束をなすという性質，あるいは点が共線であるという性質が，その変換で変わらない．そのような平面とその変換があるということでもある．

これらを実際に構築する方法は，これまでの考察でも垣間見えてきているわけであるが，今後の課題である．ただこのような立場，あるいはこのような幾何ができたならば，平行な場合を区別しなくてよいし，円の場合に証明すればよいことになる．

そこでまず，円の場合のパスカルの定理である命題 1 について，その証明をいろいろと考えていこう．そしてそこで使われる方法を吟味し，証明の根拠としてどのような理論が準備されればならないのかを考えよう．

**日本の高校数学** 先に一般的な理論があるのではない．数学的な現象を確認したら，まずそれを手持ちの方法で証明する．そのうえで手持ちの方法を検討し，そこから一般的な方法を探究する．これが大切である．

その手持ちの方法を，日本の高校数学の方法とすることは自然である．ところが，日本の高校数学で使えることが国家の方針によってよく変更される．例えば，複素平面は 2010 年現在は教育課程に入っていない．しかし 10 年前にはあり，2012 年入学年から復活する．逆にそのとき，二次行列や平面の一次変換はなくなる．しかしこのように教育課程が定まらないことはたいへん大きな問題であり，不幸なことである．

15 歳から 18 歳の時代に学んでおくべきことはそんなに変化するものではない．それをこの間青空学園では一貫して訴えてきた．そこでこの節で使う方法を，これまで日本の高校数学に現れた次のものを大きくは越えない次のものとする．この範囲のうちで『円錐曲線試論』に現れた諸命題の証明を試みよう．

(1) ユークリッド幾何学

(2) ベクトル表示を含む平面と空間の座標幾何学

(3) 平面の一次変換と二次行列の理論

(4) 三次行列と行列式の基本事項

(5) 複素平面の幾何学

**円周角の相等を用いる証明**

この証明は『代数曲線の幾何学』[28] によれば「パスカルの定理のパスカルによる証明」である．

円周上に 6 点 A，B，C，D，E，F がこの順にある．命題 1 は $\dfrac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{DEF}}$ 等のあらゆる型に対し，つねにパスカル線が定まることを主張している．このうちの一つの場合 $\dfrac{\mathrm{ACE}}{\mathrm{DFB}}$ について，円周角の相等と三角形の相似を用いて命題 1 を示そう．

命題 1 に，点の順も条件としてつけ加えた次の命題で示す．

**命題 2**　円 $C$ の周上に 6 点，A，B，C，D，E，F がこの順に並んでいる．

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DB}},\ \mathrm{Q}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{FB}},\ \mathrm{R}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DF}}$$

とする．このとき P，Q，R は共線である． ■

**証明**　3 点 A，D，P を通る円を $C'$ とし，円 $C'$ と直線 FA の他の交点を S，DC との交点を T とする．円 $C$ に内接する四角形 CDEF の内角と対角の補角の相等により

$$\angle\mathrm{CFE}=\angle\mathrm{CDP}$$

円 $C'$ での円周角の相等により

$$\angle\mathrm{TDP}=\angle\mathrm{TSP}$$

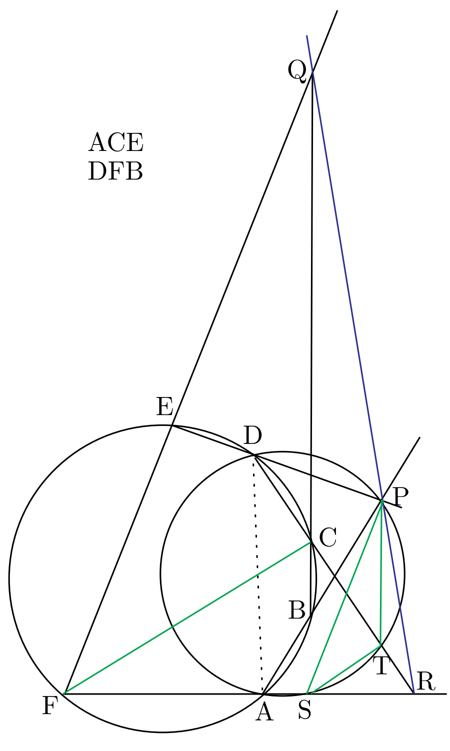
よって △TPS と △CQF において

$$\angle\mathrm{PST}=\angle\mathrm{QFC}$$

である．同様に円 $C'$ での円周角の相等，円 $C$ での円周角の相等，円 $C$ に内接する四角形 ABCD の内角と対角の補角の相等により，

$$\angle\mathrm{APT}=\angle\mathrm{ADT}=\angle\mathrm{AFC}=\angle\mathrm{CBP}$$

よって PT // CQ である．同様に円 $C'$ に内接する四角形 ASPD と，円 $C$ に内接する四角形 CDEF を考えることにより




$$\angle\mathrm{PSR}=\angle\mathrm{ADP}=\angle\mathrm{AFE}$$

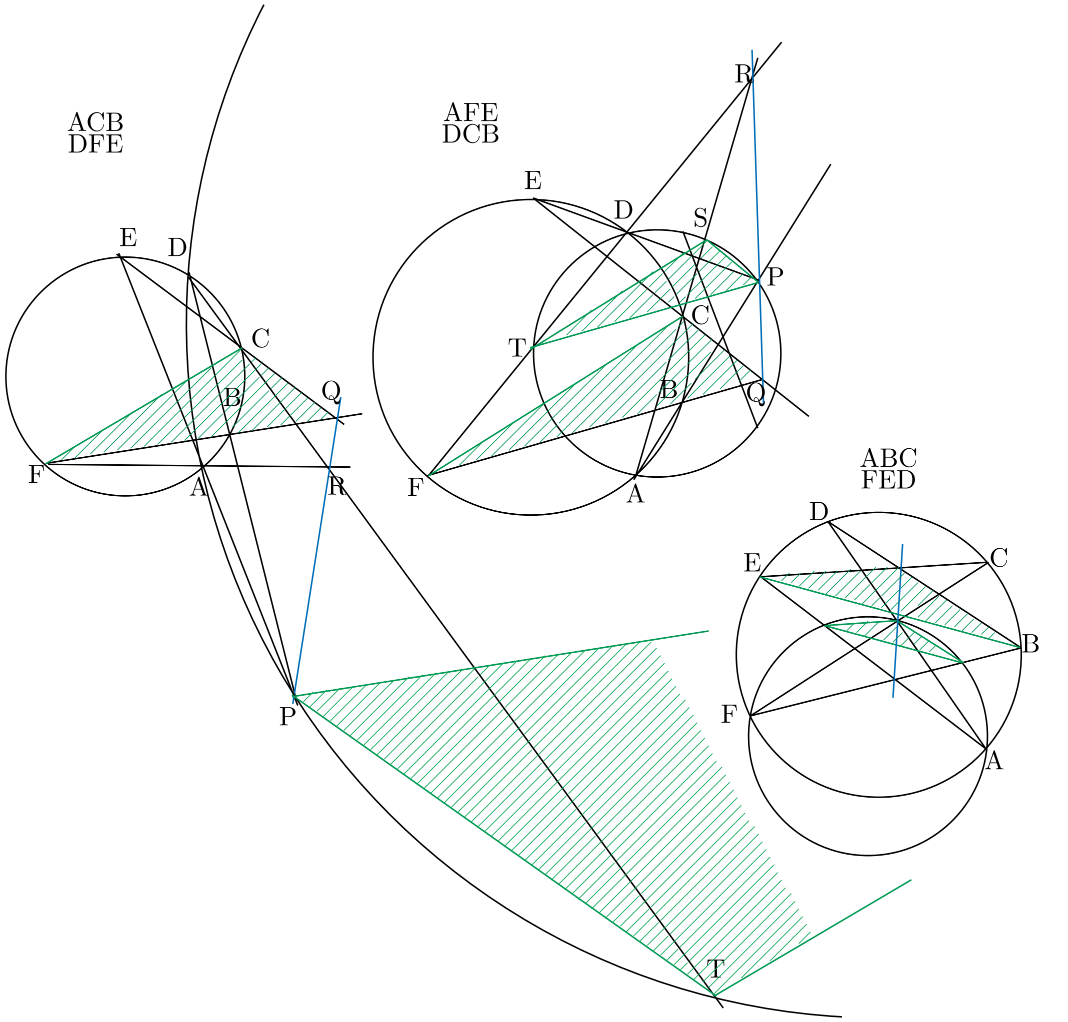
よって SP // FQ である．

この結果，△TPS と △CQF は相似であり，点 R が相似の中心である．よって他の頂点 P，Q と相似の中心 R は共線である． □

**方法の反省**　おそらくパスカルは彼の直観によって円の場合の証明は，点の順の指定のない命題 1 もこれと同様に出来ることを知った．しかし，この方法では，例えば $\dfrac{\mathrm{ACB}}{\mathrm{DFE}}$，$\dfrac{\mathrm{AFE}}{\mathrm{DCB}}$，$\dfrac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{FED}}$ 等についても同様にできる保証はないのではないか．これについては Chasing Angles in Pascal's Hexagon などで実験すれば，できそうであるが，これだけでは論証にならない．

(1) 個別の点の配置に関わる方法には一般性がない．

(2) つねに相似な三角形が現れることは一般的な方法の存在を示唆している．




**長さの比を用いる証明**

メネラウスの定理と方べきの定理を用いて命題2を証明しよう．そのためにまずメネラウスの定理を補題として証明する．さらにその前提として，**有向線分**を定義する．

平面上に直線 $l$ がある．$l$ 上には1の大きさと正の方向が定まっているものとする．2点A，Bがある．このとき，点Aから点Bへ向かう方向が，定まっている正の方向のとき「AB」でAとBの距離を正の値にとった数を表す．点Aから点Bへ向かう方向が，定まっている正の方向と逆のとき「AB」でAとBの距離を負の値にとった数を表す．符号をつけた線分を有向線分という．その値を「有向線分の長さ」という．混乱しないときは「有向線分」で長さも表すことがある．

$l$ 上の3点A，B，Cがどの順で並んでいても

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\mathrm{AC}$$

である．

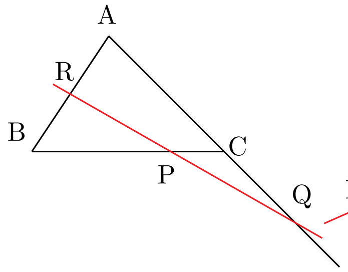
今後用いるのは $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ のような比である．この比の値は $l$ の正の方向をいずれにとるかに関係なく一意に定まる．比の値が正ということは同方向，負ということは逆方向であることを意味する．以下直線上の線分の長さの比をこの意味で用いる．

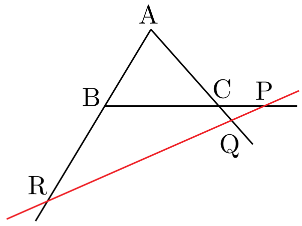
### メネラウスの定理

**補題 1**　三角形 ABC の頂点 A，B，C に対し，点 A，C の対辺上に 2 点 P，R と点 B 対辺の延長線上に 1 点 Q をとるか，またはそれぞれの対辺の延長線上に 3 点 P，Q，R をとる．いずれの場合も，

(1) 3 点 P，Q，R が一直線上にあれば $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=-1$ となる．

(2) $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=-1$ なら 3 点 P，Q，R は一直線上にある．　■




(1) を**メネラウスの定理**といい，(2) を**メネラウスの定理の逆**という．あわせて，条件 $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=-1$ と，3 点が 1 直線上にあるという条件が，同値であるということである．

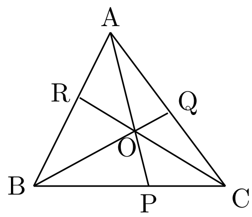
**チェバの定理**　今度は三つの比と 1 点の間に成り立つのがチェバの定理である．

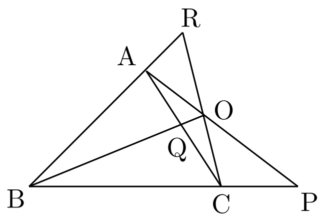
**補題 2**　三角形 ABC の頂点 A，B，C に対し，それぞれの対辺上に 3 点 P，Q，R をとるか，または点 B の対辺上に点 Q と点 A，C の対辺の延長線上に 2 点 P，R をとる．いずれの場合も，

(1) 3 直線 AP，BQ，CR が一点 O で交われば $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ が成立する．

(2) 逆に $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ なら 3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．

■



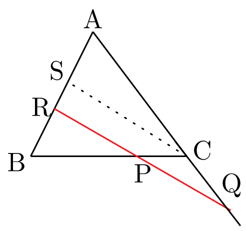



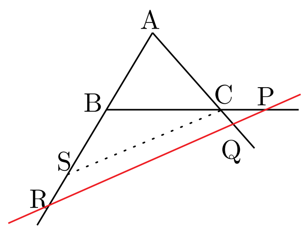

(1) を**チェバの定理**といい，(2) を**チェバの定理の逆**という．あわせて，条件 $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ と 3 直線が 1 点で交わることが同値であるということである．

**メネラウスの定理の証明**

(1)　点 C から QR に平行な直線 CS を引く．

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RS}},\ \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{RA}}$$




となる．

よって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RS}}\cdot\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{RA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=-1$$

である．

(2)　直線 QR と直線 BC の交点を P′ とする．このとき

$$\frac{\mathrm{BP'}}{\mathrm{P'C}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=-1$$

となる．一方 $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = -1$ なので

$$\frac{\mathrm{BP'}}{\mathrm{P'C}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$$

となり，$\mathrm{P'} = \mathrm{P}$ である．つまり，3 点 P，Q，R は一直線上にあることが示された． □

**チェバの定理の証明**

(1) △ABP を直線 ROC が切っていると見れば，メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}} \cdot \frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = -1$$

また △APC を直線 QOB が切っていると見れば，メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BP}} \cdot \frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}} \cdot \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}} = -1$$

第一式を第二式で割ると

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

を得る．

(2)　BQ と CR の交点を O とし，AO と BC の交点を P′ とする．このとき (1) によって

$$\frac{\mathrm{BP'}}{\mathrm{P'C}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

が成り立つ．一方，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$ なので

$$\frac{\mathrm{BP'}}{\mathrm{P'C}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$$

となり，$\mathrm{P'} = \mathrm{P}$ である．つまり 3 直線 AP，BQ，CR は一点で交わる． □

**第二の証明**　以上の準備と方べきの定理を用いて，命題 2 の第二の証明をする．方べきの定理は円周角の定理による三角形の相似から示されるので，この証明にも円周角の定理が用いられている．

**証明**　直線 AF と BC の交点を L，直線 AF と DE の交点を M，直線 DE と BC の交点を N とする．
△LMN と直線 CD にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{ND}} \cdot \frac{\mathrm{RL}}{\mathrm{MR}} \cdot \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{LC}} = -1$$

同様に △LMN と直線 FQ，△LMN と直線 AP にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{QL}} \cdot \frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{NE}} \cdot \frac{\mathrm{FL}}{\mathrm{MF}} = -1, \qquad \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{NP}} \cdot \frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{MA}} \cdot \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{LB}} = -1$$

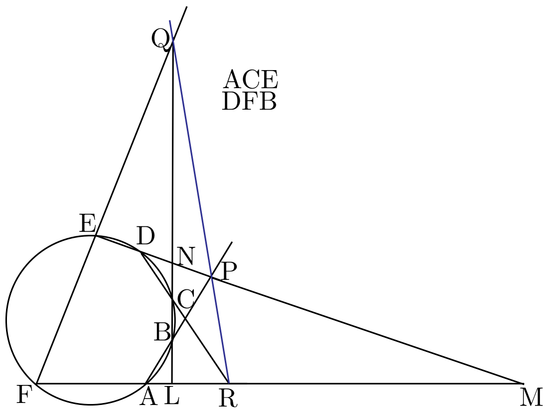
これら 3 式をかけあわせ，方べきの定理

$$\mathrm{LA} \cdot \mathrm{LF} = \mathrm{LB} \cdot \mathrm{LC}$$
$$\mathrm{ME} \cdot \mathrm{MD} = \mathrm{MF} \cdot \mathrm{MA}$$
$$\mathrm{ND} \cdot \mathrm{NE} = \mathrm{NC} \cdot \mathrm{NB}$$

を用いることにより，

$$\frac{\mathrm{RL}}{\mathrm{MR}} \cdot \frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{LQ}} \cdot \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{NP}} = -1$$

を得る．メネラウスの定理の逆によって，3 点 P，Q，R は共線である． □




**方法の反省**　本証明も点の順に関する仮定から自由ではない．

さらに次のような問題も指摘できる．パスカルは円を底面とする円錐を切断することで，円の場合にパスカル線の存在を示せば，円錐曲線の場合も証明されていることを指摘した．

この方法で底面上の線分は円錐を切断する平面上の線分に対応するが，その長さは変化するし，同じ直線上の線分の比も変化する．一方，メネラウスの定理やチェバの定理では，線分の長さおよびその比が重要であった．

長さや比を用いて円の場合に証明する．それを長さや比を保たない変換で円錐曲線に一般化するのだから，円の場合の証明がそのまま円錐曲線の場合の根拠となるのか，吟味も必要になる．この証明方法では，このような問題が生じる．

### 2.3.2　複比という方法

#### 複比の定義

あらためて有向線分の複比を定義する．

**定義 2** 直線上の 4 点 A，B，C，D に対し，有向線分の比の比

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} : \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} \cdot \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}$$

をこれら 4 点の**複比**といい，$(\mathrm{A}, \mathrm{B}; \mathrm{C}, \mathrm{D})$ と表す． ■

**注意 1** 長さの定義されるユークリッド空間の点は A，B のように大文字で表す．後に射影幾何を定義する．射影空間の点は $a$，$b$ のように小文字で表す．定義 22 において，射影空間の直線上の点 $a$，$b$，$c$，$d$ に対して複比が定義される．そこでは，ユーリッド空間の複比 $(\mathrm{A}, \mathrm{B}; \mathrm{C}, \mathrm{D})$ と区別して，$\bigl[a,\ b;\ c,\ d\bigr]$ と表される．

複比は点がどのように並んでいるかに関係なく定義される．逆にいいかえると，直線上にある 4 点 A，B，C，D に関して，点そのものは動かさず，点名 A，B，C，D の 24 通りの順列に対応して，その順列を「あ，い，う，え」とすると，複比 (あ，い ; う，え) が定まり，合計 24 個の複比が定義される．

**補題 3**　直線上の 4 点に対して定まる 24 個の複比のうち，4 個ずつはつねに同じ値になる． ■

**証明**　$\lambda = (\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{C},\mathrm{D})$ とおく．

$$(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{C},\mathrm{D}) = (\mathrm{B},\mathrm{A};\mathrm{D},\mathrm{C}) = (\mathrm{C},\mathrm{D};\mathrm{A},\mathrm{B}) = (\mathrm{D},\mathrm{C};\mathrm{B},\mathrm{A}) = \lambda$$

であり，

$$(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{D},\mathrm{C}) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{A},\mathrm{C};\mathrm{B},\mathrm{D}) &= \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CB}} = \frac{(\mathrm{CB}-\mathrm{CA})\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CB}}\\ &= \frac{\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}-\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CA}+\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CA}-\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CB}}\\ &= \frac{\mathrm{CB}\cdot\mathrm{AD}-\mathrm{CA}\cdot\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CB}} = 1-\lambda\end{aligned}$$

なので，これらの変換の組合せから

$$(\mathrm{A},\mathrm{C};\mathrm{D},\mathrm{B}) = \frac{1}{1-\lambda}$$
$$(\mathrm{A},\mathrm{D};\mathrm{B},\mathrm{C}) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$$
$$(\mathrm{A},\mathrm{D};\mathrm{C},\mathrm{B}) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

となる．これらの値に等しいものが 4 個ずつあり，計 24 個となる．　□

複比は 6 個の値のどれかで一致すれば，おなじ並べ替えを行った他の値でも一致することがわかる．またこれら 6 個の値のなかに同じものが現れるのは実数の範囲では $\lambda = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$ のときである．現在はユークリッド平面で考えている．複素解析など複素数平面で考えるとさらに $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{3}$，つまり 1 の 6 乗根が現れる．

$\lambda = -1$ のときは $\frac{1}{1-\lambda}$ が $\frac{1}{2}$ となる．$\lambda = -1$ のとき 4 点 A，B，C，D は**調和列点**をなすという．またこのとき，

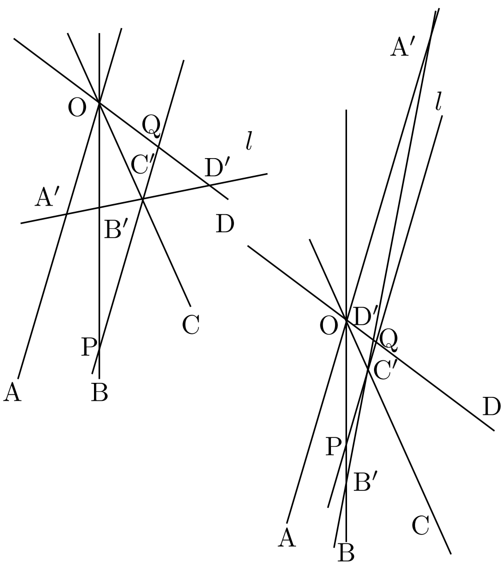
$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}$$

が成り立つので，直線上に 4 点が A，C，B，D の順に並んでいるとき，点 C と点 D は線分 AB を同じ比にそれぞれ内分，外分する

**補題 4**　点 O を共有する 4 直線の線束 OA, OB, OC, OD がある．これらと交わる直線 $l$ を引き，交点をそれぞれ $\mathrm{A}'$，$\mathrm{B}'$，$\mathrm{C}'$，$\mathrm{D}'$ とする．複比 $(\mathrm{A}',\mathrm{B}';\mathrm{C}',\mathrm{D}')$ は $l$ のとり方によらない．　■

**証明**　$l$ の平行移動によって複比 $(\mathrm{A}',\mathrm{B}';\mathrm{C}',\mathrm{D}')$ は変わらないので，$l$ は OC 上の点 $\mathrm{C}'$ を通るとしてよい．

点 C′ をとおり直線 OA に平行な直線を引き，OB，OD との交点を P，Q とする．




$$\triangle \mathrm{OA'B'} \backsim \triangle \mathrm{PC'B'}, \quad \triangle \mathrm{D'OA'} \backsim \triangle \mathrm{D'QC'}$$

より，

$$\frac{\mathrm{C'B'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{PC'}}{\mathrm{OA'}}, \quad \frac{\mathrm{A'D'}}{\mathrm{C'D'}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{C'Q}}$$

よって

$$(\mathrm{B'}, \mathrm{D'}; \mathrm{C'}, \mathrm{A'}) = \frac{\mathrm{PC'}}{\mathrm{OA'}} \cdot \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{C'Q}} = \frac{\mathrm{PC'}}{\mathrm{C'Q}}$$

この値は $l$ によらず一定である．この結果

$$(\mathrm{A'}, \mathrm{B'}; \mathrm{C'}, \mathrm{D'}) = 1 - (\mathrm{B'}, \mathrm{D'}; \mathrm{C'}, \mathrm{A'})^{-1}$$

も $l$ によらず一定である． □

複比は点 O と直線で決まるので，これを $\mathrm{O}(\mathrm{A}, \mathrm{B}; \mathrm{C}, \mathrm{D})$ と記す．点 O を記さず $(\mathrm{A}, \mathrm{B}; \mathrm{C}, \mathrm{D})$ と記すときは 4 点は同一の直線上にあるときである．また，上記図の右の場合のように，直線 $l$ の交点は点 O に関して同じ側にある必要はない．

**補題 5**　円周上の異なる 2 点 P，Q と異なる 4 点 A，B，C，D に関して

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B}; \mathrm{C}, \mathrm{D}) = \mathrm{Q}(\mathrm{A}, \mathrm{B}; \mathrm{C}, \mathrm{D})$$

である． ■

**証明**　点 P と Q が 4 点の優弧，劣弧に関して同じ側にあれば円周角の相等により

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}, \angle \mathrm{BPC} = \angle \mathrm{BQC}, \angle \mathrm{CPD} = \angle \mathrm{CQD}$$

である．したがって線束 PA，PB，PC，PD を P が Q になり直線 PA が直線 QA となるように移動すると線束 QA，QB，QC，QD に重なる．よって補題 4 によって，二つの複比は相等しい．

点 P と Q が 4 点のうちの 2 点に関して優弧，劣弧の異なる側にある場合は，点 Q に関する角を補角にとることによって，補題 4 から二つの複比の相等が結論される． □

**補題 6**　直線上の 5 点 A，B，C，D，E について

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}; \mathrm{C}, \mathrm{D}) = (\mathrm{A}, \mathrm{B}; \mathrm{C}, \mathrm{E})$$

なら D = E である． ■

**証明**

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} \cdot \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}} \cdot \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}}$$

より

$$\begin{aligned} & \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BE} - \mathrm{BD} \cdot \mathrm{AE} \\ = \; & \mathrm{AD} \cdot (\mathrm{BD} + \mathrm{DE}) - \mathrm{BD} \cdot (\mathrm{AD} + \mathrm{DE}) \\ = \; & (\mathrm{AD} - \mathrm{BD}) \cdot \mathrm{DE} = 0 \end{aligned}$$

$AD - BD = AB \neq 0$ より $DE = 0$．つまり $D = E$ である． □

**補題 7**　点 A を共有する 2 直線上の点列 A，$B_1$，$C_1$，$D_1$ と A，$B_2$，$C_2$，$D_2$ に対して

$$(A, B_1; C_1, D_1) = (A, B_2; C_2, D_2)$$

が成りたてば，3 直線 $B_1B_2$，$C_1C_2$，$D_1D_2$ は束をなす． ■

**証明**　2 直線 $B_1B_2$，$C_1C_2$ の交点を O とし，直線 $D_1O$ と直線 $AB_2$ との交点を ${D_2}'$ とする．補題 4 より

$$(A, B_1; C_1, D_1) = (A, B_2; C_2, {D_2}')$$

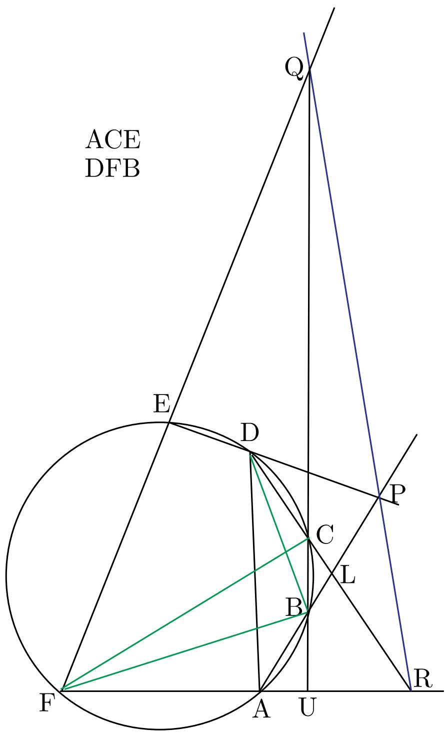
よって

$$(A, B_2; C_2, {D_2}') = (A, B_2; C_2, D_2)$$

となり，補題 6 から ${D_2}' = D_2$ である．つまり，3 直線 $B_1B_2$，$C_1C_2$，$D_1D_2$ は点 O を共有し束をなす． □

### 複比を用いた証明

複比を用いて命題 2 を証明しよう．




**証明**　新たに，直線 AP と直線 DR の交点を L，直線 QB と直線 FA の交点を U とする．補題 5 によって

$$F(A, B; C, E) = D(A, B; C, E)$$

一方，

$$F(A, B; C, E) = (U, B; C, Q)$$
$$D(A, B; C, E) = (A, B; L, P)$$

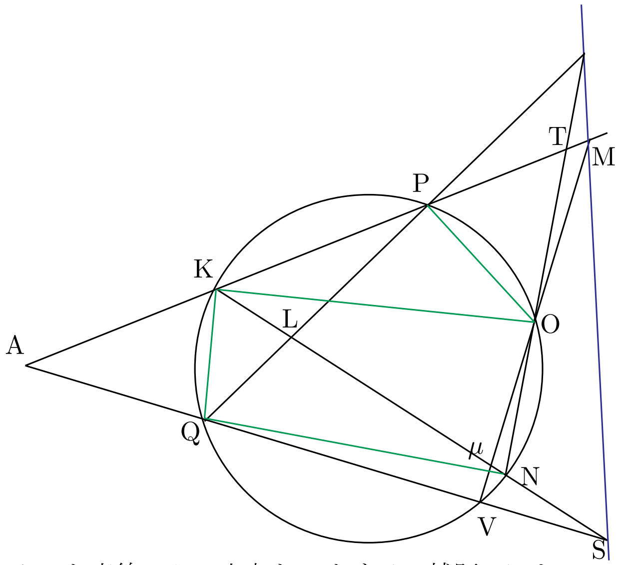
あわせて

$$(U, B; C, Q) = (A, B; L, P)$$

補題 7 によって 3 直線 UA，CL，QP は束をなす．つまり 3 点 P，Q，R は共線である． □

**パスカルの補題 I**　今日パスカルの定理といわれるものは，命題 2 の形であるが，パスカル自身の証明にふれるために，パスカルの補題 I のまま複比の方法で直接に証明しよう．パスカルは複比として取り出して定義はしていないが，実質的にこのような複比を知っていた．複比による証明も行っていたのではないかと考えられる．

改めてパスカルの補題 I を命題として掲げる．




**命題 3**　M，S，Q で定まる平面上で，点 M から 2 直線 MK，MV を，また点 S から 2 直線 SK，SV を引く．点 K を直線 MK，SK の交点，点 V を直線 MV，SV の交点，点 A を直線 MK，SV の交点，点 $\mu$ を直線 MV，SK の交点とする．

4 点 A，K，$\mu$，V のうちの 2 点で M や S とあわせた 3 点が同一直線上にないもの，例えば K，V をとり，その 2 点を通る円を描き，それが直線 MV，MK，SV，SK を切る点を O，P，Q，N とすれば，直線 MS，NO，PQ は，同じ束をなす．■

**証明**　直線 PQ と直線 KN の交点を L，直線 AM と直線 NO の交点を T とする．補題 5 によって

$$\mathrm{Q}(\mathrm{V},\mathrm{N};\mathrm{P},\mathrm{K}) = \mathrm{O}(\mathrm{V},\mathrm{N};\mathrm{P},\mathrm{K})$$

一方，

$$\mathrm{Q}(\mathrm{V},\mathrm{N};\mathrm{P},\mathrm{K}) = (\mathrm{S},\mathrm{N};\mathrm{L},\mathrm{K})$$
$$\mathrm{O}(\mathrm{V},\mathrm{N};\mathrm{P},\mathrm{K}) = (\mathrm{M},\mathrm{T};\mathrm{P},\mathrm{K})$$

なので，

$$(\mathrm{M},\mathrm{T};\mathrm{P},\mathrm{K}) = (\mathrm{S},\mathrm{N};\mathrm{L},\mathrm{K})$$

補題 7 によって 3 直線 MS，TN(=ON)，PL(=PQ) は束をなす．□

**一般的考察**　このようにパスカルの補題 I 自身もその形で複比の方法で証明された．やってみると他のいろんな型でも同様にできることがわかる．そこで複比によるパスカルの定理の証明を整理してみる．

円周上の 6 点 A，B，C，D，E，F に対して，型 $\dfrac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{FED}}$ に対して，5 点

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{FE}},\quad \mathrm{Q} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{ED}},\quad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{FD}},\quad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{FE}},\quad \mathrm{L} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{FC}}$$

をとる．複比

$$\mathrm{A}(\mathrm{C},\mathrm{D};\mathrm{E},\mathrm{F}) = \mathrm{B}(\mathrm{C},\mathrm{D};\mathrm{E},\mathrm{F})$$

をとる．直線 FC 上の点 R，K をとれば

$$\mathrm{A}(\mathrm{C},\mathrm{D};\mathrm{E},\mathrm{F}) = (\mathrm{C},\mathrm{R};\mathrm{K},\mathrm{F})$$

直線 EC 上の点 Q，L をとれば

$$\mathrm{B}(\mathrm{C},\mathrm{D};\mathrm{E},\mathrm{F}) = (\mathrm{C},\mathrm{Q};\mathrm{E},\mathrm{L})$$

よって

$$(\mathrm{C}, \mathrm{R}; \mathrm{K}, \mathrm{F}) = (\mathrm{C}, \mathrm{Q}; \mathrm{E}, \mathrm{L})$$

これから KE = AE，FL = FB，RQ は束をなし，この結果，3 点 P，Q，R は共線である．

この論の展開は，6 点 A，B，C，D，E，F の並び方には関係なく成立する．つまりこれで円周上の 6 点に関するパスカルの命題 1 が，交点 P，Q，R，K，L が存在する場合に，一般的に証明された．

**方法の反省**　点の順からは自由な証明であることが確認できた．ユークリッド幾何の範囲で，交点が存在する場合に一般的な証明が得られている．交点が存在せず平行な場合，どれとどれが平行であるかによって場合分けすれば，できる．

しかし，ユークリッド幾何と複比の方法は，パスカルの円錐曲線論のなかでの方法としては，統一性がない．パスカルは直線の集合が平面上の 1 点を共有する場合と平行な場合を区別しない．それに対して補題 4 の証明では平行線の性質を用いた．また補題 5 の証明では円周角の定理と図形の移動を用いている．すべてユークリッド幾何の範囲であり，パスカルの方法との統一性はない．

これをどのように解決するか．われわれはあと一息で射影幾何というところまできている．新しい幾何を見出さなければならない．新しい対象と，それとの統一性をもった論証の方法を組み立てなければならない．そのためには，複比とそれが線束を切る直線 $l$ のとり方によらないことについての掘りさげた考察が必要である．こうしてパスカルの定理を証明する統一性が浮かんでくる．これを掘りさげ，新しい幾何を見出していこう．その前に，パスカルの定理のさらにいくつかの証明を考える．

### 2.3.3　複素平面の方法

#### 複素平面

命題 1 を座標幾何で示すことはできないか．円を $xy$ 座標平面に置き，直線の方程式を考えることにより証明することを試みよう．円周上の点を角と三角関数で表すことで考えるのであるが，やってみれば式がたいへん複雑になる．円周上の点，およびそれらを通る直線を表すより簡明な方法がある．それが複素平面の方法である．この方法は本質的には座標の方法であるが，複素数を用いることでその記述が簡明になるのである．座標方程式に直そうとすればできなくはないが，実際にやってみるとたいへん複雑になる．

複素数 $z = a + bi$ に対して $\bar{z} = a - bi$ を共役複素数，また負でない実数 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ を $z$ の絶対値という．定義から $|z|^2 = z\bar{z}$ である．また，$z$ が実数であることと $z - \bar{z} = 0$ が同値，$z$ が純虚数であることと $z + \bar{z} = 0$ が同値である．

さて，複素数 $a + bi$ に直交座標平面の点 $(a,\ b)$ を対応させることにより，実数の集合が数直線になるように，複素数の集合 $\mathbb{C}$ は複素平面になる．複素平面のうち実数に対応する部分を実軸，純虚数に対応する部分と 0 を虚軸という．これによって，平面図形を複素数で考えることができるようになる．

**極形式とド・モアブルの定理**　複素数は**極形式**という表し方がある．$z = a + bi$ のとき，$r = \sqrt{a^2+b^2}$，$r\cos\theta = a, r\sin\theta = b$ となる $\theta$ がとれる．これによって

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

となる．複素数のこの形での表示が極形式である．角 $\theta$ は $x$ 軸の正の方向から反時計回りにとる．角 $\theta$ は複素数 $z$ の**偏角**とよばれ $\arg z$ と書く．

「形式」というのは「形」でのことで，同じ複素数 $z$ が，$a+bi$ と $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ という二つの形をもつ．二つの複素数

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{aligned}$$

をとる．三角関数の加法定理によって

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$

となり，同様にして

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

となる．これから複素数の偏角は

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \\ \arg\frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 \\ \arg\frac{1}{z} &= -\arg z = \arg\overline{z} \end{aligned}$$

をみたし，あたかも対数関数のような形になる．

**補題 8 (ドモアブルの定理)**　任意の整数 $n$ に対して

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つ．■

**証明**　$n \geqq 0$ のとき．数学的帰納法で示す．

$n = 0$ のときは両辺 1 であるから成立する．

$n = k$ で成立するとして，$n = k+1$ で成立することを示す．

$$\begin{aligned} & \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta \\ = \;& (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta) \\ = \;& (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ = \;& (\cos\theta + i\sin\theta)^k \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\ = \;& (\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} \end{aligned}$$

よって，$n$ が負でないときは示された．

次に, $n=-m\ (m>0)$ のとき

$$\begin{aligned}\cos n\theta+i\sin n\theta &= \cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)\\ &= \cos m\theta-i\sin m\theta \;=\; \frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}\\ &= \frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m} \;=\; \left(\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)^m\\ &= (\cos\theta-i\sin\theta)^m \;=\; \{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^m\\ &= \cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta) \;=\; \cos n\theta+i\sin n\theta\end{aligned}$$

よって, この場合も成立し，題意は示された. □

**複素平面上の直線**　直交座標平面で直線の表し方は二つあった.

一つは 2 点 $(a_1,\ a_2)$ と $(b_1,\ b_2)$ を通る直線は

$$(b_2-a_2)x-(b_1-a_1)y-(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

となる．もう一つは，点 $(x_0,\ y_0)$ を通りベクトル $(p,\ q)$ に垂直な直線は

$$l\ :\ p(x-x_0)+q(y-y_0)=0$$

となる．それと同じように，複素数による直線の表し方も二通りある.

P$(z)$ を動点とし，A$(\alpha)$, B$(\beta)$, C$(\gamma)$ などを定点とする．また O は原点である．P が次の図形上にあるとき， $z$ の満たすべき式を $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ などの複素数の（共役, 絶対値などを用いた）等式で表わそう.

まず第一の型での表現.

(1) P が A を通り直線 OB と平行な直線上にあることを，複素数で表す.

条件から，$z$ は実数 $t$ を用いて

$$z-\alpha=t\beta$$

と表される．つまり $\dfrac{z-\alpha}{\beta}$ が実数である．これを等式として表すと次のようになる.

$$\frac{z-\alpha}{\beta}=\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)} \quad\Longleftrightarrow\quad \overline{\beta}z-\beta\overline{z}=\ \overline{\beta}\alpha-\beta\overline{\alpha}$$

(2) P が直線 AB 上の点であることを複素数で表す.

直線 AB 上の点は A を通り AB に平行な直線であるから (1) から

$$\overline{(\beta-\alpha)}z-(\beta-\alpha)\overline{z}=\overline{(\beta-\alpha)}\alpha-(\beta-\alpha)\overline{\alpha}$$

つまり

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-(\beta-\alpha)\overline{z}=\overline{\beta}\alpha-\beta\overline{\alpha}$$

次は第二の型での表現.

(1) P が，定点 $z_0$ を通り直線 OA と直交する直線上にあることを複素数で表す.

これは $\dfrac{z-z_0}{\alpha}$ が純虚数と同値なので.

$$\frac{z-z_0}{\alpha}+\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{\overline{\alpha}}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0}$$

(2) P が線分 AB の垂直二等分線上にあることを複素数で表す.

線分 AB の垂直二等分線上の点は A と B からの距離が等しいことと同値である.

$$|z-\alpha| = |z-\beta| \quad \Longleftrightarrow \quad (\overline{\alpha}-\overline{\beta})z + (\alpha-\beta)\overline{z} = \alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta}$$

第一の型は両辺が純虚数で，これを $i$ で割って係数を置きなおすと第二の型になる．一般に

$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = k \text{ (一定)}$$

という形をした式は，$\alpha$ と直交する直線を表す．なぜならこの式を満たす任意の一点 $z_0$ をとる.

$$\overline{\alpha}z_0 + \alpha\overline{z_0} = k \text{ (一定)}$$

二式の辺々を引く.

$$\overline{\alpha}(z-z_0) + \alpha(\overline{z}-\overline{z_0}) = 0$$

つまり

$$\frac{z-z_0}{\alpha} + \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{\overline{\alpha}} = 0$$

となるので，$\dfrac{z-z_0}{\alpha}$ が純虚数．ゆえに，条件式を満たす $z$ の集合は $\alpha$ と直交する直線になる.

**複素平面での証明**

以上の準備のもとに，命題 1 を，いずれの 2 点を結ぶ直線も互いに交点をもつものとする．つまり平行とならない一般的な位置にあるものとして証明しよう.

**証明**　円の半径は 1 であるとしてよい．6 点 $\mathrm{A}_i(\alpha_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ が原点 O(0) を中心とする半径 1 の円周上にあるとする．$|\alpha_i| = 1$ であり，$\bar{\alpha_i} = \dfrac{1}{\alpha_i}$ である.

直線 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ の方程式は

$$\frac{z-\alpha_i}{z-\alpha_j} - \frac{\bar{z}-\bar{\alpha_i}}{\bar{z}-\bar{\alpha_j}} = 0$$

である．記号 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ でこの直線の方程式も表す．この方程式を分母を払い $\bar{\alpha_1} = \dfrac{1}{\alpha_1}$ 等を用いて整理すると

$$\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j : z + \alpha_i\alpha_j\bar{z} - (\alpha_i+\alpha_j) = 0$$

となる．さて二つの直線の方程式の左辺の積 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ は 2 次式である．そこで方程式

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_3\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{A}_4\mathrm{A}_1 = 0$$

を考える．$\alpha_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ はこの方程式を満たす．左辺は二次である．従ってもし可約でなければ円の方程式と一致するはずである．実際にこれを計算してみる.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_3\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{A}_4\mathrm{A}_1 \\
= \ & \{z + \alpha_1\alpha_2\bar{z} - (\alpha_1+\alpha_2)\}\{z + \alpha_3\alpha_4\bar{z} - (\alpha_3+\alpha_4)\} \\
& -\{z + \alpha_2\alpha_3\bar{z} - (\alpha_2+\alpha_3)\}\{z + \alpha_4\alpha_1\bar{z} - (\alpha_4+\alpha_1)\} \\
= \ & (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(z\bar{z}-1)
\end{aligned}$$

$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ に代えて $i=4,\ 5,\ 6,\ 1$ をとっても同様になる．この結果

$$\frac{\mathrm{A_1A_2\cdot A_3A_4-A_2A_3\cdot A_4A_1}}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}=\frac{\mathrm{A_4A_5\cdot A_6A_1-A_5A_6\cdot A_1A_4}}{(\alpha_4-\alpha_6)(\alpha_5-\alpha_1)}$$

を得る．これから

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{A_1A_2\cdot A_3A_4}}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}-\frac{\mathrm{A_4A_5\cdot A_6A_1}}{(\alpha_4-\alpha_6)(\alpha_5-\alpha_1)}\\ =\ &\left\{\frac{\mathrm{A_2A_3}}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}-\frac{\mathrm{A_5A_6}}{(\alpha_4-\alpha_6)(\alpha_5-\alpha_1)}\right\}\cdot\mathrm{A_1A_4}\end{aligned}$$

を得る．この等式の左辺を 2 点

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{A_1A_5}}{\mathrm{A_4A_2}},\ \mathrm{R}=\frac{\mathrm{A_1A_3}}{\mathrm{A_4A_6}}$$

は満たす．しかしこれらの点は直線 $\mathrm{A_1A_4}$ 上にはない．よってこれら 2 点は方程式

$$\frac{\mathrm{A_2A_3}}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}-\frac{\mathrm{A_5A_6}}{(\alpha_4-\alpha_6)(\alpha_5-\alpha_1)}=0$$

で定まる直線上にある．点 $\mathrm{Q}=\dfrac{\mathrm{A_3A_5}}{\mathrm{A_6A_2}}$ もこの上にあるので，これら 3 点は共線である．□

**新たな幾何の存在**　パスカルの補題 I という名の基本定理はいくつかの初等的方法で示された．もちろんそこにある方法の不統一や，平行な場合に場合分けしなければならない等の問題が残った．一方，6 点の配列順にはよらない方法は，複比を用いる方法と複素平面上に置く方法で得られた．これらのことは逆にユークリッド幾何がむしろ特別な一幾何であってより包括的で普遍的な幾何がその背後にあるのではないかということを，われわれに示唆している．その幾何を発見しよう．

### 2.3.4　重心座標の方法

#### 重心座標と三線座標

**定義 3 (重心座標)**　平面上に $\triangle\mathrm{ABC}$ をとる．実数の組 $(x,\ y,\ z)$ に対して

$$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}+z\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{O}} \tag{2.1}$$

で点 P を定める．この等式は

$$(x+y+z)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=y\overrightarrow{\mathrm{AB}}+z\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となり $x+y+z=0$ なら点 P は定まらない．$x+y+z\neq 0$ なら点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \tag{2.2}$$

と一意に定まる．0 でない実数 $u$ に対し $(x,\ y,\ z)$ と $(ux,\ uy,\ uz)$ は同じ点を定める．

逆に平面上の任意の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が一次独立であることより

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる $s$ と $t$ が一意に定まり，これから

$$(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+s\overrightarrow{\mathrm{PB}}+t\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$

となる．また 0 でない実数 $u$ によって

$$x=u(1-s-t),\ y=us,\ z=ut$$

とおくと，等式 (2.1) が成り立ち

$$s=\frac{y}{x+y+z},\quad t=\frac{z}{x+y+z}$$

となり同じ点 P を定める．このように $x+y+z\neq 0$ である数の組 $(x,\ y,\ z)$ と，平面上の点が対応する．

任意の基準点 O をとって等式 (2.1) を書き直すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{x}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \tag{2.3}$$

となる．等式 (2.1) またはそれと同等な等式 (2.3) の $(x,\ y,\ z)$ は座標系になる．この座標系を $\triangle$ABC で定まる**重心座標系**，$(x,\ y,\ z)$ を点 P の**重心座標**という．

$x=y=z$ のとき点 P が重心となることからこの名がある．

また，一方

$$x_1=\frac{x}{x+y+z},\ x_2=\frac{y}{x+y+z},\ x_3=\frac{z}{x+y+z}$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+x_3\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad x_1+x_2+x_3=1$$

となる．和が 1 になるようにとった $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ を**絶対重心座標**ということもある．

**定義 4 (三線座標)**　平面上に $\triangle$ABC をとる．平面上の点 P から各辺 BC, CA, AB，またはその延長上に下ろした垂線の長さの比を $x:y:z$ とする．ただし，内心と点 P がその辺直線に関して同じ側にあるときは正，逆の側にあるときは負にとるものとする．点 P は比 $x:y$ で上にあるべき直線が決まり，その結果，比 $x:y:z$ で点 P は一意に確定する．$(x,\ y,\ z)$ を点 P の**三線座標**という．0 でない実数 $u$ に関して，$(x,\ y,\ z)$ と $(ux,\ uy,\ uz)$ は同じ点を定める．$x,\ y,\ z$ が長さそのもののときこれを**絶対三線座標**という．

ここで $\triangle$PQR の面積を三点 P, Q, R が反時計回りに配置されているとき正，一直線上にあるとき 0，逆方向にあるとき負，と定める．$(x,\ y,\ z)$ が点 P の絶対三線座標であるとき，

$$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{ax}{2},\ \triangle\mathrm{PCA}=\frac{by}{2},\ \triangle\mathrm{PAB}=\frac{cz}{2}$$

となる．よって

$$ax+by+cz=2\triangle\mathrm{ABC}$$

である．

三線座標の方法はユークリッド幾何の諸性質を解明するのに有効である．定義そのものがユークリッド平面に依拠している．

それに対して重心座標は射影幾何的にとらえることができる．射影平面の射影座標 $(x,\ y,\ z)$ では任意の直線を無限遠直線に指定できる．等式 (2.1) で点 P を定める座標 $(x,\ y,\ z)$ では，$x+y+z=0$ が無限遠直線であり，$x+y+z\neq 0$ の部分がユークリッド平面になる．

ユークリッド平面においては一方から他方への変換も明確である．ここでは重心座標によってパスカルの定理を証明しよう．

### 重心座標で図形

座標というからには，成分間の関係式をみたす点の集合がどのような図形になるか，ここを考えなければならない．重心座標での方程式がわかれば三線座標での方程式もわかる．

**直線の方程式**　直線は通る点と方向を与えることで定まる．通る点を$\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，方向を$\gamma\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\delta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$とする．直線上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t(\gamma\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\delta\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

と表される．これから

$$(1-\alpha-\beta-t\gamma-t\delta)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(\alpha+t\gamma)\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(\beta+t\delta)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$

となる．よって重心座標で点 P を $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\frac{y}{x+y+z}=\alpha+t\gamma,\ \frac{z}{x+y+z}=\beta+t\delta$$

となる．これから $t$ を消去して

$$\left(\frac{y}{x+y+z}-\alpha\right)\delta=\left(\frac{z}{x+y+z}-\beta\right)\gamma$$

を得る．これを整理して

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)x+(\alpha\delta-\beta\gamma-\delta)y+(\alpha\delta-\beta\gamma+\gamma)z=0 \tag{2.4}$$

を得る．逆に，$x$，$y$，$z$ の 1 次同次式

$$lx+my+nz=0$$

が与えられれば

$$\alpha\delta-\beta\gamma=l,\ l-\delta=m,\ l+\gamma=n$$

となるように，第 2，3 式から $\gamma$，$\delta$ を定め第 1 式から $\alpha$，$\beta$ を定まった比になるようにとれば，直線のベクトル方程式が定まる．

よって直線の方程式は $x$，$y$，$z$ の 1 次同次式である．

### 二点を通る直線

**命題 4**

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathrm{P_1A}}+\beta_1\overrightarrow{\mathrm{P_1B}}+\gamma_1\overrightarrow{\mathrm{P_1C}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$
$$\alpha_2\overrightarrow{\mathrm{P_2A}}+\beta_2\overrightarrow{\mathrm{P_2B}}+\gamma_2\overrightarrow{\mathrm{P_2C}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$

で定まる二点 $\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$ を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}z=0 \tag{2.5}$$

である．■

**証明**　直線の方程式 (2.4) に

$$\alpha = \frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1},\ \beta = \frac{\gamma_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1},$$
$$\gamma = \frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2},\ \delta = \frac{\gamma_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} - \frac{\gamma_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}$$

を代入する．代入して整理すると

$$(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)x + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)y + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)z = 0$$

つまり方程式 (2.5) を得る．　$\square$

これはまた 3 点

$$(x,\ y,\ z),\ (\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1),\ (\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)$$

が共線である条件でもある．

**円錐曲線の方程式**　円錐曲線の射影幾何での定義はのちにおこなう予定である．ここでは，射影平面で同次二次式で定まる点の集合を円錐曲線と定める．いいかえると $(x_1,\ x_2,\ x_0)$ を射影座標とするとき，

$$C\ :\ p{x_1}^2 + q{x_2}^2 + r{x_0}^2 + 2lx_1x_2 + 2mx_1x_0 + 2nx_2x_0 = 0$$

で定まる射影平面上の点の集合を円錐曲線という．これは行列を用いて

$$(x_1,\ x_2,\ x_0)\begin{pmatrix} p & l & m \\ l & q & n \\ m & n & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$$

と表すことができる．この円錐曲線は，重心座標ではどのような方程式で表されるのか．

これを明示的に表すために，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b_1,\ b_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (c_1,\ c_2)$ とする．重心座標が $(x,\ y,\ z)$ の点は直交ユークリッド座標では

$$\frac{x}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{x+y+z}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で表される．したがってこれを射影平面におくと

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$(x,\ y,\ z)$ のみたすべき方程式は

$$(x,\ y,\ z)^t A \begin{pmatrix} p & l & m \\ l & q & n \\ m & n & r \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

となり，やはり 2 次の同次式である．これを整理し改めて係数を取りなおし，重心座標による円錐曲線を

$$px^2 + qy^2 + rz^2 + 2lxy + 2myz + 2nzx = 0$$

とおく．これが △ABC の頂点を通ることを考える．頂点の重心座標は (1, 0, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 1) である．これらが方程式を満たすので，$p = q = r = 0$ である．よって

$$lxy + myz + nzx = 0$$

これが，3 頂点を通る円錐曲線である．

**円の方程式**　これをもとに，まず △ABC の 3 頂点を通る円の方程式を重心座標で表そう．

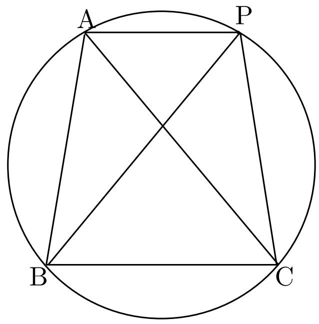
**命題 5**　△ABC の頂点 A，B，C の対辺の長さを $a$，$b$，$c$ とする．△ABC の外接円の重心座標による方程式は

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0 \tag{2.6}$$

である．■

**証明**　方程式 (2.6) が円錐曲線であることはわかっているので，△ABC の外接円周上の点がこの方程式を満たすことを示せば，方程式 (2.6) が外接円の方程式である．

外接円周上に点 P をとる．図のように弧 CA 上にあるとする．このとき円周角の定理から




$$x = \frac{1}{2}\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}\sin A$$
$$y = -\frac{1}{2}\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}\sin(\pi - B)$$
$$z = \frac{1}{2}\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PA}\sin C$$

である．よって外接円の半径を $R$ とすると

$$\begin{aligned}
&a^2yz + b^2zx + c^2xy \\
=\ & \frac{\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}}{4}\left(-a^2\mathrm{PA}\sin B\sin C + b^2\mathrm{PB}\sin C\sin A - c^2\mathrm{PC}\sin A\sin B\right) \\
=\ & \frac{R}{2}\cdot\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}\cdot\sin A\sin B\sin C\,(-a\mathrm{PA} + b\mathrm{PB} - c\mathrm{PC})
\end{aligned}$$

トレミーの定理から

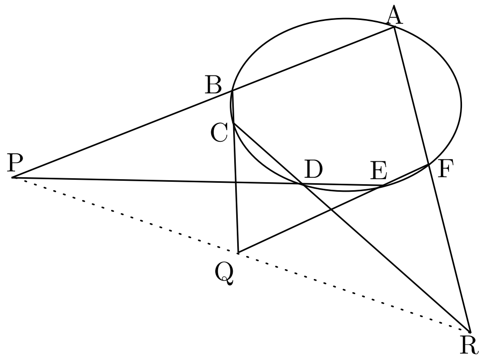
$$a\mathrm{PA} + c\mathrm{PC} = b\mathrm{PB}$$

なので，点 P の重心座標は方程式 (2.6) をみたす．円周上の他の位置にあっても同じなので，円周上の点はすべて方程式 (2.6) をみたし，この結果方程式 (2.6) が外接円の方程式である．□

### 重心座標による証明

以上の準備の下でパスカルの定理を重心座標を用いて証明しよう．3 次行列の行列式は，2 次の場合と同様に考えればよい．

**命題 6**　円錐曲線 $C$ の周上に 6 点，A，B，C，D，E，F がこの順に並んでいる．直線 AB と DE の交点を P，直線 BC と EF の交点を Q，直線 CD と FA の交点を R とする．このとき P，Q，R は共線である．■




**証明**　△ACE の重心座標で考える．頂点の重心座標はそれぞれ

$$(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)$$

である．円錐曲線は △ACE に外接しているので，その方程式は

$$lxy + myz + nzx = 0 \tag{2.7}$$

とおける．他の 3 点 B，D，F の重心座標を

$$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \mathrm{D}(d_1,\ d_2,\ d_3),\ \mathrm{F}(f_1,\ f_2,\ f_3)$$

とおく．これらの点が方程式 (2.7) をみたすので，

$$\begin{pmatrix} b_1b_2 & b_2b_3 & b_3b_1 \\ d_1d_2 & d_2d_3 & d_3d_1 \\ f_1f_2 & f_2f_3 & f_3f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

$l$，$m$，$n$ はすべてが 0 ではないので，

$$\begin{vmatrix} b_1b_2 & b_2b_3 & b_3b_1 \\ d_1d_2 & d_2d_3 & d_3d_1 \\ f_1f_2 & f_2f_3 & f_3f_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.8}$$

である．二点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を通る直線の方程式と，二点 E$(0,\ 0,\ 1)$，D$(d_1,\ d_2,\ d_3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ命題 4 より，

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -(b_3y - b_2z) = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = -(d_2x - d_1y) = 0$$

この交点を求める．これより

$$x : y = d_1 : d_2, \quad y : z = b_2 : b_3$$

なので AB と DE の交点 P の重心座標は

$$\mathrm{P}(x,\ y,\ z) = (b_2d_1,\ b_2d_2,\ b_3d_2)$$

同様にして，C$(0,\ 1,\ 0)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を通る直線の方程式と，E$(0,\ 0,\ 1)$，F$(f_1,\ f_2,\ f_3)$ を通る直線の方程式から BC と EF の交点 Q を求めると

$$\mathrm{Q}(x,\ y,\ z) = (b_1f_1,\ b_1f_2,\ b_3f_1)$$

また C(0, 1, 0)，D($d_1$, $d_2$, $d_3$) を通る直線の方程式と，A(1, 0, 0)，F($f_1$, $f_2$, $f_3$) を通る直線の方程式から CD と AF の交点 R を求めると

$$\mathrm{R}(x,\ y,\ z) = (d_1f_3,\ d_3f_2,\ d_3f_3)$$

となる．この 3 点の共線条件を調べる．

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} b_2d_1 & b_2d_2 & b_3d_2 \\ b_1f_1 & b_1f_2 & b_3f_1 \\ d_1f_3 & d_3f_2 & d_3f_3 \end{vmatrix} = b_2d_1(b_1f_2d_3f_3 - b_3f_1d_3f_2) \\
&\quad -b_2d_2(b_1f_1d_3f_3 - b_3f_1d_1f_3) + b_3d_2(b_1f_1d_3f_2 - b_1f_2d_1f_3) \\
= \quad & -b_1b_2(d_2d_3f_1f_3 - d_3d_1f_2f_3) + b_2b_3(d_1d_2f_1f_3 - d_1d_3f_1f_2) - b_3b_1(d_1d_2f_2f_3 - d_2d_3f_1f_2)
\end{aligned}$$

ところがこれは $-\begin{vmatrix} b_1b_2 & b_2b_3 & b_3b_1 \\ d_1d_2 & d_2d_3 & d_3d_1 \\ f_1f_2 & f_2f_3 & f_3f_1 \end{vmatrix}$ なので，等式 (2.8) より値は 0，つまり 3 点 P，Q，R は共線である． □

**方法の吟味**　重心座標の方法は，ベクトルを用いており，それ自体は射影幾何の方法ではない．しかし，射影幾何の基礎を作ることで，重心座標による証明を射影幾何での証明に転化することができる．それは後に行う．本質的に用いたのは三角形の頂点を基準とするある種の同次座標である．これが他の道筋で定義できるのなら，証明をもういちど生かすことは可能である．今後の課題である．

### 2.3.5　諸命題の証明

パスカルの**補題 I**，つまり円の場合のパスカルの定理はいくつかの初等的方法で示された.『円錐曲線試論』を読み解くという観点から，それに続く命題群も手持ちの方法で示してみよう．それは基本的に複比の方法である．複比の方法は，パスカルの時代からその後大きく洗練されたとはいえ，パスカルがデザルグから引き継いで駆使した方法を原型とするもっとも射影幾何的な方法である．

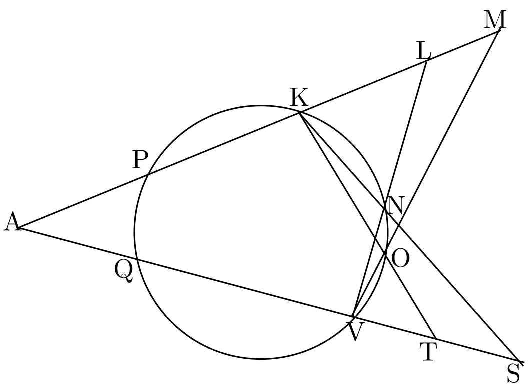
また，命題のうちには，円の場合に示すことが補題 II によって円錐曲線でも成立するものと，円錐曲線への一般化を吟味しなければならないものがある．円の場合で考えながら，一般化への課題も考える．また，命題 5 はユークリッド平面内の有心円錐曲線で考えることにしよう．用いる方法は複比の方法である．また，パスカルはギリシア以来の合成比を用いて表現している．その命題群を今風に言い直して円の場合に再掲する．また線分は有向線分として考えることにする．

**命題 I**　本命題を円の場合に再掲する．

**命題 7**　円の外部の点 A から円に交わる 2 直線を引き，交点を P，K と Q，V とする．さらに円周上の 2 点 O，N をとり，KO，KN と直線 AQ の交点を T，S，また VN，VO と直線 AP の交点を L，M とする．このとき等式

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{MA}}\cdot\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SQ}}=\frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{LA}}\cdot\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{TQ}}$$

が成り立つ．■




**証明**　証明すべき等式は

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PL}}\cdot\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{AM}}=\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{AS}}\cdot\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{QT}}$$

つまり

$$(\mathrm{P},\mathrm{A};\mathrm{M},\mathrm{L})=(\mathrm{A},\mathrm{Q};\mathrm{T},\mathrm{S})$$

と同値である．ところが補題 5 によって

$$(\mathrm{P},\mathrm{A};\mathrm{M},\mathrm{L})=\mathrm{V}(\mathrm{P},\mathrm{Q};\mathrm{O},\mathrm{N})=\mathrm{K}(\mathrm{P},\mathrm{Q};\mathrm{O},\mathrm{N})=(\mathrm{A},\mathrm{Q};\mathrm{T},\mathrm{S})$$

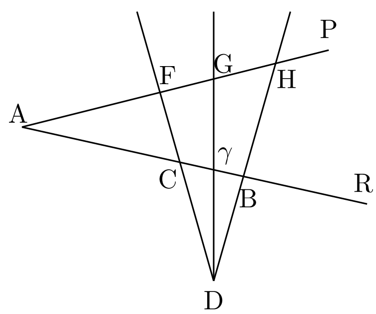
が成り立ち，本命題は成立する．□

**命題 II**　まずその前半である．その内容と同値な今風の等式で示す．

**命題 8**　3 直線 DF，DG，DH があり，直線 AP，AR がこの 3 直線を切る点を F，G，H，C，$\gamma$，B とする．このとき，

$$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{C}\gamma}\cdot\frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{AG}}=\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{CD}}$$

が成り立つ．■




**証明**　第一の等式は

$$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{FH}}\cdot\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AG}}=\frac{\mathrm{C}\gamma}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\gamma}$$

と同値である．つまり

$$(\mathrm{F},\mathrm{A};\mathrm{G},\mathrm{H})=(\mathrm{C},\mathrm{A};\gamma,\mathrm{B})$$

である．これは補題 4 によって成立する．第二の等式は

$$\frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{AH}}\cdot\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{FD}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{CB}}=-1$$

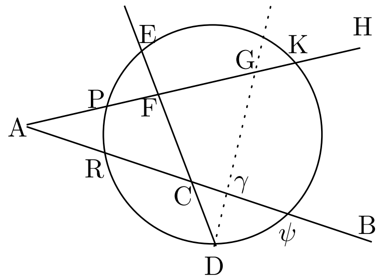
と同値である．ところがこれは，△ACF とその辺の延長を直線 HBD が切っているときのメネラウスの定理（補題 1) そのものである．□

次に**命題 II** の後半である．その内容を円の場合に示す．

**命題 9**　点 E，D を通る一つの円が直線 AH，AB を点 P，K，R，$\psi$ で切るならば，

$$\frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FG}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{C}\gamma}\cdot\frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{AG}}=\frac{\mathrm{FK}\cdot\mathrm{FP}}{\mathrm{CR}\cdot\mathrm{C}\psi}\cdot\frac{\mathrm{AR}\cdot\mathrm{A}\psi}{\mathrm{AK}\cdot\mathrm{AP}}$$

が成立する．■




**証明**　命題 8 より

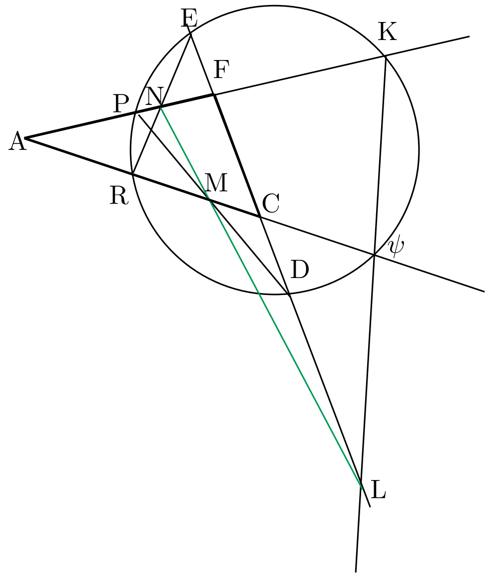
$$\frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FG}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{C}\gamma}\cdot\frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{AG}}=\frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FD}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{CD}}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{FK}\cdot\mathrm{FP}}{\mathrm{CR}\cdot\mathrm{C}\psi}\cdot\frac{\mathrm{AR}\cdot\mathrm{A}\psi}{\mathrm{AK}\cdot\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FD}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{CD}}$$

を示せばよい．

六角形 D$\psi$KEPR においてパスカル線 $\dfrac{\mathrm{DKR}}{\psi\mathrm{EP}}$ を引く．交点を図のように順に L，M，N とする．△ACF と，直線 L$\psi$K，直線 DMP，直線 NRE，および直線 LMN に関してメネラウスの定理を用いる．




$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\psi\mathrm{K} &: \frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{FL}}\cdot\frac{\psi\mathrm{A}}{\mathrm{C}\psi}\cdot\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{AK}}=-1\\
\mathrm{DMP} &: \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{FD}}\cdot\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{AP}}=-1\\
\mathrm{NRE} &: \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{CR}}\cdot\frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{AN}}=-1\\
\mathrm{LMN} &: \frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{FL}}\cdot\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{AN}}=-1
\end{aligned}$$

を得る．第一，二，三式をかけ合わせ第四式で割ることにより

$$\frac{\psi\mathrm{A}}{\mathrm{C}\psi}\cdot\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{AK}}\cdot\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{FD}}\cdot\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{CR}}=1$$

これは証明すべき等式そのものである．□

実は円の場合，方べきの定理

$$\begin{aligned}
\mathrm{CR}\cdot\mathrm{C}\psi&=\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CD}\\
\mathrm{FK}\cdot\mathrm{FP}&=\mathrm{FD}\cdot\mathrm{FE}\\
\mathrm{AR}\cdot\mathrm{A}\psi&=\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AK}
\end{aligned}$$

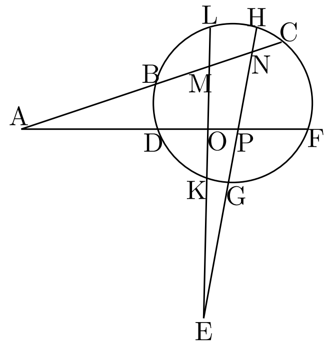
より証明すべき等式が得られる．しかし一般の円錐曲線ではこれらの等式は成立しない．それに対してパスカルの定理を根拠にして，メネラウスの定理を用いて示した本証明は，メネラウスの定理を吟味してゆけば一般化に耐える．この証明は 1803 年，カルノー (Lazare Nicolas Marguerite Carnot, 1753 年 5 月 13 日～ 1823 年 8 月 2 日) が円錐曲線で示した方法によっている．カルノーはフランス革命期を生きぬいた政治家，軍人にして数学者であった．

**命題 III**　これはパスカルの原文の図は円であるが，命題 III では円錐曲線で述べられている．命題を円として再掲する．

**命題 10**　4 直線 AC，AF，EH，EL が点 N，P，M，O で交わり，一つの円がこれらの直線を点 C，B，F，D，H，G，L，K で切るなら，

$$\frac{\mathrm{MC}\cdot\mathrm{MB}}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{ML}\cdot\mathrm{MK}}{\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PG}}\cdot\frac{\mathrm{EH}\cdot\mathrm{EG}}{\mathrm{EK}\cdot\mathrm{EL}}$$

が成り立つ．■




**証明**　命題 9 の証明で得られた等式は点

$$\mathrm{A}-\mathrm{EFCD}-\mathrm{PK}\psi\mathrm{R}$$

の組に対してであった．これと同様の等式が本命題においては

$$\mathrm{A}-\mathrm{LMOK}-\mathrm{BCFD}$$
$$\mathrm{E}-\mathrm{DOPF}-\mathrm{KLHG}$$

に対してそれぞれ得られる．すなわち，

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{OF}}\cdot\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{KO}}{\mathrm{MK}}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{LO}}{\mathrm{ML}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{OD}}=1$$
$$\frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{PH}}\cdot\frac{\mathrm{LO}}{\mathrm{EL}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{OF}}\cdot\frac{\mathrm{KO}}{\mathrm{EK}}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{OD}}\cdot\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{PG}}=1$$

第一式を第二式で割ると

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{FP}}\cdot\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{MK}}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{ML}}\cdot\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{HE}}\cdot\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{DP}}\cdot\frac{\mathrm{PG}}{\mathrm{GE}}=1$$

を得る．これは証明すべき等式そのものである．□

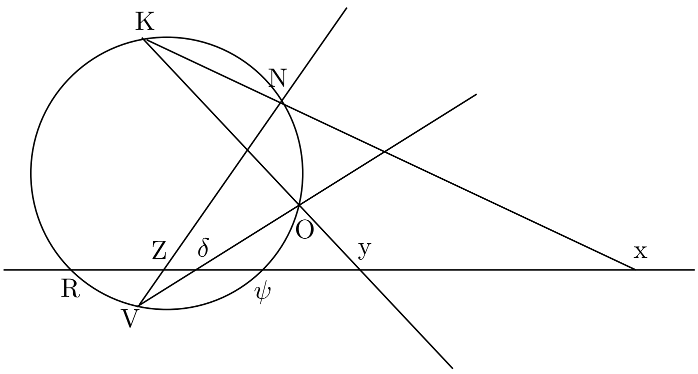
本命題も円の場合は方べきの定理からただちに得られる．しかし，カルノーの方法にもとづくこの証明でないと一般の円錐曲線の場合に耐えられない．

**命題 IV**　本命題はデザルグによる．

**命題 11**　4 点 K，N，O，V を通る円錐曲線を直線 R$\psi$ で切る．KN，KO との交点を x，y とし，VN，VO との交点を Z，$\delta$ とすれば

$$\frac{\mathrm{ZR}\cdot\mathrm{yR}}{\mathrm{Z}\psi\cdot\mathrm{y}\psi}=\frac{\delta\mathrm{R}\cdot\mathrm{xR}}{\delta\psi\cdot\mathrm{x}\psi}$$

が成り立つ．■




**証明**　本等式は

$$\frac{\mathrm{ZR}}{\mathrm{Z}\psi}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{xR}}{\mathrm{x}\psi}\cdot\frac{\mathrm{y}\psi}{\mathrm{yR}}$$

つまり複比の等式

$$(\mathrm{Z}, \delta; \psi, \mathrm{R}) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}; \mathrm{R}, \psi)$$

と同値である．ところが補題 5 によって

$$(\mathrm{Z}, \delta; \psi, \mathrm{R}) = \mathrm{V}(\mathrm{N}, \mathrm{O}; \psi, \mathrm{R}) = \mathrm{K}(\mathrm{N}, \mathrm{O}; \psi, \mathrm{R}) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}; \mathrm{R}, \psi)$$

なので，成立する． □

後に射影直線の射影変換を定義する．射影変換は複比を変えない．4 点 Z, $\delta$, $\psi$, R を y, x, R, $\psi$ に変換する射影変換は，もういちどおこなうと $\psi$, R を固定し，恒等変換になる．このように二回くりかえすと恒等変換になる射影変換を**対合**といい，対合で対応する点も対合という．つまりこの命題は円錐曲線を直線で切って得られる点の組

$$(\mathrm{R},\ \psi), (\mathrm{Z},\ \mathrm{y}), (\delta,\ \mathrm{x})$$

はそれぞれ対合であることを主張している．

対合を発見したのはデザルグである．

> 一直線上に点 O が存在し，
>
> $$\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OA}' = \mathrm{OB} \cdot \mathrm{OB}' = \mathrm{OC} \cdot \mathrm{OC}'$$
>
> となるようにできるとき，点列
>
> $$(\mathrm{A},\ \mathrm{A}'), (\mathrm{B},\ \mathrm{B}'), (\mathrm{C},\ \mathrm{C}')$$
>
> は対合をなすという．

これがデザルグの発見した概念である．デザルグはこの概念の下，1639 年，円錐曲線に内接する四辺形を一直線で切って得られる 6 点は対合をなすことを発見，この証明の形で証明した．

**命題 V**　命題 V は有心円錐曲線の定理である．アポロニウス以来の円錐曲線論を，デカルトによる座標幾何はまだはじまっていない時代に，座標の方法に近い手段で考えている．ここでは，楕円または双曲線が直交座標での標準形：

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad + : \text{楕円},\ - : \text{双曲線}$$

で表されているとし，双曲線の場合 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ となる共役双曲線をあわせて考える．

**補題 9**　有心円錐曲線 $C$ の直径 $d$ をとる．$d$ に平行な弦の中点の軌跡はふたたび直径 $d'$ となる．$d'$ は $d$ が有心円錐曲線と交わる点における接線と平行になる．$d'$ を $d$ に共役な直径という． ■

**証明**　$d$ が $x$ 軸や $y$ 軸の場合は明らかなので，そうではないとし，$d$ の方程式を $y = mx$ とおく．$d$ と平行な直線を $y = mx + k$ とおく．円錐曲線との交点の $x$ 座標は

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{(mx+k)^2}{b^2} = 1$$

で与えられる．これを整理して

$$\left(\frac{1}{a^2} \pm \frac{m^2}{b^2}\right) x^2 \pm \frac{2mk}{b^2} x + \frac{k^2}{b^2} - 1 = 0$$

この二次方程式の 2 解を $\alpha$, $\beta$ とする．解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{\mp\dfrac{2mk}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}\pm\dfrac{m^2}{b^2}}$$

弦の中点を $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\mp\dfrac{mk}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}\pm\dfrac{m^2}{b^2}}\\ Y &= mX+k=mX+\frac{\dfrac{1}{a^2}\pm\dfrac{m^2}{b^2}}{\mp\dfrac{m}{b^2}}X=\mp\frac{b^2}{ma^2}X\end{aligned}$$

これは $d$ に平行な弦の中点の軌跡はふたたび直径 $d'$ となることを示している．

直径 $d$ が円錐曲線と交わる点を $(x_1,\ y_1)$ とすると，$y_1=mx_1$ であって，交点での接線は

$$\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=1$$

である．よってその傾きは

$$\mp\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=\mp\frac{b^2}{ma^2}$$

なので $d'$ の傾きと一致している． □

**補題 10**　楕円の直径 $d$ とそれに共役な直径 $d'$ をとる．楕円と $d$, $d'$ の交点のそれぞれ一つ P, P$'$ をとり $\mathrm{OP}=a'$，$\mathrm{OP'}=b'$ とする．このとき，

$${a'}^2+{b'}^2=a^2+b^2,\qquad \triangle\mathrm{OPP'}の面積=\frac{ab}{2}$$

が成りたつ． ■

**証明**　$d$ の傾きを $m$ とすると $d'$ の傾きは $-\dfrac{b^2}{ma^2}$ である．$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P'}(x_2,\ y_2)$ とする．$y_1=mx_1$，$y_2=-\dfrac{b^2}{ma^2}x_2$ である．P, P$'$ はこの曲線上の点なので，

$$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{m^2{x_1}^2}{b^2}=1,\quad \frac{{x_2}^2}{a^2}+\frac{\dfrac{b^4}{m^2a^4}{x_2}^2}{b^2}=\frac{{x_2}^2}{a^2}+\frac{b^2{x_2}^2}{m^2a^4}=1,$$

よって

$$\begin{aligned}{a'}^2+{b'}^2 &= {x_1}^2+{y_1}^2+({x_2}^2+{y_2}^2)=(1+m^2){x_1}^2+\left(1+\frac{b^4}{m^2a^4}\right){x_2}^2\\ &= \frac{1+m^2}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}+\frac{1+\dfrac{b^4}{m^2a^4}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{b^2}{m^2a^4}}=\frac{(1+m^2)a^2b^2+m^2a^4+b^4}{m^2a^2+b^2}=a^2+b^2\end{aligned}$$

次に

$$
\begin{aligned}
\triangle \mathrm{OPP}' &= \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right| = \frac{1}{2}\left|x_1\left(-\frac{b^2}{ma^2}x_2\right) - x_2(mx_1)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{x_1x_2(m^2a^2+b^2)}{ma^2}\right|
\end{aligned}
$$

ここで補題前半の計算より

$$
{x_1}^2{x_2}^2 = \frac{a^2b^2}{m^2a^2+b^2}\cdot\frac{m^2a^4}{m^2a^2+b^2}
$$

なので

$$
\triangle \mathrm{OPP}' = \frac{1}{2}ab
$$

である． □

点 P の媒介変数表示が $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ であるとき，点 P$'$ の媒介変数表示は

$$
\left(a\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ b\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-a\sin\theta,\ b\cos\theta)
$$

になる．

双曲線の場合は P$'$ は共役双曲線上に現れる．

**補題 11** 双曲線の直径 $d$ とそれに共役な直径 $d'$ をとる．双曲線と $d$ の交点の一つを P，$d'$ と共役双曲線の交点の一つを P$'$ とし，$\mathrm{OP} = a'$，$\mathrm{OP}' = b'$ とする．このとき，

$$
{a'}^2 - {b'}^2 = a^2 - b^2, \quad \triangle \mathrm{OPP}'\text{の面積} = \frac{ab}{2}
$$

が成りたつ． ■

**証明** $d$ の傾きを $m$ とすると $d'$ の傾きは $\dfrac{b^2}{ma^2}$ である．$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}'(x_2,\ y_2)$ とする．$y_1 = mx_1$，$y_2 = \dfrac{b^2}{ma^2}x_2$ である．P，P$'$ はこの曲線上の点なので，

$$
\frac{{x_1}^2}{a^2} - \frac{m^2{x_1}^2}{b^2} = 1, \quad \frac{{x_2}^2}{a^2} - \frac{\dfrac{b^4}{m^2a^4}{x_2}^2}{b^2} = \frac{{x_2}^2}{a^2} - \frac{b^2}{m^2a^4}{x_2}^2 = -1,
$$

よって

$$
\begin{aligned}
{a'}^2 - {b'}^2 &= {x_1}^2 + {y_1}^2 - ({x_2}^2 + {y_2}^2) = (1+m^2){x_1}^2 - \left(1 + \frac{b^4}{m^2a^4}\right){x_2}^2 \\
&= \frac{1+m^2}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{m^2}{b^2}} - \frac{1 + \dfrac{b^4}{m^2a^4}}{-\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{b^2}{m^2a^4}} = \frac{-(1+m^2)a^2b^2 + m^2a^4 + b^4}{m^2a^2 - b^2} = a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

次に

$$
\begin{aligned}
\triangle \mathrm{OPP}' &= \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right| = \frac{1}{2}\left|x_1\left(\frac{b^2}{ma^2}x_2\right) - x_2(mx_1)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{x_1x_2(m^2a^2-b^2)}{ma^2}\right|
\end{aligned}
$$

ここで補題前半の計算より

$$x_1{}^2 x_2{}^2 = \frac{a^2b^2}{-m^2a^2+b^2}\cdot\frac{-\,m^2a^4}{m^2a^2-b^2}$$

なので

$$\triangle\mathrm{OPP'} = \frac{1}{2}ab$$

である． □

**補題 12**　$d$，$d'$ 上の点 S，T を，$\mathrm{OS}=x$，$\mathrm{OT}=y$ であるようにとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

とする．点 Q がこの円錐曲線上の点であるための条件は

$$\frac{x^2}{{a'}^2}\pm\frac{y^2}{{b'}^2}=1$$

である．つまりこれが $d$ と $d'$ を斜交軸とする斜交座標による円錐曲線の方程式である． ■

**証明**　記号はこれまでと同様にとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = x\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{a'}+y\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP'}}}{b'} = \left(\frac{x_1x}{a'}+\frac{x_2y}{b'},\ \frac{y_1x}{a'}+\frac{y_2y}{b'}\right)$$

したがって点 Q が円錐曲線上の点であることは

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1x}{a'}+\frac{x_2y}{b'}\right)^2\pm\frac{1}{b^2}\left(\frac{y_1x}{a'}+\frac{y_2y}{b'}\right)^2=1$$

である．ここで

$$\text{左辺} = \left(\frac{x_1{}^2}{a^2}\pm\frac{y_1{}^2}{b^2}\right)\frac{x^2}{{a'}^2}+\left(\frac{x_2{}^2}{a^2}\pm\frac{y_2{}^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{{b'}^2}+2\left(\frac{x_1x_2}{a^2}\pm\frac{y_1y_2}{b^2}\right)\frac{xy}{a'b'}$$

ところが

$$\frac{x_1x_2}{a^2}\pm\frac{y_1y_2}{b^2}=\frac{x_1x_2}{a^2}\pm\frac{mx_1\left(\mp\dfrac{b^2x_2}{ma^2}\right)}{b^2}=0$$

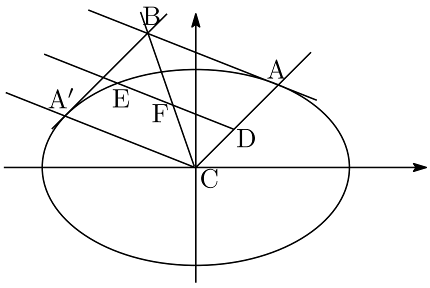
より

$$\frac{x^2}{{a'}^2}\pm\frac{y^2}{{b'}^2}=1$$

を得る． □

そのうえで，命題 V でパスカルが言いたかったと思われることを命題とする．

**命題 12**　平面上に C を中心とする双曲線，楕円あるいは円がある．直線 AB が点 A でこの円錐曲線に接している．A′ を CA′ が CA に対する共役直径になる円錐曲線上の点とする．直径 CA を引き，直線 AB を CA′ に等しくとる．また CB を引く．直線 AB に平行な任意の直線 DE を引く．円錐曲線を E で，直線 AC，CB を点 D，F で切る．円錐曲線が楕円あるいは円なら，直線 DE，DF の平方の和は直線 AB の平方の和に等しい．双曲線の場合には，同じ直線 DE，DF の平方の差が直線 AB の平方に等しい． ■



**証明**　記号など補題を踏襲する．楕円の場合で示す．すると

$$\mathrm{CA} = a',\ \mathrm{CA}' = b'$$

である．また

$$\mathrm{CD} = x,\ \mathrm{DE} = y$$

とする．相似比より

$$\mathrm{DF} : \mathrm{CD} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

なので，$\mathrm{DF} = \dfrac{x\mathrm{AB}}{a'}$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}'} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$$

にとると

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{CE}'}$$

なので，補題 12 より

$$1 = \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = \frac{\mathrm{DF}^2}{\mathrm{AB}^2} + \frac{\mathrm{DE}^2}{b'^2}$$

$\mathrm{AB} = b'$ なので

$$\mathrm{DF}^2 + \mathrm{DE}^2 = \mathrm{AB}^2$$

である．双曲線の場合も同様である．□

## 2.4　パスカルの方法

### 2.4.1　二つの方法

#### 『円錐曲線試論』にある方法

パスカルの文書を読解し，パスカルの定理とそれから派生するいくつかの命題について日本の高校の数学を大きくは超えない範囲で証明した．その証明をいくとおりにも作った．これによって彼がどのように考えていたのか，およそわかってきた．

しかし，もちろんそこではいろんな問題をそのままにしている．例えば，複比の方法でパスカルの定理を証明した．またそれを円の場合でのみ証明したところもある．円の場合に証明すればよいという根拠は，任意の二次曲線は射影によって円にうつり，直線が共点であるとか，点が共線であるとかいう性質は射影によって不変であるから，円の場合に証明できれば二次曲線でも証明できるということであった．ここに射影幾何がはじまるのであるが，しかし射影によって長さという概念は意味を失う．にもかかわらず，複比という長さの比！　を使った．これでは円の場合の証明にはなったとしてもそれで二次曲線の場合が証明されたということにはならないのではないか．

この隘路を解決するために，複比を長さという量から独立に定義すること，これが 19 世紀の西洋数学の一つの問題であった．それが実行され，これまで見てきた証明が新しい複比のもとで甦る．それが次章以下の課題である．

そのためには，17 世紀のパスカルから 19 世紀への橋渡しがいる．幾何学的な直観を大切にしながら射影幾何の再構成をなしたのがポンスレである．一方，19 世紀から 20 世紀初頭の射影幾何は再びユークリッドに立ちかえり公理を立てる方法で再構成を行った．そのいずれにもつながる考え方が，実はパスカルの中に用意されている．それをこの章の最後に再確認しておこう．パスカル

はどのように考えていたのか．そこからはじめよう．彼の考え方をそのまま実現しようとするとどのようになるのか，どのような構造のものができるのか．試みに射影幾何を構成してみよう．それが，射影の方法と同次座標の方法である．

パスカルは射影の方法をデザルグから継承し，それを円錐曲線論で展開した．射影の方法とそれを円錐曲線に適用すること自体がデザルグからの示唆であったといわれている．掘りさげれば同じことになるのであるが,『円錐曲線試論』のなかでは射影幾何の方法について二つのことがいわれている．

**線束が定める同じ「もの」**　一つは束の考え方である．パスカルは「いくつかの直線が 1 点で交わるか，またはすべてたがいに平行であるとき，これらの直線は同じ束をなす」と定義している．ここには 1 点を共有する直線の集合と，互いに平行直線な直線の集合を同等に扱う立場がある．いくつかの直線が 1 点で交わる線束は逆にその交点を定める．それならば，互いに平行である直線の集合も，何らかの「交点」を定めると言えるのではないか．1 点で交わる直線の束も互いに平行な直線の束も，同じ範疇に属する「もの」を定める．それがパスカルの立場であった．

**射影で対応する平面図形**　もう一つは，二つの平面を一つの空間に置いて，空間内の 1 点からの射影で一方の平面上の図形が他方の平面上の図形に対応する場合，一方の平面上で「点が共線である」ことと「直線が共点である」こと，あるいはこの二つの基本性質を土台とする諸性質が成り立てば，他方の平面上でも成り立つ．二つの平面の上にある図形の間で同じ性質が成り立つ．このことを方法として認識していた．ここで「同じ性質」とはそれ自身が射影幾何の内容を決定することであるが，パスカルの円錐曲線論についていえば，円錐曲線と直線が交点をもつ，もたない，あるいは円錐曲線上の一定の点を結ぶいくつかの直線が共点であるか否か，これらの問題は円において解決すれば，円錐曲線においても解決するという発見であった．

そのための準備として，まず同値関係と類別について整理し，そのうえでこの二つの立場と方法をもう少し推し進めてみよう．

### 同値関係と類別

**同値関係**　われわれは数学的対象の構成に集合の考え方を用いる．集合を定め，それからさらに類別によって次の段階の集合を定義する．類別の方法が同値関係という考え方である．同じものを一つに見て，その一つ一つの間の関係を調べるという同値と類別の方法は，西洋数学が十九世紀から二十世紀にかけて発見した．これは実数の構成において重要であるが，射影幾何の構成においても重要な方法である．その定義をここに述べる．一定の関係にあるものを同じものと見なし，その見なされたものを数学の対象とすることは，それ自身一つの思想方法，考え方である．

集合とは,「$x$ は性質 $P$ をもつ」のように一定の述語で作られる命題に対し，主語としてそれを真とするもの「すべて」をひとくくりにしたものである．集合の集合を制限なく考えると矛盾が起こることが知られたが，今日では一定の解決と，方向性がわかっている．

集合 $A$ の要素の間に，成り立つか成り立たないかがつねに確定する関係が定義されているとする．要素 $a$ と $b$ の間にこの関係が成り立つことを $a \sim b$ と表す．その関係が条件：

(i) $a \sim a$.

(ii) $a \sim b$ なら $b \sim a$.

(iii) $a \sim b,\ b \sim c$ なら $a \sim c$.

をみたすとき, 関係「〜」を「同値関係」という.

集合 $A$ に同値関係が定義されると，それによって集合 $A$ の要素を互いに同値な要素からなる部分集合に分けることができる．つまり要素 $x$ と同値な要素からなる部分集合 $\overline{x}$ が一意に確定する．それを $x$ の**同値類**という．$y \in \overline{x}$ なら

$$\overline{x} = \overline{y}$$

となる．なぜなら $z \in \overline{x}$ をとると $z \sim x$．一方 $y \sim x$ なので，$x \sim y$ より $z \sim y$. つまり $z \in \overline{y}$．逆も言えて等号が成立する．われわれはこのように類別された部分集合を「ひとつのもの」と見なすのである．$\overline{x}$ は $x$ によって代表されるという．上記の考察によって，同じ部分集合に含まれる $x$ 以外の要素によっても代表され，それらは同等である．

集合 $A$ をこの同値関係で類別した同値類の集合を $A/\sim$ と表す.

$$A/\sim = \left\{ \overline{x} \mid x \in A \right\}$$

である．これを関係「〜」による $A$ の**商**という．$A/\sim$ の要素を類であることを明確にするときは $\overline{x}$ のように横線を入れて表す．また，$A/\sim$ の要素 $x$ のようにもいう．このときは $x$ を含む類という意味である.

一つ一つの同値類はそれ自身集合である．これをひとつのものと見なす．これはまさに括弧にくくる行為である．洋の東西を問わず，一定の抽象化を言葉に持つ文明なら，日本語の「くくる」に応じる表現をもつ．現代の人間として「くくる」という抽象作用を上のように定式化し，パスカルの考え方を再構成しよう.

### 2.4.2 線束の思想

#### 同値類としての線束

パスカルの線束の考え方を引き継いで射影平面を構成しよう．この方法はユークリッド平面を基礎においている．パスカルは当然そのときに手元にあるユークリッド平面を考える基礎にした.

実は射影平面はユークリッド平面を部分概念として含むより広い概念と見なすことができる．ユークリッド平面を基礎に，同値類の考え方を用いて，その一般化を構成する，これがパスカルの思想の内にあることであった．このようにして射影平面が現実に構成できることを確認することはたいへん重要である.

パスカルはユークリッド平面の直線の集合に関して「束」を定義する．直線の集合が束であるとは，各直線がすべて同じ点を通るかまたはすべて平行である，こととする．これを基礎にしよう.

$A$ をユークリッド平面の相異なる 2 直線の組 $(k,\ l)$ の集合とする.

$$A = \{(k,\ l) \mid k,\ l \text{ はユークリッド平面の相異なる 2 直線 } \}$$

集合 $A$ に同値関係を定義する.

$$(k,\ l) \sim (m,\ n) : k,\ l,\ m,\ n \text{ は同じ束をなす.}$$

これをいいかえれば，二つの組 $(k,\ l)$，$(m,\ n)$ が同値であるとは

$$\begin{cases} k,\ l \text{ が交わるなら } m,\ n \text{ も交わり, 4 直線は共点である.} \\ k \mathbin{/\!/} l \text{ なら } m \mathbin{/\!/} n \text{ で, 4 直線は平行である.} \end{cases}$$

この同値関係による $A$ の商 $A／\sim$ を**射影平面**という．これを $P^2$ と書こう．$P^2$ の各要素は同値類であるが，これをユークリッド平面の2直線の組 $(k,\ l)$ で定まる射影平面 $P^2$ の「点」ともいう．ユークリッド平面において平行でない2直線の組 $(k,\ l)$ で定まる射影平面 $P^2$ の点は，ユークリッド平面の1点と対応する．

平行な2直線 $(k,\ l)$ によって定まる射影平面 $P^2$ の点には対応するユークリッド平面は存在しない．この点を**無限遠点**と呼ぼう．平行な直線の組は無限遠点を定め，同じ平行でも方向の異なる組は，異なる無限遠点を定める．こうして射影平面 $P^2$ は，ユークリッド平面にそれら無限遠点を加えたものと考えることができる．

次に $P^2$ に直線を定義する．直線は $P^2$ の2つの要素 $a$ と $b$ の組を基礎に定義される．ユークリッド平面でも，直線 $ab$ の上にある他の点 $c,\ d$ をとると直線 $cd$ は直線 $ab$ と一致する．$P^2$ の2つの要素 $a$ と $b$ の組がどのようなときに同じものを定めるのか．この同値関係を定めねばならない．

さてわれわれの構成では，$P^2=A/\sim$ は束の集合であり，その要素 $a$ とは2直線の組を「同じ束を定めるなら同値」という関係で類別したものである．要素 $a$ に対して，$a$ を定める2直線の組を一つとるとき，その2直線を「$a$ の2直線」と略記する．

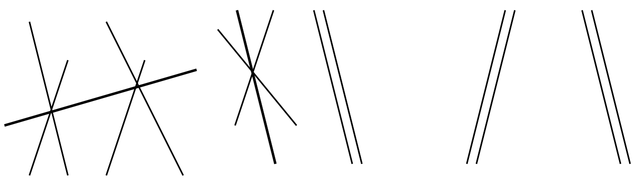
**命題 13**　$P^2$ の2つの要素 $a$ と $b$ があれば，次のいずれかが成り立つ．いずれが成り立つかは，$a$ を定める2直線の組のとり方によらない．

(1) $a$ の2直線とも $b$ の2直線とも束をなすユークリッド平面の直線がただ一つ存在する．

(2) $a$ の2直線とも $b$ の2直線とも束をなすユークリッド平面の直線が存在しない．

のいずれかが成り立つ．■

**証明**



共通のユークリッド平面の直線がある　共通の直線がない

$a,\ b$ ともユークリッド平面の点に対応していればそれらの点を通る直線がただ一つ存在する．$a$ がユークリッド平面の点に対応し $b$ が平行2直線の束であれば，$a$ で定まる点を通り $b$ の直線と平行な直線がただ一つ存在し，これが双方と束をなす．$a,\ b$ ともユークリッド平面の平行2直線の束であれば，$P^2$ の異なる2点なので，双方に平行な直線は存在しない．□

$P^2$ の要素の組の集合を $L$ とする．

$$L=\{(a,\ b)\mid a,\ b\in P^2\ \}$$

$L$ の要素に次の関係「$\sim$」を定める．

$(a,\ b)\sim(c,\ d)$ は次のいずれかが成り立つことである．

(1) $a$ の2直線とも $b$ の2直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，$c$ の2直線とも $d$ の2直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，それが一致する．

(2) $a$ の2直線とも $b$ の2直線とも束をなすユークリッド平面の直線がなく，$c$ の2直線とも $d$ の2直線とも束をなすユークリッド平面の直線がない．

**命題 14**　「$\sim$」は同値関係である．■

**証明**　$(a,\ b) \sim (a,\ b)$，および $(a,\ b) \sim (c,\ d)$ なら $(c,\ d) \sim (a,\ b)$ が類の要素のとり方によらず成り立つことは明らかである．

$(a,\ b) \sim (c,\ d)$ かつ $(c,\ d) \sim (e,\ f)$ とする．$a$ の 2 直線とも $b$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，$c$ の 2 直線とも $d$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，それが一致する場合．

$c$ の 2 直線とも $d$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，$e$ の 2 直線とも $f$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，それが一致するので，$a$ の 2 直線とも $b$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，$e$ の 2 直線とも $f$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，それが一致する．

ないときも同様である．□

この同値関係による $L$ の商 $L/\sim$ の各要素を $P^2$ の直線という．直線 $(a,\ b)$ で $a$ の 2 直線とも $b$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線が存在する場合，それはただ一つである．$a$ の 2 直線とも $b$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線が存在しない場合は，そのような直線はすべて同値であるから，それによって商 $L/\sim$ の要素がただ一つ定まる．その直線を「無限遠直線」と名づけると，$L/\sim$ から無限遠直線を除いた集合と，ユークリッド平面の直線の間に一対一対応が成り立つ．

$P^2$ の点 $a$ と直線 $(b,\ c)$ に対して，$a$ が直線 $(b,\ c)$ 上にあるとは，

$$(a,\ c) \sim (b,\ c)$$

となることと定める．

**命題 15**　$P^2$ の相異なる 2 直線 $(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ に対して，$(a,\ b)$ 上にも $(c,\ d)$ 上にもある点 $e$ がただ一つ存在する．■

**証明**　$(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ が異なるので，次のいずれかが成り立つとしてよい．

(1) $a$ の 2 直線とも $b$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，$c$ の 2 直線とも $d$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，それが一致しない．

(2) $a$ の 2 直線とも $b$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線があり，$c$ の 2 直線とも $d$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線がない．

第 1 の場合．$(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ から定まるユークリッド平面上の 2 直線を $l,\ m$ とする．$(l,\ m)$ で定まる $P^2$ の点を $e$ とする．$b$ の 2 直線と $l$ は束をなすので，$l$ 自身が $b$ の 2 直線とも $e$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線である．これから $(e,\ b) \sim (a,\ b)$ である．同様に $(e,\ d) \sim (c,\ d)$ であり，点 $e$ は 2 直線 $(a,\ b)$ 上にも $(c,\ d)$ 上にもある．

点 $f$ も 2 直線 $(a,\ b)$ 上にも $(c,\ d)$ 上にもあるとする．点 $f$ は $(e,\ b)$ 上にもあるので $(e,\ f) \sim (e,\ b)$．これから $(e,\ f) \sim (a,\ b)$ である．同様に $(e,\ f) \sim (c,\ d)$ となりこの結果 $(a,\ b) \sim (c,\ d)$．異なる 2 直線であるという仮定に反する．

第 2 の場合．$a$ の 2 直線とも $b$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線を $l$ とし，$l$ と平行な直線を $m$ とする．$(l,\ m)$ で定まる $P^2$ の点を $e$ とする．$l$ 自身は $a$ の 2 直線とも $e$ の 2 直線とも束をなすので $(e,\ b) \sim (a,\ b)$ である．

$e$ の 2 直線は $c$ の 2 直線と束をなすか，$d$ の 2 直線と束をなすか，いずれとも束をなさないかのいずれかである．$e$ の 2 直線は $c$ の 2 直線と束をなすか，$d$ の 2 直線と束をなすなら $e=c$ か $e=d$

である．いずれとも束をなさないなら，$e$ の 2 直線とも $d$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線がなく，$c$ の 2 直線とも $d$ の 2 直線とも束をなすユークリッド平面の直線がない，ことが成り立ち，$(e,\ d)\sim(c,\ d)$ である．

よって点 $e$ は 2 直線 $(a,\ b)$ 上にも $(c,\ d)$ 上にもある．ただ一つであることは，第 1 の場合と同様に成り立つ． □

かくして，射影平面 $P^2$ とそのうえの直線の集合 $L/\sim$ で 2 点は 1 直線を定め，2 直線は 1 点を定めるものを構成した．$P^2$ においては，ユークリッド平面の点に対応する点も対応しないいわゆる無限遠点もまったく同等であり，またユークリッド平面の点に対応する直線も無限遠直線もまったく同等であって，たいへん単純な構造になっている．

射影平面 $P^2$ は同じ線束が定めるものを射影平面の点とすることで得られた．その基礎になっているのはユークリッド平面であり，さらにその土台には連続性をもつ実数体がある．2 点が 1 直線を定め，2 直線が 1 点を定める．こうして実数体に土台をもつ射影平面の存在が確認された．

さらにまた，この方法は自然に空間にある「平面束」の考え方を導く．1 直線を共有するか，または互いに平行な平面の集合を束という．この束に同値関係を同様に自然に拡張された方法で定義し，その同値類を射影空間 $P^3$ とする．

しかしこれらの方法は，さらなる基本性質を同値類としての点や直線の定義にかえってなさねばならず，たいへん複雑である．ここから逆にどれだけの公理があれば，射影幾何の本質をとらえられるのかという問いが浮かびあがる．これは 19 世紀から 20 世紀にかけての時代に深く研究された．

### 2.4.3 射影の方法

#### 可換体上の射影空間

パスカルは，円錐曲線に関してある点群や線群で共線や共点という性質が成り立つことを示すのに，円錐曲線が円である場合で示せばよいことを発見した．

ある平面の上にある図形を空間の一点から射影し他の平面に写したとき，一方の平面上で 3 直線が 1 点で交わることと，他方の平面上にある対応する 3 直線が 1 点で交わることは同値である．この論の根拠になるのは，空間のある点を通る平面やその交わりとしての直線を，その点を通らないどの平面で切っても，切り口にできる図形の共線や共点という性質は不変だ，ということである．そして任意の円錐曲線はある円の射影として得られる．よってパスカルの定理は，円の場合に証明できれば一般の円錐曲線で成り立つ．

これが射影の方法である．この立場からは，1 定点を通る直線をどのような平面で切っても同じことなのであるから，定点を通る直線の集合が射影空間を構成する基本的な要素に他ならないということになる．とすれば

> 空間の 1 定点を通る直線の集合，これが射影平面である．「射影平面の点」とは，1 定点を通る直線のことである．「射影平面の直線」とは，1 定点を通る平面のことである．

と定義できる．パスカルのこの立場から射影空間を定義してみよう．

> $n$ を自然数，$\mathbb{R}$ を実数体とする．$n+1$ 次元線形空間 $V^{n+1}(\mathbb{R})$ を考える．この 1 次元部分空間つまり $V^{n+1}(\mathbb{R})$ の直線を「点」，2 次元部分空間つまり $V^{n+1}(\mathbb{R})$ の平面を「直線」とし，$V^{n+1}(\mathbb{R})$ の平面が $V^{n+1}(\mathbb{R})$ の直線を含むことを「通る」と定め，この「点」と「直線」でできるもの $P^n$ を射影幾何という．

**同次座標による表現**　線型空間 $V^{n+1}(\mathbb{R})$ の 1 次元部分空間が射影空間 $P^n$ の点になる．これをさらに具体的に書き下そうとするとどのようになるか．ここに**同次座標**の考え方が生まれた．

$n+1$ 次元線形空間 $V^{n+1}(\mathbb{R})$ に一組の基底を定め，それによってその要素を座標で表す．$V^{n+1}(\mathbb{R})$ から $\{0\}=(0,\ 0,\ ,\ \cdots,\ 0)$ を除いた集合を $V^{n+1}(\mathbb{R})^*$ と表す．ここに同値関係$\sim$を定義する．

$V^{n+1}(\mathbb{R})^*$ の二つの要素 $\mathbf{x}=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ と $\mathbf{y}=(y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)$ に対して，0 でない $k\in\mathbb{R}$ で $(y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)=(kx_0,\ kx_1,\ \cdots,\ kx_n)$ となるものが存在するとき，

$$\mathbf{x}\sim\mathbf{y}$$

とする．$P^n$ は

$$P^n=V^{n+1}(\mathbb{R})^*/\sim$$

と表される．$\mathbf{x}$ を含む同値類を $(x)$ と表す．$(x),\ (y)$ に対して $P^n$ の部分集合 $l((x),\ (y))$ を

$$l((x),\ (y))=\{(z)\mid z=x\lambda+y\mu,\ \lambda,\ \mu\quad\in K\}$$

で定める．このとき $l((x),\ (y))$ は $x$ と $y$ のとり方によらず $(x),\ (y)$ によって一意に定まる．これが直線である．

こうしてパスカルの思想を実現するモデルが構成された．次節で改めて公理的に射影幾何を定義し，このモデルがその公理系を満たすことも示そう．

# 第3章　射影幾何

## 3.1　射影幾何の公理

### 3.1.1　公理系

**射影幾何**　ユークリッド空間におかれた平面を，その平面上にない１点から他の平面に射影したとき，線分の長さや角の大きさなど図形の計量的性質は変わるが，平面上の直線や点の結合関係は変わらない．ユークリッド幾何は大きさの概念を含む．それに対して射影幾何は射影で不変な図形の関係のみから成り立つ．

パスカルの方法で構成したモデルはあくまでユークリッド座標空間，正確にはアフィン空間を根拠としている．ユークリッド平面の直線を類別して射影平面の点を得た．これはユークリッド座標空間を基礎にしている．射影空間をそれ自身として定義することはできないのか．

**公理の方法**　ここで公理の方法を用いる．射影幾何の歴史的内容を十分に研究し，そこから共通の枠組を取り出し，それを公理として設定する．そして演繹的に論を展開する．そのための公理群，それが射影空間の公理である．

公理をてこに論を展開すること自体が，現象としての数学をとらえることの深まりそのものとなる．公理は仮説である．物理学も仮説を設定する．しかし仮説の検証方法は，数学と物理学とでは異なる．物理学は実験で検証される．数学では，矛盾なく数学的現象をとらえることができるかどうかで検証され，それ自体がまた数学的現象の構造を深く識ることになる．

確実なことを改めて取りあげ，そこから厳密な論証で射影幾何を再構成し，そのなかで複比をもういちど定義しなおし，そのうえでパスカルの定理の証明を試みるのでなければならない．そのときに複比の本質をとらえ直さなければならない．複比は本当に長さの比なのか．あるいはそれは外見であってその本質は長さという概念によらないものであるのか．

点と呼ばれるものの集合と直線と呼ばれるものの集合があり，それらのあいだにどのような関係が成り立っていれば射影幾何が定義されるのか．公理を立てる方法というのは，空間的で幾何的な直観を論理的に分析し，その内容を公理に定式化し，そこから論を展開しつつ，また公理そのものの分析を行うという，数学の方法である．

その場合，どのような公理系を設定するのかが重要な問題になる．関連するすべての命題の真偽を決定できるという公理の**完全性**，公理系のいくつかの公理から同じ公理系の他の公理が導かれることはないという公理の**独立性**，公理からある命題とその命題の否定が同時に導けることはないという公理の**無矛盾性**，公理系の設定ではこれらをめざすべきである．

われわれはパスカルの思想やその試論の証明をふりかえり，それを公理的方法でとらえ，そこから射影幾何を定式化することを試みよう．このような研究は十九世紀末から二十世紀初頭にかけてドイツやフランスを中心に行われ，そのからくりはほぼ解明され，まとめられてきた．これらを参考に，定義と公理を定め，基本的な証明を再構成するという方向で考えていきたい．そこで，先に定義した $P^2$，$P^3$，$P^n$ はいったんおき，改めてそれらの公理的定義を構成してゆこう．

**一般公理**

公理を述べるために，まず考える対象と用語を定義する．

**定義 5**　集合 $P$ と $P$ の部分集合からなる集合 $L$ が与えられている．

i) **点と直線**　$P$ の要素を点といい $p$ のように表し，$L$ の要素を直線といい $l$ のように表すものとする．$p \in l$ であることを，点 $p$ が直線 $l$ の**上にある**といい，直線 $l$ は点 $p$ を**通る**という．2 直線がある点を共有する，つまり双方の上にある点が存在することを，その 2 直線が**交わる**という．■

ii) **共点と共線**　点の集合が同一の直線上にあるとき，それらの点は**共線**であるという．直線の集合が同一の点を通るとき，それらの直線は**共点**であるという．■

**注意 2**　いま前提としたことは，集合 $P$ とその部分集合からなる集合 $L$ があり，$P$ の要素と $L$ の要素の間に「含まれる」という関係が定義されている，ということだけである．

したがって,「関係」とは何かということをふくめて，公理の構造をより明確にするために，次のように言葉を定めることもできる．

> 二つの集合 $P$ と $L$，および $P$ と $Q$ の関係 $\Gamma \subset P \times Q$ が与えられている．集合の組 $\{P,\ Q,\ \Gamma\}$ において，$p \in P,\ l \in Q$ が $(p,\ l) \in \Gamma$ となるとき，$p$ が $l$ の**上にある**といい，$l$ は $p$ を**通る**という．

以上の準備によって次の公理系を述べることができる．次の公理系がもっとも簡明でしかも論を述べるのに十分なものである，つまり，完全であり，独立であり，無矛盾であることが知られている．これについては『射影幾何学』[17] などを参照のこと．

**公理 1 (射影幾何)**　次の三公理を射影幾何の公理という．

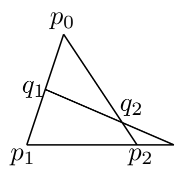
I) 相異なる 2 点を通る直線がただ一つ存在する．

II) $p_0,\ p_1,\ p_2$ を共線でない 3 点，$q_1,\ q_2$ を相異なる 2 点とし，$p_0,\ p_1,\ q_1$，$p_0,\ p_2,\ q_2$ がそれぞれ共線であるとする．このとき，$p_1,\ p_2$ を通る直線と $q_1,\ q_2$ を通る直線は交わる．

III) 直線上には少なくとも 3 点が存在する．

射影幾何の公理をみたす集合 $P$ と $L$ の組 $\{P,\ L\}$ を**射影幾何**，$P$ を**射影空間**という．

射影空間の点と直線を，ユークリッド平面の点や直線で考えるが，これはあくまで象徴的な記号として用いるのであって，ユークリッド平面におかれた図形の点や直線ではない．だから，いわゆる無限遠点もこの平面のなかに書いて考えることができる．そのことをふまえたうえでは，公理 II) を図示することができる．




**部分空間の定義**　部分空間を定義しよう．そのために記号を一つ定める．公理 I) によって，射影空間の 2 点 $p,\ q$ に対し，$p$ と $q$ を通る直線はつねに存在し，一意に確定する．これを $p \vee q$ と表す．一意性から $p \vee q = q \vee p$ である．

**定義 6 (部分空間)**　射影空間 $P$ の部分集合 $S$ の任意の 2 点 $p,\ q$ に対して，$p \vee q$ がすべて $S$ に含まれるとする．$P$ の直線で集合 $S$ に含まれるものの集合を $L'$ とするとき，明らかに $\{S,\ L'\}$ もまた公理系 1 をみたし射影幾何である．$S$ を $P$ の**部分空間**という．■

**例 1**　射影空間 $P$ の 1 点 $p$ からなる集合 $\{p\}$ は，$\{\{p\},\ \emptyset\}$ の組で射影幾何である．$P$ の 2 点 $p,\ q$ に対し，$l = p \vee q$ とする．$S = l,\ L' = \{l\}$ として $\{S,\ L'\}$ の組は射影幾何である．さらにまた $\{\emptyset,\ \emptyset\}$ も射影幾何である．これらはすべて $P$ の部分空間である．

**定義 7 (交わりと結び)**　射影空間 $P$ の部分空間 $S,\ T$ に対して集合 $S \vee T$ を

$$S \vee T = \{p \vee q \mid p \in S,\ q \in T\}$$

で定める．ただし，空集合に対しては $S \vee \emptyset = \emptyset \vee S = S$ とする．$S \vee T$ を $S,\ T$ の**結び**という．$p \vee q = q \vee p$ から $S \vee T = T \vee S$ である．

これに対して集合としての共通部分 $S \cap T$ を $S,\ T$ の**交わり**という．■

**命題 16**　三つの部分空間 $R,\ S,\ T$ の結びに関して結合律

$$R \vee (S \vee T) = (R \vee S) \vee T$$

が成り立つ．■

**証明**

$$R \vee S = \bigcup_{p \in R} (p \vee S)$$

であるから，$R,\ S,\ T$ が 3 点 $p,\ q,\ r$ の場合に示せばよい．

3 点が共線で $l$ 上にあれば

$$p \vee (q \vee r) = l = (p \vee q) \vee r$$

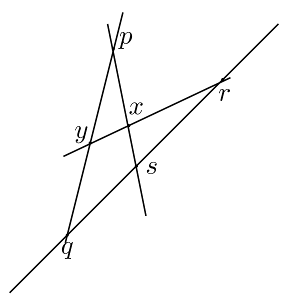
より成立．

次に 3 点が共線でないとする．任意の $x \in p \vee (q \vee r)$ をとる．点 $s \in q \vee r$ が存在して $x \in p \vee s$．もし $s = q$ または $x = r$ なら $x \in (p \vee q) \vee r$．$s \neq q$ かつ $x \neq r$ とする．公理 II) を

$$p_0 = s,\ \ p_1 = p,\ q_1 = x,\ p_2 = q,\ q_2 = r$$

で用いる．2 直線 $r \vee x,\ q \vee p$ は交わる．交点を $y$ とする．$y \in p \vee q$, $x \in y \vee r$ より $x \in (p \vee q) \vee r$．つまり

$$p \vee (q \vee r) \subset (p \vee q) \vee r$$




逆の包含関係も同様に成り立ち等号が成立する．□

**命題 17**　$S$ と $T$ が射影空間 $P$ の部分空間であるとき，結び $S \vee T$ は $S$ と $T$ を含む最小の部分空間である．■

**証明**　2 点 $p,\ q \in S \vee T$ をとる．$p \in s \vee t,\ q \in s' \vee t'$ となる点 $s,\ s' \in S,\ t,\ t' \in T$ が存在する．任意の点 $x \in p \vee q$ に対してそれを含む直線 $s'' \vee t''$ $(s'' \in S,\ t'' \in T)$ が存在すればよい．ところが $\vee$ の対称性と結合律から

$$x \in (s \vee t) \vee (s' \vee t') = (s \vee s') \vee (t \vee t')$$

である．よって部分空間 $(s \vee s') \vee (t \vee t')$ に $x$ を含む直線があり，$s \vee s' \subset S$，$t \vee t' \subset T$ なので，その直線を定める 2 点 $s'' \in S$，$t'' \in T$ が存在する．

$S$ と $T$ を含む部分空間は $S \vee T$ の直線をすべて含み，その結果 $S \vee T$ を含む．つまり，$S \vee T$ は $S$ と $T$ を含む最小の部分空間である． □

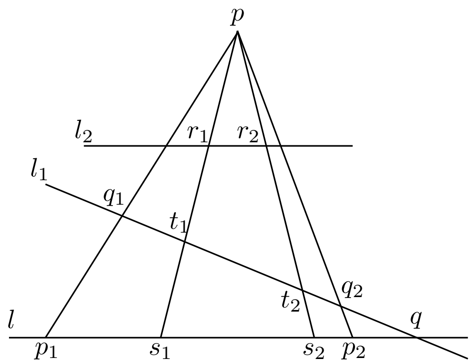
このことから $S \vee T$ を $S$, $T$ の張る空間ともいう．$r$ 個の点 $p_i$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ があれば，$\vee$ の交換律と結合律によって，部分空間 $((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \vee \cdots$ と構成した部分空間が，その順序に関係なく定まる．これを

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \cdots \vee p_r$$

と書き，点 $p_i$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ で張られる部分空間という．

**命題 18**　射影空間 $P$ の点 $p$ と直線 $l$ で張られる部分空間を $p \vee l$ と記す．このとき，$p \vee l$ の 2 直線は交わる． ■

**証明**　$p \vee l$ の直線 $l_1 = q_1 \vee q_2$ をとる．$q_1$，$q_2$ を含む直線を $p \vee p_1$，$p \vee p_2$ とする．公理 II) によって $l$ と $l_1$ は交わる．交点を $q$ とする．直線 $l_2 = r_1 \vee r_2$ をとる．$r_1$，$r_2$ を含む直線を $p \vee s_1$，$p \vee s_2$ とする．$p_1$，$q_1$，$p$，$s_1$，$q$ に公理 II) を適用すると，$q_1 \vee q$ と $s_1 \vee p$ は交わる．交点を $t_1$ とする．同様に $q_2 \vee q$ と $s_2 \vee p$ は交わる．交点を $t_2$ とする．$p$，$r_1$，$t_1$，$r_2$，$t_2$ に公理 II) を適用することで，$l_1$，$l_2$ が交わることが示された． □




後に用語を定義するが，$p \vee l$ は射影平面といわれる．この命題によって射影平面上の 2 直線は交わることが示された．これは，公理系からの結論なのである．

**命題 19**　$P$ の 2 つの部分空間 $S$ と $T$ に対し，集合としての $S \cap T$ は $S$, $T$ に含まれる最大の部分空間である． ■

**証明**　$p$, $q \in S \cap T$ なら $p \vee q \in S$ かつ $p \vee q \in T$ なので $p \vee q \in S \cap T$ となり $S \cap T$ は部分空間である．$S$, $T$ に含まれる部分空間は $S \cap T$ に含まれる．つまり，$S \cap T$ は $S$, $T$ に含まれる最大の部分空間である． □

**命題 20**　三つの部分空間 $R$, $S$, $T$ があり，$R \subset T$ とする．このときこれらの結びと交わりに関して

$$(R \vee S) \cap T = R \vee (S \cap T)$$

が成り立つ． ■

**証明**　$R \subset R \vee S$, $R \subset T$ より $R \subset (R \vee S) \cap T$．$S \subset R \vee S$ より $S \cap T \subset (R \vee S) \cap T$．よって

$$R \vee (S \cap T) \subset (R \vee S) \cap T$$

である．これはつねに成立する．

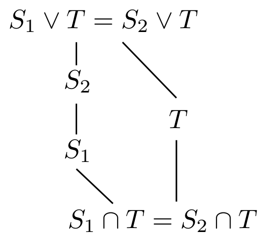
逆に射影空間では $R \vee (S \cap T) \supset (R \vee S) \cap T$ が成立することを示す．$(R \vee S) \cap T$ の直線 $l$ をとる．$l$ は $R \vee S$ の直線なので，$l = r \vee s$, $(r \in R,\ s \in S)$ となる $r$, $s$ が存在する．$R \subset T$ で $l$ は $T$

の直線でもあるので，$l$ 上の点は $T$ に含まれる．つまり $s \in T$ でもある．よって $l$ は $R \vee (S \cap T)$ の直線である．

よって命題が示された．□

命題 20 の結論部分に関して次のことが成り立つ．

**命題 21**　二つの条件



**P**:　$R \subset T$ ならば $R \vee (S \cap T) = (R \vee S) \cap T$.

**Q**:　$S_1 \subsetneqq S_2$，$S_1 \vee T = S_2 \vee T$ かつ $S_1 \cap T = S_2 \cap T$ をみたす部分空間 $S_1$，$S_2$，$T$ は存在しない．

は同値である．■

**証明**　それぞれ対偶を示す．

条件 **Q** が成り立たないとする．つまり **Q** の条件を満たす $S_1$，$S_2$，$T$ が存在するとする．このとき

$$S_1 \vee (T \cap S_2) = S_1 \vee (T \cap S_1) = S_1 \subsetneqq S_2 = (S_2 \vee T) \cap S_2 = (S_1 \vee T) \cap S_2$$

となり，$S_1 \subset S_2$ であって $S_1 \vee (T \cap S_2) \neq (S_1 \vee T) \cap S_2$ となるものが存在した．つまり条件 **P** が不成立．

条件 **P** が成り立たないとする．$R \subset T$ であるから，$R \vee (S \cap T) \subset (R \vee S) \cap T$ は成立している，よって $R \vee (S \cap T) \subsetneqq (R \vee S) \cap T$ である．$S_1 = R \vee (S \cap T)$，$S_2 = (R \vee S) \cap T$ とおく．

$$\begin{aligned} S_1 \vee S &\subset S_2 \vee S = ((R \vee S) \cap T) \vee S \\ &\subset (R \vee S) \vee S = R \vee S = R \vee (S \cap T) \vee S = S_1 \vee S \end{aligned}$$

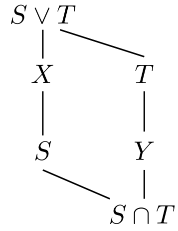
となり，すべて等号成立して $S_1 \vee S = S_2 \vee S$．同様に $S_1 \cap S = S_2 \cap S$ も成立し，条件 **Q** の $T$ を $S$ と読みかえれば条件 **Q** が成立しない部分空間の組が存在した．□

射影幾何の公理という極めて単純な公理から，部分空間の列に関するこのような命題が示された．

「束論」という分野がある．命題 21 は束論の命題であり，束論の表現を用いると「射影空間とその部分空間はモジュラー束をなす」ということになる．これについては『束論』[16]，および『射影幾何学』[15] を参照されたい．

**定義 8**　射影空間の二つの部分空間 $S$ と $T$ について，$S \subsetneqq U \subsetneqq T$ となる部分空間 $U$ が存在しないことを，$T$ は $S$ の**上に素**であるといい，$S$ は $T$ の**下に素**であるという．■

**命題 22**　射影空間の二つの部分空間 $S$ と $T$ がある．部分空間の二つの集合



$$\begin{aligned} A &= \{X \mid S \subsetneqq X \subsetneqq S \vee T\} \\ B &= \{Y \mid S \cap T \subsetneqq Y \subsetneqq T\} \end{aligned}$$

をとる．$A$ と $B$ の要素は

$$f : X \to X \cap T, \quad g : Y \to S \vee Y$$

で一対一に対応する．■

**証明**　$f(X) \in B$，$g(Y) \in A$ は明らかである．$\vee$，$\cap$ の可換性と命題 20 より，

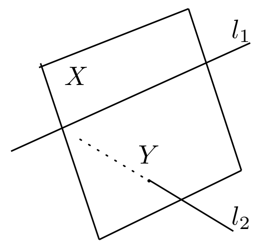
$$g(f(X)) = S \vee (X \cap T) = (S \vee T) \cap X = X$$
$$f(g(Y)) = (S \vee Y) \cap T = Y \vee (S \cap T) = Y$$

よって $f$ と $g$ は互いに逆写像であり，逆写像が存在したので一対一対応である．　□

この対応は単に一対一対応であるばかりではなく，包含関係を保持する．つまり，$S \subsetneqq X_1 \subset X_2 \subsetneqq S \vee T$ なら $f(X_1) \subset f(X_2)$．$g$ も同様．したがって部分空間の集合を包含関係の構造をもつものと考えれば，この構造に関する同型写像になっている．

またこれによって，$S \vee T$ が $S$ の上に素なら，$T$ は $S \cap T$ の上に素であり，その逆も成り立つ．

**例 2**　次小節で射影空間の次元などを定義する．それを前提にする．$l_1$，$l_2$ を直線とし，$l_1 \cap l_2 = \emptyset$ とする．このとき $l_1 \vee l_2$ は 3 次元射影空間である．$l_1 \subsetneqq X \subsetneqq (l_1 \vee l_2)$ となる $X$ とは $l_1$ を含む平面（2 次元射影空間）である．この $X$ に対する $f(X)$ は $X$ と $l_2$ の交点である．$(l_1 \cap l_2) \subsetneqq Y \subsetneqq l_2$ となる $Y$ とは $l_2$ 上の点である．$g(Y)$ は $Y$ と $l_1$ を含む平面である．これが一対一対応の意味である．




### 有限性公理

射影幾何の骨格となる公理系とそこから導かれる基本性質を導いた．しかしこれだけでは，$n$ 次元射影幾何というときの次元が定義されない．座標で考えるときは当然のように有限個の数の組からはじめるのだが，この有限性が上記の射影幾何の公理系にはない．有限性を何らかの形で公理としなければならない．そして有限性が射影幾何の公理と結びついて得られる基本的な結果まで，ここで考えよう．

**公理 2 (有限次元射影幾何)**

IV) 射影空間 $P$ に有限個の点が存在し，それらを含む任意の部分空間は $P$ に一致する．

射影幾何 $\{P,\ L\}$ が公理 IV) もみたすとき**有限次元射影幾何**，$P$ を有限次元射影空間という．

**命題 23**　有限次元射影幾何の射影空間 $P$ とその部分空間の列 $P_i$ $(i = 0,\ 1,\ \cdots)$ で，$P_0 \neq \emptyset$ であり，$i = 0,\ 1,\ \cdots$ に対して

$$P_i \subsetneqq P_{i+1}, \quad P = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$$

となるとする．このときある $m$ が存在して $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{m} P_i = P$ となる．　■

**証明**　$P$ は有限次元射影幾何の射影空間なので，有限個の点 $q_1$，$q_2$，$\cdots$，$q_N$ で，それらを含む任意の部分空間は $P$ に一致するものがある．

$$P_i \subsetneqq P_{i+1} \text{ かつ } \{q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_N\} \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$$

なので，ある $m$ が存在して

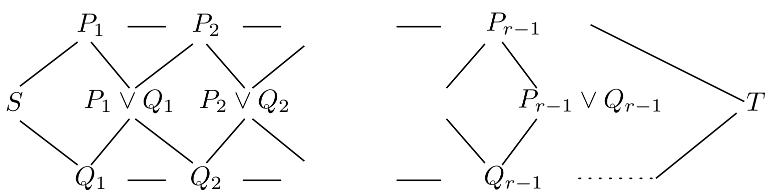
$$\{q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_N\} \subset \bigcup_{i=0}^{m} P_i$$

となる．このとき $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{m} P_i = P$ となる． □

このように有限次元射影空間では，$P_0(\neq \emptyset)$ からはじまり $P$ に至る部分空間の列は有限列になる．部分空間の列が有限であっても，その長さに最大値が存在するとはかぎらない．しかし射影幾何の公理のもとでは，公理 IV) からこのような列の長さに最大値が存在することが帰結する．それを見てゆこう．

**命題 24**　ある射影空間の部分空間 $T$ と $T$ の部分空間 $S$ がある．部分空間の列 $\{P_i\}$ $(i = 0,\ 1,\ \cdots,\ r)$ で，$P_0 = S$ かつ $P_r = T$ であり $P_{i+1}$ が $P_i$ の上に素となるものと，部分空間の列 $\{Q_i\}$ $(i = 0,\ 1,\ \cdots,\ s)$ で，$Q_0 = S$ かつ $Q_s = T$ であり，$Q_{i+1}$ が $Q_i$ の上に素となるものがある．このとき $r = s$ である． ■

**証明**　$r \leqq s$ とし，$r$ に関する数学的帰納法で示す．$r = 1$ なら，$T$ が $S$ の上に素となり，$s$ も 1 でなければならない．$r$ より小さいときに成立とする．




$P_1 = Q_1$ ならこれを $S$ と見ることで，帰納法の仮定から成立．$P_1 \neq Q_1$ とする．部分空間の列 $P_i \vee Q_i$ を考える．$P_{r-1} \subset P_{r-1} \vee Q_{r-1} \subset T$ なので $P_{r-1} \vee Q_{r-1}$ は $P_{r-1}$ か $T$ に一致．部分空間の列 $P_i \vee Q_i$ は順次上に素とはかぎらないが，さらに細分することを考えれば，$P_1$ にはじまり $T$ に終わる $r-1$ の列が $P_i$ の系列と $P_i \vee Q_i$ の系列を必要ならさらに細分したものと二つできる．$r-1$ は二つの長さのうち大きくない方であるので帰納法の仮定から，この二列の長さは等しい．一方，これはまた $Q_1$ にはじまり $T$ に終わる二つの列でもあり，$P_i \vee Q_i$ からなる列の長さは $r-1$ なのでやはり帰納法の仮定から $r-1 = s-1$ である．よって $r = s$ が成立し，この結果，命題が証明された． □

**定義 9 (次元)**　有限次元射影空間 $P$ がある．$P$ の部分空間の列 $\{P_i\}$ $(i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ で，$P_n = P$ かつ $P_0 \neq \emptyset$ であり，$P_i \subsetneqq P_{i+1}$ となる部分空間列を考える．そのなかで $n$ が最大となるものがある．$n$ の値を射影空間 $P$ の**次元**といい，$\dim(P)$ と記す． ■

最大となるのは，$P_0$ が 1 点からなる部分空間で，$P_{i+1}$ が $P_i$ の上に素なときである．このとき，命題 24 よりその長さは部分空間列のとり方によらず一定である．

$\dim(P) = n$ のときこれを明記して $P^n$ とも記す．明らかに各部分空間も有限次元である．$s$ 次部分空間を $P^s$ のように記す．1 点よりなる部分空間の次元は 0，つまり $P^0$ である．直線の集合 $L$ の要素はこれを部分射影空間とみると 1 次元であり，つまり $P^1$ である．これを**射影直線**という．また $P^2$ を**射影平面**という．さらに，射影空間としての空集合は $\dim(\emptyset) = -1$ とする．その理由は次の次元定理が例外なく成立するようにするためであるが，$P^0$ の一つ前という点からいっても自然である．また $n$ 次元射影空間において $P^{n-1}$ を**超平面**という．

同じ $m$ 次元射影空間で別のものを区別するときは，$S^m$ と $T^m$ のように文字をかえることにする．次元が関わらない命題では部分空間を $S$ や $T$ のように表す．

**定理 2 (次元定理)**　部分空間 $S$ と $T$ に関して

$$\dim(S \vee T) + \dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T)$$

が成り立つ．■

**証明**　それぞれの部分の順次上に素な部分空間の列を繋ぐことで，$\emptyset$ から $S \vee T$ にいたる二つの順次上に素な部分空間の列を作ることができる．

$$\emptyset \subset \cdots \subset S \cap T \subset \cdots \subset S \subset \cdots \subset S \vee T$$
$$\emptyset \subset \cdots \subset S \cap T \subset \cdots \subset T \subset \cdots \subset S \vee T$$

命題 24 によってこれらの長さは等しい．一方，命題 22 によれば，$S$ と $S \vee T$ の間の順次上に素な部分空間 $X$ の列を $f : X \to X \cap T$ でうつすと $S \cap T$ と $T$ を結んだ部分列が得られ，逆も成り立ち，順次上に素な部分列に移ることがわかる．よってこの間を順次上に素な部分列で結んだ長さは等しい．

この結果 $S \cap T \neq \emptyset$ なら

$$\dim(S \vee T) - \dim(S) = \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

となり，定理の等式が得られる．

また $S \cap T = \emptyset$ なら，

$$\dim(S \vee T) - \dim(S) = \dim(T) + 1$$

となり，$\dim(\emptyset) = -1$ と定めたので，この場合も定理の等式が得られる．□

次の命題は命題 17，命題 19 より明らかである．

**命題 25**　部分空間 $S$ と $T$ に対し，$S \vee T$ は $S$ と $T$ を含む次元が最低の部分空間であり，$S \cap T$ は $S$ と $T$ にふくまれる次元が最高の部分空間である．■

**定義 10 (点の独立)**　射影空間 $P$ の $r+1$ 個の点で張られる部分空間の次元が $r$ であるとき，これらの点は**独立**であるといい，そうでないときは**従属**であるという．■

**命題 26**　$r \leqq n$ のとき，$P^r$ には $r+1$ 個の独立な点がある．■

**証明**　$P^r$ の次元が $r$ なので，順次上に素な部分空間の列

$$P^0 \subsetneqq P^1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P^{r-1} \subsetneqq P^r$$

が存在する．$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r$ に対して，$P^i$ に含まれ $P^{i-1}$ に含まれない点が存在する．それを選ぶ．その $r$ 個の点に $P^0$ の点をあわせた $r+1$ 個の点 $p_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ をとる．これらで張られる部分空間の列

$$P^0 \subsetneqq p_0 \vee p_1 \subsetneqq p_0 \vee p_1 \vee p_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq p_0 \vee \cdots \vee p_r \subset P^r$$

は順次上に素な部分空間の列である．もし $p_0 \vee \cdots \vee p_r \neq P^r$ なら $P^r$ の次元が $r$ より大きくなり矛盾．よって $p_0 \vee \cdots \vee p_r = P^r$ である．つまりこれら $r+1$ 個の点は独立である．□

**定義 11 (一般の位置)**　射影空間 $P$ の部分集合 $M$ がある．$M$ の任意の $r+1$ 個の点が $r \leqq n$ であればつねに独立であるとき，$M$ の点は**一般の位置**にあるという．■

**命題 27**　$P^n$ の異なる超平面 $S^{n-1}$ と超平面 $T^{n-1}$ の交わりは次元 $n-2$ の部分空間である．■

**証明**　$\dim(S \vee T) \geqq n$ なので次元の定義から $\dim(S \vee T) = n$．次元定理から

$$\dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \vee T) = n - 2$$

である．□

**射影図形**　射影幾何は図形の射影的な性質を研究して見出された．しかし，数学はそのような研究の結果を帰納して，逆に公理にまとめ，そこから演繹的に論を展開しようとする．そうすることで一般性を獲得し，新たな発見と論の展開を得る．

とすれば，射影幾何の公理から逆に図形とは何かを定義し直さなければならない．

**定義 12** 図形および束を次のように定義する．

i) 射影空間 $P$ の部分空間からなる集合を，$P$ **図形**，あるいは**線形基本図形**という．■

ii) $n-2$ 次元部分空間 $U^{n-2}$ を含む超平面の集合 $\Sigma_1$ は図形である．この図形を $U$ で定まる**超平面束**という．$n=2$ なら**直線束**，$n=3$ なら**平面束**という．■

iii) $0 \leqq r < n$ に対し，$n-r-1$ 次元の部分空間 $S^{n-r-1}$ を含む超平面 $P^{n-1}$ の集合 $\Sigma_r$ を $S^{n-r-1}$ を中心とする**星**という．■

すでにパスカルの思想にならって，ユークリッド空間の直線束の概念から射影空間を構成した．そして，そこで得られた性質を公理として定式化した．そのうえで，逆にその公理から図形と束を定義し直したのである．

**双対原理**

**定理 3**　射影幾何 $\{P,\ L\}$ がある．射影空間 $P$ の超平面 $P^{n-1}$ の集合を $P^*$ とし，$n-2$ 次元部分空間の集合を $L^*$ とする．$P^*$ の要素 $p^*$ が $L^*$ の要素 $l^*$ を通るということを，$P$ において $p^* \supset l^*$ が成り立つこと，と定める．共線，共点もこの意味で定める．このとき，集合の組 $\{P^*,\ L^*\}$ は射影幾何の公理 I)〜IV) をみたす．■

**証明**　$P$ の次元を $n$ とする．

公理 I) について．$p_1^*,\ p_2^* \in P^*$ をとる．命題 27 より $\dim(p_1^* \cap p_2^*) = n-2$ なので，$p_1^* \cap p_2^* \in L^*$ となり，$p_1^*,\ p_2^*$ をとおる $L^*$ の要素が存在した．

公理 II) について．$P^*$ での意味において共線でない $p_0^*,\ p_1^*,\ p_2^* \in P^*$，および異なる $q_1^*,\ q_2^* \in P^*$ をとる．$P$ において，$p_0^* \cap p_1^* \subset q_1^*$，$p_0^* \cap p_2^* \subset q_2^*$ とする．$l^* = q_1^* \cap q_2^*$ とする．$q_1^*,\ q_2^* \supset p_0^* \cap p_1^* \cap p_2^*$ なので，$l^* \cap p_1^* \cap p_2^* = p_0^* \cap p_1^* \cap p_2^*$．ゆえに

$$\begin{aligned}
\dim\{l^* \vee (p_1^* \cap p_2^*)\} &= \dim(l^*) + \dim(p_1^* \cap p_2^*) - \dim\{l^* \cap (p_1^* \cap p_2^*)\} \\
&= n - 2 + n - 2 - \dim\{p_0^* \cap (p_1^* \cap p_2^*)\} \\
&\leqq 2n - 4 - (n-3) = n - 1
\end{aligned}$$

よって $l^* \vee (p_1^* \cap p_2^*)$ を含む $n-2$ 次元部分空間が存在する．

公理 III) について．$l^* \in L^*$ をとる．$l^*$ は $P$ においては $\dim(l^*) = n-2$ なので，$l^*$ に含まれない点 $p_1$，$l^* \vee p_1$ に含まれない点 $p_2$ をとることができる．射影幾何の公理 1 の III) によって，直線 $p_1 \vee p_2$ 上に第 3 の点 $p_3$ が存在する．$P$ において $p_i^* = p_i \vee l^*$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ とおくと，$p_i^*$ は $l^*$ を含む超平面である．これは $P^*$ において $p_i^* \in P^*$ で，$P^*$ での点 $p_i^*$ が $P^*$ での直線 $l^*$ 上にあることを意味している．

公理 IV) について．$P^n$ の $n+1$ 個の独立な点 $p_i$ $(1 \leqq i \leqq n+1)$ をとる．

$$p_j^* = p_j\text{を除く他の } p_i(1 \leqq i \leqq n+1,\ i \ne j) \text{ で張られる部分空間}$$

とする．これは $P$ の超平面であり，かつ $P$ で

$$\bigcap p_i^* = \emptyset$$

である．これは $P^*$ においては，$p_i^*$ $(1 \leqq i \leqq n+1)$ を含む $P^*$ の部分空間は $P^*$ 自身であることを意味する．よって $p_i^*$ は $P^*$ において公理 IV) の条件を満たす有限個の点である．

さらにこれから $P^*$ も $n$ 次元であることがわかる． □

**命題 28**　$P$ の次元を $n$ とする．射影空間 $P$ の図形に関する命題がある．その命題は公理系とそこから定義された概念で述べられている．$0 \leqq r < n$ について，その命題のなかの $P^r$ をすべて $P^{n-r-1}$ に置きかえ，$\subset$ と $\supset$ をすべて入れ替た $P$ の命題を作る．このとき一方の命題が真なら他方の命題も真である．特に $P^*$ の次元も $n$ である． ■

**証明**　定理 3 の証明にあるように，$P$ の点と直線，超平面と $n-2$ 次部分空間を，$P^*$ の超平面と $n-2$ 次部分空間，点と直線に対応させることで，$P$ と $P^*$ は同じ公理系を満たす．したがって，$P$ の公理系から真偽が演繹される $P$ の図形に関する命題と $P^*$ の公理系から真偽が演繹される $P^*$ の図形に関する命題は，$r$ 次元部分空間を $n-r-1$ 次元部分空間におきかえ，$\subset$ と $\supset$ が互いに入えることで互いに対応し，対応する 2 つの命題は同値である．よって本命題が成立する． □

$\{P^*,\ L^*\}$ を**双対射影幾何**，射影空間 $P^*$ を射影空間 $P$ の**双対空間**という．

### 3.1.2　射影幾何の存在

#### モデルの構成

このような公理系は，それを満たすものを構成しうることが重要である．それを与えるのがパスカルの思想を具体化した同次座標の方法である．その端緒はすでに「パスカルの方法」のなかの「切断の方法」で述べた．そこでは実数体の上に構成したのであるが，以下はそれを必ずしも可換でない一般の体でそれを行おう．

ここで確認のため体の定義を掲げる．

**体の定義**　ここで，体の定義を確認し，いくつかの重要なことを証明しておこう．実数体の定義は『解析基礎』を，複素数体の定義は『数学対話』の「複素数の構成」を，また有限体は『数論初歩』を参考にしてほしい．

集合 $K$ を考え，$a$ や $b$ で $K$ の要素を表す．集合 $K$ が次の条件を満たすとき，**体**という．

(1) 2 つの演算，加法 $+$ と乗法 $\times$ が定義されている．つまり，$K$ の要素 $a$ や $b$ に対して，要素 $a+b$, $a\times b$ がそれぞれ確定する．

(2) 2 つの演算は結合法則を満たす．

$$(a+b)+c=a+(b+c)\ ,\quad (a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

(3) 加法は可換である．$a+b=b+a$ が成り立つ．

(4) $a+e=a$, $a\times f=f\times a=a$ となる要素 $e$ と $f$ が存在する．$e$ を加法の単位元といい，通常 0 と書く．$f$ を乗法の単位元といい，通常 1 と書く．

(5) $a+x=0$ となる $x$ が存在する．これを $a$ の加法の逆元といい，$-a$ と書く．

(6) 0 でない要素 $a$ に対して $a\times x=1$ となる $x$ が存在する．これを $a$ の乗法の逆元といい，$a^{-1}$ と書く．

(7) 加法と乗法について分配法則が成り立つ．

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c\ ,\quad (b+c)\times a=b\times a+c\times a$$

乗法についても可換性 $a\times b=b\times a$ が成り立つものを**可換体**と呼ぶ．

**体の同型**　二つの体の間の一対一対応写像 $f$ が演算を保存するとき，これを体の同型写像という．演算を保持するとは，

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\qquad f(ab)=f(a)f(b)$$

となることである．同型写像の集合は，写像の合成を演算として群をなす．これを体 $K$ の同型群といい $A(K)$ と表す．

**体の自己同型**　後に必要となる体論の命題をここに述べる．

$K$ を体とし，$a$ を $K$ の 0 でない要素とする．$K$ から $K$ への写像で

$$\sigma_a(x)=axa^{-1}$$

で定義されるものは，$K$ から $K$ への同型写像である．これを $K$ の**内部自己同型**という．内部自己の集合は，写像の合成を演算として群をなす．これを体 $K$ の内部自己同型群といい $I(K)$ と表す．

$K$ が可換体なら内部自己同型は恒等写像のみである．実数体や複素数体はもとより可換体であり，内部自己同型群 $I(K)$ は恒等写像のみの群である．

実数体や複素数体では，内部自己同型ではない他の同型に関して次の命題が成立する．その証明は有理数体が実数体の中で稠密に存在するという，実数の連続性に関わることを根拠にしている．実数体の構成と連続性に関することは『解析基礎』にある．それを前提にする．

**命題 29**　実数体 $\mathbb{R}$ の同型写像群 $A(K)$ は恒等写像のみの群である．■

**証明**　恒等写像でない同型 $\varphi$ が存在すると仮定する．恒等写像ではないので $\varphi(s)\neq s$ となる $s\in\mathbb{R}$ が存在する．$\varphi(s)>s$ なら $\varphi(-s)=-\varphi(s)<-s$ なので，必要なら $-s$ をとることによって $\varphi(s)<s$ とできる．有理数体 $\mathbb{Q}$ は実数体 $\mathbb{R}$ の中で稠密である．ゆえに

$$\frac{\varphi(s)+s}{2}<a<s$$

となる有理数 $a$ が存在する．$c=s-a$ とおく．

$\varphi(1)=1$ なので，$a=\dfrac{q}{p}$ と整数 $p$ と $q$ で表す．正整数 $p$ に関しては，$\varphi$ が体の同型であることから

$$\varphi(p)=\varphi(1+\cdots+1)=\varphi(1)+\cdots+\varphi(1)=p$$

となり，$\varphi(-p)=-\varphi(p)$ より負の整数も $\varphi$ で動かない．これから

$$\varphi(a)=\varphi(p^{-1}q)=\varphi(p)^{-1}\varphi(q)=p^{-1}q=a$$

となり，$\varphi$ は $\mathbb{Q}$ の要素を動かさない．よって

$$\varphi(c)=\varphi(s)-a<0$$

一方，$c>0$ なので $c$ はある 0 でない実数 $b$ を用いて $c=b^2$ と表される．よって

$$\varphi(c)=\varphi(b^2)=\varphi(b)^2>0$$

これは矛盾である． □

体の超越拡大に関する準備を必要とするので，次の命題の証明は略する．

**命題 30** 複素数体 $\mathbb{C}$ の同型群 $A(K)$ は無限群である．そのうち複素数体の実数から導かれる位相に関して連続となるものは複素共役写像 $z\mapsto\bar{z}$ のみである． ■

**モデルの構成** 以下 $K$ を体とする．体上の線形空間とその基底については，代数学の基本書を参考にしてもらいたい．

**定義 13** $K$ を体，$n$ を自然数とし，$n$ 個の $K$ の要素の順序づけられた組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ を考える．これを $\mathbf{x}$ のようにも表す．$\mathbf{x}$ の集合を $K^n$ と書く．$K^n$ に加法と $K$ の要素 $\lambda$ の $a$ 倍を次のように定める．

(1) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots,\ x_n+y_n)$

(2) $\mathbf{x}\lambda=(x_1\lambda,\ x_2\lambda,\ \cdots,\ x_n\lambda)$

このように定めると $K^n$ は加法群であり，かつ $K$ の右からの作用をもつ．つまり $K-$ 右加群である．これを $K$ 上の $n$ 次元右線形空間といい，$V^n(K)$ のように記す．あるいは簡単のために $K^n$ とすることもある．

$V^n(K)$ の部分集合 $A$ で，$K$ の右からの積で閉じており，それ自身同様に $K-$ 右加群であり，かつ $r$ 個よりなる基底が存在するものを $r$ 次元部分空間という． ■

体 $K$ 上の $n+1$ 次元右線形空間の要素を $\mathbf{x}=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ のように添え数を 0 からはじめるものとする．

**命題 31** 体 $K$ 上の $n+1$ 次元右線形空間 $V^{n+1}(K)$ がある．この 1 次元部分空間の集合を $P^n$，2 次元部分空間の集合を $L$ とし，ある 2 次元部分空間がある 1 次元部分空間を含むことを「通る」とすれば，$\{P,\ L\}$ は射影幾何の公理 I)〜IV) を満たす． ■

**証明**　$n+1$ 次元線形空間 $V^{n+1}(K)$ の $m$ 次元部分空間を $U^m$ のように表す．$\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\cdots$, $\mathbf{a}_{m-1}$ が $U^m$ の基底であることを $U^m =< \mathbf{a}_0,\ \mathbf{a}_1,\ \cdots,\ \mathbf{a}_{m-1} >$ と表す．
公理 I) について．

$P^n$ の異なる二つの 1 次元部分空間を ${U_1}^1$, ${U_2}^1$ とし，その基底をそれぞれ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$，つまり ${U_1}^1 =< \mathbf{a}_1 >$, ${U_2}^1 =< \mathbf{a}_2 >$ とする．このとき，${U_1}^1$, ${U_2}^1$ を含む 2 次元部分空間 $U^2$ が $U^2 =< \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2 >$ で定まり，この他にない．よって公理 I) が成りたつ．
公理 II) について．

異なる 1 次元部分空間 ${U_0}^1$, ${U_1}^1$, ${U_2}^1$ が同一の 2 次元部分空間上にあり，それらとは異なる ${V_1}^1$, ${V_2}^1$ について，異なる 1 次元部分空間 ${U_0}^1$, ${V_1}^1$, ${V_2}^1$ が同一の 2 次元部分空間上にあるとする．

${U_1}^1$, ${V_1}^1$ を含む 2 次元部分空間を ${T_1}^2$，${U_2}^1$, ${V_2}^1$ を含む 2 次元部分空間を ${T_2}^2$ とする．このとき，${T_1}^2 \cap {T_2}^2$ の次元が 1 以上であることを示せばよい．

${U_0}^1 =< \mathbf{a}_0 >$, ${U_1}^1 =< \mathbf{a}_1 >$ とすると，${U_2}^1$ が $< \mathbf{a}_0,\ \mathbf{a}_1 >$ 上にあるので，${U_2}^1 =< \mathbf{a}_0\lambda + \mathbf{a}_1\mu >$ となる $\lambda$, $\mu (\in K)$ がある．同様に ${V_1}^1 =< \mathbf{b}_1 >$ とする．$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ は一次独立である．${V_2}^1 =< \mathbf{a}_0\alpha + \mathbf{b}_1\beta >$ となる $\alpha$, $\beta (\in K)$ がある．

$${T_1}^2 = \{\mathbf{a}_1\gamma + \mathbf{b}_1\delta\},\ {T_2}^2 = \{(\mathbf{a}_0\lambda + \mathbf{a}_1\mu)\eta + (\mathbf{a}_0\alpha + \mathbf{b}_1\beta)\xi\}$$

$\eta = \lambda^{-1}\alpha\xi$ にとると

$$(\mathbf{a}_0\lambda + \mathbf{a}_1\mu)\eta - (\mathbf{a}_0\alpha + \mathbf{b}_1\beta)\xi = (\mathbf{a}_1\mu\lambda^{-1}\alpha - \mathbf{b}_1\beta)\xi$$

となる．これは ${T_1}^2$ にも含まれる．つまり ${T_1}^2 \cap {T_2}^2$ には $\mathbf{a}_1\mu\lambda^{-1}\alpha - \mathbf{b}_1\beta$ を基底とする 1 次元部分空間が含まれている．
公理 III) について．

$L$ の要素 $U^2$ をとる．$U^2 =< \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2 >$ とする．このとき，$U^2$ 上には，$< \mathbf{a}_1 >$, $< \mathbf{a}_2 >$, $< \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 >$ の少なくとも 3 つの 1 次元部分空間が含まれている．

公理 I)〜III) をもとに $P^n$ の部分空間が定義される．明らかに射影空間 $P^n$ の部分空間は，$n+1$ 次元線形空間 $V^{n+1}(K)$ の部分空間と対応する．
公理 IV) について．

$n+1$ 次元線形空間 $V^{n+1}(K)$ の基底を $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\cdots$, $\mathbf{a}_n$ とする．このとき $P^n$ の要素

$$< \mathbf{a}_i > \ (i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

を含む部分空間が $P^n$ と一致する．よって公理 IV) が成立する．□

$$P^0 =< \mathbf{a}_0 >,\ P^1 =< \mathbf{a}_0,\ \mathbf{a}_1 >,\ \cdots,\ P^n =< \mathbf{a}_0,\ \mathbf{a}_1,\ \cdots,\ \mathbf{a}_n >$$

とする．これは，順次上に素な部分空間の列であり，$P$ は $n$ 次元射影空間である．

### 射影幾何の解析的表示

このようにして構成された $P^n$ の点とは，$K^{n+1}$ の 1 次元部分空間，つまり原点を通る直線である．それは方向ベクトルと一対一に対応し，$P^n$ はこのような方向ベクトルの集合と同一視される．

**同次座標**　上記モデルにおいて $<\mathbf{x}>=<\mathbf{y}>$ であることは $\mathbf{x}=\mathbf{y}\lambda$ となる 0 でない $\lambda\in K$ が存在することと同値である．$K^{n+1}$ から (0) を除いた $K^{n+1^*}$ における関係

$$\mathbf{x}\sim\mathbf{y}\quad\Longleftrightarrow\quad\exists\lambda(\in K)\ ;\ \mathbf{y}=\mathbf{x}\lambda$$

は同値関係である．この同値関係による商集合を $P^n$ とする．つまり

$$P^n=K^{n+1^*}/\sim$$

とする．そして $K^{n+1^*}$ の要素 $\mathbf{x}$ が代表する $P^n$ の要素を $(x)$ と表し，これを同次座標という．
同次座標を用いて命題 31 を書き直せば次のようになる．

**命題 32**　$P^n$ の要素 $(x)$ と $(y)$ に対して，

$$l((x),\ (y))=\{(z)\mid z_i=x_i\lambda+y_i\mu(i=0,\ \cdots,\ n),\ \lambda,\ \mu\in K\}$$

とし，$L=\{l((x),\ (y))\mid(x),\ (y)\in P^n\}$ とする．$p=(x)$ と点，$l\in L$ を直線と呼び，$p\in l$ のとき直線 $l$ は点 $p$ を通るとすれば，$\{P,\ L\}$ は射影幾何の公理 I)〜IV) を満たす．■

こうして一つのモデルを構成することが出来た．このモデルの同次座標による表現を射影幾何の解析的表示という．また,『射影幾何学』[17] の 31 頁にあるように，モデルの存在が公理系 I)〜IV) が互いに矛盾しないことを示している．

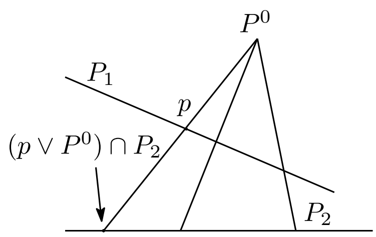
### 3.1.3　射影写像

#### 配景写像と射影写像

射影平面 $P^2$ の 1 次元部分空間 ${P_1}^1$ と ${P_2}^1$，およびそれらの上にない 1 点 $P^0$ が与えられたとき，${P_1}^1$ から ${P_2}^1$ への写像が次のように定まる．

点を 0 次元射影空間とみるときは大文字で，射影空間の要素とみるときは小文字で表す．

$$P_1\ \to\ P_2\ ;\ p\ \mapsto(p\vee P^0)\cap P_2$$




つまり，射影空間 ${P_1}^1$ の点 $p$ に対して，直線 $p\vee P^0$ と直線 $P_2$ の交点を対応させるのである．

これを一般化して射影空間 $P$ の部分空間から同一次元の部分空間への写像を定義する．そのために二つの命題を示す．

**命題 33**　$n$ を 2 以上の整数とし，射影空間 $P^n$ の任意の部分空間 ${P_1}^r$，${P_2}^r$ $(0\leqq r\leqq n))$ に対して，それらと共有点をもたない部分空間 ${P_0}^{n-r-1}$ をとる．$x$ を ${P_1}^r$ の点とする．このとき

$$\dim\{(x\vee{P_0}^{n-r-1})\cap{P_2}^r\}=0$$

である．■

**証明**　次元定理から

$$\dim(P_0{}^{n-r-1} \vee P_2{}^r) = n - r - 1 + r - (-1) = n$$
$$\dim(x \vee P_0{}^{n-r-1}) = 0 + n - r - 1 - (-1) = n - r$$

である．命題 16 より

$$(x \vee P_0{}^{n-r-1}) \vee P_2{}^r = x \vee (P_0{}^{n-r-1} \vee P_2{}^r)$$

なので

$$\dim\{(x \vee P_0{}^{n-r-1}) \vee P_2{}^r\} = \dim\{x \vee (P_0{}^{n-r-1} \vee P_2{}^r)\} = n$$

である．よって

$$\begin{aligned} & \dim\{(x \vee P_0{}^{n-r-1}) \cap P_2{}^r\} \\ = \ & \dim(x \vee P_0{}^{n-r-1}) + \dim(P_2{}^r) - \dim\{(x \vee P_0{}^{n-r-1}) \vee P_2{}^r\} \\ = \ & n - r + r - n = 0 \end{aligned}$$

である．　□

**命題 34**　命題 33 と同じ設定で，$P_1{}^r$ の点 $x$ に対して $P_2{}^r$ の点 $(x \vee P_0{}^{n-r-1}) \cap P_2{}^r$ を対応させる．この対応は $P_1{}^r$ から $P_2{}^r$ への一対一対応である．

この対応で $P_1{}^r$ の基本図形 $\Sigma$ は $P_2{}^r$ の基本図形 $\Sigma'$ に対応する．　■

**証明**　$P_2{}^r$ から $P_1{}^r$ への写像が同様に定義される．このとき命題 20 によって

$$\begin{aligned} & [\{(x \vee P_0{}^{n-r-1}) \cap P_2{}^r\} \vee P_0{}^{n-r-1}] \cap P_1{}^r \\ = \ & [P_0{}^{n-r-1} \vee \{P_2{}^r \cap (x \vee P_0{}^{n-r-1})\}] \cap P_1{}^r \\ = \ & \{(P_0{}^{n-r-1} \vee P_2{}^r) \cap (x \vee P_0{}^{n-r-1})\} \cap P_1{}^r \\ = \ & (x \vee P_0{}^{n-r-1}) \cap P_1{}^r = x \vee (P_0{}^{n-r-1} \cap P_1{}^r) = x \end{aligned}$$

となり，これが逆写像であることが示された．逆写像の存在により，一対一対応である．

$P_1{}^r$ の 2 点 $x_1$，$x_2$ をとる．この 2 点がそれぞれ $y_1$，$y_2$ と対応しているとする．次元定理から

$$\dim\{(x_1 \vee x_2) \vee P_0{}^{n-r-1}\} = 1 + n - r - 1 - (-1) = n - r + 1$$

である．命題 16 より

$$\{(x_1 \vee x_2) \vee P_0{}^{n-r-1}\} \vee P_2{}^r = (x_1 \vee x_2) \vee (P_0{}^{n-r-1} \vee P_2{}^r)$$

なので

$$\dim[\{(x_1 \vee x_2) \vee P_0{}^{n-r-1}\} \vee P_2{}^r] = \dim\{(x_1 \vee x_2) \vee (P_0{}^{n-r-1} \vee P_2{}^r)\} = n$$

である．よって

$$\begin{aligned} & \dim[\{(x_1 \vee x_2) \vee P_0{}^{n-r-1}\} \cap P_2{}^r] \\ = \ & \dim\{(x_1 \vee x_2) \vee P_0{}^{n-r-1}\} + \dim(P_2{}^r) - \dim\{(x_1 \vee x_2) \vee P_0{}^{n-r-1} \vee P_2{}^r\} \\ = \ & n - r + 1 + r - n = 1 \end{aligned}$$

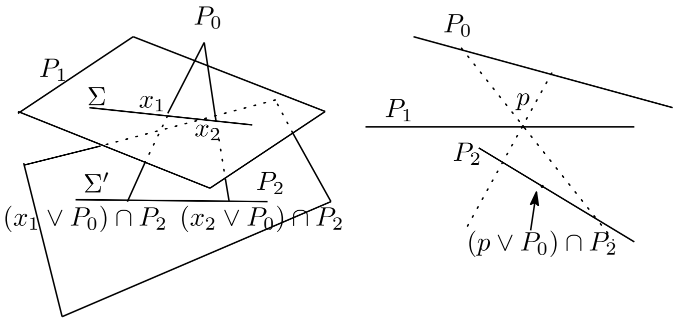
である．$y_1$，$y_2 \in \{(x_1 \vee x_2) \vee {P_0}^{n-r-1}\} \cap {P_2}^r$ なので，射影幾何の公理 I) から

$$y_1 \vee y_2 = \{(x_1 \vee x_2) \vee {P_0}^{n-r-1}\} \cap {P_2}^r$$

となる．つまりこの対応は直線を直線にうつす一対一対応である．よって基本図形を基本図形にうつす. □

**定義 14 (配景写像)**　命題 34 の一対一対応を，${P_0}^{n-r-1}$ を中心とする ${P_1}^r$ から ${P_2}^r$ への**射影**，あるいは**配景写像**という．必要なときはこの写像を $\pi_{P_2P_1}(P_0)$ と表す．基本図形 $\Sigma$ と基本図形 $\Sigma'$ が配景写像で対応するとき二つの基本図形は**配景的関係**にあるといい，$\Sigma \overset{=}{\barwedge} \Sigma'$ と表す. ■

**例 3**　$n=3$ の場合，二種の配景写像がある．$r=2$ で ${P_0}^0$，${P_1}^2$ のときと，$r=1$ で ${P_0}^1$，${P_1}^1$ のときである．$r=2$ で ${P_0}^0$，${P_1}^2$ のときは，基本図形として直線 $\Sigma$ と $\Sigma'$ を入れた．$r=1$ で ${P_0}^1$，${P_1}^1$ のときは，基本図形を省いた.



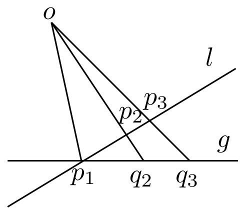

**定義 15 (射影写像)**　有限個の配景写像の合成で表される $r$ 次元部分空間から $r$ 次元部分空間への一対一対応を**射影写像**という．基本図形 $\Sigma$ と基本図形 $\Sigma'$ が射影写像で対応するとき二つの基本図形は**射影的関係**にあるといい，$\Sigma \barwedge \Sigma'$ と表す. ■

**注意 3**　$n$ 次元射影空間の部分空間 $P^r$ の配景写像の定義 14 で $r=n$ にとると，${P_0}^{n-r-1}$ は空集合となり，この場合の配景写像は恒等写像である．$P^n$ 自身の，恒等写像ではない射影座標の定義は，まだなされていない.

**命題 35**　2 直線 $l$，$g$ 上にそれぞれ相異なる 3 点 $p_1$，$p_2$，$p_3$ と $q_1$，$q_2$，$q_3$ がある．このとき，$\varphi(p_i) = q_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ となる射影写像 $\varphi : l \to g$ が存在する. ■

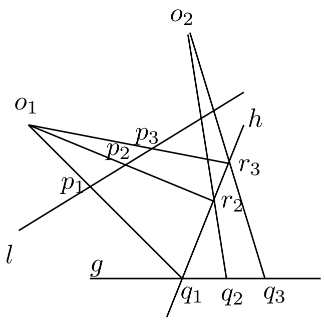
**証明**

(1)　$l \neq g$ で $p_1 = q_1$ のとき．




　公理 II) によって，$p_2 \vee q_2$ と $p_3 \vee q_3$ は交わる．交点を $o$ とすれば，$p_1$，$p_2$，$p_3$ と $q_1$，$q_2$，$q_3$ は $o$ を中心とする配景写像で対応する．つまり，$\pi_{gl}(o)(p_i) = q_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ である．$p_i = q_i$ $(i = 2,\ 3)$ のときも同様．

(2)　$l \neq g$ で $p_i \neq q_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ のとき．




　2 直線 $l$ と $p_1 \vee q_1$ で定まる平面上に，$q_1$ を通り $l$，$g$ と異なる直線 $h$ を引く．$p_1 \vee q_1$ 上の点 $o_1$ をとり，$o_1 \vee p_2$，$o_1 \vee p_3$ と $h$ の交点を $r_2$，$r_3$ とする．(1) によって点 $o_2$ で $o_2$ を中心とする配景写像で $q_1$，$r_2$，$r_3$ を $q_1$，$q_2$，$q_3$ に対応させるもの $\pi_{gh}(o_2)$ が存在する．この合成 $\pi_{gh}(o_2) \circ \pi_{hl}(o_1)$ を $\varphi$ とすれば，射影写像 $\varphi$ で $p_1$，$p_2$，$p_3$ と $q_1$，$q_2$，$q_3$ は対応する．

(3)　$l = g$ のとき．

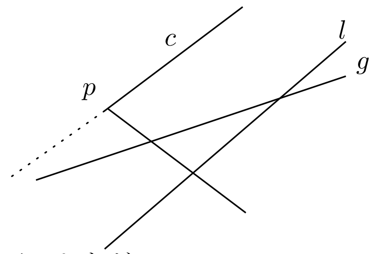
　$l$ 上にない点 $o$ と $l$ と異なる直線 $h$ をとる．$o$ を中心とする $l$ から $h$ への配景写像で $p_1$，$p_2$，$p_3$ と対応する点を $r_1$，$r_2$，$r_3$ とする．$r_1$，$r_2$，$r_3$ と $q_1$，$q_2$，$q_3$ は射影写像で対応するので，この場合も成立する．　□

**命題 36**　$P^n$ の異なる 2 直線 $l$，$g$ の間の任意の射影写像は，2 次元または 3 次元部分空間における点を中心とする配景写像の結合として表される．　■

**証明**　$l$ と $g$ の次元が 1 なので $\dim(c) = n-2$ なる $c$ に対する配景写像 $\pi_{gl}(c)$ について示せばよい．

(1)　$l \cap g \neq \emptyset$ のとき．$\dim(l \vee g) = 2$．この結果

$$
\begin{aligned}
\dim(c \cap (l \vee g)) &= \dim(c) + \dim(l \vee g) - \dim(c \vee (l \vee g)) \\
&= n - 2 + 2 - n = 0
\end{aligned}
$$




より $c \cap (l \vee g)$ は点．この点を $p$ とする．$x \in l$ に対して $(x \vee c) \cap g = (x \vee p) \cap g$ なので $\pi_{gl}(c) = \pi_{gl}(p)$ である．

(2)　$l \cap g = \emptyset$ のとき．このとき $\dim(l \vee g) = 1 + 1 - (-1) = 3$ である．したがって

$$
\begin{aligned}
\dim(c \cap (l \vee g)) &= \dim(c) + \dim(l \vee g) - \dim(c \vee (l \vee g)) \\
&= n - 2 + 3 - n = 1
\end{aligned}
$$

となり $c \cap (l \vee g)$ は直線である．これを $k$ とおく．$\pi_{gl}(c)$ で対応しない $l$ と $g$ の点 $x \in l$，$y \in g$ をとる．直線 $x \vee y$ を $h$ とおく．さらに $p = k \cap (l \vee h)$，$q = k \cap (h \vee g)$ とおく．(1) と同様に考え

$$
\pi_{gl}(c) = \pi_{gl}(k) = \pi_{gh}(k) \circ \pi_{hl}(k) = \pi_{gh}(q) \circ \pi_{hl}(p)
$$

である．　□

## デザルグの定理

　有限次元射影空間 $P^n$ をとる．

射影幾何の公理から展開するかぎり，$n=1$ の1次元射影空間は，それだけではまったく身動きできない．公理 II) が，直線がより次元の高い空間におかれていることが前提だからだ．$n=1$ のとき，公理 II) は自明な形で成立するだけである．1次元射影空間は，射影幾何の公理からそれ自身の内部で論を展開することはできない．

$n=2$ のときはどのようになるか．2次元射影空間の内部では次のデザルグの定理が証明できない．つまりデザルグの定理は公理系からの帰結とはならない．2次元のなかだけで論を進めようとすれば，デザルグの定理を公理に加えなければならない．デザルグの定理を公理に加えることは，『射影幾何学』[17] の 202 頁にあるように，2次元射影空間が3次元空間のなかにおかれていると仮定するのと同値である．あるいは,『射影幾何学』[15]18 頁にあるように，公理系を満たしデザルグの定理の成立しない2次元射影幾何を構成することもできる．

次元が小さいと，このように特別なことが起こる．個別性を研究し，どこまでが一般的であって，どこからが次元に固有なことなのかを明らかにすることは重要なことではある．しかしわれわれは歴史的に3次元空間内で考えたことを，公理的に裏づけるという立場から進んできたので，今後，射影空間の次元 $n$ は $n \geqq 3$ であるものとする．

**定理 4 (デザルグの定理)**　$P^n$ の3点よりなる二組 $p_1$，$p_2$，$p_3$ と $q_1$，$q_2$，$q_3$ はそれぞれ独立であり，条件

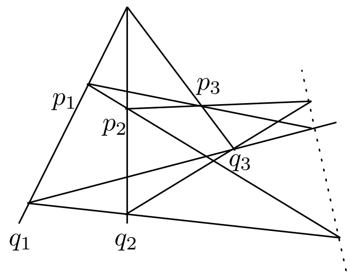
(i) $p_i \neq q_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$.

(ii) $p_i \vee p_j \neq q_i \vee q_j$ $((i,\ j)=(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1))$.

を満たすとする．このとき次の二つの命題は同値である．

甲：3直線 $p_i \vee q_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ は共点である．

乙：3点 $(p_i \vee p_j) \cap (q_i \vee q_j)$ $((i,\ j)=(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1))$ は共線である． ■




**証明**　次元定理2と条件から $(i,\ j)=(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$ について

$$\begin{aligned} & \dim\{(p_i \vee q_i) \vee (p_j \vee q_j)\} \\ = \ & \dim(p_i \vee q_i) + \dim(p_j \vee q_j) - \dim\{(p_i \vee q_i) \cap (p_j \vee q_j)\} \\ = \ & 1+1-0=2 \end{aligned}$$

よって

$$\dim[\{(p_1 \vee q_1) \vee (p_2 \vee q_2)\} \cap (p_3 \vee q_3)] = 0,\ 1$$

である．これから

$$\begin{aligned} d &= \dim\{(p_1 \vee q_1) \vee (p_2 \vee q_2) \vee (p_3 \vee q_3)\} \\ &= \dim\{(p_1 \vee q_1) \vee (p_2 \vee q_2)\} + \dim(p_3 \vee q_3) \\ &\qquad - \dim[\{(p_1 \vee q_1) \vee (p_2 \vee q_2)\} \cap (p_3 \vee q_3)] \\ &= 3,\ 2 \end{aligned}$$

$d=3$ のとき．

これは平面 $(p_1 \vee q_1) \vee (p_2 \vee q_2)$ 上に，$p_3$ か $q_3$ がないときである．

甲なら乙を示す.

$$\dim[(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \cap (q_1 \vee q_2 \vee q_3)\}] = 2+2-3 = 1$$

である．公理 II) より $(i,\ j) = (1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$ に対して，$(p_i \vee p_j)$ と $(q_i \vee q_j)$ は交わる．その交点 $(p_i \vee p_j) \cap (q_i \vee q_j)$ $((i,\ j) = (1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1))$ は直線 $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \cap (q_1 \vee q_2 \vee q_3)$ 上にあり共線である.

乙なら甲を示す.

$(i,\ j) = (1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$ について $p_i \vee p_j$ と $q_i \vee q_j$ は交点をもつので，公理 II) によって $p_i \vee q_i$ と $p_j \vee q_j$ も交点をもつ．$d = 3$ なので $\dim[\{(p_1 \vee q_1) \vee (p_2 \vee q_2)\} \cap (p_3 \vee q_3)] = 0$．これは $p_1 \vee q_1$ と $p_3 \vee q_3$ の交点と $p_2 \vee q_2$ と $p_3 \vee q_3$ の交点が一致し，その結果，3 直線が共点であることを示している.

$d = 2$ のとき.

これは $p_3$ も $q_3$ も平面 $(p_1 \vee q_1) \vee (p_2 \vee q_2)$ 上にあるときで，2 平面 $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ と $q_1 \vee q_2 \vee q_3$ が一致するときである.

甲なら乙を示す.

3 直線 $p_i \vee q_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ が共有する点を $o$ とする．平面 $\alpha = (p_1 \vee q_1) \vee (p_2 \vee q_2) \vee (p_3 \vee q_3)$ 上にない点 $o_1$ をとる．直線 $o \vee o_1$ 上の第 3 の点 $o_2$ をとる．$i = 1,\ 2,\ 3$ とし，$o,\ p_i,\ q_i,\ o_1,\ o_2$ に関して公理 II) を用いれば，$o_1 \vee p_i$ と $o_2 \vee q_i$ は交点 $r_i$ をもつ.

$p_i,\ r_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ と $q_i,\ r_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ に関してそれぞれ $d = 3$ の場合が適用できる．各 $(i,\ j) = (1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$ について，$p_i \vee p_j$ と $r_i \vee r_j$ の交点は平面 $\alpha$ と平面 $r_1 \vee r_2 \vee r_3$ の上にあり，$q_i \vee q_j$ と $r_i \vee r_j$ の交点も平面 $\alpha$ と平面 $r_1 \vee r_2 \vee r_3$ の上にある．つまり $\alpha$ と $r_i \vee r_j$ の交点であり一致する．よって 3 点 $(p_i \vee p_j) \cap (q_i \vee q_j)$ は $\alpha$ と $r_1 \vee r_2 \vee r_3$ の交わりの上にあり，共線である.

乙なら甲を示す．この場合すべて射影平面 $P^2$ の命題となる.「乙なら甲」は「甲なら乙」の双対命題そのものなので成立する. □

今後，点を明記する必要があるときは「$p_1,\ p_2,\ p_3;\ q_1,\ q_2,\ q_3$ に関するデザルグの定理」ということにする.

また $n = 2$ の場合は，$P^2$ のなかで上記の点 $o$ をとることができない．だからこの証明は 2 次元射影空間 $P^2$ には適用できない.

**注意 4**　上記デザルグの定理の証明において $d = 2$ のときを考える．この場合，6 点はおよび 6 直線は同一平面上にある．この場合命題そのものは平面上の図形に関するものになる.

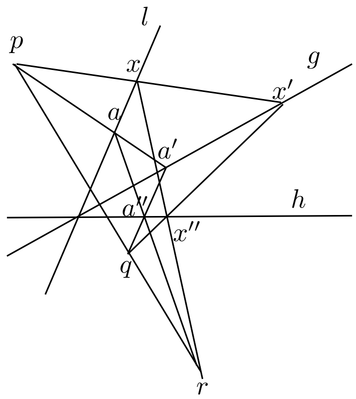
$P^2$ において，ある命題の双対命題は，点と直線，記号 $\vee$ と $\cap$ をそれぞれ入れ替えたものである．この方法によって上記命題の条件甲と条件乙が入れ替わる．デザルグの定理の双対定理を作ると二つの同値な条件が入れ替わる．したがって二つの条件の同値性を主張するデザルグの定理そのものである．このように平面上の図形に関するデザルグの定理は**自己双対**である.

命題 36 によって，直線の配景写像，射影写像は，点を中心とするものを考えることによって，一般的な考察ができる．以下，直線の配景写像，射影写像を考えるときは，点を中心とするもので考える．また，特にことわらないときは，$h,\ g,\ l$ 等は直線，$p,\ q,\ r$ 等は点を表すものとする.

**命題 37**　相異なる 3 直線 $l,\ g,\ h$ が共点のとき，任意の配景写像 $\pi_{gl}(p),\ \pi_{hg}(q)$ に対し,

$$\pi_{hg}(q) \circ \pi_{gl}(p) = \pi_{hl}(r)$$

となる点 $r$ が存在する．$r$ は $r \in p \vee q$ にとれる． ■




**証明**　$p = q$ のときは $p = q = r$ とすればよい．$p \neq q$ とする．$a \in l$ を固定する．任意の点 $x \in l$ に対して $x' = \pi_{gl}(p)(x)$, $x'' = \pi_{hg}(q)(x')$ とする．

$a$, $a'$, $a''$; $x$, $x'$, $x''$ に関するデザルグの定理から 3 直線 $p \vee q$, $a \vee a''$, $x \vee x''$ は共点である．この点を $r$ とすれば，$x'' = \pi_{hl}(r)(x)$ となる． □

**命題 38**　$P^n$ の相異なる 3 直線 $l$, $g$, $h$ に対し配景写像 $\pi_{gl}(p)$, $\pi_{hg}(q)$ が与えられたとき，交点 $l \cap g$ を通り $h$ と交わり $q$ を含まないような任意の直線 $g'$ $(\neq l)$ に対して，

$$\pi_{hg}(q) \circ \pi_{gl}(p) = \pi_{hg'}(q) \circ \pi_{g'l}(p'), \qquad p' \in p \vee q$$

となる点 $p'$ が存在する． ■

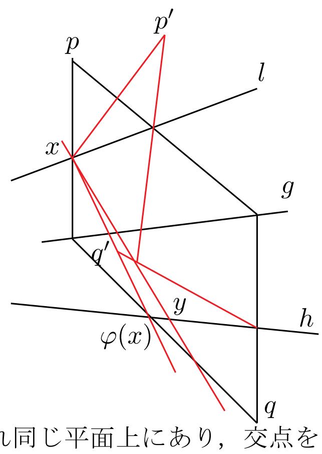
**証明**　3 直線 $l$, $g$, $g'$ は共点なので，命題 37 より，$\pi_{g'g}(q) \circ \pi_{gl}(p) = \pi_{g'l}(p')$ となる点 $p' \in p \vee q$ が存在する．明らかに $\pi_{hg}(q) = \pi_{hg'}(q) \circ \pi_{g'g}(q)$ なので

$$\pi_{hg}(q) \circ \pi_{gl}(p) = \pi_{hg'}(q) \circ \pi_{g'g}(q) \circ \pi_{gl}(p) = \pi_{hg'}(q) \circ \pi_{g'l}(p')$$

である． □

**命題 39**　異なる 3 直線 $l$, $g$, $h$ と $P^n$ の射影写像 $\varphi = \pi_{hg}(q) \circ \pi_{gl}(p)$ がある．相異なる 2 点 $x \in l$, $y \in h$ が，条件 $\varphi(x) \neq y$ かつ $x$, $y \neq l \cap h$ を満たすとき，直線 $x \vee y$ を $g'$ とおく．

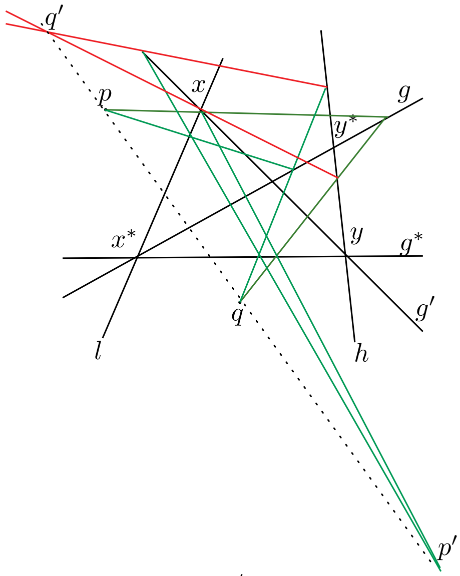
このとき，$\varphi = \pi_{hg'}(q') \circ \pi_{g'l}(p')$ となる点 $p'$, $q'$ が存在する． ■




**証明**　3 直線 $l$, $g$, $h$ が共点ならば，命題 37 によって $\varphi = \pi_{hl}(r)$ となる $r$ が存在する．$g'$ は $r$ を通らない．よって $\varphi = \pi_{hl}(r) = \pi_{hg'}(r) \circ \pi_{g'l}(r)$ である．

3 直線 $l$, $g$, $h$ は共点でないとする．$l$ と $g$, $g$ と $h$ はそれぞれ同じ平面上にあり，交点をもつ．それを $x^* = l \cap g$, $y^* = g \cap h$ とおく．$x^*$, $y^*$ は相異なり $x^* \notin h$, $y^* \notin l$ である．点の配置によって場合分けして示す．

(1)　$x^*$, $y$, $q$ が一般の位置にあるとき．つまり直線 $g^* = x^* \vee y$ が点 $q$ を通らないとき．

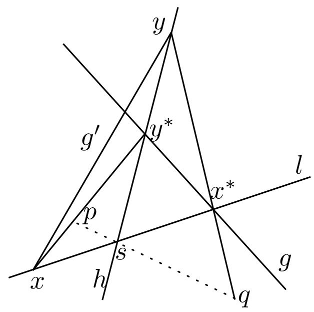



この場合命題38から，$\varphi = \pi_{hg^*}(q) \circ \pi_{g^*l}(p')$ となる $p' \in p \vee q$ が存在する．さらに逆写像 $\varphi^{-1} = \pi_{lg^*}(p') \circ \pi_{g^*h}(q)$ をとる．$y = h \cap g^*$ より $\varphi^{-1}(y) = \pi_{lg^*}(p')(y)$ である．条件から $x \neq \varphi^{-1}(y)$ なので，直線 $g' = x \vee y$ は点 $p'$ を通らない．命題38から，$\varphi^{-1} = \pi_{lg'}(p') \circ \pi_{g'h}(q')$ となる点 $q' \in p' \vee q$ が存在する．

すなわち $\varphi = \pi_{hg'}(q') \circ \pi_{g'l}(p')$ となる点 $p'$, $q'$ が存在した．

$x \vee y^*$ が点 $p$ を通らないときは $\varphi^{-1}$ に同様について，同様の議論をすればよい．

(2)　$p \in x \vee y^*$ かつ $q \in x^* \vee y$ のとき．この場合 $p$, $x$, $y^*$, $q$, $y$, $x^*$ はそれぞれ共線で $\varphi(x) = y^*$, $\varphi(x^*) = y$ となる．




もし $x = x^*$ なら $y = y^*$ も成り立つ．このとき $g' = g$ となり自明である．よって $x \neq x^*$ とする．

(2-1)　$l \cap h \neq \emptyset$ のとき．$s = l \cap h$ とする．

(2-1-1)　3点 $p$, $q$, $s$ が共線のとき．

(2-1-1-1)　$h$ 上に $s$, $y$, $y^*$ と異なる点 $z$ が存在する場合．命題38を用いて，直線 $g$ を次の順序で直線 $g'$ にかえてゆけばよい．

$$g = x^* \vee y^*,\ x^* \vee z,\ z \vee x,\ xy = g'.$$

(2-1-1-2)　$h$ 上に $s$, $y$, $y^*$ と異なる点が存在しない場合．この場合は $l = \{x, x^*, s\}$, $h = \{y, y^*, s\}$ となる．$u = (x \vee y^*) \cap (x^* \vee y)$ とすると $\varphi = \pi_{hl}(u)$ となり $u = p = q$ である．$\varphi = \pi_{hl}(u) = \pi_{hg'}(u) \circ \pi_{g'l}(u)$ はつねに成立するので $p' = q' = u$ は条件を満たす．

(2-1-2)　3点 $p$, $q$, $s$ が共線でないとき．いいかえれば $l \cap h \neq \emptyset$ かつ $\varphi(s) \neq s$ のとき．(2-1-1-1) の $z$ を $\varphi(s)$ とすればよい．

(2-2)　$l \cap h = \emptyset$ のとき．このときも (2-1-1-1) の $z$ を $\varphi(s)$ とすればよい．

以上ですべての場合が尽くされた．　□

**定理 5**　異なる直線間の射影写像は，点を中心とする高々二つの配景写像の合成で表される．■

**証明**　2直線を $l$, $h$ とし，$m$ を自然数とする．命題36により任意の射影写像 $\varphi : l \to h$ に対し次の条件を満たす $l$, $h$ を含め $m+1$ 個の直線 $l = l_1$, $l_2$, $\cdots$, $l_{m+1} = h$ と $m$ 個の点 $p_1$, $\cdots$, $p_m$ が存在する．

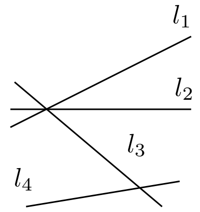
(1)　$l_i \neq l_{i+1}$, $l_{m+1} \neq l_1$, $l_i \cap l_{i+1} \neq \emptyset$.

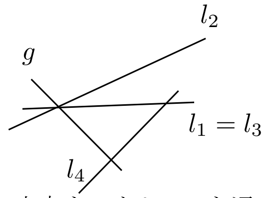
(2)　$\varphi = \varphi(p_m) \circ \cdots \circ \varphi(p_1)$，ただし $\varphi(p_i)$ は配景写像 $\varphi_{l_{i+1}l_i}(p_i)$ を意味する．

直線が 3 点のみからなる場合は，命題 36 によって高々2 つの配景写像の合成で表される．よって以下，直線は少なくとも 4 点を含むものとする．

$m \geqq 3$ のとき，$\varphi$ が高々2 個の配景写像の合成になることを $m$ に関する数学的帰納法で示す．

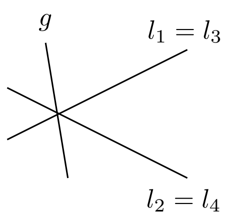
$m = 3$ のときに示す．4 直線を $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ と 3 点を $p_1$, $p_2$, $p_3$ とする．証明は 4 直線が一般の位置にない場合に示し，一般の位置にあるときを逆に一般の位置にない場合に帰着させて示す．

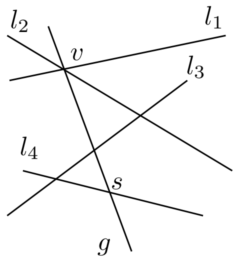



(1-1)　$l_1$, $l_2$, $l_3$ が相異なり，かつ共点のとき．命題 37 から $\varphi(p_2) \circ \varphi(p_1) = \varphi(p')$ となる点 $p'$ が存在し，$\varphi = \varphi(p_3) \circ \varphi(p')$ となる．$l_2$, $l_3$, $l_4$ が相異なり，かつ共点のときも同様である．

(1-2)　$l_1 = l_3$ で $l_2$ との交点 $v$ が $l_4$ 上にないとき．$l_1$ と $l_2$ の交点を $v$ とする．$l_2 \cap l_4$, $l_3 \cap l_4$, $\varphi(v)$ のいずれとも異なる $l_4$ 上の点が存在するので，それを $q$ とする．$g = v \vee q$ とする．命題 38 によって，写像 $\varphi(p_3) \circ \varphi(p_2)$ の $l_3$ を $g$ で置きかえることができる．この結果 $l_1$, $l_2$, $g$ が共点の場合に帰着できる．$l_2 = l_4$ で $l_3$ との交点 $v$ が $l_1$ 上にないときも同様である．




(1-3)　$l_1 = l_3$, $l_2 = l_4$ のとき．この 2 直線の交点を $v$ とし，$v$ を通る直線 $g$ をとる．同じ平面上の点 $r_1$ を中心とする配景写像 $\varphi_{l_1 g}(r_1)$ をとり，射影変換 $\varphi \circ \varphi_{l_1 g}(r_1)$，つまり $\varphi(p_4) \circ \varphi(p_3) \circ \varphi(p_2) \circ \varphi(p_1) \circ \varphi_{l_1 g}(r_1)$ を考える．命題 37 により，$\varphi(p_1) \circ \varphi_{l_1 g}(r_1)$ を $\varphi(r_2)$ におきかえることができる．順次これを行うことで $\varphi \circ \varphi_{l_1 g}(r_1) = \varphi(r_4)$ と表すことができる．よって $\varphi = \varphi(r_4) \circ \varphi_{l_1 g}(r_1)^{-1}$ である．

(1-4)　$l_1$, $l_2$, $l_4$ が相異なり，かつ共点のとき．$l_1 \to l_2 \to l_3 \to l_4$ を $l_1 \to l_4 \to l_3 \to l_4$ に置きかえることができる．$l_4 \to l_3 \to l_4$ は一つに置き換わるので，この場合も成立する．$l_1$, $l_3$, $l_4$ が相異なり，かつ共点のときも同様．

(2)　3 直線で共点であるものがない場合．4 直線はすべて異なる．$l_1$ と $l_2$ の交点を $v$ とする．$l_2$ 上になく $\varphi(v)$ でもない $l_4$ 上の点をとり $s$ とする．$g = v \vee s$ とし，$l_3$ を $g$ に置きかえる．これで $l_1$, $l_2$, $g$ が共点となり，(1-1) に帰着する．

以上で $m = 3$ の場合は成立した．

(3)　$m > 3$ とし $m - 1$ までは成立するとする．$1 \leqq i \leqq m$ の $i$ で $l_i \neq l_{i+3}$ となるところがあれば，$l_i$, $l_{i+1}$, $l_{i+2}$, $l_{i+3}$ に以上の操作を行い配景写像をひとつ減らすことができる．$i = 1, 2, \cdots, m$ について $l_i = l_{i+3}$ なら，$l_1$, $l_2$, $l_3$ はすべて異なる．よって命題 39 によって $l_2$ を別の直線 $g$ に置きかえることができる．この場合 $g \neq l_5$ なので，$g$, $l_3$, $l_4$, $l_5$ でひとつ減らすことができる．帰納法の仮定からこの場合も成立する．　□

**命題 40**　同一直線の射影写像は，点を中心とする高々三つの配景写像の合成で表される．　■

**証明**　$l_1 = l_{m+1} \neq l_m$ である．よって $\varphi \circ \varphi(p_m)^{-1}$ は異なる直線間の射影写像である．これを高々二つの配景写像の合成で表わし，それに $\varphi(p_m)$ を合成することで，$\varphi$ は高々三つの配景写像の合成で表される．　□

## 3.2　射影幾何の構造

**写像と変換**　デザルグやパスカルが見出した射影幾何を，その土台から再構成する．そのためにまず一定の射影幾何の公理を設定し，そこから論を進めてきた．一方，同次座標をもちいて，この射影幾何の公理をみたすモデルを構成することができた．

もちろんここで，公理を満たすが同型とはいえないモデルがあるのか，という問題が生まれる．射影幾何は体と次元を決めれば，基本的にこのモデルと同型であることを証明する．この事実を示すためには，さらに一般的に射影幾何に関する考察を深め，射影幾何から逆に体を構成し，同次座標を射影幾何の内部から定義しなければばならない．

ところで集合 $E$ の要素に集合 $F$ の要素を対応させる規則，これが $E$ から $F$ への写像である．配景写像とその合成としての射影写像を定義した．これらはあくまで部分空間から部分空間への写像である．写像のうち同じ集合間の写像を変換という．射影空間をより高次な空間に埋め込めることを示し射影変換を定義する．以下においては，同じ集合の間の写像であることが意味をもつ場合は「変換」を用い，その他の一般の場合は「写像」を用いる．

### 3.2.1　射影幾何の体

**完全四角形**

**定義 16**　$P^n$ に 4 点 $p_i$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ が同一の部分平面 $P^2$ の一般の位置にある．この 4 点とそれから定まる 6 直線 $g_{ij} = p_i \vee p_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 4)$ からなる図形を**完全四角形**という．この 6 直線を**辺**ともいう．

$P^n$ に 4 直線 $g_i$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ が同一の部分平面 $P^2$ の一般の位置にある．この 4 直線とそれから定まる 6 交点 $p_{ij} = g_i \cap g_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 4)$ からなる図形を**完全四辺形**という．この 6 点を**頂点**ともいう．■

辺といってもユークリッド幾何の線分としての辺ではない．射影幾何でいう辺は直線である．

**注意 5**　完全四角形，完全四辺形という概念は本質的に $P^2$ 上のものであり，2 次元射影空間 $P^2$ における双対概念である．

**定義 17**　記号は前定義を引き継ぐ．

直線 $l$ 上の 6 点 $q_i$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ に対し，完全四角形 $p_1p_2p_3p_4$ で，その 6 直線 $g_{12}$，$g_{13}$，$g_{14}$，$g_{34}$，$g_{24}$，$g_{23}$ と $l$ の交点がこの順に $q_i$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ となるものが存在するとき，この 6 点を**四角性六点**，または**六点図形**という．$P^2$ おける双対概念を**四辺性六辺**，**六辺図形**という．■

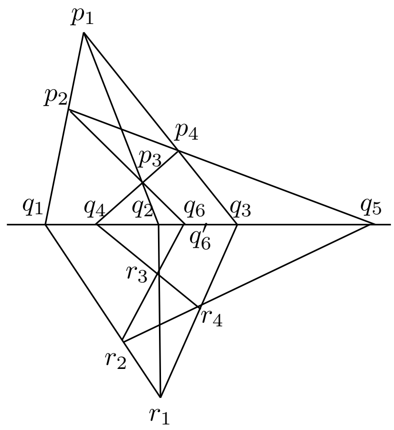
**注意 6**　直線 $l$ 上の 6 点 $q_i$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ と 6 直線 $g_{12}$，$g_{13}$，$g_{14}$，$g_{34}$，$g_{24}$，$g_{23}$ と $l$ の交点との対応関係が重要である．

$$q_1 = g_{12} \cap l,\ q_2 = g_{13} \cap l,\ q_3 = g_{14} \cap l,\ q_4 = g_{34} \cap l,\ q_5 = g_{24} \cap l,\ q_6 = g_{23} \cap l$$

と対応させる．$q_1$，$q_2$，$q_3$ の乗っている辺が共点で，辺 $g_{12}$ と辺 $g_{34}$，辺 $g_{13}$ と辺 $g_{24}$，辺 $g_{14}$ と辺 $g_{23}$ はそれぞれ互いに対辺である．この順を固定する．また，$q_1$，$q_2$，$q_3$，および $q_4$，$q_5$，$q_6$ のそれぞれ 3 個ずつは異なる点であるが，$q_1$，$q_2$，$q_3$ と $q_4$，$q_5$，$q_6$ の間では，完全四角形の頂点を通ってもよいので，同じ点があってもよい．

**命題 41**　直線 $l$ 上の異なる 3 点と，異なる 2 点をとるとき，これら 5 点とともに四角性六点となる点がただ一つ $l$ 上に存在する．　■

**証明**　直線 $l$ 上の異なる 3 点と，異なる 2 点を $q_1$，$q_2$，$q_3$ と $q_4$，$q_5$ とする．これが二つの四角形 $p_i$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ と $r_i$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ と $l$ の交点であるとする．他の交点を $q_6$，$q_6{}'$ とする．




$p_1$，$p_2$，$p_3$ と $r_1$，$r_2$，$r_3$ について

$$(p_1 \vee p_2) \cap (r_1 \vee r_2),\ (p_2 \vee p_3) \cap (r_2 \vee r_3),\ (p_3 \vee p_1) \cap (r_3 \vee r_1)$$

が $l$ 上にあって共線なので，デザルグの定理 4(の乙から甲) より

$$p_1 \vee r_1,\ p_2 \vee r_2,\ p_3 \vee r_3$$

は共点である．同様に $p_1$，$p_2$，$p_4$ と $r_1$，$r_2$，$r_4$ について考えることにより

$$p_1 \vee r_1,\ p_2 \vee r_2,\ p_4 \vee r_4$$

は共点であり，この共有される 2 点は一致する．この結果

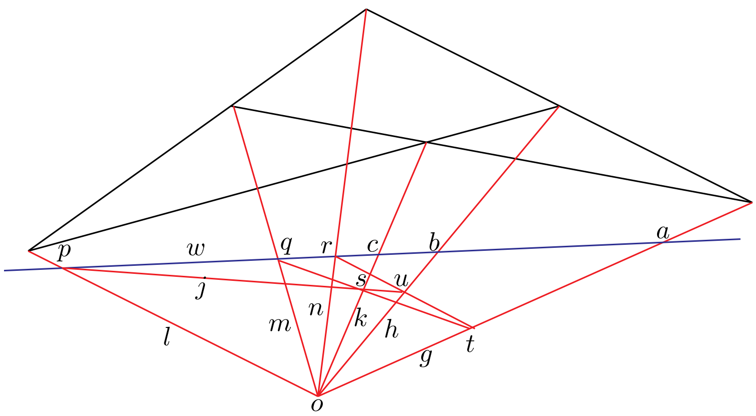
$$p_2 \vee r_2,\ p_3 \vee r_3,\ p_4 \vee r_4$$

が共点となるので，デザルグの定理 4(の甲から乙) より

$$(p_3 \vee p_4) \cap (r_3 \vee r_4),\ (p_4 \vee p_2) \cap (r_4 \vee r_2),\ (p_2 \vee p_3) \cap (r_2 \vee r_3)$$

が共線となる．よって $q_6 = q_6{}'$ である．　□

**命題 42**　点 $o$ を通る四辺性六辺 $\{l,\ m,\ n,\ g,\ h,\ k\}$ と，$o$ を通らない直線 $w$ との交点を $p$, $q$, $r$, $a$, $b$, $c$ とする．このとき $\{a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r\}$ は四角性六点である．　■




**証明**　四辺性六辺 $\{l,\ m,\ n,\ g,\ h,\ k\}$ とは，四辺で定まる 6 点と点 $o$ を結ぶ 6 本の直線である．命題 41 の双対命題によって，5 本の直線に対し四辺性六辺となる第 6 の直線は一意に確定する．

点 $p$ から直線 $j$ を引き，$k$ との交点を $s = k \cap j$ とする．$s$ と $q$ を結ぶ．その $g$ との交点 $t = g \cap \{q \vee (k \cap j)\}$ をとる．また $j$ と $h$ との交点を $u = j \cap h$ とする．5 直線

$$o \vee p,\ o \vee q,\ o \vee a,\ o \vee b,\ o \vee c$$

は，四直線 $w$, $j$, $s \vee t$, $t \vee u$ に関する四辺性をもつ．第 6 の点の一意性から $t \vee u$ と $w$ の交点を $r'$ とすれば $o \vee r$ と $o \vee r'$ は一致する．つまり $r' = r$ である．

この結果 $\{a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r\}$ は 4 点 $o$, $s$, $t$, $u$ に関する四角性六点である． □

**命題 43**　直線上の 6 点が四角性六点であるという条件は，射影写像に関して不変である． ■

**証明**　命題 42 の双対命題は，

> 直線 $w$ 上の $\{a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r\}$ が四角性六点であるとする．$w$ 上にない点 $o$ とこれらを結ぶ直線を $g$, $h$, $k$, $l$, $m$, $n$ とする．$\{l,\ m,\ n,\ g,\ h,\ k\}$ は四辺性六辺である．

である．これを直線 $w'$ で切った 6 点は四角性六点である．これによって，点 $o$ を中心とする $w$ から $w'$ への配景写像によって対応する 6 点の四角性が保存されることが示された．よって射影写像もまた四角性を保存する． □

### 直線体と係数体

射影幾何の公理系から，直線上の点に関する**演算**も定義することができる．一般の射影幾何の直線上の点の間で演算ができるということは驚きであるが，それが十九世紀の末にはほぼ全容が明らかになった．その間の事情はクラインの『19 世紀の数学』[13] の IV 章の第 1 節「純粋射影幾何の体系化」に詳しい．

直線体はシュタウトが先鞭をつけた．複比を計量に依存しないで定義する，つまり複比を長さという概念から独立に定義することがその時代の一つの目標だった．シュタウトが抽象的に公理から定義された射影幾何において体が定義され，それによって一般射影座標が可能であることを示したのである．

もとより，指標となったのはユークリッド空間の直線で，ここに座標を導入すれば直線上の点の集合が実数体と同型になる，ということであった．これを公理から建設された射影幾何でも実現すること．これが当面の目標である．

**和と積の定義**　体に関する準備をしたので，射影直線上の点の間の演算を定義しよう．

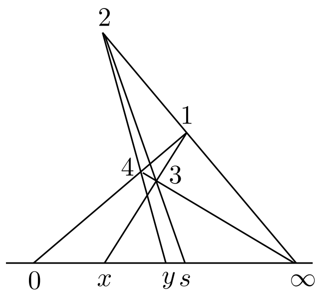
**定義 18**　直線上に相異なる 3 定点 $p_0$, $p_1$, $p_\infty$ をとる．

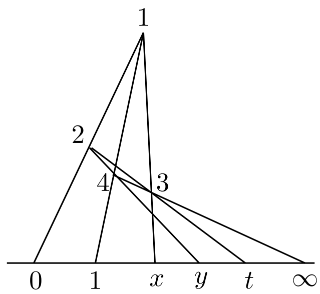
(1) 演算を定める相異なる 3 点の組を**枠**といい，$[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ のように記す．3 点を順に**原点**，**示点**，**単位点**という．

(2) $x$, $y$ を $l$ 上にあって $p_\infty$ とは異なる 2 点とする．$p_\infty$, $x$, $p_0$, $p_\infty$, $y$, $s$ が四角性六点となる点 $s$ を，枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ に関する $x$, $y$ の**和**といい，$x + y$ と表す．

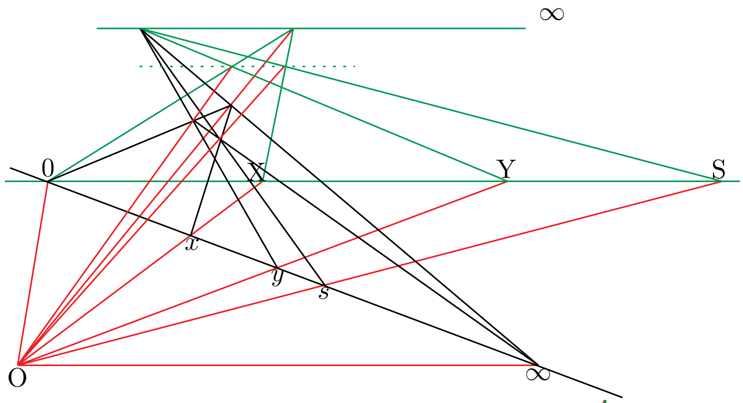
(3) 同様に，$p_0$, $x$, $p_1$, $p_\infty$, $y$, $t$ が四角性六点となる点 $t$ を，枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ に関する $x$, $y$ の**積**といい，$x \cdot y$ と表す． ■

図では，$p$ および $q$ を省略し，点の添え字部分を記している．以下混乱しなければ，このように用いることもある．




これがなぜ和と積になるのか．射影平面の一つのモデルは 3 次元ユークリッド空間の 1 点 O を通る直線の集合であった．この直線の集合を，O と $p_\infty$ を結ぶ直線と平行な平面で切ると，ユークリッド平面が得られる．ここに移せば確かにユークリッド平面上の線分の長さの和が得られることを確認しよう．赤線は射影平面の要素としての直線．緑線はそれを O と $p_\infty$ を結ぶ直線と平行で点 $p_2$ を通る平面で切った図形である．




図からユークリッド平面上で対応する点を大文字で示す．和について，対応するユークリッド平面で

$$\mathrm{OX} = \mathrm{YS}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathrm{OX} + \mathrm{OY} = \mathrm{OS}$$

であることがわかる．

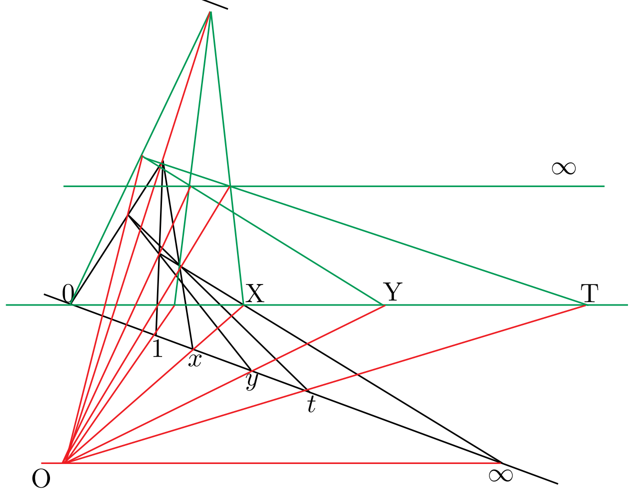
積についても同様である．対応するユークリッド平面で

$$\mathrm{O1} : \mathrm{OX} = \mathrm{OY} : \mathrm{OT}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathrm{OX} \cdot \mathrm{OY} = \mathrm{OT}$$

となる．




このように，射影平面の直線上の点に関する和と積の定義は，ユークリッド平面で和と積を作図する方法を，射影辺面に引き戻したものであり，自然である．

**命題 44**　$l$ 上の $p_\infty$ を除く点は，上記演算に関して体となる．加法の単位元は $p_0$，乗法の単位元は $p_1$ である．この体を $K(p_0,\ p_\infty,\ p_1)$ と表し，辺 $p_0 \vee p_\infty$ 上の**直線体**という．■

**証明**　示すべきは

(1) 加法で群であること．結合法則を満たす．単位元の存在，逆元の存在．加法は可換である．

(2) 0 を除く $P$ の要素の集合が乗法で群であること．結合法則を満たす．単位元の存在，逆元の存在．

(3) 加法と乗法に関して分配法則が成り立つ．

これらは面倒ではあるが困難ではない．よって当面省略する． □

次の命題が成りたつ．

**命題 45** 一つの射影幾何 $\{P,\ Q\}$ で定まる直線体はすべて同型である． ■

**証明** 任意の 2 直線 $l,\ l'$ をとる．それぞれの直線上の枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ と $[p_0{}',\ p_\infty{}',\ p_1{}']$ に関して，2 つの直線体 $K(p_0,\ p_\infty,\ p_1)$ と $K(p_0{}',\ p_\infty{}',\ p_1{}')$ が得られる．命題 35 によって，$l$ から $l'$ への射影写像 $\varphi$ で

$$\varphi(p_0)=p_0{}',\ \varphi(p_1)=p_1{}',\ \varphi(p_\infty)=p_\infty{}'$$

となるものが存在する．射影写像は四角性六点を四角性六点にうつす．よって $\varphi$ は点の演算を保持し，その結果 $K(p_0,\ p_\infty,\ p_1)$ と $K(p_0{}',\ p_\infty{}',\ p_1{}')$ の同型を導く． □

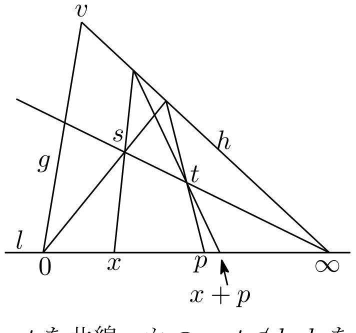
射影幾何 $\{P,\ Q\}$ によって，その直線上の直線体がすべて同型で，この同型を除いて体が一意に確定する．この体 $K$ を射影幾何 $\{P,\ Q\}$ の**係数体**という．直線体 $K(p_0,\ p_\infty,\ p_1)$ は点の集合に体の構造を入れたものであり，係数体 $K$ は抽象的な体である．

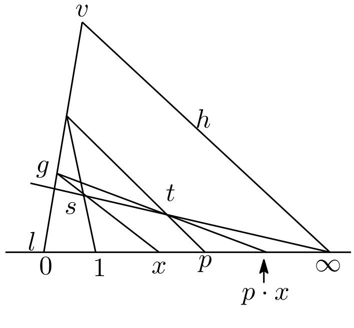
**命題 46** 直線 $l$ 上の枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ をとる．$l$ 上の点 $x$ と定点 $p$ について，$l$ の点の対応

$$x\mapsto x+p,\ x\mapsto p\cdot x,\ x\mapsto x\cdot p,\ x\mapsto x^{-1}$$

はすべて直線 $l$ から $l$ への射影写像である． ■

**証明** $l$ 上にない点 $v$ と，2 直線 $g=p_0\vee v$，$h=p_\infty\vee v$ をとる．2 点 $s,\ t$ を平面 $v\vee l$ 上にそれぞれ次のようにとって，それをもちいてそれぞれ次のように射影写像を定めればよい．ただし $\pi_{hl}(p)$ は点 $p$ を中心とする直線 $l$ から直線 $h$ への配景写像を表すのであった．




(1) 3 点 $p_\infty,\ s,\ t$ を共線，かつ $s,\ t\notin l,\ h$ を

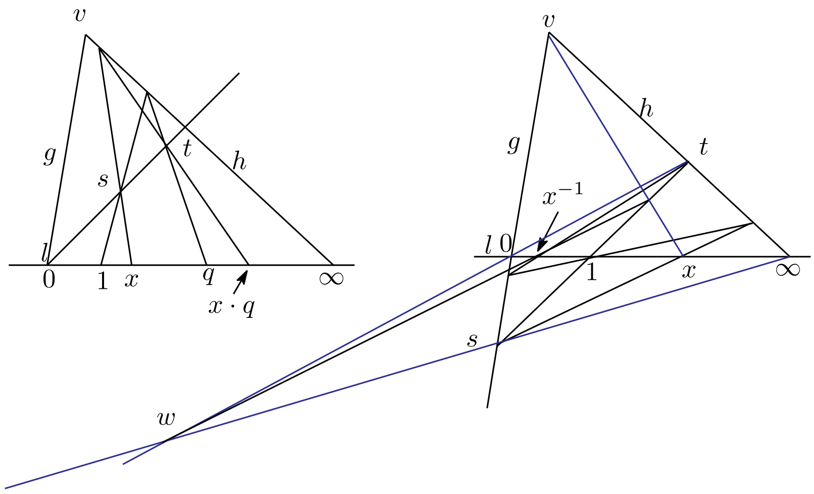
$$\varphi=\pi_{lh}(t)\circ\pi_{hl}(s),\ \varphi(p_0)=p$$

となるようにとる．$\varphi: x\to x+p$ である．

(2) 3 点 $p_\infty,\ s,\ t$ を共線，かつ $s,\ t\notin l,\ g$ を

$$\varphi=\pi_{lg}(t)\circ\pi_{gl}(s),\ \varphi(p_1)=p$$

となるようにとる．$\varphi: x\to p\cdot x$ である．




(3) 3 点 $p_0$, $s$, $t$ を共線，かつ $s$, $t \notin l$, $h$ を

$$\varphi = \pi_{lh}(t) \circ \pi_{hl}(s),\ \varphi(p_1) = q$$

となるようにとる．$\varphi : x \to x \cdot q$ である．

(4) 3 点 $p_1$, $s$, $t$ を共線，かつ $s \in g$, $t \in h$ を

$$\varphi = \pi_{lg}(t) \circ \pi_{gh}(p_1) \circ \pi_{hl}(s)$$

となるようにとる．$\varphi : x \to x^{-1}$ である．

これはまた，$p_0$ と $p_\infty$ を入れかえ，$p_1$ を動かさない射影写像を作り，それによって $x$ を移した先として $x^{-1}$ を定めてもよい．図の青線では $v$ と $w$ を中心とする二つの配景写像で入れかえを行い，それで $x$ をうつしている． □

**注意 7**　命題 45 は射影写像は直線体の同型を導くことを示した．これは射影写像で四角性六点は四角性六点にうつるので，直線体の演算が保たれ同型になることを根拠にしている．

一方，命題 46 によって $x \to x + p$, $x \to x \cdot p$ あるいは $x \to x^{-1}$ という直線体から同じ直線体への写像が，直線の射影写像から得られる．

両命題とも，射影写像は同じ $\varphi$ で表されているが，$\varphi$ が導く体の同型と，$\varphi$ が直接に指定する体内部の対応は，別個のものである．

**命題 47**　直線 $l$ 上に相異なる 3 定点 $p_0$, $p_1$, $p_\infty$ をとる．枠 $[p_0, p_\infty, p_1]$ を動かさない射影写像 $\varphi : l \to l$ は，直線体 $K(p_0, p_\infty, p_1)$ の内部自己同型にかぎる． ■

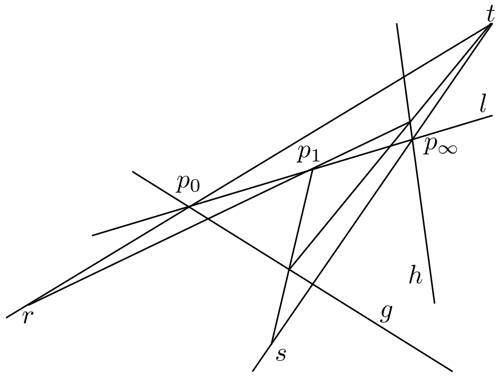
**証明**　命題 46 より直線体 $K(p_0, p_\infty, p_1)$ の内部自己同型 $x \to p \cdot x \cdot p^{-1}$ は射影写像であり，明らかに $[p_0, p_\infty, p_1]$ を動かさない．

逆に枠 $[p_0, p_\infty, p_1]$ を動かさない射影写像 $\varphi : l \to l$ をとる．$\varphi$ の導く体 $K(p_0, p_\infty, p_1)$ の同型が内部自己同型であることを示す．

点 $p_0$ を通る $l$ と異なる直線 $g$ と $l \vee g$ 平面上の $l$ や $g$ に含まれない点 $s$ をとる．射影写像 $\varphi \circ \pi_{lg}(s)$ に定理 5 を適用すると，2 点 $r$, $t$ と直線 $h$ が存在して

$$\varphi \circ \pi_{lg}(s) = \pi_{lh}(r) \circ \pi_{hg}(t)$$

と表せる．命題 39 から，必要なら $h$ が点 $p_\infty$ を通り $l$ と異なるように取り直すことができる．このようにするとき，




$$\varphi = \pi_{lh}(r) \circ \pi_{hg}(t) \circ \pi_{gl}(s) = \pi_{lh}(r) \circ \pi_{hl}(t) \circ \pi_{lg}(t) \circ \pi_{gl}(s)$$

である．ところが $\varphi(p_0) = p_0$，$\pi_{gl}(s)(p_0) = p_0$ なので $\pi_{lh}(r) \circ \pi_{hg}(t)(p_0) = p_0$ である．よって $p_0$, $t$, $r$ は共線である．同様に $p_\infty$, $s$, $t$ も共線である．

これらの直線や点に対して命題 46 の (2) で定めた点 $p$，(3) で定めた点 $q$ ととると，

$$\pi_{lg}(t) \circ \pi_{gl}(s) : x \to p \cdot x, \qquad \pi_{lh}(r) \circ \pi_{hl}(t) : x \to x \cdot q$$

となる．よって $\varphi : x \to p \cdot x \cdot q$ である．さらに $\varphi(p_1) = p_1$ なので $q = p^{-1}$ である．この結果 $\varphi$ は直線体の内部自己同型 $x \to p \cdot x \cdot p^{-1}$ である． □

#### 射影写像の基本定理

射影幾何 $\{P^n, L\}$ に関する二つの命題を示す．これらはそれぞれが成立することが，$\{P^n, L\}$ に関する条件となる．

第一は**射影写像の単一性**である．それは

> 2 直線間の射影写像は 3 点の対応点を与えれば一意に定まる．

という命題である．

第二は**パップスの定理**である．それは

> 同一平面上にある 2 直線上にそれぞれ相異なる 3 点 $p_i$, $q_i$ $(i = 1, 2, 3)$ をとれば，3 点 $(p_i \vee q_j) \cap (p_j \vee q_i)$ $((i, j) = (2, 3), (3, 1), (1, 2))$ は共線である．

である．

**注意 8**　パップスの定理は図をかけば確かに成立している．また『数学対話』の「パップスの定理」でもこれを「証明」している．しかし，それはあくまで実数体上の射影幾何で成立するということであって，射影幾何の公理から歩んできたわれわれにあっては，次に示すように一定の条件の下で成り立つことなのである．

**命題 48**　射影空間 $P$ がパップスの定理を満たすとする．このとき次のことが成り立つ．

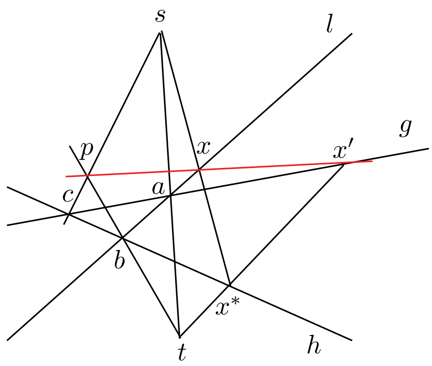
相異なる 2 直線 $l$, $g$ が点 $a$ で交わっている．$l$ から $g$ への射影写像 $\varphi$ が点 $a$ を動かさないなら，$\varphi$ はある点を中心とする配景写像である． ■

**証明**　定理 5 により $\varphi$ は 2 つの配景写像の合成である，これを

$$\varphi = \pi_{gh}(t) \circ \pi_{hl}(s)$$

とする．$h$ は直線，$s$，$t$ は点である．$h$ が $a$ を通れば命題 37 により $\varphi$ は配景写像である．

　$a \notin h$ とする．$\varphi(a) = a$ なので $s$，$a$，$t$ は共線である．$b = l \cap h$，$c = g \cap h$ とおく．$l$ の任意の点 $x$ に対して $x^* = \pi_{hl}(s)(x)$，$\pi_{gh}(t)(x^*) = x'$ とおく．3 点の組 $\{s,\ a,\ t\}$ と $\{b,\ x^*,\ c\}$ に関してパップスの定理を用いることにより 3 点 $x$，$x'$，$p = (s \vee c) \cap (b \vee t)$ は共線である．よって $\varphi = \pi_{gl}(p)$ である．□




**定理 6**　　射影幾何に関する三条件：

(1) 係数体が可換である．

(2) 射影写像の単一性が成り立つ．

(3) パップスの定理が成り立つ．

は同値である．■

**証明**

(1) $\Longleftrightarrow$ (2)　(1) が成りたつとする．直線 $l$ の直線体 $K(p_0,\ p_\infty,\ p_1)$ が可換であれば，直線 $l$ 上の枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ を動かさない射影写像は恒等変換のみとなる．直線 $l$ から同一平面上の直線 $l'$ への射影写像 $\varphi$，$\varphi'$ がいずれも直線 $l$ 上の枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ を直線 $l'$ 上の枠 $[p_0',\ p_\infty',\ p_1']$ に写すとすると，${\varphi'}^{-1} \circ \varphi$ は直線 $l$ 上の枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ を動かさない写像であり，恒等写像になる．よって $\varphi = \varphi'$ である．

　逆に (2) が成り立つとする．枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ を動かさない $l$ から $l$ への射影写像で恒等写像でないもの $\pi$ があれば，直線 $l$ から直線 $g$ への射影写像 $\varphi$ に対し $\varphi \circ \pi$ も直線 $l$ から直線 $g$ への射影写像で異なる．これは単一性に反するので，直線体の内部自己同型の射影写像は恒等写像のみである．よって直線体は可換である．

(2) $\Longleftrightarrow$ (3)　(2) が成り立つとする．同一平面上の 2 直線 $l$，$l'$ とその上の各 3 点 $a$，$b$，$c$，$a'$，$b'$，$c'$ がある．3 交点を $p = (b \vee c') \cap (b' \vee c)$，$q = (c \vee a') \cap (c' \vee a)$，$r = (a \vee b') \cap (a' \vee b)$ とおく．直線 $g = q \vee r$ と $l'$，$b \vee c'$，$b' \vee c$ の交点を $s$，$x_1$，$x_2$ とする．射影写像 $\varphi : g \to g$ を

$$\varphi = \pi_{g,a' \vee c}(b') \circ \pi_{a' \vee c, a' \vee b}(a) \circ \pi_{a' \vee b, g}(c')$$

で定義する．すると

$$\varphi(s) = s,\ \varphi(q) = q,\ \varphi(r) = r,\ \varphi(x_1) = x_2$$

条件 (2) より 3 点を固定する射影写像は恒等写像のみであるから $x_1 = x_2$．この結果 $x_1 = x_2 = p$．つまり (3) が成りたった．

　逆に (3) が成り立つとする．直線 $l$ 上の枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ を動かさない任意の射影変換 $\varphi$ をとる．点 $p_0$ を通る $l$ と異なる直線 $g$ をとり，点 $p$ を中心とする配景写像 $\pi_{gl}(p)$ を考える．$\pi_{gl}(p) \circ \varphi(a) = a$ なので命題 48 によって $\pi_{gl}(p) \circ \varphi = \pi_{gl}(p')$ となる点 $p'$ が存在する．

$$\pi_{gl}(p)(b) = \pi_{gl}(p')(b),\ \pi_{gl}(p)(c) = \pi_{gl}(p')(c)$$

なので $p=p'$．よって $\varphi=\pi_{lg}(p)\circ\pi_{gl}(p')$ は恒等写像である．□

**注意 9**　(1) と (2) の同値性の証明からわかるように，一般に三対の対応点を与えれば，射影写像は体の内部自己同型を除いて一意に定まる．

**注意 10**　すでにのべたように $P^2$ の場合はデザルグの定理が成り立つものとしている．つまりより高次の射影幾何に埋め込まれているものとする．ただし，条件 (2) または (3) から逆にデザルグの定理が導かれることが知られている．

### 3.2.2　座標系の導入

**直線座標と射影写像**

**座標の定義**　$n$ 次元射影空間 $P^n$ の直線 $l$ とその上の枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ がある．このとき $l$ の直線体 $K(p_0,\ p_\infty,\ p_1)$ が定まる．これは直線 $l$ の点から $p_\infty$ を除いた点の集合に体の構造を入れたものである．この体は命題 45 により，枠 $[p_0,\ p_\infty,\ p_1]$ のとり方によらず同型である．つまりひとつの抽象体としての係数体 $K$ が定まる．$\theta$ を同型写像 $\theta : K(p_0,\ p_\infty,\ p_1)\to K$ とする．$K(p_0,\ p_\infty,\ p_1)$ は集合としては直線 $l$ の点から $p_\infty$ を除いたものである．よって $\theta$ は $l$ の点 $p_\infty$ を除いた点集合と $K$ の一対一対応を定める．この対応も同じ $\theta$ で表す．$\theta$ を直線 $l$ の**座標系**，$p_\infty$ でない $l$ の要素 $p$ に対応する $K$ の要素 $\xi=\theta(p)$ を点 $p$ のこの枠に対する**非同次座標**という．

それに対して $\xi=x_1(x_0)^{-1}$ となる $K$ の要素の組 $(x_0,\ x_1)$ を $l$ の**同次座標**という．$x_0,\ x_1$ がともに 0 でないとき直線 $l$ 上の点 $p$ が $(x_0,\ x_1)$ に，点 $q$ が $(x_1,\ x_0)$ に対応するとすれば，$p$ と $q$ は体 $K(p_0,\ p_\infty,\ p_1)$ の要素として，$pq=qp=p_1$ を満たす．一方，ただちに確認できるように，命題 46 の写像 $x\to x^{-1}$ で $p_0$ には $p_\infty$ が，$p_\infty$ には $p_0$ が対応する．よって $l$ の点 $p_\infty$ に対しては同次座標 $(0,\ x^1)$ を対応させると定めることは自然であり，これによって $l$ 上のすべての点に対して，その同次座標が定まる．2 つの組 $(x_0,\ x_1)$, $(x_0',\ x_1')$ が同じ点の同次座標であるための必要十分条件は，$x_0'=x_0\lambda$，$x_1'=x_1\lambda$ となる 0 でない $K$ の要素 $\lambda$ が存在することである．

体 $K$ の要素を成分とする 2 次元ベクトル空間を $K^2$ とする．$K^2$ から $(0,\ 0)$ を除いた集合を $K^{2^*}$ と表す．$K^{2^*}$ の要素の間に同値関係〜を

$$(x_0,\ x_1)\sim(x_0',\ x_1')\quad : \quad \exists\lambda\ ;\ x_0'=x_0\lambda,\ x_1'=x_1\lambda$$

で定める．このとき直線 $l$ の点と集合 $K^{2^*}/\sim$ の要素の間に一対一対応が成り立つ．

**直線の一次変換**　直線 $l$ に座標系 $\theta$ が与えられたとき，体 $K$ の要素 $\alpha_{00},\ \alpha_{10},\ \alpha_{01},\ \alpha_{11}$ に対して $l$ から $l$ への写像

$$(x_0,\ x_1)\mapsto(\alpha_{00}x_0+\alpha_{01}x_1,\ \alpha_{10}x_0+\alpha_{11}x_1)$$

を直線 $l$ の**一次変換**という．同一の集合間の写像を変換ということが多くこの場合一次変換ということが慣習である．$\alpha_{00}$, $\alpha_{10}$, $\alpha_{01}$, $\alpha_{11}$ の表す一次変換と 0 でない数 $\lambda$ による $\alpha_{00}\lambda$, $\alpha_{10}\lambda$, $\alpha_{01}\lambda$, $\alpha_{11}\lambda$ の表す一次変換は同じ $l$ の変換である．

一次変換を非同次座標で表す．$x_0\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}&(\alpha_{10}x_0+\alpha_{11}x_1)(\alpha_{00}x_0+\alpha_{01}x_1)^{-1}\\ =\ &\{\alpha_{10}+\alpha_{11}x_1(x_0)^{-1}\}x_0[\{\alpha_{00}+\alpha_{01}x_1(x_0)^{-1}\}x_0]^{-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\alpha_{10}+\alpha_{11}x_1(x_0)^{-1}\}x_0(x_0)^{-1}\{\alpha_{00}+\alpha_{01}x_1(x_0)^{-1}\}^{-1} \\
&= \{\alpha_{10}+\alpha_{11}x_1(x_0)^{-1}\}\{\alpha_{00}+\alpha_{01}x_1(x_0)^{-1}\}^{-1}
\end{aligned}
$$

となる．これも一次変換という．ただし $(\alpha_{00}x_0+\alpha_{01}x_1)^{-1}=0$ となるときは体の要素ではなく，$l$ の $p_\infty$ になる．

逆に非同次座標で $p_\infty$ を除く $l$ の点 $p$ に対する $\xi=\theta(p)$ に対し

$$\xi \mapsto (\gamma\xi+\delta)(\alpha\xi+\beta)^{-1}$$

が与えられれば，これから同次座標の一次変換が一意に確定する．

$K$ が可換体の場合は，いわゆる一次分数変換である．

**直線の射影変換**　この一次変換が射影幾何の写像として重要であるのは，次の命題が成立するからである．

**命題 49**　直線 $l$ に座標系 $\theta$ が与えられたとき，$l$ から $l$ への写像が射影写像であることと，一対一の一次変換であることは同値である．■

**証明**　一対一の一次変換 $\varphi$ をとる．上に述べたように，一次変換を同次座標で考えることと，非同次座標で考えることは同値である．

$$\varphi(\xi)=(\gamma\xi+\delta)(\alpha\xi+\beta)^{-1}$$

とする．

$$
\begin{aligned}
(\gamma\xi+\delta)(\alpha\xi+\beta)^{-1} &= (\gamma\alpha^{-1}\alpha\xi+\gamma\alpha^{-1}\beta-\gamma\alpha^{-1}\beta+\delta)(\alpha\xi+\beta)^{-1} \\
&= \gamma\alpha^{-1}-(\gamma\alpha^{-1}\beta-\delta)(\alpha\xi+\beta)^{-1}
\end{aligned}
$$

となり，$\varphi$ は命題 46 の演算

$$x\mapsto x+p,\ x\mapsto p\cdot x,\ x\mapsto x\cdot p,\ x\mapsto x^{-1}$$

に分解される．これらはすべて射影写像であったので，$\varphi$ は射影写像である．

逆に $l$ から $l$ への射影写像 $\varphi$ をとる．

$l$ の $p_0,\ p_1,\ p_\infty$ は同次座標で $(1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 1)$ で表される．$\varphi$ によるこれらの像を $(a_0,\ a_1)$，$(b_0,\ b_1)$，$(c_0,\ c_1)$ とする．$l$ 上の相異なる 3 点である．これに対して，一次変換

$$\varphi' : (x_0,\ x_1)\mapsto (a_0hx_0+c_0kx_1,\ a_1hx_0+c_1kx_1)$$

で定めると，$\varphi'$ は $(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ を $(a_0,\ a_1)$，$(c_0,\ c_1)$ にうつす．

さらに

$$a_0h+c_0k=b_0l,\qquad a_1h+c_1k=b_1l$$

となる 0 でない $l$ が存在するように $h$ と $k$ をとることができることを示す．

$b_0=0$ または $b_1=0$ のとき．$b_0=0$ なら，$(a_0,\ a_1)$，$(c_0,\ c_1)$ は異なる点なので $a_1=c_1=0$ ということはない．よって $a_1h+c_1k\neq 0$ となるように $h$ と $k$ をとることができ，このとき $l$ が存在する．$b_1=0$ のときも同様である．

次に $b_0 \neq 0$ かつ $b_1 \neq 0$ のとき．この条件は

$$b_0{}^{-1}(a_0 h + c_0 k) = l = b_1{}^{-1}(a_1 h + c_1 k)$$

より

$$(b_0{}^{-1}a_0 - b_1{}^{-1}a_1)h = -(b_0{}^{-1}c_0 - b_1{}^{-1}c_1)k$$

となる．もし $b_0{}^{-1}a_0 - b_1{}^{-1}a_1 = 0$ なら $b_0{}^{-1}a_0 = b_1{}^{-1}a_1 = t$ とおくと $a_0 = b_0 t,\ a_1 = b_1 t$ となり $(a_0,\ a_1)$，$(b_0,\ b_1)$ が異なる点であることに反する．よって $b_0{}^{-1}a_0 - b_1{}^{-1}a_1 \neq 0$．他も同様なのでこのような 0 でない $h,\ k$ をとることができる．このとき $\varphi'$ は $(1,\ 1)$ を $(b_0,\ b_1)$ にうつす．

$\varphi$ と $\varphi'$ はともに同じ 3 点を同じ 3 点に移す射影変換である，定理 6 と注意 9 から非同次座標で表せば $K$ の内部自己同型 $\xi \mapsto \lambda\xi\lambda^{-1}$ しか違わない．これ自身一次変換であるのでこれを $\varphi'$ に結合してもやはり $\varphi$ は一次変換である． □

**注意 11**　枠を動かさない射影変換は，非同次座標で $\xi \mapsto \lambda\xi\lambda^{-1}$ となるのであった．これを同次座標で表せば

$$x_1{}'x_0{}'^{-1} = \lambda x_1 x_0{}^{-1}\lambda^{-1} = (\lambda x_1)(\lambda x_0)^{-1}$$

だから

$$(x_0,\ x_1) \mapsto (\lambda x_0,\ \lambda x_1)$$

となる．体が可換でなければ，これは一般には $(x_0,\ x_1)$ と一致しないが，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$ は動かさない．

**二次行列表現**　体 $K$ が可換の場合，一次変換は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

と $2 \times 2$ 行列で表される．一対一対応であるということは逆行列をもつということである．逆行列をもつ $2 \times 2$ 行列は積に関して群をなす．これを $GL(2,\ K)$ と記し，一般線型群という．

$(\alpha_{ij}) \in GL(2,\ K)$ と $(\beta_{ij}) \in GL(2,\ K)$ に対応する射影変換が等しいことはある $K$ の要素 $\lambda \neq 0$ があって

$$(\alpha_{ij}) = \lambda(\beta_{ij})$$

となることが必要かつ十分である．これは同値関係である．$GL(2,\ K)$ のこの同値関係によって類別して得られる群を $PGL(2,\ K)$ と記す．これが直線の射影変換群である．

## 射影空間の座標系

**射影枠**　$n$ 次元射影空間 $P^n$ の一般の位置にある $n+2$ 個の点の組 $\mathscr{F} = [a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ u]$ を $P^n$ の**枠**，あるいは**射影枠**という．点 $a_i$ $(0 \leqq i \leqq n)$ を**基本点**，$u$ を**単位点**という．

一般の枠では，直線 $a_i \vee a_j$ 上の直線体を定めるのに $a_i,\ a_j$ のいずれを原点，示点にとることもできる．それでこのように枠の点を原点，示点の区別のない形でとる．

**点の成分**　直線 $a_i \vee a_j$ $(0 \leqq i < j \leqq n)$ に対して，残り $n-1$ 個の基本点の張る $n-2$ 次元部分空間を $(a_i \vee a_j)^*$ で表す．$(a_i \vee a_j)^*$ に含まれない点 $p$ に対して，点

$$p_{ij} = (a_i \vee a_j) \cap (p \vee (a_i \vee a_j)^*)$$

を点 $p$ の辺 $a_i \vee a_j$ 上の成分という．$[a_i,\ a_j,\ u_{ij}]$ は直線 $a_i \vee a_j$ の枠である．したがってこの直線上の点 $a_j$ を除く点 $p_{ij}$ と直線体 $K$ の要素の対応が定まる．

**注意 12**　各直線上の成分はこのようにして定めることができる．しかし各直線の座標の入れ方は基本点をどのように並べるかの自由度がある．しかし全体としての統制はとれなければならない．そのためにいくつかの準備をしなければならない．

**面の成分**　基本点のうちの $r$ 個 $a_{i_0},\ \cdots,\ a_{i_r}$ で張られる部分空間を $\alpha$ とする．$\alpha$ に含まれない基本点で張られる部分空間を $\alpha$ の**補面**といい，$\alpha^*$ と表す．$p$ が $\alpha$ に含まれないとき $p_\alpha = \alpha \cap (p \vee \alpha^*)$ を点 $p$ の $\alpha$ への成分という．$[a_{i_0},\ \cdots,\ a_{i_r},\ u_\alpha]$ は $\alpha$ の枠となる．これを**枠 $F$ に関する面 $\alpha$ 上の枠**という．混乱しないときは，単位点の成分 $u_\alpha$ も添え字をはずして $u$ と書くこともある．あるいは適宜 $u_1$ などのようにして $u$ の面上の成分であることを示すこともある．

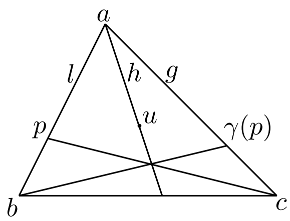
辺 $a_i \vee a_j$ 上には枠 $[a_i,\ a_j,\ u]$，$[a_j,\ a_i,\ u]$ が定まり，直線体 $K(a_i,\ a_j)$ や $K(a_j,\ a_i)$ が定まる．

**折返し**　枠 $F$ に関する 2 次元空間の枠 $[a,\ b,\ c,\ u]$ をとる．ただし $a,\ b,\ c$ は基本点である．

1 点 $a$ に対して $a$ を通る 2 辺 $l = a \vee b$，$g = a \vee c$ の間の射影写像 $\gamma : l \to g$ を

$$\gamma = \pi_{gh}(b) \circ \pi_{hl}(c),\ h = a \vee u$$

で定義し，枠 $\mathscr{F}$ に関する $a$ のまわりの**折返し**という．この折返しによって枠 $[a,\ b,\ u]$ は枠 $[a,\ c,\ u]$ にうつり，直線体の同型 $K(a,\ b,\ u) \to K(a,\ c,\ u)$ を引き起こす．この証明はここでは省略する．




定義から逆写像 $\gamma^{-1}$ も折返しである．これらは配景写像の合成で射影写像であり，折返しおよびそれらの合成写像も枠から枠への射影写像である．

**定義 19 (基本写像)**　$P^n$ の枠 $\mathscr{F} = [a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ u]$ をとる．2 辺のあいだの写像 $\varphi : a_i \vee a_j \to a_k \vee a_l$ であって，枠 $\mathscr{F}$ の 2 次元面上の折返しを有限回結合して得られるものを枠 $\mathscr{F}$ に関する**基本写像**という．■

**命題 50**　枠 $[a,\ b,\ c,\ u]$ の基本点まわりの折返しを $\gamma_1 : a \vee b \to a \vee c$，$\gamma_2 : c \vee a \to c \vee b$，$\gamma_3 : b \vee c \to b \vee a$ とし，任意の点 $p \in a \vee b$ に対して $p' = \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(p)$ とおくと，体 $K(a,\ b)$ において $p' = p^{-1}$ である．■

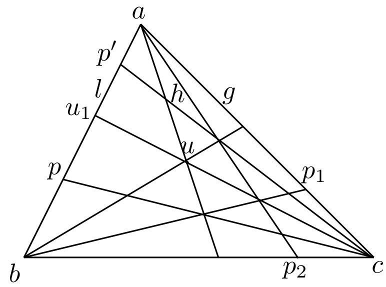
**証明**　単位点のそれぞれの辺上の成分を $u_1$ などのように表す．$p = a,\ b,\ u_1$ のとき．

$$\gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(a) = \gamma_3 \circ \gamma_2(a) = \gamma_3(b) = b$$
$$\gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(b) = \gamma_3 \circ \gamma_2(c) = \gamma_3(c) = a$$
$$\gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(u_1) = \gamma_3 \circ \gamma_2(u_2) = \gamma_3(u_3) = u_1$$

よって成立する．

$p \neq a,\ b,\ u_1$ とする．$p_1 = \gamma_1 p$，$p_2 = \gamma_2 p_1$ とおく．6 直線 $\{cb,\ cp',\ cu_1,\ ca,\ cp,\ cu_1\}$ は 4 直線 $a \vee u$，$a \vee p_2$，$b \vee u$，$b \vee p_1$ でつくられる四辺形によって四辺性六辺である．したがって命題 42 によって 6 点 $\{a,\ p,\ u_1,\ b,\ p',\ u_1\}$ は四角性六点．直線体の積の定義から $p \cdot p' = u_1$ である．

□




**命題 51**　$P^n$ の枠 $\mathscr{F}$ に関する辺上の二つの枠 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2$ をとる．このとき枠 $\mathscr{F}$ に関する基本写像 $\varphi : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ は一意に定まる．とくに $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2$ が同じ辺上にあるとき，$\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$ なら恒等写像，$\mathscr{F}_1 \neq \mathscr{F}_2$ つまり基本点の順序が逆なら点 $p$ を直線体での逆元 $p^{-1}$ にうつす．■

**証明**　$n = 2$ の場合は命題 50 より成立する．$n > 2$ の場合を示すために次の補題を示す．

**補題 13**　$P^3$ の枠 $\mathscr{F} = [a,\ b,\ c_1,\ c_2,\ u]$ に属する二平面 $a \vee b \vee c_i$ $(i = 1,\ 2)$ 上の枠を $\mathscr{F}_i = [a,\ b,\ c_i,\ u_i]$ とする．折返し $\gamma_i : a \vee b \to a \vee c_i$ をとる．このとき写像 $\gamma_2 \circ {\gamma_1}^{-1} : a \vee c_1 \to a \vee c_2$ は枠 $\overline{\mathscr{F}} = [a,\ c_1,\ c_2,\ \overline{u}]$ に関する $a$ のまわりの折返しと一致する．■

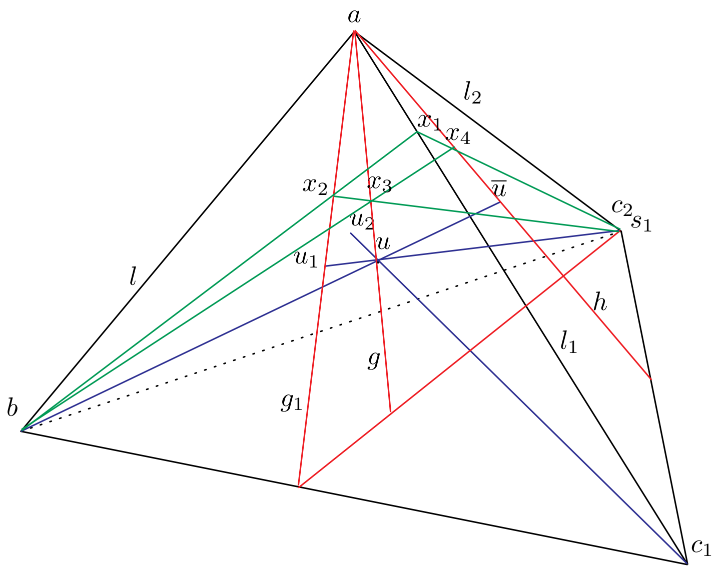
**証明**　$a \vee b = l$，$a \vee c_i = l_i$，$a \vee u = g$，$a \vee u_i = g_i$，$a \vee \overline{u} = h$ とおく．

$$\gamma_i = \pi_{l_i g_i}(b) \circ \pi_{g_i l}(c_i) = \pi_{l_i g_i}(b) \circ \pi_{g_i l}(c_1 \vee c_2)$$

である．写像

$$\psi = \pi_{hg}(b) \circ \pi_{gl}(c_1 \vee c_2) : l \to h$$

をとる．$s_i = (c_1 \vee c_2) \cap (g_i \vee g)$ とおく．




$$\begin{aligned}
\psi \circ {\gamma_i}^{-1} &= \pi_{hg}(b) \circ \pi_{gl}(c_1 \vee c_2) \circ \pi_{lg_i}(c_1 \vee c_2) \circ \pi_{g_i l_i}(b) \\
&= \pi_{hg}(b) \circ \pi_{gg_i}(s_i) \circ \pi_{g_i l_i}(b)
\end{aligned}$$

$x_1 \in a \vee c_i$ をとり．

$$x_2 = \pi_{g_i l_i}(b)(x_1),\ x_3 = \pi_{g g_i}(s_i)(x_2),\ x_4 = \pi_{hg}(b)(x_3)$$

とおくと，$x_1,\ x_4,\ s_1$ は共線なので，

$$\pi_{hg}(b) \circ \pi_{gg_i}(s_i) \circ \pi_{g_i l_i}(b) = \pi_{hl_i}(s_i)$$

が成り立つ．ところが $i,\ j = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ に対して 3 点 $u_i,\ u,\ c_j$ は共線であるから $s_i = c_j$ である．この結果，$\psi = \pi_{hl_i}(c_j) \circ \gamma_i$ となり，

$$\pi_{hl_1}(c_2) \circ \gamma_1 = \pi_{hl_2}(c_1) \circ \gamma_2$$

より

$$\gamma_2 \circ {\gamma_1}^{-1} = \pi_{l_2 h}(c_1) \circ \pi_{hl_1}(c_2)$$

である． □

**命題 51 の証明**　$P^n$ の枠 $\mathscr{F} = [a_0,\ \cdots,\ a_n,\ u]$ に属する任意の辺上の枠 $\{a_i,\ a_j\}$ に対して基本写像

$$\varphi_{ij} : a_i \vee a_j \to a_0 \vee a_1$$

を次のように定める．

1)　$(a_i \vee a_j) \cap (a_0 \vee a_1) \neq \emptyset$ のとき．

2 辺 $a_i \vee a_j,\ a_0 \vee a_1$ を含む $F$ の 2 次元面 $\alpha$ をとり，$\alpha$ 上の枠に関する基本写像を $\varphi_{ij}$ とする．$n = 2$ のときの一意性から $\varphi_{ij}$ は一意に定まる．

2)　$(a_i \vee a_j) \cap (a_0 \vee a_1) = \emptyset$ のとき．

枠 $\{a_0,\ a_i,\ a_j\}$ と枠 $\{a_0,\ a_1,\ a_j\}$ に関する折返しの結合により $\varphi_{ij}$ を

$$\varphi_{ij} : a_j \vee a_i \to a_1 \vee a_i \to a_1 \vee a_j \to a_0 \vee a_j \to a_0 \vee a_1$$

で定める．このように $\varphi_{ij}$ を定めると，$F$ の任意の 2 次元面上の枠 $\{a_i,\ a_j,\ a_k\}$ に関する折返し $\gamma : a_i \vee a_j \to a_i \vee a_k$ に対して，補題 13 より $\varphi_{ik} \circ \gamma = \varphi_{ij}$ つまり $\gamma = \varphi_{ik}^{-1} \circ \varphi_{ij}$ となる．これから折返しの結合で得られる任意の基本写像 $\varphi : \{a_i,\ a_j\} \to \{a_k,\ a_l\}$ に関しても $\varphi = \varphi_{kl}^{-1} \circ \varphi_{ij}$ は一意に定まる． □

**座標系**　以上の準備によって射影空間 $P^n$ の座標系が定義される．

$P^n$ の枠 $\mathscr{F} = [a_0,\ \cdots,\ a_n,\ u]$ が与えられている．その係数体を $K$ とし，直線体 $K(a_i,\ a_j,\ u)$ または $K(a_j,\ a_i,\ u)$ から $K$ への同型 $\theta_{ij}$ が指定されている．このとき，写像 ${\theta_{kl}}^{-1} \circ \theta_{ij} : a_i \vee a_j \to a_k \vee a_l$ が $\mathscr{F}$ に関する基本写像であるとき $\mathscr{F}$ と写像 $\theta_{ij}$ の組 $\{\mathscr{F},\ \theta_{ij}\}$ を $P^n$ の**非同次射影座標系**という．

命題 51 により，いずれかの $\theta_{ij}$ を決めれば他は一意に定まる．よって $\theta_{ij}$ をすべて同じ $\theta$ で表して混乱しない．座標系を $\{\mathscr{F},\ \theta\}$ のように表す．$\theta$ の決め方は二通りあり，その結果，枠 $\mathscr{F}$ に対して二通りの非同次座標系が定まる．

**命題 52**　$P^2$ の座標系 $\{F,\ \theta\}$，$F = \{a,\ b,\ c,\ u\}$ が与えられている．$P^2$ の点 $p\ (\notin b \vee c)$ の $a \vee b,\ a \vee c,\ c \vee b$ への成分を $p_1,\ p_2,\ p_3$ とする．$p \notin a \vee c$ のとき，同型 $\theta : K(a,\ b),\ K(a,\ c),\ K(b,\ c) \to K$ に対して $\xi = \theta(p_1)$，$\eta = \theta(p_2)$，$\zeta = \theta(p_3)$ とおけば，$\eta = \zeta\xi$ である．$p \in a \vee c$ のときは $\theta$ を $K(c,\ b) \to K$ にとると同様である． ■

**証明**　$p=a$ なら $\xi=\eta=0$ で $p_3$ は $b\vee c$ の $c$ 以外の任意の点でよい．$p\neq a$, $p\notin a\vee c$ とする．基本点 $a$, $c$, $b$ まわりの折返しを $\gamma_1: a\vee b\to a\vee c$, $\gamma_2: c\vee a\to c\vee b$, $\gamma_3: b\vee c\to b\vee a$ をとる．

$a$, $u$, $p$ が共線なら $p_2=\gamma_1(p_1)$ なので $\eta=\xi$, $\zeta=1$ より成立．

$b$, $u$, $p$ が共線なら $p_1=\gamma_3(p_3)$ なので命題 50 より $\zeta=\xi^{-1}$ かつ $\eta=1$ より成立．

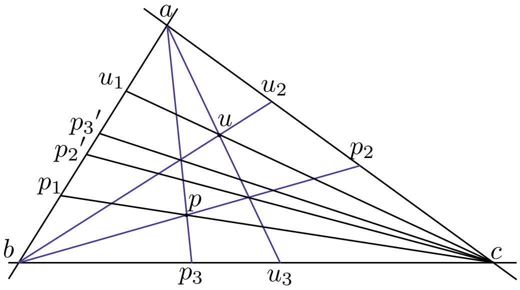
その他の一般の場合，${\gamma_1}^{-1}(p_2)=p_2{}'$, $\gamma_3(p_3)=p_3{}'$ とおくと，同型 $\theta: K(a,\ b)\to K$ に関して

$$\xi=\theta(p_1),\ \eta=\theta(p_2{}'),\ \zeta^{-1}=\theta(p_3{}')$$

である．4 直線 $a\vee p$, $a\vee u$, $b\vee p$, $b\vee u$ で定まる四辺形に関して 6 直線

$$\{c\vee b,\ c\vee p_2{}',\ c\vee p_1,\ c\vee a,\ c\vee p_3{}',\ c\vee u\}$$

は四辺性六辺である．




この結果，6 点 $\{a,\ p_3{}',\ u_1,\ b,\ p_2{}',\ p_1\}$ は四角性六点である．よって積の定義から体 $K(a,\ b,\ u_1)$ において $p_3{}'\cdot p_2{}'=p_1$．つまり $K$ において $\eta=\zeta\xi$ が成り立つ．□

**同次座標**　枠 $\mathscr{F}$ に対して非同次座標系の決め方は二通りある．その一方を明示的に指示し，次のように $P^n$ の非同次座標とそれに基づく同次座標を定める．

同次座標を定義するために，**座標集合**を準備する．体 $K$ の $n+1$ 個の要素の組 $\mathbf{x}=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ から $(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ を除いた $K^{n+1^*}$ の，同値関係

$$\mathbf{x}\sim\mathbf{y}\quad\Longleftrightarrow\quad\exists\lambda(\in K); \mathbf{x}=\mathbf{x}\lambda$$

による商集合 $K^{n+1^*}/\sim$ を**座標集合**という．$K^{n+1}$ の要素は $(x)=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ のように表す．これは類の代表であり，

$$(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)=(x_0\lambda,\ x_1\lambda,\ \cdots,\ x_n\lambda)$$

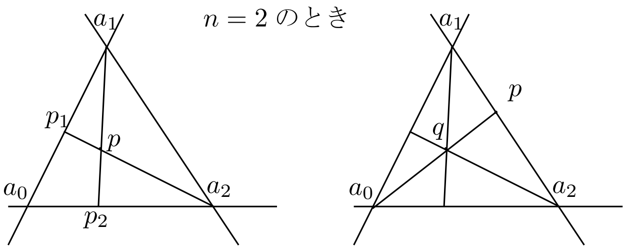
である．また同じ $(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ で座標変数を表すこともある．

$P^n$ に射影座標系 $\{\mathscr{F},\ \theta\}$, $\mathscr{F}=[a_0,\ \cdots,\ a_n,\ u]$ が与えられている．

点 $p$ が $a_0$ の補面 $a_0{}^*$ に含まれないとき，$p$ の辺 $a_0\vee a_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ への成分を $p_i$ とし，$\theta: K(a_0,\ a_i)\to K$ による $p_i$ の像を，$\theta(p_i)=x_i$ とする．そして $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in K^n$ を点 $p$ の**非同次座標**という．またこのとき $(1,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in K^{n+1^*}/\sim$ を点 $p$ の**同次座標**という．点 $a_0$ の同次座標は $(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ である．

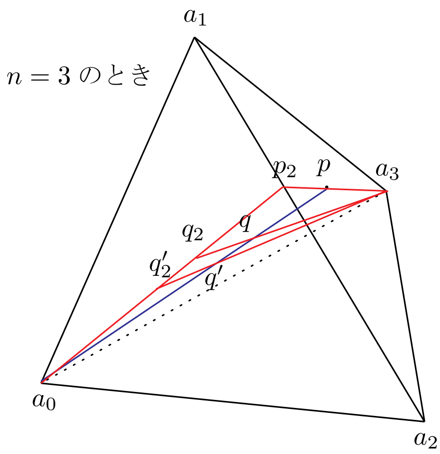
さらに $p\in a_0{}^*$ のときは，直線 $a_0\vee p$ 上の第 3 の点 $q$ をとり，$q$ の非同次座標が $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ であるとき，$(0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in K^{n+1^*}/\sim$ を点 $p$ の同次座標と定める．

$n=2$ のとき




この定義が意味をもつためには，$q$ のとり方を変えても，$(0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ が $K^{n+1^*}/\sim$ の要素として同じ類となることを確認しなければならない．それを示す．

直線 $a_0 \vee p$ 上の点 $q,\ q'(\neq a_0,\ p)$ をとる．その非同次座標を $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ (x'_1,\ x'_2,\ \cdots,\ x'_n)$ とする．$q,\ q' \neq a_0$ なので，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ のすべてが 0 ということはない．順序を入れかえ $x_1 \neq 0$ とする．このとき $x'_1 \neq 0$ も成り立つ．$x_2,\ \cdots,\ x_n$ の中で 0 でないものがなければ，一意性は明らか．0 でないものがあればそれを $x_i$ とする．3 点 $p,\ q,\ q'$ の面 $a_0 \vee a_1 \vee a_i$ への成分をそれぞれ $p_i,\ q_i,\ q'_i$ とする．4 点 $a_0,\ q_i,\ q'_i,\ p_i$ は共線で，$p \in {a_0}^*$ より $p_i \in a_1 \vee a_i$．




面上の枠 $[a_0,\ a_1,\ a_i]$ に関する点 $q_i,\ q'_i$ の非同次座標が $(x_1,\ x_i),\ (x'_1,\ x'_i)$ である．ここで $K(a_1,\ a_i)$ から $K$ への同型写像 $\theta$ をとり，$\xi_i = \theta(p_i)$ とおくと，命題 52 から $x_i = \xi_i x_1,\ x'_i = \xi_i x'_1$ となる．

この結果，$x_i {x_1}^{-1} = x'_i {x'_1}^{-1}$．これから ${x_1}^{-1} x'_1 = {x_i}^{-1} x'_i$．この値を $\lambda$ とおけば $\lambda \in K,\ \neq 0$ で $x'_i = x_i \lambda$ が $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ で成立．つまり $(x) = (0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ と $(x') = (0,\ x'_1,\ x'_2,\ \cdots,\ x'_n)$ は $K^{n+1^*}/\sim$ の同じ類を表す．

**基本点の座標**　基本点 $a_i$ の同次座標を

$$(a_{ik}) = (a_{i0},\ a_{i1},\ \cdots,\ a_{in})$$

とする．これは $i$ 成分のみが 1 で他は 0，つまり $a_{ik} = \delta_{ik}$ となる．記号 $\delta_{ik}$ は

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

を表す．同次座標は $K^{n+1^*}/\sim$ の類の代表で表している．だから $(a_{ik})$ は 0 でない任意の $\lambda$ 倍を除いて定まる．

これで射影空間 $P^n$ の同次座標が定義された．これを枠 $\mathscr{F}$ によって定まる同次座標系といい，同じ記号 $\{\mathscr{F},\ \theta\}$ で表す．

### 部分空間の方程式

**命題 53**　$P^2$ の同次座標が与えられている．それを $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ とする．$P^2$ の直線は一次方程式

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0, \qquad u_i \in K,\ (u_0,\ u_1,\ u_2) \neq (0,\ 0,\ 0) \tag{3.1}$$

で与えられる．いいかえると，$P^2$ の直線に対して，方程式（3.1）が存在し，その直線が（3.1）を満たす $P^2$ の点 $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ の集合となる．■

**証明**　座標系を $\{\mathscr{F},\ \theta\}$ とし，$\mathscr{F} = [a,\ b,\ c,\ u]$ とする．

直線 $l$ が枠の辺と一致するとき．同次座標の定義から 3 辺 $b \vee c,\ a \vee c,\ a \vee b$ の方程式はそれぞれ

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

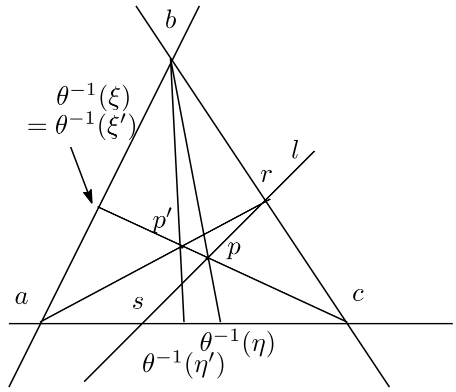
である．

直線 $l$ が頂点 $a$ を通り $b,\ c$ を通らないとき．$\theta(l\cap(b\vee c))=u(\in K)$，$\theta: K(b,\ c)\to K$，$l$ 上の点の非同次座標を $(\xi_1,\ \xi_2)$ とすれば，命題 52 から $\xi_2=u\xi_1$ であるから，$l$ の方程式は同次座標で $x_2=ux_1$ となる．他も同様で $l$ が $\mathscr{F}$ の一つの頂点を通るとき，その方程式は

$$x_i=ux_j\ (i,\ j=0,\ 1,\ 2)$$

となる．

直線 $l$ が $\mathscr{F}$ のいずれの頂点も通らないとき．$l$ と辺の交点 $r=l\cap(b\vee c)$，$s=l\cap(a\vee c)$ をとる．$\theta: K(b,\ c),\ K(a,\ c)\to K$ に対して $u=\theta(r),\ v=\theta(s)$ とする．$l$ 上の点 $p$ と $p'=(c\vee p)\cap(a\vee r)$ をとり，それらの枠 $\{\mathscr{F},\ \theta\}$ に関する非同次座標を $(\xi,\ \eta)$，$(\xi',\ \eta')$ とする．命題 52 から $\xi'=\xi$，$\eta'=u\xi$ である．




4 点 $r,\ p,\ p',\ b$ を頂点とする四角形から，体 $K(a,\ c)$ の和の定義より $\eta=\eta'+v$，これから $\eta=u\xi+v$ である．同次座標になおして $l$ の方程式は

$$x_2=ux_1+vx_0$$

となる．

逆に方程式 (3.1) は以上のいずれかの形に変形でき，直線を表す． □

**命題 54** $P^n$ に射影座標系が定まっている．相異なる 2 定点 $(y),\ (z)$ を通る直線 $l$ は，媒介変数 $\lambda,\ \mu\ (\in K)$ を用いて

$$(x)=(y)\lambda+(z)\mu \tag{3.2}$$

と表される．いいかえると集合として

$$l=\{\ (x)\mid \exists\lambda,\ \mu\ \in K;(x)=(y)\lambda+(z)\mu\ \}$$

である． ■

**証明**

$l$ 上の点が等式 (3.2) の形に表されることを数学的帰納法で示す．

1) $n=2$ のとき．$(x),\ (y),\ (z)$ は命題 53 の直線の方程式を満たす．

$$u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0$$
$$u_0y_0+u_1y_1+u_2y_2=0$$
$$u_0z_0+u_1z_1+u_2z_2=0$$

まず $u_0u_1u_2\neq0$ とする．$z_0\neq0$ としてよい．$z_1\neq0,\ z_2\neq0$ のときも同様である．$\lambda_1=z_0^{-1}x_0,\ \mu_1=z_0^{-1}y_0$ とおくと

$$u_0x_0+u_1z_1\lambda_1+u_2z_2\lambda_1=0$$
$$u_0y_0+u_1z_1\mu_1+u_2z_2\mu_1=0$$

よって

$$u_1(x_1 - z_1\lambda_1) + u_2(x_2 - z_2\lambda_1) = 0$$
$$u_1(y_1 - z_1\mu_1) + u_2(y_2 - z_2\mu_1) = 0$$

さらに $(y)$ と $(z)$ は異なるので，$y_1 - z_1\mu_1 \neq 0$ としてよい．$y_2 - z_2\mu_1 \neq 0$ のときも同様である．$\mu_2 = (y_1 - z_1\mu_1)^{-1}(x_1 - z_1\lambda_1)$ とおくと

$$u_1(x_1 - z_1\lambda_1) + u_2(y_2 - z_2\mu_1)\mu_2 = 0$$

を得,

$$u_2(x_2 - z_2\lambda_1) = u_2(y_2 - z_2\mu_1)\mu_2$$

これから

$$x_2 = y_2\mu_2 + z_2(\lambda_1 - \mu_1\mu_2)$$

$\lambda = \mu_2$，$\mu = \lambda_1 - \mu_1\mu_2$ とおけばよい．また

$$x_1 - z_1\lambda_1 = (y_1 - z_1\mu_1)\mu_2$$

より $x_1$ も同様の関係を満たす．さらに，この結果，方程式の線形性より $x_0$, $y_0$, $z_0$ も同様の関係を満たす.

$u_0u_1u_2 = 0$ のとき．$u_0 = 0$ とする．上記証明ですべて $u_0 = 0$ とおいてそのまま成り立つ．$u_0 = 0$, $u_1 = 0$ のとき．このとき直線の方程式は $x_2 = 0$ となり，点の同次座標は $(x) = (x_0,\ x_1,\ 0)$, $(y) = (y_0,\ y_1,\ 0)$, $(z) = (z_0,\ z_1,\ 0)$ である．$y_0$, $y_1$, $z_0$, $z_1 \neq 0$ とする．$(y) \neq (z)$ より ${z_0}^{-1}y_0 - {z_1}^{-1}y_1 \neq 0$ なので,

$$\lambda = ({z_0}^{-1}y_0 - {z_1}^{-1}y_1)^{-1}({z_0}^{-1}x_0 - {z_1}^{-1}x_1),\ \mu = ({y_0}^{-1}z_0 - {y_1}^{-1}z_1)^{-1}({y_0}^{-1}x_0 - {y_1}^{-1}x_1)$$

とおく．$(x) = (y)\lambda + (z)\mu$ となる．実際

$$\begin{aligned}
& y_0\lambda + z_0\mu \\
= \ & y_0({z_0}^{-1}y_0 - {z_1}^{-1}y_1)^{-1}({z_0}^{-1}x_0 - {z_1}^{-1}x_1) + z_0({y_0}^{-1}z_0 - {y_1}^{-1}z_1)^{-1}({y_0}^{-1}x_0 - {y_1}^{-1}x_1) \\
= \ & ({z_0}^{-1} - {z_1}^{-1}y_1{y_0}^{-1})^{-1}({z_0}^{-1}x_0 - {z_1}^{-1}x_1) + ({y_0}^{-1} - {y_1}^{-1}z_1{z_0}^{-1})^{-1}({y_0}^{-1}x_0 - {y_1}^{-1}x_1) \\
= \ & (z_1{z_0}^{-1} - y_1{y_0}^{-1})^{-1}(z_1{z_0}^{-1}x_0 - x_1) + (y_1{y_0}^{-1} - z_1{z_0}^{-1})^{-1}(y_1{y_0}^{-1}x_0 - x_1) \\
= \ & (z_1{z_0}^{-1} - y_1{y_0}^{-1})^{-1}\{(z_1{z_0}^{-1}x_0 - x_1) - (y_1{y_0}^{-1}x_0 - x_1)\} = x_0
\end{aligned}$$

同様に $y_1\lambda + z_1\mu = x_1$ も成立する．また $y_0$, $y_1$, $z_0$, $z_1$ に 0 があるときも，同様に $\lambda$, $\mu$ をより簡単に構成できる.

2)　$n-1$ では成立とする.

$n$ のとき．枠を $\mathscr{F} = [a_0,\ \cdots,\ a_n,\ u]$ とする．必要なら基本点の順を替え，$(y)$ と $(z)$ を通る直線 $l$ は辺 $a_0 \vee a_1$ と交わらないとする．$l$ 上の点 $(x)$ をとり，3 点の補面 ${a_0}^*$ への成分，および補面 ${a_1}^*$ への成分もまたそれぞれ共線であり，補面は $n-1$ 次元なので，仮定から

$$x_i = y_i\lambda + z_i\mu\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n), \quad x_j = y_j\lambda' + z_j\mu'\ (i = 0,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

となる媒介変数 $\lambda$, $\mu$, $\lambda'$, $\mu'$ が存在する．これから

$$y_k(\lambda - \lambda') + z_k(\mu - \mu') = 0\ (k = 2,\ \cdots,\ n)$$

ここで $\lambda-\lambda'\neq 0$ とする．これは 2 点 $(y)$ と $(z)$ の補面 $(a_0\vee a_1)^*$ への成分が一致することを意味している．つまり $a_0\vee a_1$ と $(y)$ で張られる面と補面 $(a_0\vee a_1)^*$ の交わりと，$a_0\vee a_1$ と $(z)$ で張られる面と補面 $(a_0\vee a_1)^*$ の交わりが一致する．この点を $p$ とする．$(y)$, $(z)$ がともに面 $a_0\vee a_1\vee p$ 上にあることになり，$l$ が直線 $a_0\vee a_1$ と交わらないという仮定に反する．よって $\lambda=\lambda'$，$\mu=\mu'$ となり，$n$ の場合も成立した．一般に $n\geqq 2$ で成立する．

逆に等式 (3.2) の形に表される点 $(x)=(y)\lambda+(z)\mu$ は

$$\begin{aligned}
&\quad u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2\\
&= u_0(y_0\lambda+z_0\mu)+u_1(y_1\lambda+z_1\mu)+u_2(y_2\lambda+z_2\mu)\\
&= (u_0y_0+u_1y_1+u_2y_2)\lambda+(u_0z_0+u_1z_1+u_2z_2)\mu=0
\end{aligned}$$

より直線上 $l$ にある． □

われわれは，命題 31 において任意の体 $K$ 上の射影空間の存在を示した．

それをもとに，命題 32 で射影幾何の同次座標による解析的表示を得た．命題 32 で直線の表示を構成したが，本命題によって，直線はつねにこの形に表示される．よって，射影空間の構成ということに関して，命題 31 のモデル以外のモデルは存在しない．

### 超平面の方程式

**命題 55** $P^n$ の超平面は,

$$u_0x_0+u_1x_1+\cdots+u_nx_n=0,\ u_i\in K,\ (u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)\neq(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

と，座標系の一次方程式 1 個で表される． ■

**証明** 一般に $r$ 次元部分空間が $n-r$ 個の 1 次方程式の連立で定まることを示す．$r$ 次元射影空間 $P^r$ はその定義から一般の位置にある $r+1$ 個の点 $(y)^i$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ r)$ によって確定する．2 点 $(y)^0$, $(y)^1$ を通る直線は $(y)^0\lambda^0+(y)^1\lambda^1$ で表され，この直線上の点と点 $(y)^2$ で定まる部分空間の点は $(y)^0\lambda^0+(y)^1\lambda^1+(y)^2\lambda^2$ で表される．これを順次構成することにより，$P^r$ 上の点 $(x)$ は $r+1$ 個の媒介変数 $\lambda^i$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ r)$ によって

$$(x)=\sum_{i=0}^{r}(y)^i\lambda^i$$

と表される．成分で書けば

$$x_k=\sum_{i=0}^{r}{y^i}_k\lambda^i,\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

と $n+1$ こ得られる．そのうちの二つ

$$x_{k-1}=\sum_{i=0}^{r}{y^i}_{k-1}\lambda^i\ ,\ x_k=\sum_{i=0}^{r}{y^i}_k\lambda^i$$

に対して

$${y^r}_kx_{k-1}=\sum_{i=0}^{r}{y^r}_k{y^i}_{k-1}\lambda^i\ ,\ {y^r}_{k-1}x_k=\sum_{i=0}^{r}{y^r}_{k-1}{y^i}_k\lambda^i$$

として辺々引くと

$$y^r{}_k x_{k-1} - y^r{}_{k-1} x_k = \sum_{i=0}^{r-1} (y^r{}_k y^i{}_{k-1} - y^r{}_{k-1} y^i{}_k) \lambda^i$$

となる．$k = 1,\ \cdots,\ n$ でこれを行うことにより，媒介変数 $\lambda^r$ を消去した関係式が $n$ 個得られる．この操作をくりかえすことで順次媒介変数が 1 個消去されるごとに，関係式が 1 個減じる．したがって $r$ 次元部分空間は $r+1$ 回の操作をおこなった時点で媒介変数を含まない方程式が $n-r$ 個並ぶ．この連立方程式を満たす点の集合として $P^r$ が定まる．

$P^n$ の超平面とは，$n-1$ 次元の部分空間であった．$r = n-1$ の場合，係数を左から揃えて媒介変数を減じる操作を $n$ 回行うことで，関係式は 1 個になる．よって超平面は 1 個の 1 次方程式で表される． □

超平面は $K^{n+1^*}/\sim$ の類 $(u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$ で一意に確定する．これを**超平面座標**という．

$\alpha$ と $\beta$ を二つの超平面とし，その超平面座標を $(v_i)$，$(w_i)$ とするとき，$n-2$ 次元部分空間 $\alpha \cap \beta$ を含む超平面は，$v_0x_0 + v_1x_1 + \cdots + v_nx_n = 0$ と $w_0x_0 + w_1x_1 + \cdots + w_nx_n = 0$ との共有点を含む超平面であるから，

$$\lambda(v_0x_0 + v_1x_1 + \cdots + v_nx_n) + \mu(w_0x_0 + w_1x_1 + \cdots + w_nx_n) = 0$$

と媒介変数 $\lambda,\ \mu \in K,\ (\lambda,\ \mu) \neq (0,\ 0)$ を用いて表される．これを言いかえると，$\alpha \cap \beta$ を含む超平面の超平面座標 $(u_i)$ は

$$(u_i) = \lambda(v_i) + \mu(w_i)$$

で与えられる．

ここで体 $K$ に対して逆体 $K'$ を集合としては $K$ と同じであり，和も同様であるが，$K$ の積 $*$ に対して積 $\times$ が

$$a \times b = b * a$$

で定められる体として定める．$K$ が可換体であれば $K'$ は $K$ そのものである．

$n+1$ 次元座標空間から $P^n$ を構成した命題 31 の構成法にならい，$n+1$ 次元の座標である超平面座標を用いて $P^*$ を構成することができる．ただし，上記の超平面座標の係数 $\lambda,\ \mu$ が左からかかっていることから，$K$ の逆体 $K'$ を用意し，これを用いて命題 31 と同様の構成を行うと，$P^*$ が

$$K'^{n+1^*}/\sim$$

と同型であることがわかる．

以上より次のことがわかる．

**命題 56**　射影空間の係数体が $K$ であるとき，その双対射影空間の係数体は $K$ の逆体 $K'$ である．$K$ が可換なら $K'$ は $K$ と同型である． ■

**射影空間の埋め込み**　任意の射影空間はそれより大きい次元の射影空間に埋め込める．つまり任意の射影空間は，部分空間と見なせる．これが次のように座標の導入を経て証明される．

**命題 57**　$n \geqq 3$ のとき，$N > n$ である任意の $N$ に対し，射影空間 $P^n$ はある $N$ 次元射影空間 $P^N$ に埋め込まれる． ■

**証明**　$P^n$ の座標系 $\{\mathscr{F},\ \theta\}$ がある．その同次座標を $(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ とする．この点を必要なだけ 0 を加えて $N$ 次元の点 $(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ と見なせば，これで $P^n$ が $P^N$ に埋め込まれた． □

この結果，例えば次のような命題もまた成立する．

**命題 58**　2 次元射影幾何では次の 3 条件

(i) デザルグの定理が成り立つ．

(ii) 直線体をもつ．

(iii) 3 次元射影幾何に埋め込める．

は同値である． ■

**証明**　これは

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}$$

の順に明らかである． □

**モデルの係数体**　射影幾何の公理系を定め，これをもとにして係数体 $K$ を定めた．公理系は体を定めるが，その体がいかなるものであるかは定めない．

射影幾何の公理を満たすさまざまのモデルが構成できる．射影幾何の公理系の外部で体の内部構造は定まる．したがって，その体が可換であるとか，内部自己同型をもつかどうかなどは，射影幾何の公理そのものからは出ない．

いいかえると，公理から出発したわれわれの方法は，さまざまの体上の射影幾何のモデルに共通なことを公理に抽出し，そこから逆に射影幾何を構成することで，どのような性質がどのモデルで成り立つのかを探求してきたことになる．それが公理の方法であり，数学的現象としてのモデルの研究方法なのである．

一方命題 31 で，体 $K$ が与えられたとき，ベクトル空間 $V^{n+1}(K)$ をもとに定義された直線の集合と平面の集合の組 $\{P,\ L\}$ は射影幾何であることが証明された．この射影幾何の係数体を，これまでの論法で定義したとき，それがもとの体 $K$ と同型であることを，確認しなければならない．

**命題 59**　命題 31 で射影幾何であることが示された $\{P,\ L\}$ の射影幾何としての係数体は体 $K$ と同型である． ■

**証明**　$P$ の部分空間 $P^2$ 上におかれた直線の，四角性六点にもとづく和と積によって定義された直線体が，体 $K$ と同型になることを示す．注意 32 によって，$P^2$ は $V^3$ を右からの定数倍を同値とする同値関係での商集合と見なすことができる．枠のとり方によらず直線体がすべて同型であることはすでに示されている．

そこで $P^2$ の同時座標系を $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ として，4 点

$$p_0 = (1,\ 0,\ 0),\ p_1 = (0,\ 1,\ 0),\ p_2 = (0,\ 0,\ 1),\ u = (1,\ 1,\ 1)$$

による $P^2$ の座標枠を $\mathscr{F}^2$ とする．直線 $l = p_0 \vee p_1$ 上の枠 $\mathscr{F}^1 = [p_0,\ p_\infty,\ u_1]$ を

$$p_\infty = p_1,\ u_1 = (1,\ 1,\ 0)$$

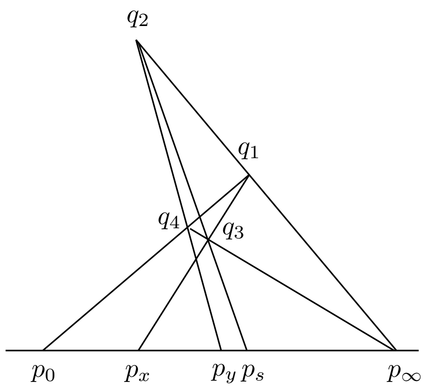
で定め，これによる直線体を $K(p_0,\ p_\infty,\ u_1)$ とする．$K(p_0,\ p_\infty,\ u_1)$ と $K$ の同型を示す．$K$ と $l$ の一対一写像を

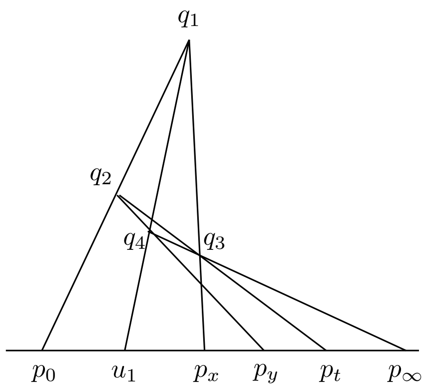
$$\varphi\ :\ K \to l\ ;\ x \mapsto (1,\ x,\ 0)$$

で定める．これは明らかに一対一である．この対応が演算を保存する，つまり $(1,\ x,\ 0)$ と $(1,\ y,\ 0)$ の定義 18 にもとづく和と積の対応点が

$\varphi(x+y) = (1,\ x+y,\ 0)$ と $\varphi(xy) = (1,\ xy,\ 0)$ になっていることが確認されれば，$\varphi$ が体 $K$ と体 $K(p_0,\ p_\infty,\ u_1)$ の同型を導くものであることが示される．

和と積の定義 18 の図をもとにこれを確認する．ただし，体 $K$ の和積と直線体の演算の区別を明確にするため点 $\varphi(x) = (1,\ x,\ 0)$ などを $p_x$ のようにおく．




**和**

$$q_4 = p_2 = (0,\ 0,\ 1),\ q_3 = (0,\ 1,\ 1)$$

にとる．

$$\begin{aligned} (1,\ 0,\ -x) &= (1,\ 0,\ 0) + (0,\ 0,\ 1)(-x) \\ &= (0,\ 1,\ 1)(-x) + (1,\ x,\ 0) \end{aligned}$$

より $(1,\ 0,\ -x) = (p_0 \vee q_4) \cap (p_x \vee q_3)$．これを $q_1$ とする．さらに

$$\begin{aligned} (1,\ y,\ -x) &= (0,\ 0,\ 1)(-x) + (1,\ y,\ 0) \\ &= (0,\ 1,\ 0)y + (1,\ 0,\ -x) \end{aligned}$$

より $(1,\ y,\ -x) = (q_4 \vee p_y) \cap (p_\infty \vee q_1)$．これを $q_2$ とする．ここで

$$q_2\lambda + q_3\mu = (1,\ y,\ -x)\lambda + (0,\ 1,\ 1)\mu$$

が $l$ 上にあるのは $\lambda = 1,\ \mu = x$ のときで

$$(1,\ y,\ -x) + (0,\ 1,\ 1)x = (1,\ x+y,\ 0)$$

なので，これが $p_s$ であり，確かに点 $p_x$ と点 $p_y$ の直線体の演算における和が $p_{x+y}$ に一致することが示された．

**積**　積についても次の順に点を決めてゆく．

$$\begin{aligned} q_1 &= (1,\ 0,\ -1) \\ q_4 &= (0,\ -1,\ -1) = q_1 + u_1(-1) = (1,\ 0,\ -1) + (1,\ 1,\ 0)(-1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q_2 &= (1,\ 0,\ -y) = q_1 y + p_0(-y+1) = (1,\ 0,\ -1)y + (1,\ 0,\ 0)(-y+1) \\
q_3 &= (0,\ x,\ 1) = q_1(-1) + p_x
\end{aligned}
$$

$$q_2\lambda + q_3\mu = (1,\ 0,\ -y)\lambda + (0,\ x,\ 1)\mu$$

が $l$ 上にあるのは $\lambda = 1,\ \mu = y$ のときで

$$(1,\ 0,\ -y) + (0,\ x,\ 1)y = (1,\ xy,\ 0)$$

なので，これが $p_t$ であり，確かに点 $p_x$ と点 $p_y$ の直線体の演算における積が $p_{xy}$ に一致することが示された．

演算を保存する体の一対一対応は体の同型に他ならない．これで体 $K$ と直線体 $K(p_0,\ p_\infty,\ u_1)$ が同型となり，直線体 $K(p_0,\ p_\infty,\ u_1)$ と同型な抽象体として定まる係数体と体 $K$ は同型である．

□

以上の議論によって次のことが示された．

**定理 7**　3 次元以上の射影幾何は，その次元と係数体を定めれば同型を除いて一意に確定する．■

**証明**　射影幾何の公理 1 を満たす 3 次元以上の射影幾何 $\{P,\ L\}$ はその枠 $\mathscr{F}$ を定めることによって係数体 $K$ が定まり，それによって命題 31 およびその同次座標による表示である命題 32 において定義された射影空間に一致する．命題 54 によって，命題 31 のモデル以外のモデルは存在せず，命題 59 によって，このモデルの係数体は $K$ 自身である．□

### 射影変換の定義

#### 共線写像

**定義 20**　$\varphi$ を二つの射影空間 $P^n,\ \overline{P}^n$ の間の一対一対応とする．$\varphi$ が条件：

> $P^n$ の 3 点 $p_1,\ p_2,\ p_3$ が共線であるとき，そしてそのときにかぎり，それらの像 $\varphi(p_1),\ \varphi(p_2),\ \varphi(p_3)$ も共線である．

を満たすとき，$\varphi$ を**共線写像**という．$\overline{P}^n = P^{n*}$ (双対空間) であるときこれを**相反変換**，$\overline{P}^n = P^n$ であるときこれを**共線変換**という．■

射影空間は射影幾何の公理を満たす点の集合 $P$ と直線の集合 $L$ の組 $\{P,\ L\}$ であった．共線写像 $\varphi$ は，二つの射影空間 $\{P,\ L\}$ と $\{P',\ L'\}$ において，$P$ と $P'$ の間の一対一対応であり，$L$ の直線を $L'$ の直線にうつす．つまり $l \in L$ に対して

$$\varphi(l) = \{\varphi(p) \mid p \in l\} \in L'$$

となる．この意味で，共線写像は，射影空間 $\{P,\ L\}$ と $\{P',\ L'\}$ の同型写像である．$\varphi$ の逆写像 $\varphi^{-1}$ が $\{P',\ L'\}$ と $\{P,\ L\}$ の共線写像となっていることも明らかである．

共線写像は，独立な点集合を独立な点集合にうつし，枠を枠にうつす．また四角性六点を四角性六点にうつす．よって直線体 $K(a,\ b,\ u)$ と $K(\varphi(a),\ \varphi(b),\ \varphi(u))$ の同型を定める．

射影空間 $P^n$ の共線変換の集合は $P^n$ の変換群をつくる．これを $\mathscr{C}(P^n)$ で表す．

**命題 60**　$P^n$ の枠を動かさない $\mathscr{C}(P^n)$ の部分群 $\mathscr{C}^0(P^n)$ は係数体 $K$ の同型群 $A(K)$ と同型である．座標系 $\{\mathscr{F},\ \theta\}$ に関する同次座標で $\mathscr{C}^0(P^n)$ の変換は

$$x_i' = \omega(x_i) \quad (i = 0,\ 2,\ \cdots,\ n),\ \omega \in A(K)$$

で与えられる．■

**証明**　$\tau \in \mathscr{C}^0(P^n)$ は $\mathscr{F}$ の各辺上の枠 $\{a_i,\ a_j,\ u_{ij}\}$ も動かさない．よって $\tau$ が定める直線体の写像は同型である．頂点 $a_0$ の補面 $a_0{}^*$ に含まれない任意の点 $p$ の非同次座標を $(\xi_i)$ とすれば，$\tau(p)$ の非同次座標は係数体 $K$ の同型 $\omega_i \in A(K)$ によって $(\omega_i(\xi_i))$ と表される．$\tau$ は枠を動かさないので，各 $a_0 \vee a_i$ の係数体で同じ値に対応する点は，$\tau$ によって移る点においても係数体の値が同じである．つまり任意の $\lambda \in K$ に対し $\omega_i(\lambda) = \omega_j(\lambda)$ となり，$\omega_i = \omega_j$ が各 $i,\ j$ について成り立つ．これを $\omega$ とする．点 $p$ の同次座標を $(x_i)$ とすれば，$\tau$ の同次座標は $(\omega(x_i))$ となる．逆に $K$ の自己同型が枠を動かさない共線変換であることは明らか．□

**射影変換**

**定義 21**　射影空間 $P^n$ をより大きい次元の射影空間に埋め込む．これによって $P^n$ から $P^n$ への射影写像 $\varphi$ が定義される．これを $P^n$ の**射影変換**という．射影変換の集合も群をつくる．これを $\mathscr{G}(P^n)$ と表す．■

すでに $P^n$ の部分空間 $P^r$ に対しては配景写像の合成として射影写像が定義されていた．注意 3 にあるように，$P^n$ そのものの射影写像は未定義であった．直線体と射影座標の存在から，より大きい次元の空間に埋め込むことで，これを定義した．

**命題 61**　$P^n$ の枠を動かさない $\mathscr{G}(P^n)$ の部分群 $\mathscr{G}^0(P^n)$ は，直線体 $K$ の内部自己同型群 $I(K)$ と同型である．座標系 $\{\mathscr{F},\ \theta\}$ に関する同次座標で $\mathscr{G}^0(P^n)$ の変換は

$$x_i' = \lambda x_i \quad (i = 0,\ 2,\ \cdots,\ n),\ \lambda \in K$$

で与えられる．■

この証明に補題を一つ必要とする．以下において**同座標対応**は次の意味で用いる．

二つの射影空間 $P^r$ と $Q^r$ があり，それぞれ同次座標が定まっているとする．$P^r$ の点 $p$ が座標 $(x)$ で表されるとき，$Q^r$ の点でその座標が $(x)$ で表されるものを $q$ とする．これによって $P^r$ から $Q^r$ への写像が定まる．これは明らかに一対一対応である．この写像による点対応を同座標対応という．

**補題 14**　$P^n$ に射影座標系が与えられ，2 直線 $l,\ l'$ がそれぞれその上の 2 点 $(y),\ (z)$ および $(y'),\ (z')$ を用いて方程式

$$x_i = y_i\lambda + z_i\mu, \quad x_i = y_i'\lambda' + z_i'\mu' \quad (i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

で定まっているとする．直線の媒介変数 $\lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu'$ を用いて $l$ と $l'$ の同次座標 $(\lambda,\ \mu),\ (\lambda',\ \mu')$ を定める．このときこの同次座標で定まる同座標対応 $l \to l'$ は射影写像である．■

**証明**　座標系 $\{\mathscr{F},\ \theta\}$，$\mathscr{F}=\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ u\}$ をとる．枠の定義から枠の 2 辺の間の同座標対応は $\theta_{ij}^{-1}\circ\theta_{kl}$ となり，これは射影写像である．よって直線 $l: x_i = y_i\lambda + z_i\mu$ に対して適当な辺 $aj \vee a_k$ をとり，同座標対応 $l \to aj \vee a_k$ が射影写像となることを示せばよい．必要なら番号を変え直線 $l$ は辺 $a_0 \vee a_1$ の補面 $(a_0 \vee a_1)^*$ とは交わらないものとする．

同座標対応を $\psi : l \to a_0 \vee a_1$ とする．これは $(\lambda,\ \mu)$ に対応する $l$ 上の点と，枠 $\mathscr{F}$ に関する $a_0 \vee a_1$ の同次座標が $(\lambda,\ \mu)$ である点を対応させる．これに対して，$(a_0 \vee a_1)^*$ を中心とする配景写像を $\pi : l \to a_0 \vee a_1$ とし，これによって $(\lambda,\ \mu)$ に対応する $l$ 上の点が，$(\lambda',\ \mu')$ に対応する $a_0 \vee a_1$ 上の点に対応するとする．$\lambda' = y_0\lambda + z_0\mu,\ \mu' = y_1\lambda + z_1\mu$ なる $a_0 \vee a_1$ 上の一次変換を $\varphi$ とする．命題 49 よりこれは射影写像である．このとき $\psi = \varphi^{-1}\circ\pi$ なので，$\psi$ は射影写像である．　□

**命題 61 の証明**　命題 47 により変換 $\varphi \in \mathscr{G}^0(P^n)$ は $\mathscr{F}$ の各辺の直線体に対しては内部自己同型である．つまり命題 60 の $\omega$ が $I(K)$ にとれる．したがって $(x_i') = (\omega(x_i)) = (\lambda x_i \lambda^{-1})$ となり $(\lambda x_i) = (x_i'\lambda) = (x_i')$ である．

逆に $P^n$ の任意の直線 $x_i = y_i\mu + z_i\nu$ は $\varphi$ により直線 $x_i = \lambda y_i\mu + \lambda z_i\nu$ にうつる．補題 14 より同座標対応 $(\mu,\ \nu) \to (\mu,\ \nu)$ は射影写像である．　□

**変換の同次座標表現**　直線の射影写像が 1 次変換で表されたように，共線変換，射影変換は次のような線形変換表現をもつ．

**命題 62**　$P^n$ の共線変換群 $\mathscr{C}(P^n)$ の変換は準線形変換式

$$x_i' = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ji}\omega(x_j) \quad \alpha_{ji} \in K,\ \omega \in A(K) \tag{3.3}$$

で与えられ，射影変換群 $\mathscr{G}(P^n)$ の変換は

$$x_i' = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ji}x_j \quad \alpha_{ji} \in K \tag{3.4}$$

で与えられる．ただしいずれも変換式は同次座標で表された点の一対一対応であるとする．

■

**証明**　変換 (3.3) が共線変換であることは明らか.

$P^n$ の直線 $x_i = y_i\lambda + z_i\mu$ は変換 (3.4) で直線

$$x_i = y_i'\lambda + z_i'\mu,\ y_i' = \sum_{j=0}^{n}\alpha_{ji}y_j,\ z_i' = \sum_{j=0}^{n}\alpha_{ji}z_j$$

にうつる．補題 14 より同座標対応 $(\mu,\ \nu) \to (\mu,\ \nu)$ は射影写像であるから，変換 (3.4) は射影変換である．さらに変換 (3.4) が一対一対応なので，この形で枠を他の任意の枠にうつすことができる．

射影変換で枠を動かさないもの $\mathscr{G}^0(P^n)$ は $I(K)$ であるから，すべての射影変換は変換 (3.4) と内部自己同型の結合である．命題 61 の後半より，それもまた変換 (3.4) の形に書ける．

次に共線変換 $\varphi_1 \in \mathscr{C}(P^n)$ をとる．$\varphi_1$ は枠 $\mathscr{F}$ を $\mathscr{F}'$ に移すとする．枠 $\mathscr{F}$ を枠 $\mathscr{F}'$ に移す射影変換 $\varphi_2$ をとる．射影変換は共線変換であるから ${\varphi_2}^{-1}\circ\varphi_1$ は枠 $\mathscr{F}$ を動かさない共線変換であり，$\mathscr{C}^0(P^n)$ に属する．よって一般の共線変換は，$\mathscr{C}^0(P^n)$ と射影変換 $\mathscr{G}(P^n)$ の合成になる．それが変換 (3.3) である．　□

**命題 63**　剰余群の間に同型

$$\mathscr{C}(P^n)/\mathscr{G}(P^n) \cong A(K)/I(K)$$

が成り立つ．ただし記号 $\cong$ は群の同型を表す．■

**証明**　前 3 命題とその証明からわかるように，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{C}(P^n) = \mathscr{C}^0(P^n)\mathscr{G}(P^n)\\
&\mathscr{C}^0(P^n) \cap \mathscr{G}(P^n) = \mathscr{G}^0(P^n)\\
&\mathscr{G}^0(P^n) \cong I(K)\\
&\mathscr{C}^0(P^n) \cong A(K)
\end{aligned}$$

が成り立つ．そして明らかに $\mathscr{C}^0(P^n)$ は $\mathscr{C}(P^n)$ の，$\mathscr{G}^0(P^n)$ は $\mathscr{G}(P^n)$ の正規部分群である．よって群の同型定理から

$$\begin{aligned}
& A(K)/I(K) \cong \mathscr{C}^0(P^n)/\mathscr{G}^0(P^n)\\
= \;& \mathscr{C}^0(P^n)/\bigl(\mathscr{C}^0(P^n) \cap \mathscr{G}(P^n)\bigr) \cong \mathscr{C}^0(P^n)\mathscr{G}(P^n)/\mathscr{G}(P^n)\\
= \;& \mathscr{C}(P^n)/\mathscr{G}(P^n)
\end{aligned}$$

である．□

これから射影空間 $P^n$ の共線変換が射影変換であるための必要十分条件は係数体が内部自己同型以外の同型をもたないことであるがわかる．

実数体は命題 29 によって恒等変換以外に自己同型をもたないので，共線変換はすべて射影変換である．複素数体ではそれは成り立たない．

**基本定理**　次の定理は定理 6 を射影変換にいいかえたものである．

**定理 8**　射影幾何 $\{P^n,\ L\}$ に関する三条件：

(1) 係数体 $K$ が可換体である．

(2) $P^n$ の枠を他の任意の枠にうつす射影変換がただ一つ存在する．

(3) $P^n$ の同一平面上にある 2 直線に関してパップスの定理が成り立つ．

は同値である．■

射影空間 $P^n$ についての条件 (2) を**射影幾何の基本定理**といった．直線体が実数体 $\mathbb{R}$ や複素数体 $\mathbb{C}$ においては，射影幾何の基本定理が成り立つ．

歴史的には，係数体を実数体とする射影幾何が研究された．この場においては条件 (2) が成り立つ．したがって研究の中で射影変換の一意の存在が発見され，これが基本定理とされたのである．

しかし公理系から出発した結果，この条件の成り立つ根拠が明らかになり，上記 3 命題の同値性こそが基本定理となったのである．

## 3.3　射影変換と複比

### 3.3.1　射影空間での複比

射影変換は，計量を保存しない．点や直線の結合関係は保存する．しかしでは，射影空間から射影空間への一対一変換のなかで，何を保存すればそれが射影変換であるといえるのか．それが，前半の目的の一つである複比によって述べられる．つまり複比を変えない一対一変換が射影変換なのである．

複比を，長さのような量的概念から独立に定義し，射影幾何の古典的な証明を，新たな基礎のうえに置くこと，これがパスカルの定理のさまざまの証明を反省した結果の要請であり，またそれによって射影変換を特徴づける不変量を確立するのである．

#### 複比の定義

複比を直線の長さから独立に定義する段階に至った．古典的な複比の概念を含む射影空間の複比を定義し運用する．そのために係数体 $K$ は可換であるとし，さらにその標数は 2 でないとする．

$K$ が可換であれば，一つの直線体 $K(a_0,\ b_0,\ c_0)$ に対する同型 $\theta_0 : K(a_0,\ b_0,\ c_0) \to K$ を指定することで，他の任意の直線体 $K(a,\ b,\ c)$ に対して同型 $\theta : K(a,\ b,\ c) \to K$ で ${\theta_0}^{-1} \circ \theta$ が直線の射影写像となるものが一意に定まる．可換でなければ内部自己同型の自由さがある．以下では，すべての直線体にこのような同型 $\theta$ が指定されているもとする．よって，枠 $\mathscr{F}$ を指定することで $n$ 次元射影空間 $P^n$ の任意の面上の同次座標は，一意に定まる．また $P^n$ の射影変換は，座標系では $n+1$ 次可逆行列の定数倍による同値類で表される．

**定義 22**　$P^n$ の直線 $l$ 上の 4 点 $a,\ b,\ c,\ d$ において $a,\ b,\ c$ は相異なりかつ $d \neq a$ とする．枠 $\big[b,\ a,\ c\big]$ に関する $d$ の非同次座標をこの 4 点の**複比**といい，$\big[a,\ b;\ c,\ d\big]$ で表す．■

複比は言いかえれば直線体 $K(b,\ a,\ c)$ から係数体への同型 $\theta$ に対する $d$ の $K$ での値 $\theta(d)$ である．

四角性六点という性質が射影変換 $\varphi$ で不変であることによって，射影変換 $\varphi$ に関して複比は不変である．つまり

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] = \big[\varphi(a),\ \varphi(b);\ \varphi(c),\ \varphi(d)\big]$$

である．

**同次座標表現**　複比を一般の枠に関する同次座標によって具体的に表そう．直線上に同次座標が定まり，4 点 $a,\ b,\ c,\ d$ の同次座標が

$$(a_0,\ a_1),\ (b_0,\ b_1),\ (c_0,\ c_1),\ (d_0,\ d_1)$$

であるとする．$a,\ b,\ c$ が相異なるので $h = a_1c_0 - a_0c_1,\ k = b_1c_0 - b_0c_1$ はそれぞれ 0 でない $K$ の値である．行列 $\begin{pmatrix} ka_1 & -ka_0 \\ hb_1 & -hb_0 \end{pmatrix}$ に対応する射影変換で $(a_0,\ a_1)$，$(b_0,\ b_1)$，$(c_0,\ c_1)$ はそれぞれ $(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$ にうつる．この射影変換で $d$ は

$$((b_1c_0 - b_0c_1)(a_1d_0 - a_0d_1),\ (a_1c_0 - a_0c_1)(b_1d_0 - b_0d_1))$$

にうつる．したがってが $\theta(b)=0,\ \theta(c)=1$ となるように定まっている $\theta: K(b,\ a,\ c)\to K$ をとると，$d$ の非同次座標 $\theta(d)$ は

$$\theta(d)=\frac{(a_1c_0-a_0c_1)(b_1d_0-b_0d_1)}{(b_1c_0-b_0c_1)(a_1d_0-a_0d_1)}=\frac{a_0c_1-a_1c_0}{a_0d_1-a_1d_0}\cdot\frac{b_0d_1-b_1d_0}{b_0c_1-b_1c_0}$$

となる．これを最初に与えられた非同次座標で表そう．$\dfrac{a_1}{a_0}=x_a$，$\dfrac{b_1}{b_0}=x_b$，$\dfrac{c_1}{c_0}=x_c$，$\dfrac{d_1}{d_0}=x_d$ とおくと

$$\frac{a_0c_1-a_1c_0}{a_0d_1-a_1d_0}\cdot\frac{b_0d_1-b_1d_0}{b_0c_1-b_1c_0}=\frac{x_c-x_a}{x_d-x_a}\cdot\frac{x_d-x_b}{x_c-x_b}$$

となり，古典的な複比の定義 2 と一致する．

先に長さを用いて定義した複比において示した諸性質，補題 4，補題 6，補題 7 はそのまま成り立つ．それら再構成し，証明も再度行う．まず補題 6．

**命題 64**　直線上の 5 点 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ について

$$[a,\ b;\ c,\ d]=[a,\ b;\ c,\ e]$$

なら $d=e$ である．■

**証明**　$\theta$ は体の同型であるから．$\theta(d)=\theta(e)$ なら $d=e$ である．□

**射影変換を特徴づける複比**　射影変換は複比を変えないがその逆も成り立つ．すなわち次の命題が成立する．

**命題 65**　直線 $l$ から直線 $g$ への一対一対応が複比を変えなければ，それは射影写像である．■

**証明**　$l$ から $g$ への写像 $f$ が複比を変えないとする．$l$ の枠 $\mathscr{F}=\big[b,\ a,\ c\big]$ をとり，$f(b)=q_0$，$f(a)=q_\infty$，$f(c)=q_1$ とおく．命題 35 によって射影写像 $\varphi$ で $\varphi(b)=q_0$，$\varphi(a)=q_\infty$，$\varphi(c)=q_1$ となるものが存在する．$h=\varphi^{-1}\circ f$ とおく．このとき $h$ は $a,\ b,\ c$ を動かさない．かつ $h$ は複比を変えないので，$l$ の任意の点 $d$ に対して

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big]=\big[a,\ b;\ c,\ h(d)\big]$$

が成り立つ．つまり $\theta(d)=\theta(h(d))$ であるが，$\theta$ は同型なので任意の $d$ に対し $h(d)=d$．つまり $h$ は恒等写像であり，この結果，$f=\varphi$ となって，確かに $f$ は射影写像である．□

射影空間から射影空間への一対一変換のなかで，複比を変えない変換は射影変換であることが確立した．これは射影変換の特徴づけであり，それが複比を射影幾何の公理から再構成することによっておこなわれた．

**命題 66**　直線 $l$ 上の 4 点 $a_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ と $g$ 上の 4 点 $b_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ について，

$$[a_1,\ a_2;\ a_3,\ a_4]=[b_1,\ b_2;\ b_3,\ b_4]$$

が成り立てば，$l$ から $g$ への射影写像 $\varphi$ で $\varphi(a_i)=b_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ となるものが存在する．■

**証明**　命題 35 により，射影写像 $\varphi$ で $\varphi(a_i)=b_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$ となるものが存在する．

$$[a_1,\ a_2;\ a_3,\ a_4]=[\varphi(a_1),\ \varphi(a_2);\ \varphi(a_3),\ \varphi(a_4)]=[b_1,\ b_2;\ b_3,\ b_4]$$

なので，命題 64 より $\varphi(a_4)=b_4$ である．　□

**命題 67**　点 $a$ を共有する 2 直線上の点列 $a,\ b_1,\ b_2,\ b_3$ と $a,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ に対して

$$[a,\ b_1;\ b_2,\ b_3]=[a,\ c_1;\ c_2,\ c_3]$$

が成りたてば，3 直線 $b_1\vee c_1$，$b_2\vee c_2$，$b_3\vee c_3$ は共点である．　■

**証明**　命題 66 により射影写像 $\varphi$ で $\varphi(a)=a$，$\varphi(b_i)=c_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$ となるものが存在する．直線体が可換であるから命題 48 が成立する．よって $\varphi$ は配景写像であり，3 直線 $b_1\vee c_1$，$b_2\vee c_2$，$b_3\vee c_3$ は配景写像の中心で交わる．　□

### 線束の複比

射影平面 $P^2$ で考える．$P^2$ 上に 1 点 $O$ がある．点 $O$ を通る直線の集合を $O$ **を中心とする線束**という．$L(O)$ のように書き表す．

直線体 $K(b,\ a,\ c)$ は直線上の 3 点を基準にして，その直線上の点に対して体の構造を導入するものであった．それを可能にする根拠は命題 43 の四角性六点性の射影変換での不変性であった．

同様に，その双対命題として四辺性六辺性もまた射影変換で不変である．

よって，$P^2$ において線束が与えられると，線束の 3 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3$ を基準に選び四辺性六辺を用いて線束に体の構造を入れることが出来る．これを $K(l_1,\ l_2,\ l_3)$ とする．

**定義 23**　線束をなす 4 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$ がある．3 直線 $l_2,\ l_1,\ l_3$ で定まる直線体を $K(l_2,\ l_1,\ l_3)$ とする．同型 $\theta:K(l_2,\ l_1,\ l_3)\to K$ をとる．4 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$ の複比 $\left[l_1,\ l_2;\ l_3,\ l_4\right]$ を値 $\theta(l_4)$ と定める．　■

**命題 68**　$P^2$ に座標系を導入する．超平面座標によって点 $O$ を通る 4 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$ は双対空間 $P^*$ 上のある直線とその上にある 4 点に対応する．この 4 点で定まる複比を考える．$P^2$ に座標変換を行うと超平面座標も座標変換を受け，座標変換は射影変換であるから，この複比は $P^2$ の座標系のとり方によらない．これを $\left[l_1,\ l_2;\ l_3,\ l_4\right]_*$ とおく．

$$\left[l_1,\ l_2;\ l_3,\ l_4\right]_*=\left[l_1,\ l_2;\ l_3,\ l_4\right]$$

である．　■

**証明**　$P^2$ において四角性六点の双対概念としての四辺性六辺とは，$P^2$ における四角性六点を，点と直線，含む含まれるの関係を逆にして $P^*$ における基本図形としたものを，射影空間の同型によって $P^2$ に戻したものに他ならない．

点と直線，含む含まれるの関係を逆にすることで，6 点が四角性六点であることと，6 辺が四辺性六辺であることが同値になる．

よって $P^2$ の 3 直線によって定まる直線体と対応する $P^*$ の 3 点によって定まる直線体は同型であり，対応する $P^2$ の直線と $P^*$ の点がそれぞれの係数体でとる値は等しい．　□

**命題 69**　$P^2$ の点 $O$ を中心とする線束に属する 4 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$ がある．$O$ を通らない直線 $g$ と 4 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$ の交点を $a,\ b,\ c,\ d$ とすれば，

$$\big[l_1,\ l_2;\ l_3,\ l_4\big] = \big[a,\ b;\ c,\ d\big]$$

である．■

**証明**　命題 42 によって，四辺性六辺の直線による切断の交点は四角性六点である．これはいいかえると 3 直線 $l_2,\ l_1,\ l_3$ をもとに定義された線束の直線間の和と積による体 $K(l_2,\ l_1,\ l_3)$ と，3 点 $b,\ a,\ c$ で定義された直線 $g$ 上の点の間の和と積による体 $K(b,\ a,\ c)$ は，線束の直線と直線 $g$ による交点との対応で同型となるということである．したがって $K(l_2,\ l_1,\ l_3)$ における $l_4$ の値と，$K(b,\ a,\ c)$ における $d$ の値は等しい．つまり $\big[l_1,\ l_2;\ l_3,\ l_4\big] = \big[a,\ b;\ c,\ d\big]$ である．□

**直接計算による証明**　$P^2$ の座標系を定め 2 直線 $l_1,\ l_2$ の超平面座標を $(u_0),\ (u_1)$ とする．$l_3,\ l_4$ がそれぞれ媒介変数を用いて

$$s(u_0) + t(u_1),\ s'(u_0) + t'(u_1)$$

と表されるとする．点 $O$ に対応する $P^*$ の直線上の同次座標で，4 直線に対応する 4 点の同次座標が

$$(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (s,\ t),\ (s',\ t')$$

であるような座標変換，つまり射影写像が存在する．よってその複比は

$$\big[l_1,\ l_2;\ l_3,\ l_4\big] = \frac{-\,t}{s} \cdot \frac{s'}{-t'} = \frac{s't}{st'}$$

である．

次に $l_1,\ l_2$ と $g$ の交点の座標を $(a),\ (b)$ とする．${}^t(u_0)(a) = {}^t(u_1)(b) = 0$ で，${}^t(u_1)(a) \neq 0,\ {}^t(u_0)(b) \neq 0$ である．また $g$ の超平面座標も $(g)$ で表す．ここで点 $(c)$ を

$$(c) = s\{{}^t(u_0)(b)\}(a) - t\{{}^t(u_1)(a)\}(b)$$

で定める．$(c)$ は $g$ 上の点である．一方，

$$\begin{aligned} {}^t\{s(u_0)+t(u_1)\}(c) &= {}^t\{s(u_0)+t(u_1)\}[s\{{}^t(u_0)(b)\}(a) - t\{{}^t(u_1)(a)\}(b)] \\ &= s^{2t}(u_0)(b)^t(u_0)(a) - st^t(u_0)(b)^t(u_1)(a) \\ &\qquad + st^t(u_0)(b)^t(u_1)(a) - t^{2t}(u_1)(a)^t(u_1)(b) = 0 \end{aligned}$$

よってこれが $l_3$ と $g$ の交点である．$l_4$ と $g$ の交点も同様である．よって直線 $g$ 上の同次座標で $a,\ b,\ c,\ d$ の同次座標が

$$(1,\ 0),\ (0\ 1),\ (s^t(u_0)(b),\ -t^t(u_1)(a)),\ (s'^t(u_0)(b),\ -t'^t(u_1)(a))$$

となるものがとれる．よってその複比は

$$\big[a,\ b;\ c,\ d\big] = \frac{-\,t^t(u_1)(a)}{s^t(u_0)(b)} \cdot \frac{s'^t(u_0)(b)}{-t'^t(u_1)(a)} = \frac{s't}{st'}$$

となり，命題 69 が証明された．□

**注意 13**　これから補題 4 が従うことに注意しよう．つまり，値 $\big[a,\ b;\ c,\ d\big]$ は直線 $g$ のとり方によらない．

**複比の変化**　4 点の並べ替えは $4! = 24$ 通りあるが，すでに古典的定義でもみたように，複比の値は次のように 4 個ずつ等しい．4 点がすべて相異なる場合についてみてみると，値が次のように 6 通りに変化する．

$$\lambda = \big[a,\ b;\ c,\ d\big] = \frac{a_0c_1 - a_1c_0}{a_0d_1 - a_1d_0} \cdot \frac{b_0d_1 - b_1d_0}{b_0c_1 - b_1c_0}$$

とおく．この式から

$$\begin{aligned}
\lambda &= \big[a,\ b;\ c,\ d\big] = \big[b,\ a;\ d,\ c\big] = \big[d,\ c;\ b,\ a\big] = \big[c,\ d;\ a,\ b\big] \\
\frac{1}{\lambda} &= \big[a,\ b;\ d,\ c\big] = \big[b,\ a;\ c,\ d\big] = \big[c,\ d;\ b,\ a\big] = \big[d,\ c;\ a,\ b\big]
\end{aligned}$$

さらに，

$$\begin{aligned}
\big[a,\ c;\ b,\ d\big] + \big[a,\ b;\ c,\ d\big] &= \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_0d_1 - a_1d_0} \cdot \frac{c_0d_1 - c_1d_0}{c_0b_1 - c_1b_0} + \frac{a_0c_1 - a_1c_0}{a_0d_1 - a_1d_0} \cdot \frac{b_0d_1 - b_1d_0}{b_0c_1 - b_1c_0} \\
&= \frac{-(a_0b_1 - a_1b_0)(c_0d_1 - c_1d_0) + (a_0c_1 - a_1c_0)(b_0d_1 - b_1d_0)}{(a_0d_1 - a_1d_0)(b_0c_1 - b_1c_0)} \\
&= \frac{a_0d_1(b_0c_1 - b_1c_0) - a_1d_0(b_0c_1 - b_1c_0)}{(a_0d_1 - a_1d_0)(b_0c_1 - b_1c_0)} = 1
\end{aligned}$$

より

$$1 - \lambda = \big[a,\ c;\ b,\ d\big] = \big[c,\ a;\ d,\ b\big] = \big[d,\ b;\ c,\ a\big] = \big[b,\ d;\ a,\ c\big]$$

である．これらを組みあわせることで

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\lambda} &= \big[a,\ c;\ d,\ b\big] = \big[c,\ a;\ b,\ d\big] = \big[b,\ d;\ c,\ a\big] = \big[d,\ b;\ a,\ c\big] \\
1 - \frac{1}{\lambda} &= \big[a,\ d;\ b,\ c\big] = \big[d,\ a;\ c,\ b\big] = \big[c,\ b;\ d,\ a\big] = \big[b,\ c;\ a,\ d\big] \\
\frac{\lambda}{1-\lambda} &= \big[a,\ d;\ c,\ b\big] = \big[d,\ a;\ b,\ c\big] = \big[b,\ c;\ d,\ a\big] = \big[c,\ b;\ a,\ d\big]
\end{aligned}$$

を得る．これら 6 個の値は一般的には異なるが，$\lambda = -1,\ \dfrac{1}{2},\ 2$ のとき，および $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ のとき，同じものが現れる．

$\lambda = -1$ のときは $\dfrac{1}{1-\lambda}$ が $\dfrac{1}{2}$ となる．$\lambda = -1$ のとき 4 点 $a,\ b,\ c,\ d$ は**調和点列**をなすという．$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ を満たすとき，4 点は**等非調和列点**という．

また，$\big[a,\ b;\ c,\ d\big]$ において，$d = c$ のとき $\big[a,\ b;\ c,\ d\big] = 1$，$a = c$ または $a = b$ なら $\big[a,\ b;\ c,\ d\big] = 0$，$d = a$ なら $\big[a,\ b;\ c,\ d\big] = \infty$ とし，$\infty$ に関する形式的演算を

$$\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{\infty} = 1,\ 1 \pm \infty = \pm\infty$$

と定めれば，$\big[a,\ b;\ c,\ d\big]$ は少なくとも 3 個が異なる場合にすべて定義される．複比が 0，1，$\infty$ のいずれかになるのは，4 点のいずれか 2 点が等しい場合にかぎることもただちにわかる．

**複比の意味**　ということは，本来複比は次のように定義すべきである．

射影直線 $l$ 上の少なくとも 3 個は異なる 4 点の組の集合 $S$ をとる．

$$S = \{(a,\ b,\ c,\ d) \mid a,\ b,\ c,\ d \in l,\ \text{少なくとも 3 個は異なる}\ \}$$

複比 $\lambda$ とは，同次座標によって次式で定まる $S$ から射影直線 $P^1$ への写像である．

$$\begin{array}{rcl} \lambda : S & \to & P^1 \ ; \\ (a,\ b,\ c,\ d) & \mapsto & ((a_0d_1 - a_1d_0)(b_0c_1 - b_1c_0),\ (a_0c_1 - a_1c_0)(b_0d_1 - b_1d_0)) \end{array}$$

$l$ の射影変換で互いに移りかわる点の組，および上記入れかえによる 4 個ずつの組はこの写像で同一の同次座標となる．

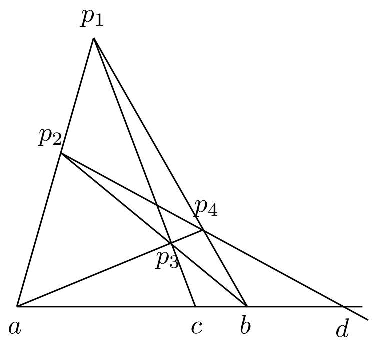
古典的な射影幾何は，点の組や直線の組が，配景写像や射影写像によって対応するかどうかという観点でとらえてきた．基本図形が配景的関係にあるか，射影的関係にあるか，ということである．

しかしそれは複比の相等で記述することができる．以下において古典的な射影幾何の方法による証明は，複比の相等による論述で行う．

### 3.3.2 調和列点と対合

**複比と調和列点**

**命題 70** 完全四角形 $p_i$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ の対辺 $p_1 \vee p_2$ と $p_3 \vee p_4$ の交点を $a$，$p_2 \vee p_3$ と $p_4 \vee p_1$ の交点を $b$ とし，直線 $a \vee b$ と対角線 $p_1 \vee p_3$ の交点を $c$，直線 $a \vee b$ と対角線 $p_2 \vee p_4$ の交点を $d$ とする．4 点 $a,\ b,\ c,\ d$ は**調和点列**をなす． ■




**証明** この関係は $a,\ c,\ b,\ a,\ d,\ b$ が四角性六点であることを意味し，直線体 $K(b,\ a,\ c)$ の点における和の定義 18 から $c + d = b$ を意味する．同型 $\theta : K(b,\ a,\ c) \to K$ で $\theta(c) = 1$，$\theta(b) = 0$ なので，$\theta(d) = -1$．つまり $[a,\ b;\ c,\ d] = -1$ である． □

**系 70.1** さらに，$e = (p_2 \vee p_4) \cap (p_1 \vee p_3)$，$f = (p_1 \vee p_2) \cap (d \vee p_3)$ とする．$[p_1,\ p_3;\ e,\ c] = [p_1,\ f;\ p_2,\ a] = -1$ である． ■

**証明**

$$\begin{array}{rcl} [p_1\ p_3;\ e,\ c] & = & [p_2 \vee p_1,\ p_2 \vee p_3;\ p_2 \vee e,\ p_2 \vee c] \\ & = & [p_2 \vee a,\ p_2 \vee b;\ p_2 \vee c,\ p_2 \vee d] = [a,\ b;\ c,\ d] = -1 \end{array}$$

よって $[p_1,\ p_3;\ e,\ c] = -1$．また

$$[p_1,\ f;\ p_2,\ a] = [d \vee p_1,\ d \vee f;\ d \vee p_2,\ d \vee a] = [p_1,\ p_3;\ e,\ c] = -1$$

□

この系は，完全四角形のとり方を変えることで命題 70 の読み直しでも示される．

**対合**

古典的な射影幾何で論証の主要な方法の一つが「対合」であった．

**定義 24**　射影直線 $l$ の恒等写像ではない射影変換 $\varphi$ で，$\varphi\circ\varphi$ が恒等写像となるものを**対合**という．

$l$ 上の点 $p,\ q$ に対し，対合 $\varphi$ で

$$q=\varphi(p)$$

となるものが存在するとき，2 点 $p,\ q$ は**対合をなす**という．■

対合は行列でどのような形になるものなのか．直線 $l$ 上に同次座標 $(x_0,\ x_1)$ を設定する．$\varphi$ を対合とする．可換体であるから，$\varphi$ は線型写像

$$\varphi\ :\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

で表されるとしてよい．ただしこの行列は，0 行列でない二次行列 $A$ の集合を，同値関係

$$A\sim B \quad\Longleftrightarrow\quad \exists k(\in K,\ \neq 0)\ ;\ B=kA$$

による商集合の同値類の代表である．このとき，$\varphi\circ\varphi$ 対応する行列の類は

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta\gamma & \beta(\alpha+\delta) \\ \gamma(\alpha+\delta) & \beta\gamma+\delta^2 \end{pmatrix}$$

よってこの変換が恒等変換と同一の類に属する条件は

$$\alpha^2+\beta\gamma=\beta\gamma+\delta^2,\ \beta(\alpha+\delta)=\gamma(\alpha+\delta)=0$$

である．これから $\delta=-\alpha$ となる．つまり対合である条件は，それを表す行列の類が $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ という形をしていて，その行列式について $\alpha^2+\beta\gamma\neq 0$ であることである．

以下断らなくても直線 $l$ 上の射影変換で考えるものとし，さらに同次座標が設定されているものとする．

**命題 71**　$l$ 上の 2 点 $p(p_0,\ p_1)$ と $q(q_0,\ q_1)$ が $\varphi=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ で対合をなすことは，関係式

$$\beta p_1q_1+\alpha(p_0q_1+p_1q_0)-\gamma p_0q_0=0$$

が成り立つことと同値である．■

**証明**　$l$ 上の 2 点 $p(p_0,\ p_1)$ と $q(q_0,\ q_1)$ が $\varphi$ で対合をなすことをいいかえると，点 $\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ が同一の点となることである．よって

$$q_0(\gamma p_0-\alpha p_1)-q_1(\alpha p_0+\beta p_1)=0$$

が条件である．これから命題の等式が成り立つ．逆に命題の等式が成り立てば 2 点 $p(p_0,\ p_1)$ と $q(q_0,\ q_1)$ が $\varphi$ で対合をなすことは，逆にたどることでわかる．□

**命題 72**　直線 $l$ の射影変換 $\varphi$ で

$$\varphi(a) \neq a,\ \varphi^2(a) = a$$

となる点 $a$ が存在すれば，$\varphi$ は対合である．つまり任意の点 $x$ について $\varphi^2(x) = x$ が成り立つ．■

**証明 1**　$x$ に対して $\varphi(x) = x'$, $\varphi(x') = x''$ とおく．また $\varphi(a) = a'$ とする．このとき

$$[a,\ a';\ x,\ x'] = [a',\ a;\ x',\ x''] = [a,\ a';\ x'',\ x']$$

命題 64 より $x'' = x$ である．□

**証明 2**　$\varphi$ に対応する行列を $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ とおく．点 $a$ の非同次座標も $a$ で表す．条件から

$$\frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta} \neq a,\ \frac{(\alpha^2 + \beta\gamma)a + \beta(\alpha + \delta)}{\gamma(\alpha + \delta)a + \delta^2 + \beta\gamma} = a$$

第 2 式から

$$(\alpha + \delta)\{\gamma a^2 + (\delta - \alpha)a - \beta\} = 0$$

第 1 式から $\gamma a^2 + (\delta - \alpha)a - \beta \neq 0$ なので，$\alpha + \delta = 0$．つまり $\varphi$ は対合である．□

**系 72.1**　異なる点の 3 組の点対 $(a,\ a')$, $(b,\ b')$, $(p,\ q)$ が対合をなす，つまり $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, $q = \varphi(p)$ となる対合 $\varphi$ が存在する条件は

$$[a,\ b,\ p,\ q] = [a',\ b',\ q,\ p]$$

となることである．■

**証明**　命題 72 の $a$ として，$p$ をとれば $q = \varphi(p)$，$p = \varphi(q)$ より $\varphi$ は対合である．□

対合 $\varphi$ の不動点，つまり $\varphi(p) = p$ となる点を自己対合点という．一つの対合について自己対合点は，高々二個である．なぜならそれは 2 次同次方程式

$$\beta p_1 q_1 + \alpha(p_0 q_1 + p_1 q_0) - \gamma p_0 q_0 = 0$$

の $(0,\ 0)$ でない根でなければならないからである．

**注意 14**　ここで同次方程式とは，未知数 $x$, $y$, $\cdots$ に関するいくつかの等式を連立したもので，各等式は同次の等式であるもののことである．これによって，解がある場合は未知数間の比が定まる．

同様にして次のことも成り立つ．

**系 72.2**　対合は，

(1) 対合をなすべき 2 組の点対 $(a,\ a')$, $(b,\ b')$,

(2) 対合をなすべき 1 組の点対 $(a,\ a')$ と一つの不動点,

(3) 二つの不動点,

のいずれかを指定すれば一意に定まる． ■

調和点列と対合に関する基本事項は次の命題である．

**命題 73**　直線 $l$ 上の点の対合に関して次のことが成り立つ．
(1)　自己対合点が 2 個あるとき，これらはその対合で対合をなす異なる 2 点を調和に分ける．
(2)　2 定点を調和に分ける点対は，2 定点をその対合の自己対合点となす対合に関して，対合をなす．
(3)　点対 $(p,\ q)$ が 2 組の点対 $(a,\ b)$，$(a',\ b')$ を同時に調和に分ければ，点対 $(a,\ a')$，$(b,\ b')$，$(p,\ q)$ は対合をなす． ■

**証明**
(1)　2 点 $a$ と $b$ が対合をなすとし，$p,\ q$ が自己対合点とする．言いかえるとある射影変換 $\varphi$ で

$$\varphi(a)=b,\ \varphi(b)=a,\ \varphi(p)=p,\ \varphi(q)=q$$

となるものがある．複比は射影変換で不変であるから

$$\bigl[a,\ b;\ p,\ q\bigr]=\bigl[\varphi(a),\ \varphi(b);\ \varphi(p),\ \varphi(q)\bigr]=\bigl[b,\ a;\ p,\ q\bigr]=\bigl[a,\ b;\ p,\ q\bigr]^{-1}$$

同一の点はないので $\bigl[a,\ b;\ p,\ q\bigr]\ne 1$．よって $\bigl[a,\ b;\ p,\ q\bigr]=-1$．

**直接計算**　対合の行列を $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}$ とする．2 点 $a$ と $b$ が対合をなすとし，

$$a(\xi_0,\ \xi_1),\ b(\alpha\xi_0+\beta\xi_1,\ \gamma\xi_0-\alpha\xi_1)$$

とおく．また $p(p_0,\ p_1)$，$q(q_0,\ q_1)$ が自己対合点とする．これらは 2 次同次方程式

$$\beta {x_1}^2+2\alpha x_0x_1-\gamma {x_0}^2=0$$

の根である．根と係数の関係から

$$\beta(p_0q_1+p_1q_0)=-2\alpha p_0q_0,\ \beta p_1q_1=-\gamma p_0q_0$$

である．4 点の複比は

$$\bigl[a,\ b;\ p,\ q\bigr]=\frac{(\xi_0p_1-\xi_1p_0)\{q_1(\alpha\xi_0+\beta\xi_1)-q_0(\gamma\xi_0-\alpha\xi_1)\}}{(\xi_0q_1-\xi_1q_0)\{p_1(\alpha\xi_0+\beta\xi_1)-p_0(\gamma\xi_0-\alpha\xi_1)\}}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}\text{分子}\ &=\ (\alpha p_1q_1-\gamma p_1q_0)\xi_0^2-(\beta p_0q_1+\alpha p_0q_0)\xi_1^2\\ &\qquad +(-\alpha p_0q_1+\gamma p_0q_0+\beta p_1q_1+\alpha p_1q_0)\xi_0\xi_1\end{aligned}$$

各係数を根と係数の関係で整理すると

$$\alpha p_1q_1-\gamma p_1q_0=\frac{1}{2}\{\gamma(p_0q_1+p_1q_0)\}-\gamma p_1q_0=\frac{\gamma}{2}(p_0q_1-p_1q_0)$$

$$-(\beta p_0q_1+\alpha p_0q_0)=(\text{同様にして})=\frac{-\beta}{2}(p_0q_1-p_1q_0)$$

$$-\alpha p_1q_0+\gamma p_0q_0+\beta p_1q_1+\alpha p_0q_1=-\alpha p_0q_1+\alpha p_1q_0=-\alpha(p_0q_1-p_1q_0)$$

となる．分母は $p$ と $q$ を入れ替えたものであり，このとき $p_0q_1-p_1q_0$ は符号だけが逆になる．よって $\big[a,\ b;\ p,\ q\big]=-1$ であり，自己対合点 $p,\ q$ は対合をなす 2 点 $a,\ b$ を調和に分ける．

(2)　2 定点 $a(\xi_0,\ \xi_1)$，$b(\eta_0,\ \eta_1)$ を 2 点 $p(p_0,\ p_1)$，$q(q_0,\ q_1)$ が調和に分けるとする．

$$\big[a,\ b;\ p,\ q\big]=\frac{(\xi_0p_1-\xi_1p_0)(\eta_0q_1-\eta_1q_0)}{(\xi_0q_1-\xi_1q_0)(\eta_0p_1-\eta_1p_0)}=-1$$

分母を払うと

$$(\xi_0p_1-\xi_1p_0)(\eta_0q_1-\eta_1q_0)+(\xi_0q_1-\xi_1q_0)(\eta_0p_1-\eta_1p_0)=0$$

これを整理すると

$$2\xi_0\eta_0p_1q_1-(\xi_1\eta_0+\xi_0\eta_1)(p_0q_1+p_1q_0)+2\xi_1\eta_1p_0q_0=0$$

の形になる．よって命題 72 より

$$\alpha=-(\xi_1\eta_0+\xi_0\eta_1),\ \beta=2\xi_0\eta_0,\ \gamma=2\xi_1\eta_1$$

として行列 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}$ で定まる対合によって，2 点 $p,\ q$ は対合をなす．また $p,\ q$ の両方に $a$ を代入しても，$b$ を代入しても方程式は満たされる．つまり $a$ と $b$ はこの対合に関する自己対合点である．

(3)

$$[a,\ b;\ p,\ q]=[a',\ b';\ p,\ q]=-1$$

である．また $[a',\ b';\ q,\ p]=[a',\ b';\ p,\ q]^{-1}=-1$ なので，

$$[a,\ b;\ p,\ q]=[a',\ b';\ q,\ p]$$

系 72.1 より，点対 $(a,\ a')$，$(b,\ b')$，$(p,\ q)$ は対合をなす．　□

　対合に関する古典的命題は数多くある．ここではもっとも基本的なもののみ取りあげた．これらの命題には古典的な射影幾何的証明と座標系による証明と，2 系統の証明がある．射影幾何の公理系から出発して座標系に至った立場では，これは同等なのであるが，両方を試みるとたいへんおもしろく，今後とも必要に応じて両方法の対比を考えることにする．

# 第 4 章　二次曲面

## 4.1　二次曲面の定義

### 4.1.1　線型代数の準備

われわれは射影幾何の公理からはじめて，直線体と係数体を定義し，それによる座標の導入と射影写像の座標表現まですすんだ．また古典的な複比を射影幾何の公理系のもとで再定義した．これらをもとに二次曲面を定義する．これは基本的に線型代数の範疇である．その後，古典的で幾何的な二次曲面の定義をおこなう．2 次元射影空間（射影平面ともいう）の場合にそれらの定義の同等性を確認し，その下で射影平面上の二次曲面としての円錐曲線の古典的な諸性質を証明する．

前章最終節の複比を考える段階で直線体 $K$ は可換であるとした．以下においても係数体 $K$ は可換体であるとする．

#### 双対空間の構成

射影幾何 $\{P,\ L\}$ の双対射影幾何を $\{P^*,\ L^*\}$ とする．$K$ が可換であるので，命題 56 によってその双対空間 $P^*$ の係数体は $K$ と同型である．$P^*$ のモデルを $P$ の同次座標から構成しよう．

**双対ベクトル空間**　$K^{n+1}$ から $K$ への線型写像 $\varphi$ をとる．線型写像とは次の条件を満たす写像である．

$$\varphi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha\varphi(\mathbf{x})+\beta\varphi(\mathbf{y}),\qquad \mathbf{x},\ \mathbf{y}\in K^{n+1},\ \alpha,\ \beta\in K$$

二つの $K$ への線型写像 $\varphi,\ \psi$ に対してその一次結合 $\lambda\varphi+\mu\psi$ $(\lambda,\ \mu\in K)$ を

$$(\lambda\varphi+\mu\psi)(\mathbf{x})=\lambda\varphi(\mathbf{x})+\mu\varphi(\mathbf{y})$$

によって定める．$\lambda\varphi+\mu\psi$ がまた $K^{n+1}$ から $K$ への線形写像であることはただちに確認できる．これによって $K^{n+1}$ から $K$ への線型写像の集合はそれ自身 $K$ 上のベクトル空間となる．$K^{n+1}$ から $K$ への線型写像の集合を $\mathrm{Hom}(K^{n+1},\ K)$ と表す．Hom は一般に準同型写像 (homomorphism) を意味する．ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(K^{n+1},\ K)$ を $K^{n+1}$ の双対ベクトル空間という．

**双対ベクトル空間の標準基底**　$K^{n+1}$ の基底 $\mathbf{e}_i$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ に対し $\mathrm{Hom}(K^{n+1},\ K)$ の要素 $\chi_j$ を，線型写像でありかつ

$$\chi_j(\mathbf{e}_i)=\delta_{ji}$$

となるものとして定める．これら $n+1$ 個の $\chi_j$ はベクトル空間 $\mathrm{Hom}(K^{n+1},\ K)$ の基底となり，この結果 $\mathrm{Hom}(K^{n+1},\ K)$ のベクトル空間としての次元が $n+1$ であることもわかる．この基底を**標**

**準基底**という．$K^{n+1}$ の要素 $\mathbf{e}=\sum_{i=0}^{n}\xi_i\mathbf{e}_i$ と $\mathrm{Hom}(K^{n+1},\ K)$ の要素 $\varphi=\sum_{i=0}^{n}a_i\chi_i$ に対して

$$\varphi(\mathbf{e})=\sum_{i=0}^{n}a_i\xi_i$$

となる．

### 双対空間から導かれる射影幾何

ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(K^{n+1},\ K)$ から 0 ベクトルを除き，その集合の定数倍という同値関係での商集合 $\mathrm{Hom}^*(K^{n+1},\ K)$ ／$\sim$ はやはり射影空間である．

### 双対ベクトル空間から構成された射影幾何と双対空間の同型

**命題 74**　射影空間 $\mathrm{Hom}^*(K^{n+1},\ K)$ ／$\sim$ と $P^n$ の双対射影空間 $P^*$ は射影幾何として同型である．■

**証明**　0 でない $\varphi\in\mathrm{Hom}(K^{n+1},\ K)$ に対して

$$Q=\{\mathbf{x}|\varphi(\mathbf{x})=0,\ \mathbf{x}\in K^{n+1}\}$$

と定めると $Q$ はそれ自身ベクトル空間 $K^{n+1}$ の部分ベクトル空間である．$\varphi(\mathbf{x})=0$ であれば $\lambda\neq 0$ に対して

$$\lambda\varphi(\mathbf{x})=\varphi(\lambda\mathbf{x})=0$$

となるので，$Q$ は $P^n$ の超平面を定める．超平面は双対射影空間 $P^*$ の点 $p^*$ を定める．($\varphi$ の類 ) $\mapsto$ $p^*$ によって

$$\mathrm{Hom}^*(K^{n+1},\ K)\,／\!\sim\ \to\ {K^{n+1}}^*／\!\sim$$

の写像が定まる．

逆に，$P^*$ の超平面 $p^*$ は命題 55 によって

$$\sum_{i=0}^{n}u_ix_i=0$$

と表せる．ただし $(x)$ は $P^n$ の同次座標，$(u)$ は $n+1$ 組の $K$ の要素である．$\mathrm{Hom}(K^{n+1},\ K)$ の要素 $\varphi$ を

$$\varphi=\sum_{i=0}^{n}u_i\chi_i$$

で定めると，これによって $\mathrm{Hom}^*(K^{n+1},\ K)$ ／$\sim$ における $\varphi$ の類が一意に定まる．つまり $p^*$ $\mapsto$ ($\varphi$ の類) によって

$${K^{n+1}}^*／\!\sim\ \to\ \mathrm{Hom}^*(K^{n+1},\ K)\,／\!\sim$$

の写像が定まる．

これが互いに逆の対応であり，射影空間の $\cap$ と $\vee$ を保つことは，線型代数の基礎のうえに示される．その確認は略する．この結果，射影幾何の同型が確定した．□

今後この同型によって $P^*$ と $\mathrm{Hom}^*(K^{n+1},\ K)$ ／$\sim$ を同一視する．

**極系，零系**

**双対空間への共線写像が誘導する双対空間からの共線写像**　$\tau$ を $P$ から $P^*$ への共線写像とする．このとき次のようにして $P^*$ から $P$ への共線写像が定まる．これを $\tau_*$ で表す．

> $P^*$ の点 $p^*$ は $P$ の超平面である．共線写像は超平面を超平面にうつす．よって $P$ の超平面 $p^*$ に対し $\tau(p^*)$ は $P^*$ の超平面である，$P^*$ の超平面は $P$ の点 $p$ を定める．これを $\tau_*$ による $p^*$ の像とする．つまり $\tau_*(p^*) = p$ によって $\tau_*$ を定める．

これが共線写像であることは定義から明らかである．$\tau_*$ を，$\tau\ :\ P \to P^*$ が誘導する $P^* \to P$ の共線写像，という．

**射影相反変換**　射影空間 $P$ からその双対空間 $P^*$ への射影写像 $\tau$ を射影相反変換という．係数体が実数体であれば共線写像は射影写像であるので射影相反変換と相反変換に違いはない．恒等写像ではない自己同型をもつ体，例えば複素数体ではこれは同じではない．

$P$ の座標系を $(x) = (x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ とする．また $P^*$ の座標系として同型な $\mathrm{Hom}^*(K^{n+1},\ K)$／$\sim$ の座標系 $(X) = (X_0,\ X_1,\ \cdots,\ X_n)$ を用いる．これらは縦ベクトルとし，横に並べるときは ${}^t(x)$，${}^t(X)$ のように記す．

このとき，射影相反変換 $\tau$ はそれぞれの座標系を用いて

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n0} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表現される．この行列を $T$ とする．この行列は $K$ 上の $n+1$ 次行列で逆行列をもつものを

$$T \sim S \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\lambda(\in K,\ \neq 0)\ ;\ S = \lambda T$$

で類別したものであり，その類の代表を表している．また座標系もそれぞれ類を表していることに注意しよう．簡略して

$$(X) = T(x)$$

と表すことができる．

$\tau$ の誘導する $\tau_*\ :\ P^* \to P$ の射影相反写像を具体的に書き表そう．今 $P^*$ の点 $p^*$ をとる．この超平面座標を $(u)$ とする．また上記同型によって点 $p^*$ が対応する $\mathrm{Hom}^*(K^{n+1},\ K)$／$\sim$ の座標を $(X)$ とする．$P^*$ と $\mathrm{Hom}^*(K^{n+1},\ K)$／$\sim$ の同型によって，$(u)$ と $(X)$ とを同一視する．$p^*$ は $P^n$ の超平面

$$u_0x_0 + u_1x_1 + \ldots + u_nx_n = {}^t(u)(x) = 0$$

となる．$T^{-1}(X) = (x)$ なので，$\tau$ によってこの超平面は

$${}^t(u)T^{-1}(X) = 0$$

にうつる．これは $P^*$ の超平面であり，$P$ の点を定める．${}^t(u)T^{-1} = {}^t\{{}^tT^{-1}(u)\}$ なので，これは

$${}^t\{{}^tT^{-1}(u)\}(X) = 0$$

と書ける．よって定められる $P$ の点は

$${}^tT^{-1}(u) \in P$$

である．つまり $P^*$ の点 $p^*$ である超平面，それを超平面座標で表すと $(u)$ であるが，この点は $\tau_*$ によって ${}^tT^{-1}(u)$ にうつる．

**対合**　$P$ から $P^*$ への射影相反変換 $\tau$ と，それが誘導する $P^*$ から $P$ への射影相反変換 $\tau_*$ を合成した $\tau_* \circ \tau$ は $P$ の射影変換になる．これが恒等写像であるとき $\tau$ を**対合的射影相反変換**という．

$$\tau \;:\; P \to P^* \;;\; (x) \mapsto (X) = T(x)$$

と

$$\tau_* \;:\; P^* :\to P \;;\; (u) \mapsto (x) = {}^tT^{-1}(u)$$

を合成すれば

$$\tau_* \circ \tau \;:\; P \to P \;;\; (x) \mapsto (X) = {}^tT^{-1}T(x)$$

これが恒等写像ということは単位行列 $E$ と同じ類に属するということであり，

$${}^tT^{-1}T = {}^t(\alpha_{ij})^{-1}(\alpha_{ij}) = \lambda E \;(\lambda \in K,\; \neq 0)$$

となる $\lambda$ が存在する．これは成分で書けば

$$(\alpha_{ij}) = \lambda^t(\alpha_{ij}) = \lambda(\alpha_{ji})$$

なので，

$$\alpha_{ij} = \lambda\alpha_{ji}$$

がすべての $i$ と $j$ で成り立つ．これから

$$\alpha_{ij} = \lambda^2\alpha_{ij}$$

である．成分には 0 でないものがあるので $\lambda^2 = 1$ つまり $\lambda = \pm 1$ である．

**定義 25**　対合的射影相反変換のうち，$\lambda = -1$，つまり $(\alpha_{ij}) = -(\alpha_{ji})$ であるものを**零系**という．$\lambda = 1$，つまり $(\alpha_{ij}) = (\alpha_{ji})$ であるものを**極系**という．■

### 4.1.2　諸定義とその関係

#### 二次曲面の極系による定義

$P^n$ の係数体はこれまでと同様に可換とし，さらにその標数は 2 でないとする．必要に応じて $K$ は代数的閉体とするが，それはそれを必要とするところで指示する．以下 $n$ 次元射影空間における $n-1$ 次曲面を考えるので，超平面にならえば「超曲面」というべきところであるが，高次の場合も含めて「曲面」で統一する．

**定義 26 (極系による定義)**　$n$ 次元射影空間 $P$ からその双対空間 $P^*$ への射影写像 $\tau$ が極系であるとする．$P$ の点 $p$ に対し $\tau(p)$ は $P^*$ の点であり双対対応によって $P$ の超平面に対応する．$P$ の点集合

$$Q_2^{n-1} = \{p \mid \text{点}\ p(\in P)\ \text{が}\tau(p)\ \text{で定まる超平面に含まれる}.\}$$

を，極系 $\tau$ で定まる二次曲面という．■

射影空間 $P$ で枠 $\mathscr{F}$ を選び座標系 $(x)=(x_i)$ が定まっているとする．この座標系に関して $\tau$ は $n+1$ 次の対称行列の類で表される．これを $T$ のように書くとき，それは $n+1$ 次正方行列を $0$ でない定数倍の同値関係で類別した類を表すものとする．$p$ の座標を $(\xi)$ とする．これは縦ベクトルであるとし，$\tau(p)$ は $P^*$ の座標で行列の積 $T(\xi)$ と表される．これが $P$ の超平面

$$^t(x)T(\xi)=0$$

を定める．二次曲面の定義を座標系でいえば，点 $(\xi)$ が $\tau$ で定まる二次曲面の点であることは，$(\xi)$ が再びこの方程式を満たすということである．つまり

$$^t(\xi)T(\xi)=0$$

を満たす点の集合が $Q_2^{n-1}$ である．

射影写像は一対一対応であり，その行列 $T$ の階数は $n+1$ である．ここの部分を一般化し，一般の対称行列によって二次曲面を定義することができる．

**定義 27 (対称行列による定義)**　$P^n$ の座標系 $(x)$ がある．$T$ を必ずしも階数が $n+1$ とはかぎらない対称行列とする．座標系の方程式

$$^t(x)T(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i,j=0}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j=0$$

を満たす $P^n$ の点の集合を二次曲面といい $Q_2^{n-1}$ と表す． ■

特に断らないかぎり，この一般化された定義を $Q_2^{n-1}$ の定義とする．線型代数の一般論から，対称行列 $T$ に対して $^tPTP$ が対角行列となるような可逆行列 $P$ が存在する．この証明は『線型代数の考え方』など参照のこと．これからただちに次のことが結論される．

**命題 75**　$n$ 次元射影空間におかれた二次曲面は，座標系をつまりは枠を適当に選ぶことによって

$$\sum_{i=0}^{s}d_i{x_i}^2=0\ (s\leqq n)$$

と表される． ■

**系 75.1**　$K$ が代数的閉体なら

$$\sum_{i=0}^{s}{x_i}^2=0\ (s\leqq n)$$

に帰着する．$K$ が実数体なら

$$\sum_{i=0}^{t}{x_i}^2-\sum_{i=t+1}^{s}{x_i}^2=0\ (0\leqq t\leqq s\leqq n)$$

に帰着する． ■

$s$ は行列 $T$ の階数である．$s=n+1$ のとき二次曲面は**正則**であるという．あるいはまた**非退化**であるという．$s<n+1$ のときは**非正則**，あるいは**退化**であるという．このとき $K^{n+1}$ の要素で $T(\mathbf{x})=(0)$ となるものは，$K^{n+1}$ の部分空間をなす．これに対応して $P^n$ の部分空間でその要素 $(x)$ が $T(x)=0$ となるものが存在する．これを二次曲面の特異空間，その要素を特異点という．二次曲線で特異直線があればその方程式は因数分解される．

**例 4**　$K=\mathbb{R}$ の $P^2$ において $T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．$T$ の階数は 2 である．このとき同次座標で $Q_2^1$ の方程式は

$$x_0{}^2+x_1{}^2+2x_0x_1-x_2{}^2=(x_0+x_1+x_2)(x_0+x_1-x_2)=0$$

と因数分解される．したがって $Q_2^1$ は 2 直線を表す.

**注意 15** 代数幾何学においては，曲線の特異点が定義される．特異点をもたない曲線を**滑らか**，あるいは**非特異**という．2 次曲線においては，非退化であることと非特異であることが同値である．これについては,『Poncelet's Theorem』[39] の定理 3.2 を参照のこと.

**極と極超平面**　射影空間 $P^n$ からその双対空間 $P^*$ への射影写像 $\tau$ が極系であるとき，$P^n$ の点 $p$ に対して $\tau(p)$ は $P^*$ の点であり $P$ の超平面を定める．$p$ によって定まる $P$ の超平面を $p$ の**極超平面**といい同じ $\tau(p)$ で表す．$n=2$ の場合は**極線**という．逆に $P^*$ の要素である $P$ の超平面 $p^*$ に対して $\tau_*(p^*)$ は $P$ の点である．これを $P$ の超平面 $p^*$ の**極**という.

$P^n$ の点 $p$ とその双対空間の点，すなわち $P$ の超平面 $\tau(p)$ の上にある点 $q$ は $Q_2^{n-1}$ に関し**共役**であるという．それぞれの座標を $(\xi)$ と $(\nu)$ とする．$p$ が $q$ と共役なら ${}^t(\nu)T(\xi)=0$ である．$\tau$ に対応する行列は対称なのでこれは ${}^t(\xi)T(\nu)=0$ と同値である．よって $p$ が $q$ と共役なら $q$ が $p$ と共役である.

**接超平面**　二次曲面 $Q_2^{n-1}$ 上の点 $p=(\xi)$ は ${}^t(\xi)T(\xi)=0$ を満たすので，それ自身に共役，つまり自己共役である．$\tau(p)$ が定める超平面を点 $p$ における $Q_2^{n-1}$ の接超平面という．$n=2$ のときは**接線**という.

**命題 76**　射影写像 $\tau$ を極系としそれが定める二次曲線を $Q_2^{n-1}$ とする．$P^n$ の直線 $l$ がある．$l$ 上の点で $Q_2^{n-1}$ 上にはない点 $p$ に対して，超平面 $\tau(p)$ と直線 $l$ の交点を $q$ とする．点対 $(p,\ q)$ は，$l$ によって決まり $p$ のとり方によらない一定の対合によって対合をなす.　■

**証明**　$P$ と $P^*$ に座標系を定め，それによって $\tau$ が定める行列を $T$ とする．定義 25 より $T$ は対称行列である．直線 $l$ 上の 2 定点 $(a)$ と $(b)$ をとり，$l$ を媒介変数 $\lambda$ と $\mu$ を用いて $\lambda(a)+\mu(b)$ と表す．$(\lambda,\ \mu)$ を直線 $l$ の同次座標とする.

$$p=\lambda_p(a)+\mu_p(b),\ q=\lambda_q(a)+\mu_q(b)$$

であるとする．$q$ は $\tau(p)$ 上の点なので

$${}^t\{\lambda_q(a)+\mu_q(b)\}T\{\lambda_p(a)+\mu_p(b)\}=0$$

である．$T$ が対称なので ${}^t(a)T(b)={}^t(b)T(a)$．よってこの等式は

$$\lambda_p\lambda_q{}^t(a)T(a)+(\lambda_p\mu_q+\lambda_q\mu_p){}^t(a)T(b)+\mu_p\mu_q{}^t(b)T(b)=0 \tag{4.1}$$

となる．これは命題 71 の等式そのものであり，その係数 ${}^t(a)T(a)$, ${}^t(a)T(b)$, ${}^t(b)T(b)$ は $p$ と $q$ によらない．よって条件を満たす $l$ 上の 2 点 $p,\ q$ は同一の対合で対合をなす.　□

**定理 9**　極系 $\tau$ とそれによって定まる二次曲面 $Q_2^{n-1}$ が与えられている．2 点 $p$, $q$ は相異なる共役点であるとする．

(i) $p$, $q \notin Q_2^{n-1}$ のとき．直線 $p \vee q$ と $Q_2^{n-1}$ の交点を $z_1$, $z_2$ とする．4 点 $p$, $q$; $z_1$, $z_2$ は調和列点をなす.

(ii) $p \in Q_2^{n-1}$, $q \notin Q_2^{n-1}$ のとき．直線 $p \vee q$ と $Q_2^{n-1}$ は点 $p$ のみ共有する.

(iii) $p$, $q \in Q_2^{n-1}$ のとき．直線 $p \vee q$ は $Q_2^{n-1}$ に含まれる.

逆に　(i), (ii), (iii) のいずれかが成り立てば，$p$ と $q$ は $Q_2^{n-1}$ に関し共役である．■

**証明**

(i)　命題 76 の直線 $p \vee q$ を $l$ とし，定点 $(a)$, $(b)$ として 2 点 $z_1$, $z_2$ をとる．これによって点 $p$ と $q$ は対合をなす．さらに方程式 4.1 は

$$(\lambda_p\mu_q + \lambda_q\mu_p)\,{}^t(z_1)T(z_2) = 0$$

となる．この方程式は $(\lambda_p,\ \lambda_q,\ \mu_p,\ \mu_q)$ を $(1,\ 1,\ 0,\ 0)$ か $(0,\ 0,\ 1,\ 1)$ にとっても成り立ち，この対合に関して $z_1$, $z_2$ は自己対合をなすことがわかる．命題 73 より $z_1$, $z_2$ は $p$, $q$ を調和に分ける．つまり 4 点 $p$, $q$; $z_1$, $z_2$ は調和列点をなす.

(ii)　点 $p$ は自己対合点である．$p = (p)$，$q = (q)$ とし $p \vee q$ 上の点 $(x)$ を

$$(x) = \lambda(p) + \mu(q)$$

とおく．これが $Q_2^{n-1}$ 上にあるのは

$${}^t\{\lambda(p) + \mu(q)\}T\{\lambda(p) + \mu(q)\} = 0$$

を満たすことであるが，${}^t(p)T(p) = 0$ かつ ${}^t(p)T(q) = 0$ なのでこれを満たすのは $\mu = 0$ のみである．つまり直線 $p \vee q$ と $Q_2^{n-1}$ は点 $p$ のみ共有する.

(iii)　同様に $p$ と $q$ の座標を $(p)$，$(q)$ とし，直線 $p \vee q$ 上の点 $(x)$ を座標系で $\lambda(p) + \mu(q)$ とする.

$${}^t(p)T(p) = 0,\ {}^t(q)T(q) = 0,\ {}^t(p)T(q) = {}^t(q)T(p) = 0$$

より

$${}^t\{\lambda(p) + \mu(q)\}T\{\lambda(p) + \mu(q)\} = 0$$

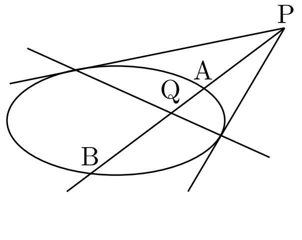
なので，直線 $p \vee q$ は $Q_2^{n-1}$ に含まれる.

逆について．(i) は命題 73 によって $p$ と $q$ は対合をなし，命題 76 によって $q$ が $p$ と共役なら対合をなすが，直線上の点で $p$ とその対合で対合をなす点は一意なので，$p$ と $q$ は共役である．他は明らか．□

**例 5**　上記定理の (i) は，ユークリッド平面では

$$\frac{2}{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{\mathrm{PA}} + \frac{1}{\mathrm{PB}}$$

とも定式化される.



**二次曲面の部分空間**　$Q_2^{n-1}$ に含まれる部分空間を**母空間**，1 次元直線の場合**母線**という．
　実数 $x$ に対して $[x]$ は $x$ を超えない最大の整数を表すものとする．

**命題 77** 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の正則二次曲面 $Q_2^{n-1}$ は $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 次元部分空間を含む．■

**証明**　系 75.1 から $Q_2^{n-1}$ は適当な座標系によって

$$\sum_{i=0}^{n} {x_i}^2 = 0$$

と表される．
　$n$ が奇数のとき．$n = 2m+1$ とおく．$i$ を虚数単位として

$$\sum_{i=0}^{2m+1} {x_i}^2 = \sum_{j=0}^{m} (x_{2j} + ix_{2j+1})(x_{2j} - ix_{2j+1})$$

であるから，$m+1$ 個の方程式

$$x_{2i} - ix_{2i+1} = 0,\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

で定義される部分空間 $R$ は $Q_2^{n-1}$ に含まれる．$R$ の次元は

$$2m + 1 - (m+1) = m = \frac{n-1}{2} = \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

である．
　$n$ が偶数のとき．$n = 2m$ とおく．同様に

$$\sum_{i=0}^{2m} {x_i}^2 = \sum_{j=0}^{m-1} (x_{2i} + ix_{2i+1})(x_{2i} - ix_{2i+1}) + (x^{2m})^2$$

であるから，$m+1$ 個の方程式

$$x_{2i} - ix_{2i+1} = 0,\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1),\ x^{2m} = 0$$

で定義される部分空間 $R$ は $Q_2^{n-1}$ に含まれる．$R$ の次元は

$$2m - (m+1) = m - 1 = \frac{n}{2} - 1 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

である．よっていずれの場合も命題は成立する．□
　本定理は直線体 $K$ が代数的閉体であれば成り立つ．

**古典的定義**

**線束の射影写像**　$P^n$ の相交わらない $n-2$ 次元部分空間 $S,\ S'$ をとる．$S,\ S'$ を通る超平面の集合 $L(S),\ L(S')$ をとる．定義 12 によってこれらは線型基本図形であり，その基本図形の間の射影写像の概念が有効である．

**定義 28 (幾何的定義)**　$P^n$ の相交わらない $n-2$ 次元部分空間 $S,\ S'$ に対する超平面束 $L(S),\ L(S')$ が射影的であるとき，つまり射影写像

$$\varphi : L(S) \to L(S')$$

が存在するとき，対応する超平面の共通部分空間の集合

$$R_2^{n-1} = \{l \cap \varphi(l) \mid l \in L(S)\}$$

を二次曲面という． ■

**諸定義の関係**

双対空間 $P^*$ において，$S$ と $S'$ は直線に対応し，$L(S),\ L(S')$ は直線上の点の集合に対応する．$P$ において $L(S)$ と $L(S')$ が射影的であるということと，$P^*$ において，双対的に対応する，直線から直線への射影写像 $\varphi$ が存在することが同値である．

**$n=2$ の場合**　$n=2$ のとき，$S$ と $S'$ は異なる点 $o,\ o'$ であり，$L(o)$，$L(o')$ はそれぞれ $o,\ o'$ をとおる直線の集合である．これを**母線束**という．定義 27 と定義 28 が同等であることは次のように示される．

**命題 78**　$n=2$ のとき，定義 27 で定まる二次曲線を $Q$，定義 28 で定まる曲線を $R$ とする．

(I) $Q$ 上の二定点 $o,\ o'$ をとる．$o,\ o'$ での接線を $l,\ l'$ とし，その超平面座標，すなわち $o$ と $o'$ の座標を $(a),\ (b)$ とする．また点 $p$ での接線と $l,\ l'$ との交点を $(\xi),\ (\nu)$ とする．これが $o \vee p,\ o' \vee p$ の超平面座標である．このとき $(\xi) \mapsto (\nu)$ は射影写像である．

(II) $R$ に対し，$P^2$ の極系 $\tau$ で，それによる定義 27 の $Q$ が $R$ に一致するものが存在する． ■

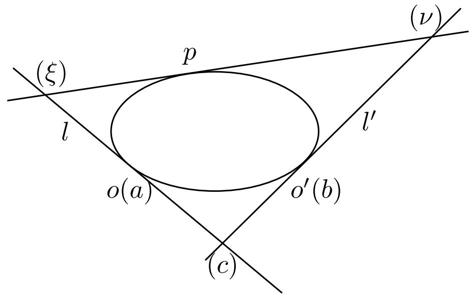
**証明**

(I)　$l$ と $l'$ の交点の座標を $(c)$ とすると

$${}^t(c)T(a) = {}^t(c)T(b) = {}^t(a)T(a) = {}^t(b)T(b) = 0$$

であり，媒介変数 $\lambda_0$，$\lambda_1$，$\mu_0$，$\mu_1$ を用いて

$$(\xi) = \lambda_0(c) + \lambda_1(a),\ (\nu) = \mu_0(c) + \mu_1(b)$$




と表される．さらに直線 $(\xi) \vee (\nu)$ 上の点は媒介変数 $s,\ t$ を用いて

$$s(\xi) + t(\nu)$$

と表される．これが $Q$ と接しているので

$${}^t\{s(\xi) + t(\nu)\}T\{s(\xi) + t(\nu)\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad {}^t(\xi)T(\xi)s^2 + 2\,{}^t(\xi)T(\nu)st + {}^t(\nu)T(\nu)t^2 = 0$$

が同次二次方程式として重根をもつ．よって

$$\{{}^t(\xi)T(\nu)\}^2 - \{{}^t(\xi)T(\xi)\}\{{}^t(\nu)T(\nu)\} = 0$$

である．

$$\begin{aligned}
{}^t(\xi)T(\nu) &= {}^t\{\lambda_0(c)+\lambda_1(a)\}T\{\mu_0(c)+\mu_1(b)\} = {}^t(c)T(c)\lambda_0\mu_0 + {}^t(a)T(b)\lambda_1\mu_1 \\
{}^t(\xi)T(\xi) &= {}^t\{\lambda_0(c)+\lambda_1(a)\}T\{\lambda_0(c)+\lambda_1(a)\} = {}^t(c)T(c)\lambda_0^2 \\
{}^t(\nu)T(\nu) &= {}^t\{\mu_0(c)+\mu_1(b)\}T\{\mu_0(c)+\mu_1(b)\} = {}^t(c)T(c)\mu_0^2
\end{aligned}$$

よって判別式の条件は

$$ {}^t(c)T(c)\cdot {}^t(a)T(b)\lambda_0\mu_0\lambda_1\mu_1 + \{{}^t(a)T(b)\}^2\lambda_1^2\mu_1^2 = 0 $$

これから $\lambda_1\mu_1 = 0$ つまり $p$ が $o$ か $o'$ に一致するか，または

$$ {}^t(c)T(c)\cdot {}^t(a)T(b)\lambda_0\mu_0 + \{{}^t(a)T(b)\}^2\lambda_1\mu_1 = 0 $$

これは変換行列が $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ 型の射影写像である．

**注意 16**
1)　この対応は明らかに $l$ から $l'$ への一対一対応である．かつ代数的に対応している．$K$ が代数的閉体ならここから射影写像でしかありえないことがわかる．閉体でない場合を含め示した．
2)　$o,\ o'$ は二次曲線上の異なる 2 点であればつねに成りたつ．

(II)　$o,\ o'$ の座標を $(a),\ (b)$ とする．

$$\begin{aligned}
L(o) &= \{(u) \mid {}^t(u)(a) = 0\} \\
L(o') &= \{(v) \mid {}^t(v)(b) = 0\}
\end{aligned}$$

である．$\varphi$ が行列 $A$ で表されるとする．つまり $(v) = A(u)$ とする．$p$ の座標を $(x)$ とすると，

$$ {}^t(u)(x) = 0,\ {}^t(v)(x) = {}^t(u){}^tA(x) = 0 $$

$(u)$ の成分には 0 でないものがあるので，三つの縦ベクトル $(a),\ (x),\ {}^tA(x)$ より構成される 3 次正方行列式について

$$ \left|(a)(x){}^tA(x)\right| = 0 $$

が成り立つ．これを成分で書き表し整理すれば，

$$ \sum \beta_{ij}x_ix_j = 0 $$

になる．$\alpha_{ii} = \beta_{ii}$，$i \neq j$ のとき $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \dfrac{1}{2}(\beta_{ij}+\beta_{ji})$ で $\alpha_{ij}$ を定める．このとき $T = (\alpha_{ij})$ で定まる対称行列 $T$ による極系の二次曲線 $Q$ が $R$ に一致する．　$\square$

**注意 17**　　2 次元の場合に極系による定義と古典的定義の同等性が示された．高次の場合にどのようになるのか．それは今は研究課題とする．

**退化二次曲線の図形的条件**

**命題 79**　平面二次曲線が 2 直線に分解されることと，幾何的定義における射影写像 $\varphi : L(o) \to L(o')$ が配景写像であることは同値である． ■

**証明**　射影写像 $\varphi$ が配景写像であるとする．双対空間での配景の中心に対応する $P^2$ の直線を $m$ とする．直線 $l \in L(o)$ と $l' \in L(o')$ は $m$ 上の点で交わることを意味する．また $\varphi$ によって直線 $o \vee o'$ はそれ自身にうつる．よって $Q$ は $m$ と $o \vee o'$ それ自身である．

2 直線に分解されるとする．$o$ と $o'$ は互いにうつるので，2 直線になればそのうちの 1 本は $o \vee o'$ であり，他方の直線の双対空間での点は配景の中心である． □

### 4.1.3　円錐曲線

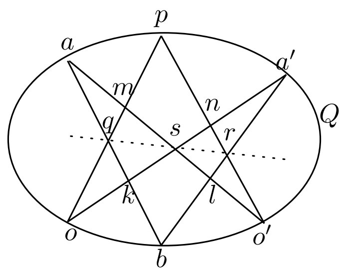
**古典的諸定理**

平面二次曲線の研究は 19 世紀に大きく発展した．その基本的な部分を再構成してゆこう．係数体 $K$ は可換で標数は 2 でないとする．$K$ 上の射影空間 $P^2$ において座標枠を決め，座標系が導入されているものとする．射影平面 $P^2$ におかれた二次曲線 $Q$ のことを**円錐曲線**とも言う．円錐曲線という名称は円錐を平面で切断した切り口の図形に由来する．それが 2 次式で定まる二次曲線であることが認識されるより前に，円錐曲線としての長い研究の歴史があった．

以下の命題の証明は，二次曲線の幾何的定義をもとにしながら，可能なかぎり，極系による定義をもとにした証明をつけるものとする．
次の命題はシュタイーナーによる．

**命題 80**　正則二次曲線 $Q$ 上の任意の 2 点 $a,\ a'$ と動点 $p$ をとる．$a$ を中心とする線束 $L(a) = \{a \vee p | p \in Q\}$ と $L(a') = \{a' \vee p | p \in Q\}$ とは $P^2$ の基本図形として射影的である．ただし，動点 $p$ が $a$ に一致したとき，直線 $a \vee a$ は点 $a$ における $Q$ の接線をとるものとする．$a'$ についても同様とする． ■

**証明**　$Q$ 母線束の中心を $o,\ o'$ とする．




1)　$a,\ a',\ o,\ o'$ がすべて異なるとき．$Q$ 上にこれら 4 点と異なる $b$ をとる．図のように交点 $k,\ l,\ m,\ n,\ q,\ r,\ s$ をとる．$Q$ の定義から

$$[o \vee a,\ o \vee a';\ o \vee b,\ o \vee p] = [o' \vee a,\ o' \vee a';\ o' \vee b,\ o' \vee p]$$

である．これと直線 $a \vee b,\ a' \vee b$ の交点をとり

$$[a,\ k;\ b,\ q] = [l,\ a';\ b,\ r]$$

である．ところが点 $b$ が自対応なので，3 点 $a,\ k,\ q$ と 3 点 $l,\ a',\ r$ は配景的である．よって 3 直線 $a \vee l,\ k \vee a',\ q \vee r$ は共点である．よって直線 $q \vee r$ は点 $(a \vee l) \cap (k \vee a')$ を通る．この結果

$$[o,\ q;\ m,\ p] = [n,\ r;\ o',\ p]$$
$$\therefore \quad [a \vee o,\ a \vee q;\ a \vee m,\ a \vee p] = [a' \vee n,\ a' \vee r;\ a' \vee o',\ a' \vee p]$$

つまり $a \vee p$ と $a' \vee p$ は射影的である．

2)　1) 以外の場合．$a,\ a',\ o,\ o'$ と異なる 2 点 $c,\ c'$ をとれば，$c \vee p$ と $c' \vee p$ は射影的．これを改めて母線束にとれば $a \vee p$ と $a' \vee p$ は射影的である．□

**系 80.1**　正則二次曲線はその上の任意の 2 点を母線束の中心に取ることができる．■

**命題 81**　正則二次曲線 $Q$ 上の 4 点 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ がある．$Q$ 上の任意の点 $p$ をとると，線束の複比 $[p \vee a_1,\ p \vee a_2;\ p \vee a_3,\ p \vee a_4]$ が定まる．この値は点 $p$ のとり方によらない．■

**証明**　$Q$ 上にいずれとも異なる点 $q$ をとる．$p \neq q$ のときは $p$ と $q$ を $Q$ の母線束の中心にとれば

$$[p \vee a_1,\ p \vee a_2;\ p \vee a_3,\ p \vee a_4] = [q \vee a_1,\ q \vee a_2;\ q \vee a_3,\ q \vee a_4]$$

もとより $q = p$ のときも成り立つので，この値は $p$ によらず一定である．□

**証明 2**　命題 78 の (I) の証明から，4 直線 $p \vee a_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ から 4 直線 $q \vee a_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ への射影写像 $\varphi$ が存在する．定義 23 から，複比 $[p \vee a_1,\ p \vee a_2;\ p \vee a_3,\ p \vee a_4]$ は双対空間の直線上の 4 点の複比として定まっているが，$\varphi$ は双対空間の射影写像を引き起こし，複比は射影写像で不変であるから，複比 $[p \vee a_1,\ p \vee a_2;\ p \vee a_3,\ p \vee a_4]$ は点 $p$ のとり方によらない．□

**命題 82**　射影平面 $P^2$ 上の一般の位置にある 5 点 $p_i$ $(1 \leqq i \leqq 5)$ を通る正則二次曲線がただ一つ存在する．■

**証明**　$p_1,\ p_2$ を中心とする二つの線束 $L(p_1),\ L(p_2)$ をとる．命題 35 を双対空間に適用することで，$L(p_1)$ から $L(p_2)$ への射影写像で $L(p_1)$ に属する 3 直線 $p_1 \vee p_j$ $(j = 3,\ 4,\ 5)$ を $L(p_2)$ に属する 3 直線 $p_2 \vee p_j$ $(j = 3,\ 4,\ 5)$ にうつすものがただ一つ存在する．よって定義 28 より，条件を満たす二次曲線がただ一つ存在する．□

**注意 18**　本命題の証明から，5 点のうちどの 4 点も共線でないなら二次曲線が一つに定まり，5 点が一般の位置にあるとき正則，そうでないとき 2 直線に分解した二次曲線となる．

次の命題は 1817 年，ブリアンションによって証明された．

**命題 83**　円錐曲線 $Q_1$ に内接する二つの三角形 $abc$ と $a'b'c'$ がある．ただしどの頂点も異なるものとする．このとき二つの三角形の 6 辺はある円錐曲線 $Q_2$ に外接する．■

**証明**　点 $(b \vee c) \cap (b' \vee c')$ を $o$ とし，$m,\ n,\ m',\ n'$ を図のように定める．

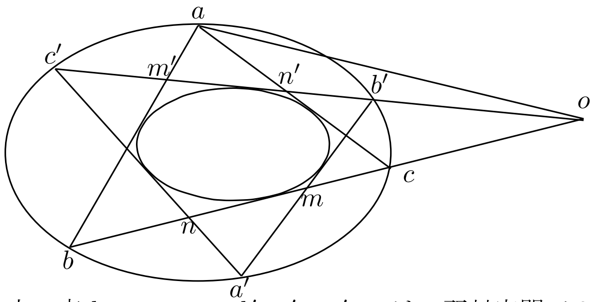
$$\begin{aligned} & [b,\ c;\ m,\ n] = [a' \vee b,\ a' \vee c;\ a' \vee m,\ a' \vee n] \\ = \ & [b,\ c;\ b',\ c'] = [a \vee m',\ a \vee n';\ a \vee b',\ a \vee c'] \\ = \ & [m',\ n';\ b',\ c'] \end{aligned}$$

である．つまり

$$bcmn \barwedge m'n'b'c'$$

である．

いいかえると点 $a$ を中心とする線束から点 $a'$ を中心とする線束への射影写像が存在する．これがもし背景的であるとすると，点 $o$ は背景写像でそれ自身に対応する．つまり点 $o$ は円錐曲線 $Q_1$ 上になければならない．これは $b$, $b'$, $c$, $c'$ が異なるという仮定に反する．




この結果，直線 $b \vee c$，直線 $b' \vee c'$ とその上の点 $b$, $c$, $m$, $n$, $b'$, $c'$, $m'$, $n$ は，双対空間で 2 点とそれらの点を中心とする線束となり，かつその線束の間の射影写像が存在したので，ある二次曲線を定める．

$Q_1$ のある平面に戻ると，それらはある二次曲線の接線となっている．つまりこれら三角形の辺に内接する円錐曲線 $Q_2$ が存在する． □

$K$ が複素数体の場合，直線は $Q_2^1$ と 2 点で交わるか，交点を求める方程式が重解，つまり接するかのいずれかである．

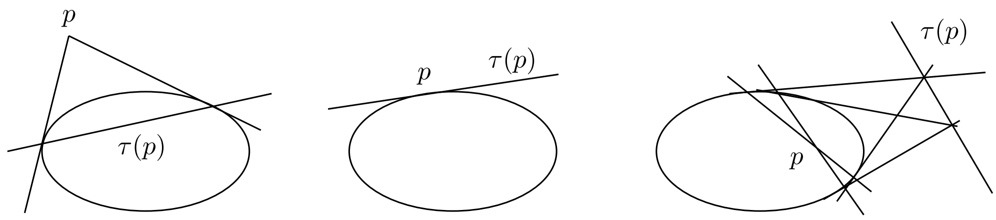
実数体の場合は次のような場合分けが起こる．

**命題 84**　それは次のように定まる．$Q_2^1$ を簡単のため $Q$ と書く．

(1) $p$ から 2 本の接線が引けるとき．接点を $a$, $b$ とすれば $\tau(p) = a \vee b$.

(2) $p$ から 1 本の接線が引けるとき．これは $p$ が $Q$ 上の点であることと同値．このとき $\tau(p) = a$ での接線.

(3) $p$ から接線が引けないとき．$p$ を通る直線 $l$ と $Q$ の交点 $a$, $b$ をとる．$a$, $b$ での接線の交点を $c$ とする．$p$ を通る直線 $l$ を変化させると，$c$ はある直線 $g$ 上を動く．このとき $\tau(p) = g$. ■




**証明**　点 $p$ の座標を同じく $(p)$ のように表す．その他の点も同様にする．

(1)　${}^t(p)T(a) = 0$, ${}^t(p)T(b) = 0$ なので極線 ${}^t(p)T(x) = 0$ は $a$, $b$ を通る．

(2)　${}^t(p)T(p) = 0$ より極線 ${}^t(p)T(x) = 0$ は $p$ を通る．

(3)　直線 $l$ の方程式は ${}^t(c)T(x) = 0$ であり，$p$ はこの上にあるので ${}^t(c)T(p) = 0$ である．これは点 $c$ が直線 ${}^t(p)T(x) = 0$ 上にあることを示している． □

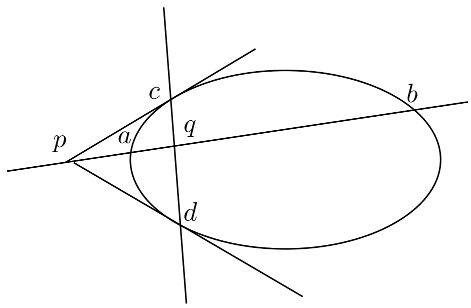
このように，極系による $P$ と $P^*$ の対応において，点に対しては極線が，直線に対しては極点が対応し，極系によって定まる正則二次曲線上の点に対しては，その接線の集合が対応する．$P$ の他の二次曲線は，その上の点に対する極線の集合が対応し，正則であればそれは二次曲線の包絡線となっている．

非正則，つまり $P$ における 2 直線であれば，それは $P^*$ の 2 点とそこを通る直線の集合が対応する．

二次曲線における定理9の(i)の別証明を命題81によって行っておこう．証明すべきことを改めて命題にする．

**命題 85**　一つの二次曲線 $Q$ がある．$Q$ 上にない点 $p$ の極線を $l$ とし，$p$ を通る任意の直線が $Q$ および $l$ と交わる点を $a,\ b,\ q$ とする．$a,\ b$ は $p,\ q$ を調和に分ける．■

**証明**　点 $p$ の極線を $l$ とする．実数体の場合の作図は，$p$ から $Q$ へ2本接線が引けるときはその接点を $c,\ d$ とする．$l = c \vee d$ である．または2本接線が引けないときは，$p$ から直線を引き $Q$ との交点を $c,\ d$ とする．このときは命題84の(2),(3)で $l$ が定まる．




命題69によって

$$\begin{aligned} & [p,\ q;\ a,\ b] = [c \vee p,\ c \vee q;\ c \vee a,\ c \vee b] \\ = \ & [c \vee c,\ c \vee d;\ c \vee a,\ c \vee b] \end{aligned}$$

命題81と再び命題69によって

$$\begin{aligned} & [c \vee c,\ c \vee d;\ c \vee a,\ c \vee b] = [d \vee c,\ d \vee d;\ d \vee a,\ d \vee b] \\ = \ & [d \vee q,\ d \vee p;\ d \vee a,\ d \vee b] = [q,\ p;\ a,\ b] \end{aligned}$$

ところが

$$[q,\ p;\ a,\ b] = [p,\ q;\ a,\ b]^{-1}$$

で，点は異なり複比は1ではないので

$$[p,\ q;\ a,\ b] = -1$$

である．□

**双対円錐曲線**　同次座標を $(x) = {}^t(x_0,\ x_1,\ x_2)$ とする $P^2$ の円錐曲線 $Q$ が，対称行列 $T$ で定まっているとする．その方程式は ${}^t(x)T(x) = 0$ であった．$Q$ 上の点 $(a) = {}^t(a_0,\ a_1,\ a_2)$ での接線の方程式は

$${}^t(a)T(x) = 0$$

である．$P$ の双対空間を $P^*$ とし，その同次座標を $(X) = {}^t(X_0,\ X_1,\ X_2)$ とするこの接線に対応する $P$ の双対空間 $P^*$ の点は $(A) = {}^t(A_0,\ A_1,\ A_2) = T(a)$ である．$(a)$ が ${}^t(a)T(a) = 0$ を満たすので，$(A)$ は $(a) = T^{-1}(A)$ より

$$0 = {}^t(a)T(a) = {}^t(A)T^{-1}TT^{-1}(A) = {}^t(A)T^{-1}(A)$$

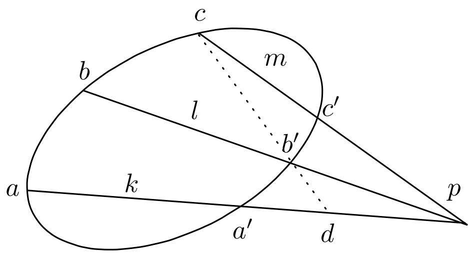
を満たす．つまり $Q$ の接線の集合は $P^*$ において行列 $T^{-1}$ で定まる円錐曲線となる．これを $Q$ の**双対曲線**といい $Q^*$ と表す．

### 円錐曲線と対合

円錐曲線と対合に関して次の命題が基本である．

**命題 86**　円錐曲線 $Q$ 上にない定点 $p$ と，$p$ を通る直線 $k,\ l,\ m,\ \cdots$ と $Q$ の共有点は，同じ対合 $\varphi$ に関して対合である．逆に，円錐曲線上の対合 $\varphi$ に関して互いに対合する点対を結ぶ直線は共点である． ■

**証明**　図のように点 $p$ を通る任意の 3 線 $k,\ l,\ m$ をとり，$k$ と $l$ を固定し，$m$ を動線と考える．これらの直線と $Q$ の共有点を $a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ c'$ とする．$d=(p\vee a)\cap(b'\vee c)$ とおく．




$$
\begin{aligned}
&[a,\ a';\ b,\ c]\\
=\ &[b'\vee a,\ b'\vee a';\ b'\vee b,\ b'\vee c]\\
=\ &[a,\ a';\ p,\ d]=[c\vee a,\ c\vee a';\ c\vee p,\ c\vee d]\\
=\ &[c\vee a,\ c\vee a';\ c\vee c',\ c\vee b']\\
=\ &[c\vee a',\ c\vee a;\ c\vee b',\ c\vee c']\\
=\ &[a',\ a;\ b',\ c']
\end{aligned}
$$

これは $c$ と $c'$ が，$a$ と $a'$，$b$ と $b'$ を対合対とする対合 $\varphi$ に関して対合であることを示している．

逆に，$Q$ 上の点対 $a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ c'$ が同一の対合 $\varphi$ に関して対合であるとする．$p$ を $(a\vee a')\cap(b\vee b')$ とする．$c''=(p\vee c)\cap Q,\ \neq c$ とおくと，前半より $c$ と $c''$ は $a$ と $a'$，$b$ と $b'$ を対合対とする対合に関して対合である．射影写像は一対一であるから $c''=c'$．よって $c\vee c'$ も点 $p$ を通る． □

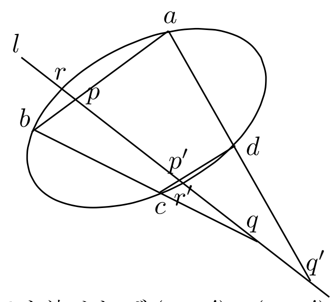
**注意 19**　$\varphi$ を点 $p$ に対する対合，点 $p$ を対合 $\varphi$ の中心，と呼ぶ．これによって円錐曲線をそれ自身にうつす対合 $\varphi$ と，$Q$ 上にない点 $p$ が一対一に対応していることがわかる．自己対合点は $p$ から $Q$ への接線の接点である．

**デザルグの対合定理**　次の命題は 1639 年，デザルグによって証明された．それが証明 1 である．また，1826 年にスツルムによって代数的な証明が見出された．それが証明 2 である．

**命題 87**　4 定点 $a,\ b,\ c,\ d$ を通る円錐曲線を直線 $l$ で切る．円錐曲線によって定まる二つの交点は，同一の対合で対応している． ■

**証明 1**　2 直線 $a\vee b,\ c\vee d$，および $a\vee d,\ b\vee c$ と $l$ の交点対をそれぞれ $(p,\ p')$，$(q,\ q')$ とする．4 定点を通る任意の二次曲線 $Q$ をとり，$l$ との交点対を $(r,\ r')$ とする．

命題 85 によって




$$
\begin{aligned}
&[p,\ q;\ r,\ r']=[b\vee p,\ b\vee q;\ b\vee r,\ b\vee r']\\
=\ &[b\vee a,\ b\vee c;\ b\vee r,\ b\vee r']\\
=\ &[d\vee a,\ d\vee c;\ d\vee r,\ d\vee r']\\
=\ &[d\vee c,\ d\vee a;\ d\vee r',\ d\vee r]=[p',\ q';\ r',\ r]
\end{aligned}
$$

命題 76 によって $(p,\ p')$，$(q,\ q')$，$(r,\ r')$ は対合をなす．$l$ を決めれば $(p,\ p')$，$(q,\ q')$ は定点である．二つの点対によって対合は一意に定まるので，$Q$ を変えてもやはり同じ対合で点対は対合になる． □

この命題の証明の部分に関してその双対命題を掲げる．先の命題の交点 $p$ で直線 $a\vee b$ を代表させることにし，直線 $a\vee b$ の極も $p$ で表す．その他も同様にする．

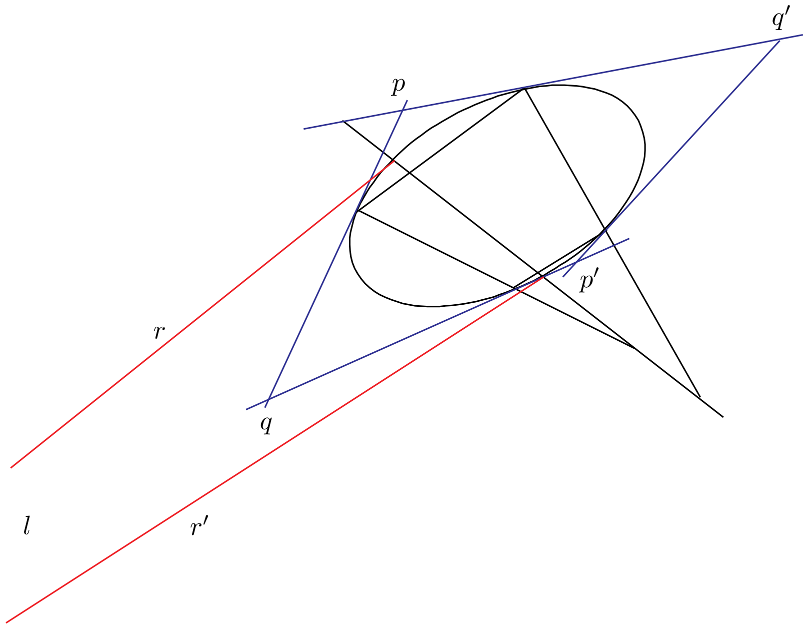
**系 87.1**　4 点 $p,\ p',\ q,\ q'$ を極とする 4 極線に接する円錐曲線に，点 $l$ から 2 接線 $r,\ r'$ を引く．このとき

$$[l\vee p,\ l\vee q;\ r,\ r'] = [l\vee p',\ l\vee q';\ r',\ r]$$

が成立し，直線対

$$(l\vee p,\ l\vee p'),\ (l\vee q,\ l\vee q'),\ (r,\ r')$$

が対合をなす． ■




**スツルムによる証明**　スツルムによる代数的な証明を行うために次の補題を示す．これは『幾何学大辞典 1』[43] で結果のみが記されている．そこでここでその証明をつける．

**補題 15**　射影直線上に同次座標 $(x)=(x_1,\ x_2)$ が与えられている．二つの同次式を

$$F = a{x_1}^2 + 2bx_1x_2 + c{x_2}^2,\ F' = a'{x_1}^2 + 2b'x_1x_2 + c'{x_2}^2$$

とする．$F=0,\ F'=0$ はそれぞれ重根でなく，共通根も待たないとする．このとき $F+kF'=0$ の表す点は，$F=0,\ F'=0$ の 2 組の点対で決まる対合に関して対合である．その自己対合点は $J(F,\ F') = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F'}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0$ の 2 根である． ■

**証明**　$F=0$ の 2 根を $(s_1,\ s_2)\ (t_1,\ t_2)$，$F'=0$ の 2 根を $({s_1}',\ {s_2}'),\ ({t_1}',\ {t_2}')$，$F+kF'=0$ の 2 根を $({s_1}'',\ {s_2}''),\ ({t_1}'',\ {t_2}'')$ とおく．また命題 72.2 によって $F=0,\ F'=0$ の 2 組の点対は対合を定める．これを $\varphi : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ とする．$s_1(\gamma t_1-\alpha t_2) = s_2(\alpha t_1+\beta t_2)$ より $\gamma s_1t_1-\alpha(s_1t_2+t_1s_2)-\beta s_2t_2 = 0$．$s',\ t'$ も同様なので，根と係数の関係から

$$\begin{aligned} c\gamma + 2b\alpha - a\beta &= 0 \\ c'\gamma + 2b'\alpha - a'\beta &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

このとき

$$\begin{aligned}
& {s_1}''(\gamma {t_1}'' - \alpha {t_2}'') - {s_2}''(\alpha {t_1}'' + \beta {t_2}'') \\
= \; & \gamma {s_1}''{t_1}'' - \alpha({s_1}''{t_2}'' + {t_1}''{s_2}'') - \beta {s_2}''{t_2}'' \\
= \; & (c + kc')\gamma + 2(b + kb')\alpha - (a + ka')\beta = 0
\end{aligned}$$

よって $F + kF' = 0$ の表す点は，$F = 0$，$F' = 0$ の 2 組の点対で決まる対合に関して対合である．
$(p_1,\ p_2)$ が自己対合点である条件は 2 次方程式

$$\gamma {p_1}^2 - 2\alpha p_1 p_2 - \beta {p_2}^2 = 0$$

を満たすことである．一方，

$$\begin{aligned}
J(F,\ F') &= \begin{vmatrix} 2ax_1 + 2bx_2 & 2bx_1 + 2cx_2 \\ 2a'x_1 + 2b'x_2 & 2b'x_1 + 2c'x_2 \end{vmatrix} \\
&= 4\{(ab' - a'b){x_1}^2 + (ac' - a'c)x_1x_2 + (bc' - b'c){x_2}^2\}
\end{aligned}$$

なので，等式 (4.2) より

$$(ab' - a'b)\beta = (cb' - c'b)\gamma,\ (ca' - c'a)\beta = 2(cb' - c'b)\alpha$$

である．よって $J(F,\ F') = 0$ なら

$$(cb' - c'b)\{\gamma {x_1}^2 - 2\alpha x_1 x_2 - \beta {x_2}^2\} = 0$$

となる．共通根がないので $cb' - c'b \neq 0$．よって自己対合点は $J(F,\ F') = 0$ の 2 根である． □

この補題の下にスツルムによる証明は次のようになされる．

**証明 2**　射影座標を $(x,\ y,\ z)$ とし，必要なら射影変換を行い直線 $l$ の方程式が $y = 0$ であるとする．

4 定点を通る円錐曲線を

$$\begin{aligned}
S &= ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gzx + 2fyz + cz^2 = 0 \\
S' &= a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'zx + 2f'yz + c'z^2 = 0
\end{aligned}$$

とする．円錐曲線は 5 点を指定すれば一意に定まるので，同じ 4 定点を通る円錐曲線の方程式は $S + kS' = 0$ とおける．

$l$ とこれらの交点は

$$ax^2 + 2gzx + cz^2 + k(a'x^2 + 2g'zx + c'z^2) = 0$$

で与えられる．この 2 点は補題 15 より係数で定まる対合に属する． □

### 二つの円錐曲線

係数体は複素数体とする．

**2 次元ベズーの定理**　次の補題は終結式の理論そのものである．2 次の場合についてここで証明しておく．終結式の一般論は『数学対話』「不変式」を見よ．

**補題 16**　　複素数係数の $x$ に関する二つの二次方程式

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0,\ b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

が共通根をもつための必要十分条件は

$$(a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-b_1a_2)=0$$

となることである． ■

**証明**

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2,\ g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$$

とし，$f(x)=0$ の根を $\alpha$ と $\beta$ とする．

$$a_0(\alpha+\beta)=-a_1,\ a_0\alpha\beta=a_2$$

なので

$$\begin{aligned}
R &= {a_0}^2g(\alpha)g(\beta)={a_0}^2(b_0\alpha^2+b_1\alpha+b_2)(b_0\beta^2+b_1\beta+b_2)\\
&= {a_0}^2\{{b_0}^2\alpha^2\beta^2+b_0b_1(\alpha\beta^2+\alpha^2\beta)+{b_1}^2\alpha\beta\\
&\quad +b_1b_2(\alpha+\beta)+b_0b_2(\alpha^2+\beta^2)+{b_2}^2\}\\
&= {a_2}^2{b_0}^2-a_1a_2b_0b_1+a_0a_2{b_1}^2-a_0a_1b_1b_2\\
&\quad +{a_1}^2b_0b_2-2a_0a_2b_0b_2+{a_0}^2{b_2}^2\\
&= (a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1)
\end{aligned}$$

これは $R=0$ であるとき，そしてそのときにかぎり $\alpha$ または $\beta$ が $g(x)=0$ の根となることを示している． □

**命題 88**　　複素数体上の二つの異なる円錐曲線 $Q_1$ と $Q_2$ は重複度を含めて 4 個の共有点をもつ．
■

**証明**　円錐曲線 $Q_1$ と $Q_2$ の同次方程式を

$$\sum_{i,j=0}^{2}\alpha_{ij}x_ix_j=0\ ,\qquad \sum_{i,j=0}^{2}\beta_{ij}x_ix_j=0$$

とする．ただし $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$，$\beta_{ij}=\beta_{ji}$ である．ここで必要なら座標を変換し，これらが $(x_0,\ x_1,\ x_2)=(0,\ 0,\ 1)$ を通らないようにする．つまり $\alpha_{22}\neq 0$，$\beta_{22}\neq 0$ とする．このとき両式は $x_2$ について 2 次式である．両式を $x_2$ の式とみて補題 16 を適用する．$R$ の各係数は $x_0$，$x_1$ の 2 次同次式であり，その結果，$x_2$ が共有される条件 $R=0$ は $x_0$，$x_1$ の 4 次同次方程式となる．よってその解 $(x_0,\ x_1)$ は重複を含めて 4 個である．それぞれに対して $x_2$ が定まる．5 個あれば二つの二次曲線は一致するので，異なる二次曲線は，重複を含めてちょうど 4 個の共有点をもつ． □

これはともに二つの 2 次曲線に関するベズーの定理である．交点数を定義しその和が二つの曲線の次数の積に一致する，という型の一般のベズーの定理は，代数幾何のもっとも基本的な定理である．

**曲線束**　$P^n$ の二つの二次曲面 $Q_2^{n-1}$ と $\overline{Q_2}^{n-1}$ の交わりを通る二次曲面 $R_2^{n-1}$ の集合を，$Q_2^{n-1}$, $\overline{Q_2}^{n-1}$ を底とする**二次曲面束**という．

$n=2$ のとき，ベズーの定理より二次曲線 $Q_0$ と $Q_1$ は重複を含めて 4 点で交わる．この 4 点を通る円錐曲線の集合を $Q_0$ と $Q_1$ で定まる**曲線束**という．

**命題 89** 二次曲線 $Q_0$ と $Q_1$ の方程式が $f=0$ と $g=0$ であるとき，同じ曲線束に属する円錐曲線 $Q$ の方程式は，$P^1$ の点 $(s,\ t)$ を用いて

$$F = sf + tg = 0$$

と表される．■

**証明**　$F=0$ で定まる二次曲線はこの 4 点を通る．つまり曲線束に属する．逆に曲線束の二次曲線 $Q$ をとる．その方程式が $F=0$ とする．$Q$ が通る 4 点以外の点 $a$ をとる．$G = sf+tg$ とおき，$(s,\ t) = (g(a),\ -f(a)) \in P^1$ にとれば $G=0$ は $a$ を通り，5 点を通る二次曲線は一意に定まるので，$F=G$ である．□

$P^1$ の点 $(s,\ t)$ を用いる代わりに，$\infty$ を含めて $\lambda = \dfrac{s}{t}$ とおき，方程式を $\lambda f + g = 0$ としてもよい．このようにして定まる曲線束の曲線を $Q(\lambda)$ と表す．特に

$$Q(\infty) = Q_0,\ Q(0) = Q_1$$

である．

**例 6**　円の束について．

円という概念は射影幾何の概念ではない．しかし，実のユークリッド空間におかれた円を，射影空間のなかに入れることはできる．

このとき複素射影平面 $P^2$ おいて「円」とは，座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，その方程式が定数 $c,\ l,\ m$ を用いて

$$x^2 + y^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx = 0$$

の形にあらわされるものとなる．

この円は直線 $z=0$ 上では $x^2+y^2=0$ となり，この結果つねに $z=0$ 上の 2 点 $(1,\ i,\ 0)$, $(1,\ -i,\ 0)$ を通る．

だから円束は，さらにもう 2 個の点を指定すれば定まる．この 2 点を通る直線が**根軸**である．この 2 点が実平面上にあるか，虚な平面上にあるかで，根軸と交わるかどうかが決まる．

**一般の位置**　次の命題の厳密な証明は，交点数が必要であり，それはたとえば『Poncelet's Theorem』[39] などを参照してもらいたい．証明はここでは行わない．

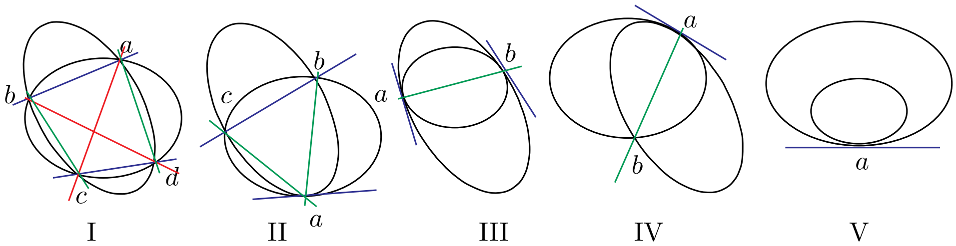
**命題 90**　$Q_0$ と $Q_1$ を異なる円錐曲線とし，その行列を $C$, $D$ とする．また $p(\lambda) = |\lambda C + D|$ とおく．これは $\lambda$ の 3 次式である．4 の分割

$$1+1+1+1,\ 1+1+2,\ 2+2,\ 1+3,\ 4$$

に応じて，$Q_0$ と $Q_1$ の共有点とそこでの重複度は次のようになる．

さらに $p(\lambda)=0$ の根 $\lambda$ はこれらの共有点を通る直線に分解する退化二次曲線を定める．$p(\lambda)=0$ の根は異なる 3 根，重根と単根が一つずつ，3 重根の場合がある．添え字が異なるものは異なる根とする．それらをまとめると表，および図のようになる．ここで $(a,\ i)$ は共有点 $a$ とそこでの重複度を表す．また $a\vee a$ は $a$ での接線を表す．

| 型 | | 退化曲線 | $p(\lambda)=0$ の根 |
|---|---|---|---|
| $I$ | $(a,1),(b,1),(c,1),(d,1)$ | $a\vee b\cup c\vee d,\ a\vee c\cup b\vee d,\ a\vee d\cup b\vee c$ | $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ |
| $II$ | $(a,2),(b,1),(c,1)$ | $a\vee b\cup a\vee c,\ a\vee a\cup b\vee c$ | $\lambda_1,\lambda_2$(二重根) |
| $III$ | $(a,2),(b,2)$ | $a\vee a\cup b\vee b,\ a\vee b\cup a\vee b$ | $\lambda_1,\lambda_2$(二重根) |
| $IV$ | $(a,3),(b,1)$ | $a\vee b\cup a\vee a$ | $\lambda_1$(三重根) |
| $V$ | $(a,4)$ | $a\vee a\cup a\vee a$ | $\lambda_1$(三重根) |




■

$Q_0$ と $Q_1$ が異なる 4 点を共有するとき，この 2 つの円錐曲線は**一般の位置にある**という．

**系 90.1** $Q_0$ と $Q_1$ を異なる円錐曲線とし，その行列を $C,\ D$ とする．$Q_0$ と $Q_1$ が一般の位置にある必要十分条件は，$\lambda$ の 3 次方程式

$$|\lambda C+D|=0$$

が相異なる 3 根をもつことである． ■

**極三角形**

**命題 91** 円錐曲線 $Q$ と $Q$ 上にない点 $a$ に対し，2 点 $b,\ c$ で，$a$ と $b\vee c$，$b$ と $c\vee a$，$c$ と $a\vee b$ がそれぞれ $Q$ に関する極と極線であるものが存在する． ■

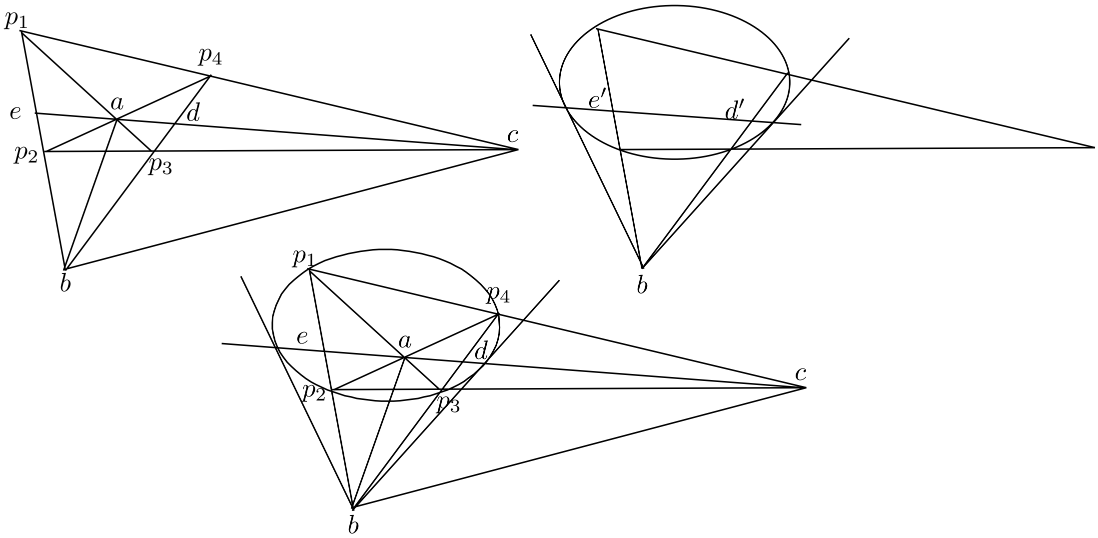
**証明** $Q$ を定める行列を $T$ としその方程式を ${}^t(x)T(x)=0$，点 $a$ の座標を $(a)$ とする，直線 ${}^t(a)T(x)=0$ 上の点 $b$ をとる．2 直線 ${}^t(a)T(x)=0$，${}^t(b)T(x)=0$ の交点を $c$ とする．$a$ と $b\vee c$，$b$ と $c\vee a$ は極と極線である．${}^t(a)T(c)=0$，${}^t(b)T(c)=0$ なので $c$ の極線 ${}^t(c)T(x)=0$ は $a$ と $b$ を通る．よって $c$ と $a\vee b$ も極と極線であり，この $b,\ c$ が条件を満たす． □

三角形 $abc$ を円錐曲線 $Q$ の**極三角形**という．

**命題 92** 完全四角形 $p_1p_2p_3p_4$ の各頂点を通る円錐曲線 $Q$ がある．対角線の交点を $a=(p_1\vee p_3)\cap(p_2\vee p_4)$，$b=(p_1\vee p_2)\cap(p_3\vee p_4)$，$c=(p_1\vee p_4)\cap(p_2\vee p_3)$ とする．このとき三角形 $abc$ は円錐曲線 $Q$ の極三角形である．

逆に円錐曲線 $Q$ と極三角形が与えられれば，4 頂点が $Q$ 上にあり，対辺の交点がその極三角形の 3 頂点となる完全四角形がある． ■

**証明**



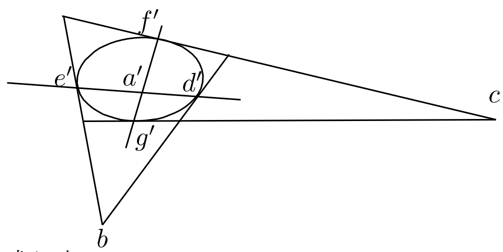

$d = (a \vee c) \cap (p_3 \vee p_4)$，$e = (a \vee c) \cap (p_1 \vee p_2)$ とおく．命題 70 の系 70.1 より $[p_4,\ p_3;\ d,\ b] = [b,\ d;\ p_3,\ p_4] = -1$．一方，点 $b$ の極線と $p_3 \vee p_4$ との交点を $d'$，$p_1 \vee p_2$ との交点を $e'$ とする．命題 85 より $[b,\ d';\ p_3,\ p_4] = -1$．この結果 $d = d'$．同様に $e = e'$ となり，点 $b$ の極線が $a \vee c$ である．他も同様である．よって三角形 $abc$ は円錐曲線 $Q$ の極三角形である．

逆に，$p_1$ を $Q$ 上にとればそれに対して他の 3 点が確定し完全四角形で条件を満たすものが得られる．　□

**系 92.1**　完全四角形 $p_1p_2p_3p_4$ の各辺に接する円錐曲線 $Q$ がある．対角線の交点を $a = (p_1 \vee p_3) \cap (p_2 \vee p_4)$，$b = (p_1 \vee p_2) \cap (p_3 \vee p_4)$，$c = (p_1 \vee p_4) \cap (p_2 \vee p_3)$ とする．このとき三角形 $abc$ は円錐曲線 $Q$ の極三角形である．

逆に円錐曲線 $Q$ と極三角形が与えられれば，4 辺が $Q$ に接し，対辺の交点がその極三角形の 3 頂点となる完全四角形がある．　■

**証明**　完全四角形に関する記号は命題のままとし，接点を図のように $d'$，$e'$，$f'$，$g'$ とおく．また $d' \vee e'$ と $f' \vee g'$ の交点を $a'$ とする．$d' \vee e'$ は $c$ を，$f' \vee g'$ は $b$ を通る．
複比を考えることによって $a' = a$．これから $d = d'$，$e = e'$ が成立するので，同じ論理で系が成立する．　□




命題 92 をもとに 1850 年のシルベスターの定理が成り立つ．

**命題 93**　異なる 4 点で交わる二つの円錐曲線 $Q$，$Q'$ はある極三角形を共有する．　■

**証明**　4 点は一般の位置にある．この 4 点による完全四角形を $p_1p_2p_3p_4$ とすれば，命題 92 の三角形 $abc$ が $Q$ と $Q'$ に共有される．　□

**注意 20**　サーモンの『解析幾何学 (円錐曲線)』[21] 第 282 款 (437 頁) では「任意の二つの円錐曲線は、常に一つの自共役三角形 (極三角形のこと) を共有する」とあり，岩田至康（編）の『幾何学大辞典 6』[45]619 命題 (299 頁) では「2 つの円錐曲線はつねに 1 つの極三角形を共有する」とある．

異なる 4 点では交わらない場合は一般には成立しない．

**命題 94**　相異なる 4 点で交わる二つの円錐曲線 $Q$，$Q'$ は，適当な枠をとることによって，その方程式を

$$x^2+y^2+z^2=0,\ px^2+qy^2+pz^2=0$$

の形にすることができる． ■

**証明**　二つの円錐曲線 $Q$，$Q'$ が共有する極三角形 $abc$ の 3 頂点を基本点にとる．$a(1,\ 0,\ 0)$，$b(0,\ 1,\ 0)$，$c(0,\ 0,\ 1)$ とする．$a(1,\ 0,\ 0)$ の極線が $b \vee c$ つまり $x=0$ であることなどより，このときそれぞれの対称行列 $T$ と $T'$ の対角成分以外の成分は 0 である．単位点を適当にとることによって，一方の側の 3 係数を 1 にすることができる． □

逆にこの形に表される円錐曲線は，3 点 $a(1,\ 0,\ 0)$，$b(0,\ 1,\ 0)$，$c(0,\ 0,\ 1)$ とするとき，三角形 $abc$ がこの円錐曲線の極三角形である．

## 4.2　パスカルの定理

### 4.2.1　定理とその証明

#### パスカルの定理は射影幾何の定理

パスカルの定理は射影幾何の定理である．その意味は，それが射影幾何の基本図形と円錐曲線に関する命題であり，ある基本図形と円錐曲線で成立することは，それらを射影写像でうつした基本図形と円錐曲線で成立することとが，同値であるということである．それは命題の条件も結論も射影変換で不変な内容であることからわかる．

この事実をすでにパスカルは認識していた．そして二つの円の場合に証明し，これによって任意の二つの円錐共線で成立することを知っていた．二つの円の場合の証明は，先に「円周角の相等を用いる」でおこなった方法であったと言われている．二つの円の場合はユークリッド平面におけ，そこでは長さや円周角が使える．これを用いて証明した．

「パスカルの定理は射影幾何の定理」にはもう一つの意味がある．つまりその証明もまた射影幾何内部の方法で完結してできるはずだということである．

そのためには射影幾何の公理系から再出発し，必要なことをすべてを再構成しなければならない．われわれはそれを準備してきた．その結果，パスカルの定理を射影幾何の内部で証明することができるようになっている．

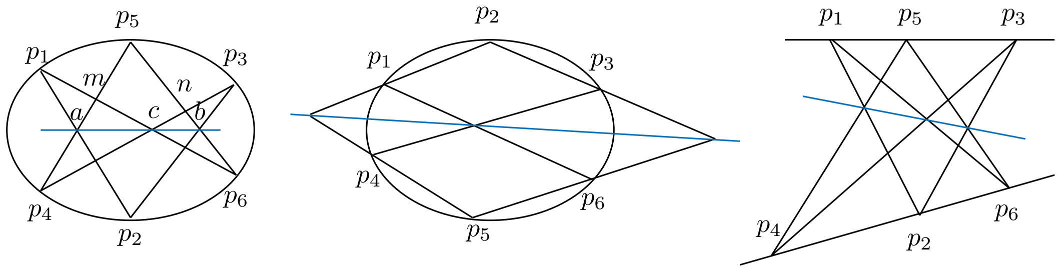
パスカルの定理を再掲し，その証明を射影幾何内部の方法で行おう．

**定理 10**　平面 $P^2$ 上の 6 点 $p_i$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ が一つの円錐曲線 $Q_2^1$ 上にあるための必要十分条件は，3 点

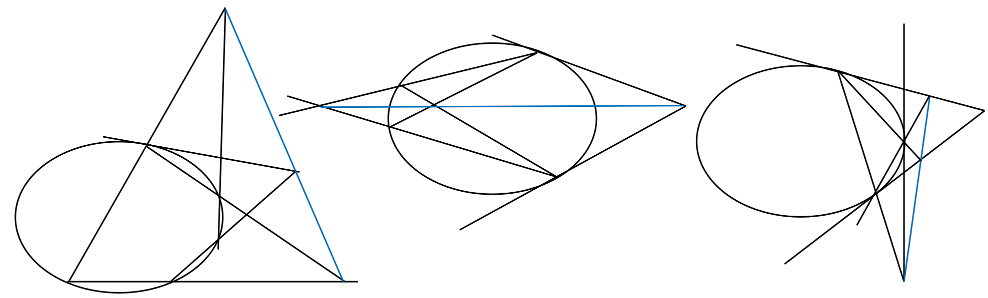
$$(p_1 \vee p_2) \cap (p_4 \vee p_5),\ (p_2 \vee p_3) \cap (p_5 \vee p_6),\ (p_3 \vee p_4) \cap (p_6 \vee p_1)$$

が共線であることである． ■

これは点がどの順に並んでいてもよい．また $Q_2^1$ が正則でなく 2 直線に分解していてもよい．証明は正則な場合で考えるが，それが分解しているときにもそのまま適用されることを追認できる．




**注意 21**　パスカルの定理は，6 点のうちに同じ点があっても良い．円錐曲線上の 2 点を通る直線を，1 点での接線に置きかえてもそのまま成り立つ．これまでの円錐曲線 $Q$ 上の 2 点 $p$, $q$ を結ぶ直線 $p \vee q$ にかかわる命題は，$q = p$ の場合，証明を追跡すれば $p \vee p$ を $p$ での $Q$ の接線とすればそのまま成立する．このことを根拠にして「退化六角形」2.2.2 で示した、パスカルの定理の退化型，つまり，2 点が一致する場合，2 点が二組一致する場合，2 点が三組一致する場合は，公理系から導かれた円錐曲線の場合についても，すべて成り立つ．



**幾何的定義にもとづく証明**

二次曲線の二つの定義の同等性はすでに示されているので，証明の方法によって適切な定義を選べばよい．二次曲線 $Q_2^1$ の定義として定義 27 を用い，この定義のもと，複比で表された射影幾何の基本性質からパスカルの定理が次のように示される．

**証明**

$$a = (p_1 \vee p_2) \cap (p_4 \vee p_5),\ b = (p_2 \vee p_3) \cap (p_5 \vee p_6),\ c = (p_3 \vee p_4) \cap (p_6 \vee p_1)$$

とおく．また

$$m = (p_1 \vee p_6) \cap (p_4 \vee p_5),\ n = (p_3 \vee p_4) \cap (p_5 \vee p_6)$$

とする．複比の相等

$$\begin{array}{rcl} & & [p_5,\ m;\ a,\ p_4] \\ (\text{命題 69 より}) & = & [p_1 \vee p_5,\ p_1 \vee m;\ p_1 \vee a,\ p_1 \vee p_4] \\ & = & [p_1 \vee p_5,\ p_1 \vee p_6;\ p_1 \vee p_2,\ p_1 \vee p_4] \\ (\text{命題 81 より}) & = & [p_3 \vee p_5,\ p_3 \vee p_6;\ p_3 \vee p_2,\ p_3 \vee p_4] \\ & = & [p_5,\ p_6;\ b,\ n] \end{array}$$

が成り立つ．この結果，命題 67 によって 3 直線 $m \vee p_6$，$a \vee b$，$n \vee p_4$ は共点である．つまり $a \vee b$ 上に $c = (m \vee p_6) \cap (n \vee p_4)$ があり，3 点 $a$，$b$，$c$ は共線である．

逆に $a,\ b,\ c$ が共線であるとする．このとき

$$\begin{aligned}
& [p_1 \vee p_5,\ p_1 \vee p_6;\ p_1 \vee p_2,\ p_1 \vee p_4] \\
= \ & [p_1 \vee p_5,\ p_1 \vee m;\ p_1 \vee a,\ p_1 \vee p_4] \\
= \ & [p_5,\ m;\ a,\ p_4] \\
c\text{からの配景写像で} = \ & [p_5,\ p_6;\ b,\ n] \\
= \ & [p_3 \vee p_5,\ p_3 \vee p_6;\ p_3 \vee b,\ p_3 \vee n] \\
= \ & [p_3 \vee p_5,\ p_3 \vee p_6;\ p_3 \vee p_2,\ p_3 \vee p_4]
\end{aligned}$$

線束 $L(p_1)$ の 3 直線 $p_1 \vee p_5,\ p_1 \vee p_6;\ p_1 \vee p_2$ を線束 $L(p_3)$ の 3 直線 $p_3 \vee p_5,\ p_3 \vee p_6;\ p_3 \vee p_2$ にうつす射影写像をとると，線束の複比の定義と命題 64 によって，この射影写像で $p_1 \vee p_4$ も $p_3 \vee p_4$ にうつる．よってこの線束間の射影写像で定まる $Q_2^1$ の上に 6 点 $p_i$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ が存在する． □

この証明は複比で記述したが，二次曲線の射影写像による定義を，配景写像，射影写像の基本性質と結びつけたものである．

### 座標三角形による証明

次に，座標による定義をもとにした証明をおこなおう．すでに「重心座標による証明」がある．これを射影幾何での証明に甦らせよう．

**同次座標と直線**　$P^2$ に枠が定まればこれによって同次座標が定まる．同次座標が $(a_0,\ a_1,\ a_2)$, $(b_0,\ b_1,\ b_2)$ である二点 $q_1,\ q_2$ を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.3}$$

と表される．なぜなら，直線 $q_1 \vee q_2$ 上の点 $(x)$ は媒介変数 $\lambda,\ \mu$ をもちいて

$$(x) = \lambda(q_1) + \mu(q_2)$$

と表される．ただし $(q_i)$ で点 $q_i$ の同次座標を表している．これは $K^3$ における 3 ベクトル $(x)$, $(q_1)$, $(q_2)$ が一次従属であることとで，それはまた 3 ベクトルによる行列式が 0 であることと同値になるからである．そしてこれは 3 点

$$(x) = (x_0,\ x_1,\ x_2),\ (q_1) = (a_0,\ a_1,\ a_2),\ (q_2) = (b_0,\ b_1,\ b_2)$$

が共線である条件でもある．

**座標三角形**　$P^2$ において一般の位置にある 4 点 $p_0,\ p_1,\ p_2,\ u$ による枠 $\mathscr{F} = [p_0,\ p_1,\ p_2,\ u]$ によって同次座標が定まっているとき，三角形 $p_0p_1p_2$ をこの同次座標の**座標三角形**という．座標三角形の頂点である 3 点は，この同次座標に関して

$$(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)$$

となる．この座標三角形を使えば，重心座標によるパスカルの定理の証明を書き直すことができる．

**証明 2**　定理 10 の 3 点 $p_1$, $p_3$, $p_5$ とこれらと一般の位置にある点 $u$ をとり，枠 $\mathscr{F} = [p_1,\ p_3,\ p_5]$ を定める．この同次座標による $Q_2^1$ の方程式を

$$\sum_{i,j=0}^{2} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$$

とする．これが $\triangle p_1 p_3 p_5$ の頂点を通る．頂点の同次座標 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$ が方程式を満たすので，$\alpha_{00} = \alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ である．よって方程式は

$$\alpha_{01} x_0 x_1 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{20} x_2 x_0 = 0$$

となる．枠 $\mathscr{F}$ に関する他の 3 点の座標を

$$p_2(\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2),\ p_4(\nu_0,\ \nu_1,\ \nu_2),\ p_6(\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2)$$

とする．これらが $Q_2^1$ 上にあるので

$$\begin{pmatrix} \mu_0\mu_1 & \mu_1\mu_2 & \mu_2\mu_0 \\ \nu_0\nu_1 & \nu_1\nu_2 & \nu_2\nu_0 \\ \xi_0\xi_1 & \xi_1\xi_2 & \xi_2\xi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数 $\alpha_{ij}$ のすべてが 0 ではないので,

$$\begin{vmatrix} \mu_0\mu_1 & \mu_1\mu_2 & \mu_2\mu_0 \\ \nu_0\nu_1 & \nu_1\nu_2 & \nu_2\nu_0 \\ \xi_0\xi_1 & \xi_1\xi_2 & \xi_2\xi_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.4}$$

である．二点 $p_1(1,\ 0,\ 0)$, $p_2(\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2)$ を通る直線の方程式と，二点 $p_5(0,\ 0,\ 1)$, $p_4(\nu_0,\ \nu_1,\ \nu_2)$ を通る直線の方程式は，それぞれ

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = -(\mu_2 x_1 - \mu_1 x_2) = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = -(\nu_1 x_0 - \nu_0 x_1) = 0$$

となる．これより

$$x_0 : x_1 = \nu_0 : \nu_1, \qquad x_1 : x_2 = \mu_1 : \mu_2$$

なので，$p_1 \vee p_2$ と $p_4 \vee p_5$ の交点 $a$ の座標は

$$(\mu_1\nu_0,\ \mu_1\nu_1,\ \mu_2\nu_1)$$

同様にして，$p_3(0,\ 1,\ 0)$, $p_2(\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2)$ を通る直線の方程式と，$p_5(0,\ 0,\ 1)$, $p_6(\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2)$ を通る直線の方程式

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = (\mu_2 x_0 - \mu_0 x_2) = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} = -(\xi_1 x_0 - \xi_0 x_1) = 0$$

から交点 $b$ を求めると

$$(\mu_0\xi_0,\ \mu_0\xi_1,\ \mu_2\xi_0)$$

また $p_3(0,\ 1,\ 0)$，$p_4(\nu_0,\ \nu_1,\ \nu_2)$ を通る直線の方程式と，$p_1(1,\ 0,\ 0)$，$p_6(\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2)$ を通る直線の方程式

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = (\nu_2 x_0 - \nu_0 x_2) = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} = -(\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2) = 0$$

から交点 $c$ を求めると

$$(\nu_0\xi_2,\ \nu_2\xi_1,\ \nu_2\xi_2)$$

となる．

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \mu_1\nu_0 & \mu_1\nu_1 & \mu_2\nu_1 \\ \mu_0\xi_0 & \mu_0\xi_1 & \mu_2\xi_0 \\ \nu_0\xi_2 & \nu_2\xi_1 & \nu_2\xi_2 \end{vmatrix} \\ = \ & \mu_1\nu_0(\mu_0\xi_1\nu_2\xi_2 - \mu_2\xi_0\nu_2\xi_1) - \mu_1\nu_1(\mu_0\xi_0\nu_2\xi_2 - \mu_2\xi_0\nu_0\xi_2) + \mu_2\nu_1(\mu_0\xi_0\nu_2\xi_1 - \mu_0\xi_1\nu_0\xi_2) \\ = \ & -\mu_0\mu_1(\nu_1\nu_2\xi_0\xi_2 - \nu_0\nu_2\xi_1\xi_2) + \mu_1\mu_2(\nu_0\nu_1\xi_0\xi_2 - \nu_2\nu_0\xi_0\xi_1) - \mu_0\mu_2(\nu_0\nu_1\xi_1\xi_2 - \nu_1\nu_2\xi_0\xi_1) \\ = \ & -\begin{vmatrix} \mu_0\mu_1 & \mu_1\mu_2 & \mu_2\mu_0 \\ \nu_0\nu_1 & \nu_1\nu_2 & \nu_2\nu_0 \\ \xi_0\xi_1 & \xi_1\xi_2 & \xi_2\xi_0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

つまり 3 点 $a,\ b,\ c$ は共線である． □

### 代数的な証明

19 世紀になって代数的証明が見出された．その証明を，これまでの公理的射影幾何で確定した命題のもとに再構成する．ここでは係数体は可換でかつ閉体であるとする．

**補題 17**　射影平面 $P^2$ 上に，任意の 5 点を与えるとき，これらすべてを通る二次曲線 $Q$ が存在する．これらの 5 点のうち，少なくとも 4 点が 1 直線上にないかぎり，$Q$ はただ一つに定まる．■

**証明**　5 点が一般の位置にあるときは命題 82 そのものである．3 点が同一直線上にあるときは，その 3 点で定まる直線と，他の 2 点で定まる直線に分解した二次曲線 $Q$ が一意に定まる．4 点が 1 直線上にあるときは，その 4 点で定まる直線と，他の 1 点を通る直線に分解した二次曲線なので，一意に定まらない． □

パスカルの定理を次の形で再掲する．本書では基本的に射影空間の点は小文字で，ユークリッド空間の点は大文字で表すようにしている．ただ代数的な証明では変数との区別を明確にするために，点を大文字で表す．

$X=(x)$ で同次座標 $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ を表すものとする．また極系を定める行列 $T$ に対し，

$$L(X,\ Y) = {}^tXTY$$

とおく．$T$ が定める二次曲線を $Q$ とし，$f(X)=L(X,\ X)$ とおく．$f(X)=0$ が $Q$ の方程式，$Q$ 上の点 A に対し $L(\mathrm{A},\ X)=0$ は点 A での接線の方程式，$Q$ 上にない点 A に対し $L(\mathrm{A},\ X)=0$ は点 A の極線の方程式である．

**パスカルの定理再掲**

　2 次の同次式で定まる二次曲線 $Q : f(X) = 0$ の上に異なる 6 点 $\mathrm{A}_1$，$\mathrm{B}_1$，$\mathrm{C}_1$ と $\mathrm{A}_2$，$\mathrm{B}_2$，$\mathrm{C}_2$ を取る．

　直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ と直線 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$ の交点を $\mathrm{P}_1$，直線 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_2$ と直線 $\mathrm{C}_1\mathrm{B}_2$ の交点を $\mathrm{P}_2$，直線 $\mathrm{C}_1\mathrm{A}_2$ と直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_2$ の交点を $\mathrm{P}_3$ とする．

　このとき 3 点 $\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_3$ は一直線上にある．■

**証明**　点 $\mathrm{A}_1$ での接線と $\mathrm{B}_2$ での接線の交点を $\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2}$ とかくと，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ は

$$L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X) = 0$$

と表せる．$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ 上の点はこの方程式を満たす．以下同様に記号を定める．
　そこで，次の二次式を満たす曲線

$$C : L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - \alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) = 0$$

を考える．これは $\mathrm{A}_1$，$\mathrm{B}_1$，$\mathrm{A}_2$，$\mathrm{C}_2$ を通る．ここで，

$$\alpha = \frac{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{A}_2}, \mathrm{B}_2)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{C}_2}, \mathrm{B}_2)}{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2}, \mathrm{B}_2)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2}, \mathrm{B}_2)}$$

とおく．$\alpha$ をこのようにとると $C$ は $\mathrm{B}_2$ も通る．
　補題 17 から，$Q$ と $C$ は同一の曲線となる．
　同様に次の二次式を満たす曲線

$$C' : L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) - \beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) = 0$$

を考える．これは $\mathrm{A}_1$，$\mathrm{C}_1$，$\mathrm{A}_2$，$\mathrm{B}_2$ を通る．ここで，

$$\beta = \frac{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2}, \mathrm{B}_1)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{A}_2}, \mathrm{B}_1)}{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2}, \mathrm{B}_1)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2}, \mathrm{B}_1)}$$

とおく．$\beta$ をこのようにとると $C'$ は $\mathrm{B}_1$ も通る．従って同様の理由で $C'$ は $Q$ と一致する．
　二つの二次曲線の同次式は定数倍を除いて一致する．

$$\begin{aligned} & L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - \alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) \\ = \ & k\{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) - \beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)\} \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} & L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - kL(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) \\ = \ & L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)\{\alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - k\beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)\} \end{aligned}$$

この両辺の二次式を考える．
　左辺に $\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_3$ を代入すると 0 になるので，右辺も満たす．そして $\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_3$ は $L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) = 0$ 上にはない．よって，

$$\alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - k\beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X) = 0$$

の上にある．$\mathrm{P}_2$ は明らかにこの式を満たす．ここで，$\mathrm{M} = \alpha\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2} - k\beta\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2}$ と置くとこの式は

$$\begin{aligned} \alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - k\beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X) &= L(\alpha\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2} - k\beta\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X) \\ &= L(\mathrm{M},\ X) \end{aligned}$$

と表される．つまり $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ はすべて 直線 $L(\mathrm{M},\ X) = 0$ の上にある．□

### 4.2.2　双対命題など

#### ブリアンションの定理

$P^2$ におかれた円錐曲線に関するパスカルの定理の双対命題は次のようになる．命題自体は双対原理によってパスカルの定理から成立する．

**命題 95**　二次曲線 $Q_2^1$ は定義 27 によるものとする．平面 $P^2$ 上の 6 直線 $l_i$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ が

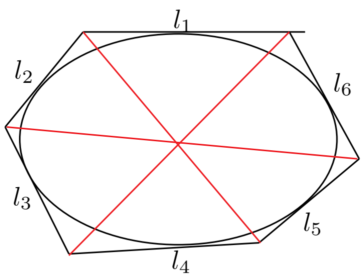
(i) 一つの正則な二次曲線 $Q_2^1$ に接している．

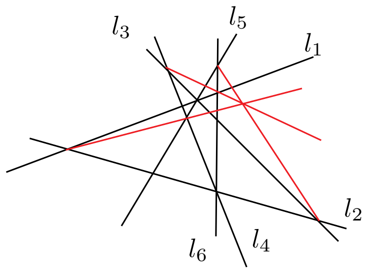
(ii) 2 つの線束に属する．

のいずれかが成り立つための必要十分条件は，3 直線

$$(l_1 \cap l_2) \vee (l_4 \cap l_5),\ (l_2 \cap l_3) \vee (l_5 \cap l_6),\ (l_3 \cap l_4) \vee (l_6 \cap l_1)$$

が共点であることである．■




二次曲線 $Q_2^1$ が正則な場合のこの双対命題を**ブリアンションの定理**という．ブリアンションは 1806 年，二次曲線 $Q_2^1$ が正則な場合にパスカルの定理の双対命題としてこれを得た．パスカルの定理から 150 年後のことであった．

#### パップスの定理

パスカルの定理の証明のうち，複比による証明と代数的な証明は二次曲線が正則であることは用いていない．つまり，$Q$ として 2 直線 $l_1$ と $l_2$ の方程式の積で定まる曲線とできる．これがパップスの定理である．ここで念のために，パップスの定理に特化して代数的証明 4.2.1 を再構成する．

#### パップスの定理再掲

直線 $l_1$ 上に異なる 3 点 $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{B}_1$, $\mathrm{C}_1$ をとり，と直線 $l_2$ 上に異なる 3 点 $\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_2$, $\mathrm{C}_2$ をとる．

直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ と直線 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$ の交点を $\mathrm{P}_1$，直線 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_2$ と直線 $\mathrm{C}_1\mathrm{B}_2$ の交点を $\mathrm{P}_2$，直線 $\mathrm{C}_1\mathrm{A}_2$ と直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_2$ の交点を $\mathrm{P}_3$ とする．

このとき 3 点 $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_3$ は一直線上にある．■

直線 $l_1$, $l_2$ の方程式を $L_1(X)=0$, $L_2(X)=0$ とし，2 次式 $L_1 \cdot L_2(X)$ を考える．

$\mathrm{A_1B_2}$ を通る直線の方程式を $F=0$ とする．以下同様に次のように定める．

$$\begin{aligned} &\mathrm{A_1B_2}: F=0, \quad \mathrm{B_2C_1}: G=0, \quad \mathrm{C_1A_2}: H=0 \\ &\mathrm{A_2B_1}: \overline{F}=0, \quad \mathrm{B_1C_2}: \overline{G}=0, \quad \mathrm{C_2A_1}: \overline{H}=0 \end{aligned}$$

また，直線 $\mathrm{A_1A_2}$ の方程式を $M=0$ とする．方程式

$$\overline{F} \cdot \overline{H}=0,\ \overline{G} \cdot M=0$$

で定まる図形は，いずれも $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{A_1}$, $\mathrm{C_2}$ を通る．したがって式 $\overline{F} \cdot \overline{H}$ と式 $\overline{G} \cdot M$ に $\mathrm{B_2}$ の座標を代入したものの比を $\alpha$ とすると，方程式

$$\overline{F} \cdot \overline{H}-\alpha \overline{G} \cdot M=0$$

は，この 4 点に加えて $\mathrm{B_2}$ も通る．5 点のうちどの 4 点も同じ直線上にはない．ところが $L_1 \cdot L_2=0$ のこの 5 点を通るので，補題 17 から 2 つの 2 次式 $\overline{F} \cdot \overline{H}-\alpha \overline{G} \cdot M$ と $L_1 \cdot L_2$ は定数倍しか違わない．

同様に $F \cdot H=0$，$G \cdot M=0$ は $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{A_1}$, $\mathrm{C_1}$ を通る．$\alpha$ を選んだのと同様に適当な定数 $\beta$ を選ぶと

$$F \cdot H-\beta G \cdot M=0$$

は，この 4 点に加えて $\mathrm{B_1}$ も通るようにできる．5 点のうちどの 4 点も同じ直線上にはない．同じ理由から，2 つの 2 次式 $F \cdot H-\beta G \cdot M$ と $L_1 \cdot L_2$ は定数倍しか違わない．

よって 2 つの 2 次式 $F \cdot H-\beta G \cdot M$ と $\overline{F} \cdot \overline{H}-\alpha \overline{G} \cdot M$ は定数倍しか違わない．$F \cdot H-\beta G \cdot M$ の各 1 次式にその定数をかけ，それを改めてその 1 次式にとりなおすことで，2 つの 2 次式 $F \cdot H-\beta G \cdot M$ と $\overline{F} \cdot \overline{H}-\alpha \overline{G} \cdot M$ は一致するようにできる．

$$\overline{F} \cdot \overline{H}-\alpha \overline{G} \cdot M=F \cdot H-\beta G \cdot M$$

から

$$\overline{F} \cdot \overline{H}-F \cdot H=M(\alpha \overline{G}-\beta G)$$

左辺の式では $\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_3}$ がこの等式を満たすことを示している．この 2 点は $M=0$ は満たさない．よってこの 2 点は 1 次方程式

$$\alpha \overline{G}-\beta G=0$$

を満たす．$\mathrm{P_2}$ も満たすので，これで 3 点が同じ 1 次方程式を満たし，同一直線上にあることが示された． □

# 第5章　幾何の展開

## 5.1　ポンスレの定理

### 5.1.1　定理とその証明

ポンスレ (1788〜1867) はフランス革命後のフランスの人である．ナポレオンの時代に工兵将校としてロシアに遠征し，傷ついて捕虜となり，サラトワの収容所の捕囚生活のなかで昔習ったことを思い出しながら，独力で図形の射影的性質を研究し，射影幾何を再構築した．

高木貞治は『近世数学史談』のなかでポンスレの生涯を次のように感慨深く述べる．文中「Traité の新版」とは,『解析学と幾何学の応用』（”Applications d’analyse et de géométrie”，1862〜1864年）のことである．

> モンジュ門の出藍は射影幾何学の開祖なるポンスレである。ポンスレ (Jean victor PONCELET，1789〜1867) はモンジュ，カルノーとは違って北フランス (Metz) に生れた。工芸学校を出てから工兵少尉としてメッツの実施学校に入り，1812 年の始めナポレオンの征露軍に従い，同年 11 月ロシア軍に捕われて二年間をサラトワの獄舎に送った。幽囚無聊のこの二ヶ年が射影幾何学を生み出したことは数学史上の奇観というべきであろう。ポンスレは同囚の若干のポリテクニシァンを相手にして彼の新学説を講じたという。彼の名著『図形の射影的性質の論』(Traité des propriétés projectives des figures) は平和克復の後，1822 年に至って発行された。中年以後ポンスレはパリに在って軍政に参与し，一時はソルボン (パリ大学）の力学教授でもあったが，後に工芸学校長に任ぜられ，又ロンドン，パリの博覧会に関係し，行政的方面に於て多忙なる一生を送った。それは栄達の一生であったが，晩年 Traité の新版を出す (1864〜66) に際して，俗塵の為に幾何学から遠ざかって，彼の天職と信ずる所に進むことを得なかった不運をかこっている。彼は 1867 年に歿した。
>
> ポンスレの射影幾何学はドイツに於ては Möbius，Steiner，Plücker 及び Staudt に由って，又自国に於ては Chasles に由って継承せられて早かに発展した。ポンスレの歿した 1867 年は Salmon の幾何学三部書が完成した後五年である。五十年前に紅顔の青年士官がサラトワの獄舎の徒然に播いた種から思いも寄らない大森林が生じた。古典になった旧著の新版の校正刷を読みつつ，白髪の老将官は今昔の感に湛えなかったであろう。

射影幾何や非ユークリッド幾何が発展した幾何学の黄金時代とは，西洋世界の激動期でもあった．その時代の中に生まれたポンスレの定理を学ぼう．ポンスレの方法につながる射影幾何的方法，その後見出された代数的方法，ポンスレの定理の表明のすぐあとに示されたヤコビの解析的方法，そして近年再発見されてきた代数幾何的方法，がある．ここでは高校数学の基礎研究として解析的方法までを先ず示そう．

以下係数体 $K$ は複素数体 $\mathbb{C}$ であるとする．くりかえしになるが，公理系から構築されてきた射影幾何において「図」はユークリッド平面におかれた図形の点や直線ではないことを確認したい．あくまで，共線，共点関係の象徴的な記号として用いる．係数体が複素数体の射影幾何の命題を，実数平面に描いて考えることができるというところに，点と直線とそれらの共線，共点関係だけから構成された射影幾何の本質がある．

**定理 11 (ポンスレの閉形定理)**　二つの二次曲線 $Q_0$ と $Q_1$ がある．$Q_0$ 上の点 $p_1$ をとる．

(i) 点 $p_1$ から $Q_1$ にひいた接線が $p_1$ と異なる点でも $Q_0$ と交わるとする．この点を $p_2$ とする．

(ii) $i = 2, \cdots$ に対して $Q_0$ 上の点 $p_i$ から $Q_1$ に引いた接線が，$p_{i-1}$，$p_i$ とは異なる点でも $Q_0$ と交わるとする．この点を $p_{i+1}$ とする．

(iii) (i)，(ii) の条件の下で $p_n = p_1$ となる番号 $i = n$ が存在する．

この条件を満たす点 $p_1$ が存在すれば，(i)(ii) が成り立つ任意の点 $p_1$ に対して (iii) が成り立つ．■

これを**ポンスレの閉形定理**という．ポンスレの閉形定理を定式化するときにつきまとう問題の一つに，例外をどのように除くかということがある．この定式化は，各 $p_i$ が $Q_0$ と $Q_1$ の交点でなく，接線も共有接線ではないものが一組とれることと同値である．

ポンスレの定理はパスカルの定理と同じく射影幾何の定理である．その意味をくりかえせば，ポンスレの定理は射影平面におかれた二つの円錐曲線に関する射影幾何の命題であり，その真偽は射影変換で保存される．したがって，二つの円錐曲線を射影変換で変換可能な単純な場合に証明すれば，一般の円錐曲線で成立する．

後に示すその根拠となる定理 13 を**ポンスレの定理**という．あるいは閉形定理のこともポンスレの定理という．円錐曲線の非常に美しい定理とて名高い．幾何的な証明，代数的な証明，そして代数幾何的な証明がある．代数幾何的証明は，楕円曲線の準備がいる．

### 対合定理による証明

**$n = 3$ の場合の証明**　$Q_0$ に内接し $Q_1$ に外接する三角形 $a_1a_2a_3$ がある．他方 $Q_0$ 上の 4 点 $b_1$，$b_2$，$b_3$，$c$ で 3 直線 $b_1 \vee b_2$，$b_2 \vee b_3$，$b_3 \vee c$ が $Q_1$ に接しているなら，$c = b_1$ となることを意味する．

命題 83 によって三角形 $a_1a_2a_3$ と三角形 $b_1b_2b_3$ に内接する円錐曲線 $Q$ が存在する．$Q$ と $Q_1$ は三角形 $a_1a_2a_3$ の接点，$b_1 \vee b_2$，$b_2 \vee b_3$ の接点の 5 点を共有している．命題 82 によって 5 点を指定すれば円錐曲線は一意に定まるので，$Q = Q_1$ である．

よって $c = b_1$ となり，任意の点についてそれを頂点の一つとする同様の三角形が存在する．□

**$n = 4$ の場合の証明**　$Q_0$ に内接し $Q_1$ に外接する四角形 $a_1a_2a_3a_4$ がある．他方 $Q_0$ 上の 5 点 $b_1$，$b_2$，$b_3$，$b_4$，$c$ で 4 直線 $b_1 \vee b_2$，$b_2 \vee b_2$，$b_3 \vee b_4$，$b_4 \vee c$ が $Q_1$ に接するなら，$c = b_1$ となることを意味する．

命題 87.1 によって

$$[b_2 \vee a_1,\ b_2 \vee a_2;\ b_2 \vee b_1,\ b_2 \vee b_3] = [b_2 \vee a_3,\ b_2 \vee a_4;\ b_2 \vee b_3,\ b_2 \vee b_1]$$

が成立し，直線対

$$(b_2 \vee a_1,\ b_2 \vee a_3),\ (b_2 \vee a_2,\ b_2 \vee a_4),\ (b_2 \vee b_1,\ b_2 \vee b_3)$$

が対合をなす．これを $Q_0$ 上でみれば点対

$$(b_1,\ b_3),\ (a_1,\ a_3),\ (a_2,\ a_4)$$

は対合をなす．よって命題 86 によって 3 直線

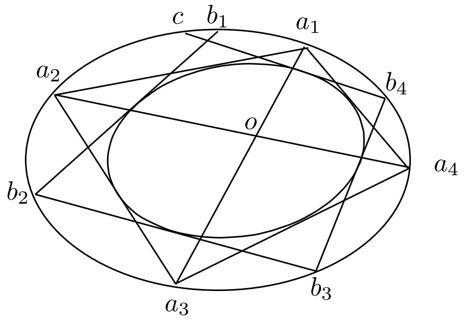
$$b_1 \vee b_3,\ a_1 \vee a_3,\ a_2 \vee a_4$$

は共線である．この点を $o$ とする．

$b_2$ に代えて $b_4$ をとることにより

$$b_4 \vee c,\ a_1 \vee a_3,\ a_2 \vee a_4$$

は共点である．よって $b_3 \vee c$ も点 $o$ を通り，$c = b_1$ である． □




**一般の場合の証明** ポンスレの閉形定理 11 を，曲線束を用いてやや一般的な形で定式化し，それを証明する．曲線束はポンスレ自身の基本的な方法だった．そのためにいくつかの命題を示す．

**定理 12** 円錐曲線 $Q_0$ に内接する四辺形 $abcd$ の辺 $a \vee b,\ c \vee d$ と円錐曲線 $Q_1$ が接するとき，$Q_0,\ Q_1$ で定まる曲線束に属する円錐曲線 $Q_2$ で辺 $a \vee c,\ b \vee d$ と接するものが存在する． ■

**証明** $Q_0,\ Q_1$ の 4 交点を $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\}$ とする．これらの中に同じものがあってもよい．また $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\}$ で定まる曲線束を $A$，$\{a,\ b,\ c,\ d\}$ で定まる曲線束を $B$ とする．

(1) $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ の中に異なるものが 3 個以上ある場合．

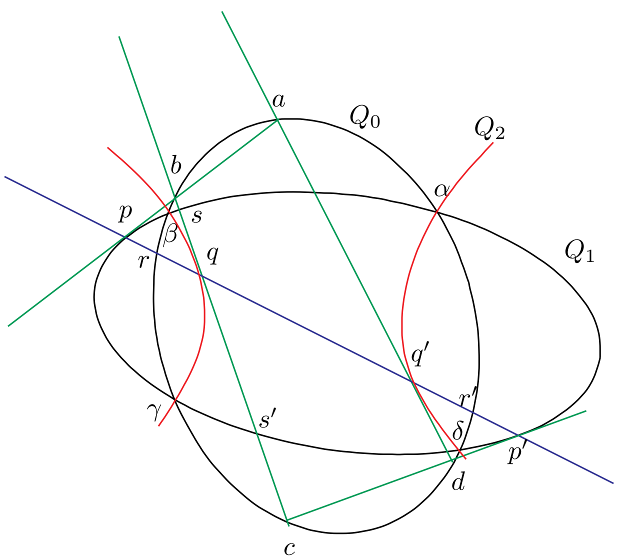
$a \vee b,\ c \vee d$ と $Q_1$ の接点を $p,\ p'$ とし，$l = p \vee p'$ とする．$l$ と $b \vee c,\ a \vee d$ の交点をそれぞれ $q,\ q'$ とし，さらに $l$ と $Q_0$ との交点を $\{r,\ r'\}$，$b \vee c$ と $Q_1$ との交点を $\{s,\ s'\}$ とする．

点 $q$ は $Q_0,\ Q_1$ 上にないので，曲線束 $A$ の要素で，点 $q$ を通るものが一意に存在する．これを $Q_2$ とする．

デザルグの対合定理 86 の証明を曲線束 $B$ に適用して，三つの点対

$$(p,\ p'),\ (q,\ q'),\ (r,\ r')$$

は同一の対合に属する．曲線束 $A$ にデザルグの対合定理 86 の証明を適用すると，点対 $(p,\ p'),\ (r,\ r')$ で定まる対合で，点 $q$ と対合となる点が定まるが，2 点の対応を定めれば対合は一意なので，この点が $q'$ に他ならない．よって $Q_2$ は $q'$ を通る．



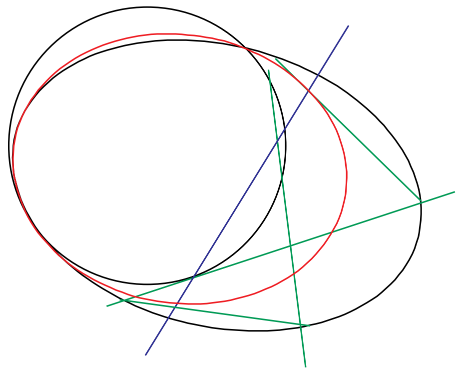
次に円錐曲線 $Q_2$ は点 $q,\ q'$ で $b \vee c,\ a \vee d$ と接することを示す．再びデザルグの対合定理の証明と同様にして

$$\begin{aligned}[q,\ c;\ s,\ s'] &= [p' \vee q,\ p' \vee c;\ p' \vee s,\ p' \vee s'] = [p,\ p';\ s,\ s'] \\ &= [p \vee p,\ p \vee p';\ p \vee s,\ p \vee s'] = [b,\ q;\ s,\ s'] = [q,\ b;\ s',\ s]\end{aligned}$$

よって点対 $(b,\ c)$, $(s,\ s')$ で定まる対合に関して $q$ は自己対合である．点対 $(b,\ c)$, $(s,\ s')$ で定まる対合は曲線束 $A$ を $b \vee c$ で切った直線上の対合でもある．よって $q$ は $Q_2$ 上の点としてこの対合で自己対合である．つまり $Q_2$ は $q$ で $b \vee c$ に接する．$q'$ についても同様である．

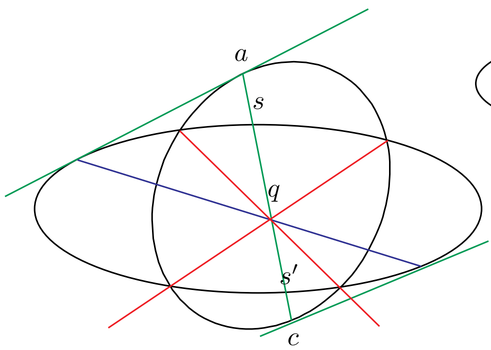
この証明は $a = b$ の場合もそのまま通用する．他の 2 点が一致するときは，点の名前をつけ替えればよい．

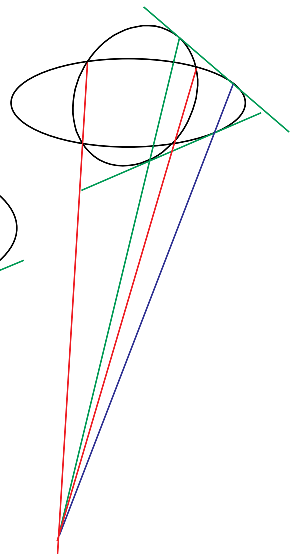
**注意 22**　また $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ に同じものがあるときも証明はそのままでよい．例えば $Q_0$ と $Q_1$ が 3 重に接している場合もこの証明の中で示せている．このような場合，複素射影空間で考えているので，少しずらして一般の場合に証明し，その極限をとれば成立は明らかだと考えることができる．しかし，今はあくまで射影幾何の公理のみを根拠とする論証を積みあげるのであるから，連続に関する公理を用いることはしない．



(2)　$a = b,\ c = d$ の場合．

2 直線 $a \vee c$ と $p \vee p'$ の交点を $q$ とする．(1) の証明の後半と同様に，$(a,\ c)$, $(s,\ s')$ で定まる対合に関して $q$ は自己対合である．一方，2 直線 $\alpha \vee \gamma$, $\beta \vee \delta$ の積は曲線束 $A$ に属する分解した二次曲線である．曲線束 $A$ の直線 $a \vee c$ 上の対合に関して 2 直線 $\alpha \vee \gamma$, $\beta \vee \delta$ の積の自己対合点はその交点である．よって $q$ は 2 直線 $\alpha \vee \gamma$, $\beta \vee \delta$ の交点と一致する．かくして 2 直線 $\alpha \vee \gamma$, $\beta \vee \delta$ の積が直線 $a \vee c$ と 1 点を共有し，これが求める $Q_2$ である．



その他の点が一致する場合，実平面上では右図のようになるときもある．証明は同じである．□

**別証明**　$Q_0$ と $Q_1$ の 4 交点のうち 2 点を射影変換で点 $(1,\ \pm i,\ 0)$ にうつす．このとき，$Q_0$ と $Q_1$ を実平面で切ると 2 円が得られる．直線と点の共線，共点の関係は，実平面を距離空間と見なしても同様である．対応する実平面上の点は大文字で表す．また二直線 AB と CD のなす角を $\angle(\mathrm{AB},\ \mathrm{CD})$ のように表す．

実平面の円束に関する補題を確認しよう．

**補題 18**　与えられた二つの円への接線の長さの比が一定値 $\lambda$ になる点の軌跡は，2 円で定まる円束の円である．■

**証明**　2 円を $Q_0$，$Q_1$，中心を $\mathrm{O}_0$，$\mathrm{O}_1$ とし，その方程式を

$$\begin{aligned} Q_0 &\ :\ (x-a_0)^2+(y-b_0)^2-{r_0}^2=0 \\ Q_1 &\ :\ (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-{r_1}^2=0 \end{aligned}$$

とする．点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ から $Q_0$，$Q_1$ への接点を $\mathrm{T}_0$，$\mathrm{T}_1$ とする．三平方の定理から

$$\begin{aligned} \mathrm{PT}_0^2 &= P\mathrm{O}_0^2-{r_0}^2=(X-a_0)^2+(Y-b_0)^2-{r_0}^2 \\ \mathrm{PT}_1^2 &= P\mathrm{O}_1^2-{r_1}^2=(X-a_1)^2+(Y-b_1)^2-{r_1}^2 \end{aligned}$$

よって $(X,\ Y)$ の条件は方程式

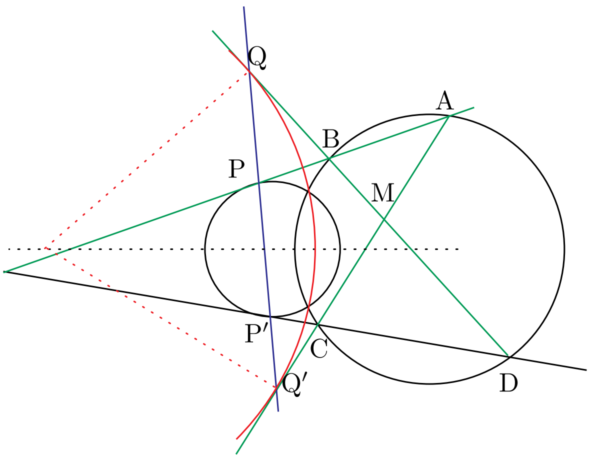
$$(X-a_0)^2+(Y-b_0)^2-{r_0}^2+\lambda^2\{(X-a_1)^2+(Y-b_1)^2-{r_1}^2\}=0$$

をみたすこととなり，点 P の軌跡は方程式

$$(x-a_0)^2+(y-b_0)^2-{r_0}^2+\lambda^2\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-{r_1}^2\}=0$$

である．これは点 P の軌跡が 2 円で定まる円束の円であることを示している．□

これから次のような別証明ができる．




円周角の定理によって $\angle(\mathrm{BQ},\ \mathrm{BP})=\angle(\mathrm{CQ'},\ \mathrm{CP'})$，$\angle(\mathrm{PB},\ \mathrm{PQ})=\angle(\mathrm{P'C},\ \mathrm{P'Q'})$ である．よって三角形 BPQ と CP′Q′ は相似であり $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BQ}}=\dfrac{\mathrm{CP'}}{\mathrm{CQ'}}$ である．同様にして三角形 APQ′ と DP′Q は相似であり $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AQ'}}=\dfrac{\mathrm{DP'}}{\mathrm{DQ}}$ である．

三角形の正弦定理から

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\sin\angle(\mathrm{PB},\ \mathrm{PQ})}=\frac{\mathrm{BP}}{\sin\angle(\mathrm{QP},\ \mathrm{QB})},\qquad \frac{\mathrm{AQ'}}{\sin\{\pi-\angle(\mathrm{PA},\ \mathrm{PQ})\}}=\frac{\mathrm{AP}}{\sin\angle(\mathrm{Q'P'},\ \mathrm{Q'C})}$$

これより

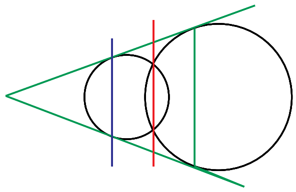
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BQ}}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AQ'}},$$

以上から

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BQ}}=\frac{\mathrm{CP}'}{\mathrm{CQ}'}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AQ}'}=\frac{\mathrm{DP}'}{\mathrm{DQ}}$$

直線ACとBDの交点をMとすると，三角形$\mathrm{MQQ}'$は二等辺三角形で$\mathrm{MQ}=\mathrm{MQ}'$となる．よって2点Q, $\mathrm{Q}'$でMQ, $\mathrm{MQ}'$に接する円$Q_2$が存在する．

$Q_0$上の4点A, B, C, Dから$Q_1$, $Q_2$への接線の長さの比はすべて等しく．円$Q_0$は$Q_1$，$Q_2$と同じ円束に属する．いいかえれば$Q_2$は円$Q_0$は$Q_1$で定まる円束の円である．



$a=b$, $c=d$の場合は$Q_0$と$Q_1$の他の2共有点を結ぶ直線が平行となり，2虚点を結ぶ無限遠直線$z=0$の4直線が共点となることから示される．

2円での結論を　射影変換でもとに戻すことにより，命題が示される．

□

**命題 96**　曲線束$A$に属する円錐曲線$Q_0$, $Q_1$, $Q_2$がある．$i=1,\ 2$に対し，$Q_0$上の点$p$から$Q_i$に接線$l_i$を引く．$Q_0$の点$q_i$で$l_i=p\vee q_i$となるものをとる．このとき直線$q_1\vee q_2$と接する曲線束$A$の円錐曲線$Q_3$が存在する．■

**証明**　$Q_0$には$p$と異なる点が存在するので，他の点$p'$をとる．$i=1,\ 2$に対し，点$p'$から$Q_i$に接線$l_i{}'$を引く．$Q_0$の点$q_i{}'$で$l_i{}'=p'\vee q_i{}'$となるものをとる．

$i=1,\ 2$に対し，$p\vee q_i$と$p'\vee q_i{}'$がともに$Q_i$に接するので，定理12より$p\vee p'$と$q_1\vee q_1{}'$が接する曲線束の円錐曲線と$p\vee p'$と$q_2\vee q_2{}'$が接する曲線束の円錐曲線が存在する．$p\vee p'$に接する曲線束の要素は一意に定まるので，これらの円錐曲線は同一である．これを$Q'$とする．$q_1\vee q_1{}'$と$q_2\vee q_2{}'$がともに$Q'$に接するので，再び定理12より直線$q_1\vee q_2$が接する曲線束$A$の円錐曲線$Q_3$が存在する．□

**定理 13 (ポンスレの定理)**　自然数$n$を$n\geqq 3$とする．与えられた円錐曲線$Q_0$上に頂点をもつ$n$角形$a_1a_2\cdots a_n$がある．辺$a_1\vee a_2$, $\cdots$, $a_{n-1}\vee a_n$はそれぞれ$Q_0$と同じ曲線束に属する円錐曲線$Q_1$, $Q_2$, $\cdots$, $Q_{n-1}$に接している．このとき残る辺$a_n\vee a_1$も同じ曲線束に属するある円錐曲線$Q$に接する．■

**証明**　この曲線束を$A$とする．$n$に関する数学的帰納法で示す．$n=3$のときは，命題96において，$p$, $q_1$, $q_2$を$a_2$, $a_1$, $a_3$とすることによって，$a_3\vee a_1$が接する$A$の要素が存在することが示された．

$n-1$のとき成立するとする．$a_{n-1}\vee a_1$が接する曲線束$A$に属する円錐曲線$Q'$が存在する．一方$a_{n-1}\vee a_n$は$Q_{n-1}$に接している．命題96において，$p$, $q_1$, $q_2$を$a_{n-1}$, $a_n$, $a_1$とすることによって，$a_n\vee a_1$が接する$A$の要素が存在することが示された．

よって$n\geqq 3$に対してつねに成立する．□

**定理 14 (閉形定理)**　自然数$n$を$n\geqq 3$とする．与えられた円錐曲線$Q_0$上に頂点をもつ$n$角形$a_1a_2\cdots a_n$で，辺$a_1\vee a_2$, $\cdots$, $a_{n-1}\vee a_n$, $a_n\vee a_1$が一つの円錐曲線$Q_1$に接しているものが存在する．このとき，$Q_0$上の任意の点$p_1$をとり，順次$p_i$ $(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$を$p_{i-1}\vee p_i$が$Q_1$に接するようにとる．このとき残る辺$p_n\vee p_1$も$Q_1$に接する．■

**証明**　$i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$に対して$a_{i-1}\vee a_i$と$p_{i-1}\vee p_i$が$Q_1$に接するので，定理12より$a_{i-1}\vee p_{i-1}$と$a_i\vee p_i$が同じ曲線束$A$の同じ円錐曲線に接する．定直線に接する曲線束の要素は一意に定ま

るので，$a_i \vee p_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ は同じ円錐曲線 $Q'$ に接する．この結果，再び定理 12 より $p_n \vee p_1$ と $a_n \vee a_1$ も同じ曲線束の同じ円錐曲線に接する．つまり $p_n \vee p_1$ も $Q_1$ に接することが示された．$\square$

**線型代数による証明**

『数学対話』の中の「ポンスレの定理」では，楕円 $Q_0$ と円 $Q_1$，放物線 $Q_0$ と円 $Q_1$，円 $Q_0$ と円 $Q_1$ に関して，$Q_0$ に内接し $Q_1$ に外接する三角形が存在するための条件を具体的に求めた．驚くべきことに，このような条件を一般の二次曲線に対して書くことができる．さらに，この方法を用いて前小節の命題 96 を証明する．ポンスレの定理はこの系から示されるので，これはポンスレの定理の別証明となっている．また同様に四角形でも条件を導くことが出来る．それも続いて行う．

**二次曲線の行列表示**　実数体 $\mathbb{R}$ 上または複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 2 次元射影平面 $P^2$ をとり，その座標系を $(x) = (x_0,\ x_1,\ x_2)$ で表す，3 次対称行列の定数倍に関する同値類を考える．ある同値類の 3 次対称行列 $T = (a_{ij})$ $(0 \leqq i,\ j \leqq 2)$ をとる．$a_{ij} = a_{ji}$ である．二次曲線 $Q$ が 2 次同次方程式

$$^t(x)T(x) = 0$$

で定まっているとする．また左辺の 2 次同次式を $f_Q(x)$ とする．

$$f_Q(x) = a_{00}{x_0}^2 + a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{20}x_2x_0$$

となる．

$P^2$ の射影変換 $\varphi$ がある．それに対応する 3 次行列が $A = (\alpha_{ij})$ であるとする．射影変換 $\varphi$ で二次曲線 $Q$ が $Q'$ に変換されるとする．$Q'$ 上の点 $(x')$ が $Q$ 上の点 $(x)$ に対応するとすれば，$(x') = A(x)$，つまり $(x) = A^{-1}(x')$．この $(x)$ がもとの関係式を満たすので，$^t(x')^tA^{-1}TA^{-1}(x') = 0$ である．この $(x')$ を改めて $(x)$ ととり直すことにより，$Q'$ の方程式は $T' = {}^tA^{-1}TA^{-1}$ を用いて

$$^t(x)T'(x) = 0$$

と表される．したがって，$Q$ を定めるある対称行列 $T$ の行列式 $|T|$ と，それから定まる $Q'$ の対称行列 $T'$ の行列式 $|T'|$ の間には

$$|T'| = |A|^{-2}\,|T|$$

なる関係がある．

**曲線束不変量**　二つの二次曲線 $Q_0$ と $Q_1$ がある．それぞれを定める対称行列を $C = (a_{ij})$，$D = (b_{ij})$ とする．$f_{Q_0}(x)$，$f_{Q_1}(x)$ を簡単のために $f_0$，$f_1$ とおく．

二つの二次曲線 $Q_0$ と $Q_1$ で定まる曲線束とは，二次曲線の集合

$$\{\ Q \mid f_Q = sf_0 + tf_1,\ (s,\ t) \in P^1\ \}$$

である．係数体が代数的閉体の場合，これはまた $Q_0$ と $Q_1$ の 4 つの交点を通る二次曲線の集合でもある．$sf_0 + tf_1 = 0$ で定まる二次曲線の行列は行列 $sC + tD$ の属する類である．

**定義 29**　その行列式 $|sC + tD|$ は $s$ と $t$ の 3 次同次式である．これによって定まる楕円曲線

$$u^2t = |sC + tD|\,,\ 単位点 = (t,\ s,\ u) = (0,\ 1,\ 1)$$

を**線束楕円曲線**という．

一般に，射影平面上の曲線で $x$ の 3 次または 4 次式 $f(x)$ を用いて非斉次座標で $y^2 = f(x)$ で表され，特異点をもたない曲線と曲線上の指定された点 (単位点) の組を楕円曲線という．

**命題 97**　線束楕円曲線において，円錐曲線のある射影平面に射影変換を施すなら，$|sC+tD|$ は定数倍しか変わらない．その結果，座標 $u$ を定数倍とりなおすことで線束楕円曲線は不変である．■

**証明**

$$\begin{aligned}
|sC+tD| &= \begin{vmatrix} sa_{00}+tb_{00} & sa_{01}+tb_{01} & sa_{20}+tb_{20} \\ sa_{01}+tb_{01} & sa_{11}+tb_{11} & sa_{12}+tb_{12} \\ sa_{20}+tb_{20} & sa_{12}+tb_{12} & sa_{22}+tb_{22} \end{vmatrix} \\
&= s^3|C| + s^2t\Theta_1 + st^2\Theta_2 + t^3|D|
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= b_{00}C_{00} + b_{11}C_{11} + b_{22}C_{22} + 2b_{01}C_{01} + 2b_{12}C_{12} + 2b_{20}C_{20} \\
\Theta_2 &= a_{00}D_{00} + a_{11}D_{11} + a_{22}D_{22} + 2a_{01}D_{01} + 2a_{12}D_{12} + 2a_{20}D_{20}
\end{aligned}$$

ただし，$C_{ij}$ は行列 $C$ の $a_{ij}$ に対する余因子，$D_{ij}$ についても同様であるとする．

ここで上記のように行列 $A$ で定まる射影変換を施す．このとき $sC+tD$ は ${}^tA^{-1}(sC+tD)A^{-1}$ に，$C$ と $D$ は ${}^tA^{-1}CA^{-1}$ と ${}^tA^{-1}DA^{-1}$ になる．また $\Theta_1$，$\Theta_2$ はそれぞれ $\Theta_1'$，$\Theta_2'$ になるとする．

$$\begin{aligned}
& s^3\left|{}^tA^{-1}CA^{-1}\right| + s^2t\Theta_1' + st^2\Theta_2' + t^3\left|{}^tA^{-1}DA^{-1}\right| \\
=& \left|s{}^tA^{-1}CA^{-1} + t{}^tA^{-1}DA^{-1}\right| \\
=& \left|{}^tA^{-1}(sC+tD)A^{-1}\right| = |A|^{-2}|sC+tD| \\
=& |A|^{-2}\left(s^3|C| + s^2t\Theta_1 + st^2\Theta_2 + t^3|D|\right)
\end{aligned}$$

これが任意の $s$ と $t$ で成り立つ．よって

$$\Theta_1' = |A|^{-2}\Theta_1,\ \Theta_2' = |A|^{-2}\Theta_2$$

である．これは曲線束を定める二つの 3 次行列に対し，その成分 $a_{ij}$，$b_{ij}$ からなる 3 次同次式

$$|C|,\ \Theta_1,\ \Theta_2,\ |D|$$

が，行列 $A$ で表される射影変換によっていずれも $|A|^{-2}$ だけ変化することを意味している．したがって $C$，$D$ を固定すれば，比

$$|C|\ :\ \Theta_1\ :\ \Theta_2\ :\ |D|$$

は射影変換で不変である．したがって，$u$ を定数倍にとりなおすことで線束楕円曲線を不変にできる．□

比

$$|C|\ :\ \Theta_1\ :\ \Theta_2\ :\ |D|$$

を**線束不変量**という．これは射影変換で不変である．

**定理 15**　二つの非退化二次曲線 $Q_0$ と $Q_1$ があり，それぞれを定める対称行列 $C$，$D$ をとる．また，$\Theta_1$，$\Theta_2$ はそれから上記のように定義されるものとする．

(i) 関係式

$$\Theta_2{}^2 - 4\,|D|\,\Theta_1 = 0 \tag{5.1}$$

がある $C$，$D$ で成立すれば，行列 $C$，$D$ のとり方によらず成立し，また $Q_0$，$Q_1$ にある射影変換を施しても成立する．

(ii) 二次曲線 $Q_0$ 上に頂点をもち 3 辺が $Q_1$ に接する三角形が存在する必要十分条件は，関係式 (5.1) が成立することである．

(iii) 二次曲線 $Q_0$ 上に頂点をもち 3 辺が $Q_1$ に接する三角形がひとつ存在すれば，$Q_0$ 上の任意の点 $p$ に対し，二次曲線 $Q_0$ 上に頂点をもち 3 辺が $Q_1$ に接する三角形 $pqr$ が存在する． ■

**証明**

(i) $C$，$D$ を $cC$，$dD$ にかえると，$\Theta_2{}^2$ は $c^2d^4$ 倍され，$|D|\,\Theta_1$ は $d^3 \times dc^2 = c^2d^4$ 倍される．また行列 $A$ による射影変換でいずれもが $|A|^{-4}$ 倍される．よって関係式 (5.1) が成立するか否かは，行列 $C$，$D$ のとり方によらず確定し，また $Q_0$，$Q_1$ にある射影変換を施したもので成立すれば $Q_0$，$Q_1$ で成立する．つまりこの関係式が成立するという条件は，二つの二次曲線 $Q_0$，$Q_1$ の組に固有の性質である．

(ii)

1) 必要条件であることを示す.

二次曲線 $Q_0$ 上に頂点をもち 3 辺が $Q_1$ に接する三角形 $pqr$ が存在するものとする．3 点 $p$，$q$，$r$ を枠の 3 点にうつす射影変換を行うことにより，この 3 点の同次座標を (0, 0, 1)，(0, 1, 0)，(1, 0, 0) とできる．この 3 点が $Q_0$ 上にあるので，$a_{00} = a_{11} = a_{22} = 0$ である．つまり

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{20} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ a_{20} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}, \qquad f_0(x) = 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{20}x_2x_0$$

である．また 3 直線 $p \vee q$，$q \vee r$，$r \vee p$ の方程式は $x_0 = 0$，$x_2 = 0$，$x_1 = 0$ である．

$x_0 = 0$ と $f_1(x) = 0$ を連立して

$$f_1(0,\ x_1,\ x_2) = b_{11}x_1{}^2 + b_{22}x_2{}^2 + 2b_{12}x_1x_2 = 0$$

となるが，直線 $p \vee q$ が $Q_1$ に接するので，この同次 2 次方程式が重根をもつ．他も同様．よってその判別式を考えることにより

$$b_{12}{}^2 = b_{11}b_{22},\ b_{01}{}^2 = b_{00}b_{11},\ b_{20}{}^2 = b_{22}b_{00} \tag{5.2}$$

である．これは余因子で言えば

$$D_{00} = D_{11} = D_{22} = 0$$

である．よって

$$\begin{aligned} |D| &= b_{01}D_{01} + b_{20}D_{20} \\ &= -b_{01}(b_{01}b_{22} - b_{12}b_{20}) + b_{20}(b_{01}b_{12} - b_{11}b_{20}) \\ &= -b_{00}b_{11}b_{22} + 2b_{01}b_{12}b_{20} - b_{22}b_{00}b_{11} = 2(b_{01}b_{12}b_{20} - b_{00}b_{11}b_{22}) \end{aligned}$$

$(b_{01}b_{12}b_{20})^2 = (b_{00}b_{11}b_{22})^2$ であるが，$|D| \neq 0$ より

$$b_{01}b_{12}b_{20} = -b_{00}b_{11}b_{22} \tag{5.3}$$

である．よって

$$|D| = -4b_{00}b_{11}b_{22}.$$

以下 (5.2)，(5.3) を用いて計算する．

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= b_{00}(-{a_{12}}^2) + b_{11}(-{a_{20}}^2) + b_{22}(-{a_{01}}^2) \\ &\qquad +2b_{01}a_{12}a_{20} + 2b_{12}a_{01}a_{20} + 2b_{20}a_{01}a_{12}\end{aligned}$$

ここで

$$|D|\, b_{00}(-{a_{12}}^2) = 4{b_{00}}^2 b_{11}b_{22}({a_{12}}^2) = 4(b_{00}b_{12}a_{12})^2$$

などより

$$\begin{aligned}4\,|D|\,\Theta_1 &= 16\left\{(b_{00}b_{12}a_{12})^2 + (b_{11}b_{20}a_{20})^2 + (b_{22}b_{01}a_{01})^2\right\} \\ &\qquad -32b_{00}b_{11}b_{22}\,(b_{01}a_{12}a_{20} + b_{12}a_{01}a_{20} + b_{20}a_{01}a_{12})\end{aligned}$$

一方

$$\Theta_2 = 2(a_{01}D_{01} + a_{12}D_{12} + a_{20}D_{20})$$

である．ここで

$$\begin{aligned}(D_{01})^2 &= (b_{01}b_{22} - b_{12}b_{20})^2 = {b_{01}}^2{b_{22}}^2 - 2b_{01}b_{22}b_{12}b_{20} + {b_{12}}^2{b_{20}}^2 \\ &= 2b_{00}b_{11}{b_{22}}^2 - 2b_{01}b_{22}b_{12}b_{20} = 2b_{22}(b_{00}b_{11}b_{22} - b_{01}b_{12}b_{20}) \\ &= 4b_{22}b_{00}b_{11}b_{22} = 4{b_{01}}^2{b_{22}}^2\end{aligned}$$

同様に

$$(D_{12})^2 = 4{b_{12}}^2{b_{00}}^2,\ (D_{20})^2 = 4{b_{20}}^2{b_{11}}^2$$

である．また

$$\begin{aligned}D_{01}\cdot D_{12} &= (b_{01}b_{22} - b_{12}b_{20})(b_{00}b_{12} - b_{01}b_{20}) \\ &= b_{01}b_{22}b_{00}b_{12} - {b_{12}}^2 b_{20}b_{00} - {b_{01}}^2 b_{22}b_{20} + b_{12}{b_{20}}^2 b_{01} \\ &= b_{00}b_{22}b_{01}b_{12} - b_{00}b_{11}b_{22}b_{20} - b_{00}b_{11}b_{22}b_{20} + b_{00}b_{22}b_{01}b_{12} \\ &= 2b_{00}b_{22}b_{01}b_{12} - 2b_{00}b_{11}b_{22}b_{20} = 2{b_{20}}^2 b_{01}b_{12} - 2b_{00}b_{11}b_{22}b_{20} \\ &= -4b_{00}b_{11}b_{22}b_{20} \\ D_{12}\cdot D_{20} &= -(b_{00}b_{12} - b_{01}b_{20})(b_{01}b_{12} - b_{11}b_{20}) \\ &= -{b_{12}}^2 b_{00}b_{01} + {b_{01}}^2 b_{20}b_{12} + b_{00}b_{12}b_{11}b_{20} - b_{01}{b_{20}}^2 b_{11} \\ &= -2b_{00}b_{11}b_{22}b_{01} + 2{b_{01}}^2 b_{20}b_{12} = -4b_{00}b_{11}b_{22}b_{01} \\ D_{20}\cdot D_{01} &= -(b_{01}b_{12} - b_{11}b_{20})(b_{01}b_{22} - b_{12}b_{20}) \\ &= -{b_{01}}^2 b_{12}b_{22} + b_{11}b_{20}b_{01}b_{22} + {b_{12}}^2 b_{20}b_{01} - b_{11}b_{12}{b_{20}}^2 \\ &= -3b_{00}b_{11}b_{22}b_{12} + {b_{12}}^2 b_{01}b_{20} = -4b_{00}b_{11}b_{22}b_{12}\end{aligned}$$

となる．以上より関係式 (5.1) は成立する．

2)　十分条件であることを示す.

関係式 (5.1) が成り立っているとする．このとき 3 点 $p(0,\ 0,\ 1)$，$q(0,\ 1,\ 0)$，$r(1,\ 0,\ 0)$ に対し，三角形 $pqr$ の 3 辺 $p \vee q$，$q \vee r$，$r \vee p$ が $Q_1$ に接し，$p$ と $q$ が $Q_0$ 上にあれば，$r$ も $Q_0$ 上にあることを示せばよい.

$p$ と $q$ が $Q_0$ 上にあり，$p \vee q$，$q \vee r$，$r \vee p$ が $Q_1$ に接することから

$$a_{22} = a_{11} = 0,\ D_{00} = D_{11} = D_{22} = 0,\ |D| = -4b_{00}b_{11}b_{22}$$

である．これからまた

$$\Theta_2 = 2a_{01}D_{01} + 2a_{12}D_{12} + 2a_{20}D_{20}$$

である．一方，

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= b_{00}(-{a_{12}}^2) + b_{11}(-{a_{20}}^2) + b_{22}(-{a_{01}}^2)\\ &\qquad +2b_{01}a_{12}a_{20} - 2b_{12}(a_{00}a_{12} - a_{01}a_{20}) + 2b_{20}a_{01}a_{12}\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}4\,|D|\,\Theta_1 &= 16\left\{(b_{00}b_{12}a_{12})^2 + (b_{11}b_{20}a_{20})^2 + (b_{22}b_{01}a_{01})^2\right\}\\ &\qquad -32b_{00}b_{11}b_{22}\left(b_{01}a_{12}a_{20} + b_{12}a_{01}a_{20} + b_{20}a_{01}a_{12}\right)\\ &\qquad\quad +32b_{00}b_{11}b_{22}b_{12}a_{12}a_{00}\end{aligned}$$

よって

$${\Theta_2}^2 - 4\,|D|\,\Theta_1 = -32b_{00}b_{11}b_{22}b_{12}a_{12}a_{00} = 0$$

となる．二次曲線が非退化なので $b_{00}b_{11}b_{22}b_{12}a_{12} \neq 0$．よって $a_{00} = 0$ となり点 $r$ も $Q^0$ 上にあることが示された.

(iii)　二次曲線 $Q_0$ 上に頂点をもち 3 辺が $Q_1$ に接する三角形がひとつ存在すれば，関係式 (5.1) が成立する．$Q_0$ 上の任意の点 $p$ に対し，$p$ から $Q_1$ に接線 $p \vee q$ をひき，$p$ と $q$ から $Q_1$ に接線 $p \vee q$ と異なる接線をひき，その交点を $r$ とする．(ii) の十分性の証明と同様にして $r$ も $Q_0$ にあることが示され，二次曲線 $Q_0$ 上に頂点をもち 3 辺が $Q_1$ に接する三角形 $pqr$ が存在する.　□

**注意 23**　(ii) の証明は，係数体が複素数体であれば，さらに $b_{00} = b_{11} = b_{22} = 1$ にとり，その結果，重根条件と $b_{01}b_{12}b_{20} = -b_{00}b_{11}b_{22}$ から必要ならさらに座標を取り直し $b_{01} = b_{12} = b_{20} = -1$ にとることができる．これは射影変換でいえば，$p$, $q$, $r$ を枠の 3 点にうつすとともに，単位点も適当に選びなおすこと意味している．係数体が実数体の場合も，複素数体上の射影幾何と見なすことで，そこで示された図形の関係はそのまま成立する．したがって上記証明は係数のとり方をこのようにすることでより簡略化できる.

関係式 (5.1) は『解析幾何学 (円錐曲線)』(サーモン)[21] や『幾何学大辞典 6』[45] に載っている．そこでの証明はここで注意した方法によっている．そのうえで実数体のなかだけでも証明されることを確認するため，本証明では係数 $b_{ij}$ についての実根条件だけを仮定して計算した.

**ケーリーの条件**　本定理に関して『解析幾何学 (円錐曲線)』(サーモン)[21] の 610 頁には次の脚注がついている．記号を本書にそろえて紹介する.

この条件はケーレー (1853) が楕円関数論を用いてはじめた与えたるところなり (Philosophical Magazine,VI,99 頁)．$x^3|C|+x^2\Theta_1+x\Theta_2+|D|$ の平方根を $k$ の巾について展開して，$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots$ を得たりとせば，$Q_0$ に内接し $Q_1$ に外接する $n$ 辺多角形が存在するための条件は，$n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots$ に対してはそれぞれ

$$A_2=0,\ \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_4 \\ A_3 & A_4 & A_5 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{vmatrix}=0,\ \cdots$$

にして，$n=4,\ 6,\ 8,\ \cdots$ に対してはそれぞれ

$$A_3=0,\ \begin{vmatrix} A_3 & A_4 \\ A_4 & A_5 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} A_3 & A_4 & A_5 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_5 & A_6 & A_7 \end{vmatrix}=0,\ \cdots$$

なることを証明したり．

ケーリーの論文は『The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley.Vol.2』[34] に収められている．このケーリーによる一方に内接し，他方に外接する $n$ 角形の存在条件の証明，これが本書の最後の目標である．定理 17 でなされる．

**四角形の場合**　さて,『幾何学大辞典 6』[45] にはケーリーの結果のうち $n=4$ の場合に，その定式化と楕円関数によらない証明の概略が載っている．それを命題として紹介し，証明をつける．射影変換に対する不変性等の証明は同様であるので，ここでは省略する．

**命題 98**　二次曲線 $Q_0$ 上に頂点をもち 4 辺が $Q_1$ に接する四辺形が存在するならば

$$\Theta_2{}^3+8|C|\,|D|^2-4|D|\,\Theta_1\Theta_2=0 \tag{5.4}$$

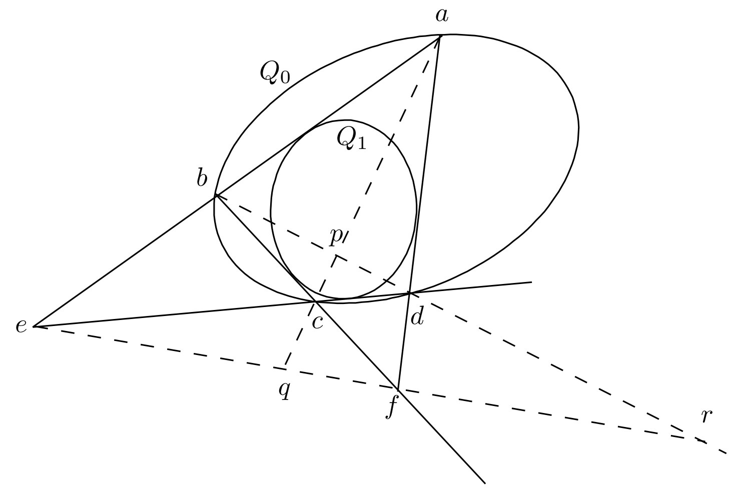
である．■

**証明**　二次曲線 $Q_0$ 上に頂点をもつ四辺形を $abcd$ とし，この四辺が作る完全四辺形の対角線で出来る三角形を座標三角形 $pqr$ にとり，それぞれの座標は $p(1,\ 0,\ 0)$，$q(0,\ 1,\ 0)$，$r(0,\ 0,\ 1)$ とする．

点 $a$ は直線 $x_2=0$ 上にあり，点 $b$ は直線 $x_1=0$ 上にある．単位点を取りなおして $a(1,\ 1,\ 0)$，$b(1,\ 0,\ 1)$ にする．命題 70 の系 70.1 より $[a,\ c;\ p,\ q]=-1$ である．$c(s,\ t,\ 0)$ とすれば

$$[a,\ c;\ p,\ q]=\frac{1\cdot 0-1\cdot 1}{1\cdot 1-1\cdot 0}\cdot\frac{s\cdot 1-t\cdot 0}{s\cdot 0-t\cdot 1}=-1$$

より $s=-t$．よって $c(1,\ -1,\ 0)$ となる．同様に $d(1,\ 0,\ -1)$ となる．




この 4 点を通る円錐曲線 $Q_0$ の方程式は

$$-{x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2lx_1x_2 = 0$$

と表すことができる．$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & l & 1 \end{pmatrix}$ である．

一方，系 92.1 によって，三角形 $abc$ は $Q_1$ の極三角形である．したがってその方程式は

$$a_{00}{x_0}^2 + a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 = 0$$

と表すことができる．$D = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ である．

$abcd$ の 4 辺は順に

$$x_0 - x_1 - x_2 = 0,\ x_0 + x_1 - x_2 = 0,\ x_0 + x_1 + x_2 = 0,\ x_0 - x_1 + x_2 = 0$$

となる．$Q_1$ がこれらと接する条件を求める．

$x_0 = \pm x_1 \pm x_2$ を $g$ に代入して

$$a_{00}(\pm x_1 \pm x_2)^2 + a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 = (a_{00} + a_{11}){x_1}^2 \pm 2a_{00}x_1x_2 + (a_{00} + a_{22}){x_2}^2 = 0$$

この判別式より

$$(a_{00} + a_{11})(a_{00} + a_{22}) - a_{00}^2 = a_{00}a_{11} + a_{11}a_{22} + a_{22}a_{00} = 0$$

を得る．$D = a_{00}a_{11} + a_{11}a_{22} + a_{22}a_{00}$ とおく．$D = 0$ が 4 辺が $Q_1$ と接する条件である．

一方

$$\begin{aligned} |C| &= l^2 - 1 \\ |D| &= a_{00}a_{11}a_{22} \\ \Theta_1 &= a_{00}(1 - l^2) - a_{11} - a_{22} \\ \Theta_2 &= -a_{11}a_{22} + a_{22}a_{00} + a_{00}a_{11} = D - 2a_{11}a_{22} \end{aligned}$$

である．よって等式 (5.4) の左辺は

$$\begin{aligned}
& (D-2a_{11}a_{22})^3+8(l^2-1)(a_{00}a_{11}a_{22})^2 \\
& \qquad -4a_{00}a_{11}a_{22}\{a_{00}(1-l^2)-a_{11}-a_{22}\}(D-2a_{11}a_{22}) \\
= \ & D\{(a_{00}a_{11}-a_{00}a_{22})^2-{a_{11}}^2{a_{22}}^2+4{a_{00}}^2a_{11}a_{22}l^2\}
\end{aligned}$$

よって $D=0$ なら等式 5.4 が成り立つ． □

**注意 24**　逆が成り立つためには，$(a_{00}a_{11}-a_{00}a_{22})^2-{a_{11}}^2{a_{22}}^2+4{a_{00}}^2a_{11}a_{22}l^2$ の意味を解明しなければばならない．それはできていない．

サーモン『解析幾何学 (円錐曲線)』[21] は $n=3$ の場合のみ．窪田忠彦『解析幾何学』（第一巻）[22] は必要条件として載せている．『幾何学大辞典 6』[45] は「条件」として書かれているが，証明されているのはやはり必要条件のみである．

後に，二つの円錐曲線が異なる 4 点で交わっている場合，これが必要条件でもあることが示される．注意 34 を参照のこと．

**例 7**　$Q_1$ を ${x_0}^2+{x_1}^2-{x_2}^2=0$ とする．$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$|D|=-1$ である．$Q_0$ がそれぞれ次のように与えられたとき関係式 (5.1) を計算し，これが成立する条件を求める．これらの結果は『数学対話』『ポンスレの定理』にあるものと一致する．

(1) $Q_0: a{x_0}^2-x_1x_2-b{x_2}^2=0$．このとき $C=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&-b\end{pmatrix}$ である．よって

$$\Theta_1=-\frac{1}{4}-ab, \quad \Theta_2=-a-b$$

この結果

$$\begin{aligned}
& {\Theta_2}^2-4\,|D|\,\Theta_1 \\
= \ & (-a-b)^2-4(-1)\left(-\frac{1}{4}-ab\right)=(a-b-1)(a-b+1)=0
\end{aligned}$$

$a>0$ で $Q_0$，$Q_1$ が実数平面で交わらないときは $a-b<-\dfrac{1}{4a}<0$．よって $a-b+1=0$.

(2) $Q_0: \dfrac{{x_0}^2}{a^2}+\dfrac{{x_1}^2}{b^2}-{x_2}^2=0$．このとき $C=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2}&0&0\\0&\frac{1}{b^2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ である．よって

$$\Theta_1=-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2b^2}, \quad \Theta_2=-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-1$$

この結果

$$\begin{aligned}
& {\Theta_2}^2-4\,|D|\,\Theta_1 \\
= \ & \left(-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-1\right)^2-4(-1)\left(-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2b^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+1-\frac{4}{a^2b^2} \\
&= \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-1\right)^2 - \frac{4}{a^2b^2} \\
&= \left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}-1\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}-1\right) \\
&= \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+1\right)=0
\end{aligned}
$$

実数平面で $Q_0$ の内部に $Q_1$ がある，つまり条件 $1<a,\ b$ の下では $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-1=0$.

(3) 同様に命題 98 の例として，$Q_0:\dfrac{{x_0}^2}{a^2}+\dfrac{{x_1}^2}{b^2}-{x_2}^2=0$ で条件を求める．

$$
\begin{aligned}
&{\Theta_2}^3+8\,|C|\,|D|^2-4\,|D|\,\Theta_1\Theta_2 \\
&= -\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right)^3-\frac{8}{a^2b^2}+4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right) \\
&= -\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-1\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-1\right)=0
\end{aligned}
$$

これから (2) と同様の条件の下では $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}-1=0$ を得る．

(4) $Q_0: {x_0}^2-2ax_0x_2+{x_1}^2+(a^2-r^2){x_2}^2=0$. このとき $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a^2-r^2 \end{pmatrix}$ である．

よって

$$
\Theta_1=(a^2-r^2)+(a^2-r^2-a^2)-1=a^2-2r^2-1,\ \Theta_2=-1-1+a^2-r^2
$$

この結果

$$
\begin{aligned}
&{\Theta_2}^2-4\,|D|\,\Theta_1 \\
&= \left(a^2-r^2-2\right)^2-4(-1)\left(a^2-2r^2-1\right) \\
&= \left(a^2-r^2\right)^2-4(a^2-r^2)+4+4a^2-8r^2-4=\left(a^2-r^2\right)^2-4r^2 \\
&= \left(a^2-r^2-2r\right)\left(a^2-r^2+2r\right) \\
&= \left\{a^2-(r+1)^2+1\right\}\left\{a^2-(r-1)^2+1\right\}=0
\end{aligned}
$$

**注意 25** $\dfrac{x_0}{x_2}=x,\ \dfrac{x_1}{x_2}=y$ として実平面で考えると，$Q_0:(x-a)^2+y^2=r^2,\ Q_1:x^2+y^2=1$ となる．実数平面で $Q_0$ の内部に $Q_1$ がある，つまり $a<r-1$ の下では，$a^2-r^2-2r<0$ なので $a^2-r^2+2r=0$. この条件は $(r+a)(r-a)=(r+a)+(r-a)$ となり，$\dfrac{1}{r-a}+\dfrac{1}{r+a}=1$ とも表され，古典的に知られた形になる．

**ポンスレの定理の証明**　定理 15 は次のように一般化される．

**定理 16**　二次曲線 $Q_0$ を含む曲線束がある．この曲線束に属し，かつ $Q_0$ とは異なる 3 曲線 $R_1$, $R_2$, $R_3$ に対し，$Q_0$ 上の 3 点 $p$, $q$, $r$ で，直線 $p \vee q$ が $R_1$ に，直線 $q \vee r$ が $R_2$ に，直線 $r \vee p$ が $R_3$ に接するものが存在するとする．ただし 3 接点は同一直線上にはないものとする．

このとき $Q_0$ 上の任意の $p$ に対し，$Q_0$ 上の点 $q$, $r$ で直線 $p \vee q$ が $R_1$ に，直線 $q \vee r$ が $R_2$ に，直線 $r \vee p$ が $R_3$ に接するものが存在する．　■

**証明**　定理 15 の証明にならい，先ず条件を満たす三角形 $pqr$ が存在するための必要条件を求め，それが射影変換で不変な条件であることを確認し，そのうえでその十分性を示す．

条件を満たす 3 点 $p$, $q$, $r$ が存在するとする．そのときの $Q_0$ を定める行列 $C$ をとる．その方程式を $f_0(x) = 0$ とおく．射影変換を行い 3 点 $p$, $q$, $r$ の同次座標を $(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0)$ とする．$Q_0$ については定理 15 と同じである．特に

$$f_0(x) = 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{20}x_2x_0$$

であり，その行列を $C$ とすると

$$|C| = 2a_{01}a_{12}a_{20}$$

である．

3 曲線 $R_1$, $R_2$, $R_3$ の方程式は，$Q_0$ とは異なるので，この曲線束に属するある二次曲線 $Q_1$ とその方程式 $f_1(x) = 0$ を用いて

$$kf_0(x) + f_1(x) = 0,\ k'f_0(x) + f_1(x) = 0,\ k''f_0(x) + f_1(x) = 0$$

とおける．$f_1(x)$ を同じ曲線束の他のものに代えると $k$, $k'$, $k''$ も異なる．$k$, $k'$, $k''$ と $f_1(x)$ によって条件を満たすような $R_1$, $R_2$, $R_3$ の方程式が構成できるときは，次に示すように逆に $Q_1$ の方程式 $f_1(x) = 0$ と行列 $D$ を $f_0(x)$, $C$ と $k$, $k'$, $k''$ を用いて書き表すことができる．

$kf_0(x) + f_1(x) = 0$ と $x_0 = 0$ を連立した $x_1$ と $x_2$ の方程式を

$$\begin{aligned} kf_0(0,\ x_1,\ x_2) + f_1(0,\ x_1,\ x_2) &= 2ka_{12}x_1x_2 + f_1(0,\ x_1,\ x_2) \\ &= c_{11}{x_1}^2 + c_{22}{x_2}^2 + 2c_{12}x_1x_2 = 0 \end{aligned}$$

とおく．$f_0(x)$ の形から

$$\begin{aligned} k'f_0(x_0,\ x_1,\ 0) + f_1(x_0,\ x_1,\ 0) &= 2k'a_{01}x_0x_1 + f_1(x_0,\ x_1,\ 0) \\ &= c_{00}{x_0}^2 + c_{11}{x_1}^2 + 2c_{01}x_0x_1 = 0 \\ k''f_0(x_0,\ 0,\ x_2) + f_1(x_0,\ 0,\ x_2) &= 2k''a_{20}x_2x_0 + f_1(x_0,\ 0,\ x_2) \\ &= c_{00}{x_0}^2 + c_{22}{x_2}^2 + 2c_{20}x_2x_0 = 0 \end{aligned}$$

とおける．これらがそれぞれ重根をもつ．よって係数は $c_{ij}$ は条件

$${c_{12}}^2 = c_{11}c_{22},\ {c_{01}}^2 = c_{00}c_{11},\ {c_{20}}^2 = c_{22}c_{00}$$

を満たす．ここで

$$g(x) = \sum_{ij} c_{ij}x_ix_j$$

とおき，$g(x) = 0$ で定まる二次曲線を $Q'$ とする．$Q'$ 自身はこの曲線束には属さない．3 点が同一直線上にないので，$Q'$ は非退化である．

座標 $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ を $(c_{00}{}^{\frac{1}{2}}x_0,\ c_{11}{}^{\frac{1}{2}}x_1,\ c_{22}{}^{\frac{1}{2}}x_2)$ にとりなおすことにより

$$g(x) = {x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2c_{01}x_0x_1 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{20}x_2x_0$$

とでき，このとき ${c_{01}}^2 = {c_{12}}^2 = {c_{20}}^2 = 1$ である．$Q'$ が非退化なので $c_{01}c_{12}c_{20} = -c_{00}c_{11}c_{22}$ である．よって $c_{01} = c_{12} = c_{20} = -1$ か，または 1 個が $-1$ で他は 1 かである．

$$g(x) = {x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_0x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_0$$

のときはさらに座標 $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ を $i$ を虚数単位にして $(ix_0,\ ix_1,\ -ix_2)$ にとりなおすことにより

$$g(x) = -{x_0}^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 + 2x_0x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_0$$

となる．そこで $Q'$ の行列の符号を逆にとることにより

$$g(x) = {x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_0x_1 - 2x_1x_2 - 2x_2x_0$$

とできる．これによって $C$ も変化するが条件 $a_{00} = a_{11} = a_{22} = 0$ はそのままである．このときの他の成分をあらためて $a_{01},\ a_{12},\ a_{20}$ とする．

$$\begin{aligned}
kf_0(0,\ x_1,\ x_2) + f_1(0,\ x_1,\ x_2) &= 2ka_{12}x_1x_2 + f_1(0,\ x_1,\ x_2) \\
&= {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2 = g(0,\ x_1,\ x_2) \\
\therefore\quad f_1(0,\ x_1,\ x_2) &= g(0,\ x_1,\ x_2) - 2ka_{12}x_1x_2 \\
k'f_0(x_0,\ x_1,\ 0) + f_1(x_0,\ x_1,\ 0) &= 2k'a_{01}x_0x_1 + f_1(x_0,\ x_1,\ 0) \\
&= {x_0}^2 + {x_1}^2 - 2x_0x_1 = g(x_0,\ x_1,\ 0) \\
\therefore\quad f_1(x_0,\ x_1,\ 0) &= g(x_0,\ x_1,\ 0) - 2k'a_{01}x_0x_1 \\
k''f_0(x_0,\ 0,\ x_2) + f_1(x_0,\ 0,\ x_2) &= 2k''a_{20}x_2x_0 + f_1(x_0,\ 0,\ x_2) \\
&= {x_2}^2 + {x_0}^2 - 2x_2x_0 = g(x_0,\ 0,\ x_2) \\
\therefore\quad f_1(x_0,\ 0,\ x_2) &= g(x_0,\ 0,\ x_2) - 2k''a_{20}x_2x_0
\end{aligned}$$

となるので $f_1(x)$ は $g(x)$ と $C$ の成分を用いて

$$f_1(x) = g(x) - 2(ka_{12}x_1x_2 + k'a_{01}x_0x_1 + k''a_{20}x_2x_0)$$

と表される．これによって定まる二次曲線が $Q_1$ である．またその行列を $D$ とする．

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1-k'a_{01} & -1-k''a_{20} \\ -1-k'a_{01} & 1 & -1-ka_{12} \\ -1-k''a_{20} & -1-ka_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

である．$Q_0,\ Q_1$ に対する $|D|,\ \Theta_1,\ \Theta_2$ を計算する．

$$\begin{aligned}
|D| &= 1-(-1-ka_{12})^2 - (-1-k'a_{01})\{-1-k'a_{01}-(-1-ka_{12})(-1-k''a_{20})\} \\
&\quad +(-1-k''a_{20})\{(-1-k'a_{01})(-1-ka_{12})-(-1-k''a_{20})\} \\
&= 1-(1+ka_{12})^2-(1+k'a_{01})^2-(1+k''a_{20})^2 \\
&\qquad -2(1+ka_{12})(1+k'a_{01})(1+k''a_{20})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -4-4(ka_{12}+k'a_{01}+k''a_{20})-(ka_{12}+k'a_{01}+k''a_{20})^2-2kk'k''a_{01}a_{12}a_{20} \\
&= -(2+ka_{12}+k'a_{01}+k''a_{20})^2-kk'k''\,|C| \\
\Theta_1 &= -{a_{12}}^2-{a_{20}}^2-{a_{01}}^2+2(-1-k'a_{01})a_{12}a_{02}+2(-1-k''a_{02})a_{01}a_{12} \\
&\qquad +2(-1-ka_{12})a_{01}a_{02} \\
&= -(a_{01}+a_{12}+a_{20})^2-(k+k'+k'')\,|C| \\
\Theta_2 &= 2a_{01}\{-(-1-k'a_{01})+(-1-ka_{12})(-1-k''a_{20})\} \\
&\qquad +2a_{20}\{-(-1-k''a_{20})+(-1-k'a_{01})(-1-ka_{12})\} \\
&\qquad\qquad +2a_{12}\{-(-1-ka_{12})+(-1-k''a_{20})(-1-k'a_{01})\} \\
&= 2a_{01}(kk''a_{20}a_{12}+k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+2) \\
&\qquad +2a_{20}(kk'a_{12}a_{01}+k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+2) \\
&\qquad\qquad +2a_{12}(k'k''a_{01}a_{20}+k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+2) \\
&= 2(a_{01}+a_{12}+a_{20})(2+k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20})+(kk'+k'k''+k''k)\,|C|
\end{aligned}
$$

この結果

$$
\begin{aligned}
&\{\Theta_2-(kk'+k'k''+k''k)\,|C|\}^2 \\
=\ & 4(a_{01}+a_{12}+a_{20})^2(2+k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20})^2
\end{aligned}
$$

より関係式

$$
\begin{aligned}
&\{\Theta_2-(kk'+k'k''+k''k)\,|C|\}^2 \\
=\ & 4\,(|D|+kk'k''\,|C|)\,\{\Theta_1+(k+k'+k'')\,|C|\}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

が成立する．

関係式 (5.5) は条件を満たす 3 点 $p$, $q$, $r$ が存在するときに，ある $C$, $D$, $\Theta_1$, $\Theta_2$ と $k$, $k'$, $k''$ の間で成り立つ関係式である．

$C$ を $cC$ にかえると $k$, $k'$, $k''$ は $c^{-1}$ 倍される．$\Theta_1$，$\Theta_2$ はそれぞれ $c^2$，$c$ 倍され，$|C|$ は $c^3$ 倍される．よって関係式 (5.5) の成立は不変である．$D$ を $dD$ にかえると $k$, $k'$, $k''$ は $d$ 倍される．$\Theta_1$, $\Theta_2$ はそれぞれ $d$，$d^2$ 倍され，$|D|$ は $d^3$ 倍される．よってやはり関係式 (5.5) の成立は不変である．また行列 $A$ による射影変換で両辺いずれもが $|A|^{-4}$ 倍される．よって関係式 (5.5) が成立するか否かは，$Q_0$ と $Q_1$ とそれで定まる曲線束の 3 曲線 $R_1$，$R_2$，$R_3$ に固有のことであり，さらにそのことは射影変換で不変である．

逆に $Q_0$ と $Q_1$ で定義される曲線束の 3 曲線 $R_1$，$R_2$，$R_3$ があり，それらを定める行列と係数を一組とるとき，$|C|$，$|D|$，$\Theta_1$，$\Theta_2$ と $k$, $k'$, $k''$ の間に関係式 (5.5) が成立しているとする．

このとき，別の三角形 $pqr$ で，その 3 辺 $p\vee q$，$q\vee r$，$r\vee p$ がそれぞれ曲線 $R_1$，$R_2$，$R_3$ に接し，かつ $p$ と $q$ が $Q_0$ 上にあれば，$r$ も $Q_0$ 上にあることを示せば本定理の証明が完結する．

関係式の成立は射影変換で不変なので 3 点の同次座標を $p(0,\ 0,\ 1)$，$q(0,\ 1,\ 0)$，$r(1,\ 0,\ 0)$ にとる．$p$ と $q$ が $Q_0$ 上にあるとする．これから

$$
f_0(x)={}^t(x)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{20} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ a_{20} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}(x)=a_{00}{x_0}^2+2a_{01}x_0x_1+2a_{12}x_1x_2+2a_{20}x_2x_0
$$

とおける．このとき $|C| = 2a_{01}a_{12}a_{20} - a_{00}{a_{12}}^2$ であり，余因子は

$$C_{00} = -{a_{12}}^2,\ C_{11} = -{a_{20}}^2,\ C_{22} = -{a_{01}}^2$$
$$C_{01} = a_{12}a_{20},\ C_{12} = a_{01}a_{20} - a_{00}a_{12},\ C_{20} = a_{01}a_{12}$$

である．次に，$D = (b_{ij})$，つまり

$$f_1(x) = b_{00}{x_0}^2 + b_{11}{x_1}^2 + b_{22}{x_2}^2 + 2b_{01}x_0x_1 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{20}x_2x_0$$

とする．$x_0 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 0$ がそれぞれ $R_1,\ R_2,\ R_3$ に接することから，$kf_0(x) + f_1(x) = 0$ と $x_0 = 0$ を連立した $x_1$ と $x_2$ の方程式などはそれぞれ重根をもつ．$k'f_0(x_0,\ x_1,\ 0) + f_1(x_0,\ x_1,\ 0)$ と $k''f_0(x_0,\ 0,\ x_2) + f_1(x_0,\ 0,\ x_2)$ の ${x_0}^2$ の係数が異なるため，係数を調整することで，次の形にまで整理できる．$a_{ij}$ と $k$ などをそれに対応するものに変えて，同じ文字で表す．これによって

$$\begin{aligned}
& kf_0(0,\ x_1,\ x_2) + f_1(0,\ x_1,\ x_2) \\
= \ & 2ka_{12}x_1x_2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{11}{x_1}^2 + b_{22}{x_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 = 0 \\
& k'f_0(x_0,\ x_1,\ 0) + f_1(x_0,\ x_1,\ 0) \\
= \ & k'a_{00}{x_0}^2 + 2k'a_{01}x_0x_1 + 2b_{01}x_0x_1 + b_{00}{x_0}^2 + b_{11}{x_1}^2 = (x_0 - x_1)^2 = 0 \\
& k''f_0(x_0,\ 0,\ x_2) + f_1(x_0,\ 0,\ x_2) \\
= \ & k''a_{00}{x_0}^2 + 2k''a_{20}x_2x_0 + 2b_{20}x_2x_0 + b_{00}{x_0}^2 + b_{22}{x_2}^2 = (\alpha x_0 - x_2)^2 = 0
\end{aligned}$$

とできる．$D$ の各成分は $C$ の成分と $k$ などを用いて次のように表される．

$$b_{00} = b_{22} = 1,\ b_{12} + ka_{12} = -1$$
$$b_{11} = 1,\ b_{01} + k'a_{01} = -1$$
$$1 + k''a_{00} = \alpha^2,\ b_{20} + k''a_{20} = -\alpha$$

$D$ は

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 - k'a_{01} & -\alpha - k''a_{20} \\ -1 - k'a_{01} & 1 & -1 - ka_{12} \\ -\alpha - k''a_{20} & -1 - ka_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

となる．これらを用いて $D$ の余因子を $C$ の成分などで表す.

$$\begin{aligned}
D_{00} &= b_{11}b_{22} - {b_{12}}^2 = 1 - (1 + ka_{12})^2 = -ka_{12}(ka_{12} + 2) \\
D_{01} &= -b_{01}b_{22} + b_{12}b_{20} \\
&= 1 + k'a_{01} + (1 + ka_{12})(\alpha + k''a_{20}) \\
&= kk''a_{12}a_{20} + k''a_{20} + k'a_{01} + \alpha ka_{12} + \alpha + 1 \\
D_{12} &= -b_{00}b_{12} + b_{01}b_{20} \\
&= 1 + ka_{12} + (1 + k'a_{01})(\alpha + k''a_{20}) \\
&= k'k''a_{01}a_{20} + ka_{12} + k''a_{20} + \alpha k'a_{01} + \alpha + 1 \\
D_{20} &= b_{01}b_{12} - b_{11}b_{20} \\
&= (1 + k'a_{01})(1 + ka_{12}) + k''a_{20} + \alpha \\
&= kk'a_{01}a_{12} + k'a_{01} + ka_{12} + k''a_{20} + \alpha + 1
\end{aligned}$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
|D| &= b_{00}D_{00}+b_{01}D_{01}+b_{20}D_{20} = -ka_{12}(ka_{12}+2)\\
&\quad +(-1-k'a_{01})(kk''a_{12}a_{20}+k''a_{20}+k'a_{01}+\alpha ka_{12}+\alpha+1)\\
&\quad +(-\alpha-k'a_{20})(kk'a_{01}a_{12}+k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+\alpha+1)\\
&= -2kk'k''a_{01}a_{12}a_{20}-(k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+\alpha+1)^2\\
&\quad -2(\alpha-1)kk'a_{01}a_{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta_1 &= b_{00}C_{00}+b_{11}C_{11}+b_{22}C_{22}+2b_{01}C_{01}+2b_{12}C_{12}+2b_{20}C_{20}\\
&= -{a_{12}}^2-{a_{20}}^2-{a_{01}}^2+2(-1-k'a_{01})(a_{12}a_{20})\\
&\quad +2(-1-ka_{12})(a_{01}a_{20}-a_{00}a_{12})+2(-\alpha-k''a_{20})(a_{01}a_{12})\\
&= -2(k+k'+k'')a_{01}a_{12}a_{20}-(a_{01}+a_{12}+a_{20})^2\\
&\quad -2(\alpha-1)a_{01}a_{12}+2(ka_{12}+1)a_{00}a_{12}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\Theta_1+(k+k'+k'')\,|C| &= \Theta_1+(k+k'+k'')(2a_{01}a_{12}a_{20}-a_{00}{a_{12}}^2)\\
&= -(a_{01}+a_{12}+a_{20})^2+\{(k-k'-k'')a_{12}+2\}a_{00}a_{12}\\
&\quad -2(\alpha-1)a_{01}a_{12}\\
|D|+kk'k''\,|C| &= -2kk'k''a_{01}a_{12}a_{20}-(k'a_{01}+ka_{12}+\alpha+k''a_{20}+1)^2\\
&\quad -2(\alpha-1)kk'a_{01}a_{12}+kk'k''(2a_{01}a_{12}a_{20}-a_{00}{a_{12}}^2)\\
&= -(k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+\alpha+1)^2\\
&\quad -kk'k''a_{00}{a_{12}}^2-2(\alpha-1)kk'a_{01}a_{12}
\end{aligned}
$$

次に

$$
\begin{aligned}
\Theta_2 &= a_{00}D_{00}+2a_{01}D_{01}+2a_{12}D_{12}+2a_{20}D_{20}\\
&= -ka_{00}a_{12}(ka_{12}+2)\\
&\quad +2a_{01}(kk''a_{12}a_{20}+k''a_{20}+k'a_{01}+\alpha ka_{12}+\alpha+1)\\
&\quad +2a_{12}(k'k''a_{01}a_{20}+ka_{12}+k''a_{20}+\alpha k'a_{01}+\alpha+1)\\
&\quad +2a_{20}(kk'a_{01}a_{12}+k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+\alpha+1)\\
&= 2(kk'+k'k''+k''k)a_{01}a_{12}a_{20}\\
&\quad +2(a_{01}+a_{12}+a_{20})(k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+\alpha+1)\\
&\quad +2(k+k')(\alpha-1)a_{01}a_{12}-ka_{00}a_{12}(ka_{12}+2)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\Theta_2-(kk'+k'k''+k''k)\,|C| &= 2(a_{01}+a_{12}+a_{20})(k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+\alpha+1)\\
&\quad +2(k+k')(\alpha-1)a_{01}a_{12}-ka_{00}a_{12}(ka_{12}+2)
\end{aligned}
$$

この $|C|$，$|D|$，$\Theta_1$，$\Theta_2$ について関係式 (5.5) が成立する．

$A=a_{01}+a_{12}+a_{20}$，$B=k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}+\alpha+1$ とおく．

$$
\begin{aligned}
&\{\Theta_2-(kk'+k'k''+k''k)\,|C|\}^2-4\,(|D|+kk'k''\,|C|)\,\{\Theta_1+(k+k'+k'')\,|C|\}\\
=\ &\{2AB+2(\alpha-1)a_{01}a_{12}-ka_{00}a_{12}(ka_{12}+2)\}^2\\
&\qquad -4\{-B^2-kk'k''a_{00}{a_{12}}^2-2(\alpha-1)kk'a_{01}a_{12}\}\\
&\qquad\qquad \times[-A^2+\{(k-k'-k'')a_{12}+2\}a_{00}a_{12}-2(k+k')(\alpha-1)a_{01}a_{12}]\\
=\ &0
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

差をとって残る項は $\alpha-1$ または $a_{00}$ で括ることが出来る．ところが $1+k''a_{00}=\alpha^2$ で $k$，$k'$，$k''$ のうち 0 であるのは多くても 1 個である．$R_1$，$R_2$，$R_3$ の順序をとりなおして $k''\neq 0$ とする．このとき $a_{00}=\dfrac{\alpha^2-1}{k''}$ である．よって差はすべて $\alpha-1$ で括れる．

$\alpha$ に関するこの関係式は，$R_1$，$R_2$，$R_3$ と $p\vee q$，$q\vee r$，$r\vee p$ の接点を $(0,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(1,\ 0,\ \alpha)$ とおくとき，この $\alpha$ を決定する．したがって $\alpha$ の方程式と見れば一つの解は $\alpha=1$ である．

ところが二次曲線 $R_3$ と直線 $r\vee p$ の接点として $\alpha$ は一意であり，これから $\alpha=1$ と確定する．この結果 $k''a_{00}=\alpha^2-1=0$ となり，$a_{00}=0$．つまり $r$ も $Q_0$ 上にある．

よって関係式 (5.5) は $r$ も $Q_0$ 上にあるための十分条件である．定理 16 が証明された． □

**注意 26**　定理 16 では 3 接点が同一直線上にないとの条件をつけた．この条件がなく同一直線上にあると，$Q'$ が退化である．この場合の考察は途上であって未完である．この途中経過は補遺の「線型代数による証明で一般の位置にない場合」5.3.1 参照.

定理 16 を線型代数で証明した．この結果，前小節の命題 96 の別証明が得られる．命題 96 を再掲する．

> 曲線束 $A$ に属する円錐曲線 $Q_0$，$Q_1$，$Q_2$ がある．$i=1,\ 2$ に対し，$Q_0$ 上の点 $p$ から $Q_i$ に接線 $l_i$ を引く．$Q_0$ の点 $q_i$ で $l_i=p\vee q_i$ となるものをとる．このとき直線 $q_1\vee q_2$ と接する曲線束 $A$ の円錐曲線 $Q_3$ が存在する．

**証明**　曲線束 $A$ が $Q_0$ と $Q'$ で定まっているとし，その方程式を $f(x)=0$，$g(x)=0$ とする．また $Q_1$，$Q_2$ の方程式がそれぞれ $kf+g=0$，$k''f+g=0$ とする．このとき関係式 (5.5) は $k'$ に関する 2 次方程式である．この根による方程式 $k'f+g=0$ で定まる共線束の曲線を $Q_3$ とすれば，この $Q_3$ が条件を満たす. □

ポンスレの定理 13 は命題 96 から数学的帰納法で示されるので，これで定理 16 にもとづく定理 13 の証明が完結した.

### 恒等式を根拠とする証明

ポンスレの閉形定理 11 自体を，フルビッツによる対応原理で証明しよう.

複素数体 $K$ 上の $P^2$ におかれた二次曲線 $Q$ は適当な射影変換によって

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$$

という標準形になり，それらは二次式による媒介変数表示

$$x_0=t_0^2-t_1^2,\ x_1=2t_0t_1,\ x_2=it_0^2+it_1^2$$

をもつ．つまり二次曲線 $Q$ 上の点 $p$ は $(t) = (t_0,\ t_1)$ という $P^1$ に値をもつ媒介変数を用いて

$$(u_0(t),\ u_1(t),\ u_2(t))$$

と表される．

**補題 19**　二つの二次曲線 $Q_0$ と $Q_1$ がある．$Q_0$ 上の 2 点 $p,\ q$ がそれぞれ媒介変数 $(t),\ (s)$ を用いて表されているとする．直線 $p \vee q$ が $Q_1$ に接するための必要十分条件は，$(t),\ (s)$ のそれぞれに関する二次の等式で表される．

**証明**　$Q_1$ を定める対称行列を $T$ とする．$Q_0$ 上の動点 $p,\ q$ がそれぞれ二次式 $u_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2)$ によって $(u_0(t),\ u_1(t),\ u_2(t))$，$(u_0(s),\ u_1(s),\ u_2(s))$ と表されるとする．よって直線 $p \vee q$ は

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ u_0(t) & u_1(t) & u_2(t) \\ u_0(s) & u_1(s) & u_2(s) \end{vmatrix} = 0$$

となる．これは

$$\left( \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1(s) & u_2(s) \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} u_0(t) & u_2(t) \\ u_0(s) & u_2(s) \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} u_0(t) & u_1(t) \\ u_0(s) & u_1(s) \end{vmatrix} \right) (x) = 0$$

とも書ける．一方 $Q_1$ 上の点 $m$ での接線は $m$ の座標も $(m)$ とすれば

$${}^t(m)T(x) = 0$$

と表される．これが直線 $p \vee q$ と一致するので，ただし定数倍の同値類で考えることにより

$$T(m) = {}^t \left( \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1(s) & u_2(s) \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} u_0(t) & u_2(t) \\ u_0(s) & u_2(s) \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} u_0(t) & u_1(t) \\ u_0(s) & u_1(s) \end{vmatrix} \right)$$

である．つまり

$$(m) = T^{-1}{}^t \left( \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1(s) & u_2(s) \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} u_0(t) & u_2(t) \\ u_0(s) & u_2(s) \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} u_0(t) & u_1(t) \\ u_0(s) & u_1(s) \end{vmatrix} \right)$$

この $(m)$ は $(t)$ と $(s)$ のそれぞれについて一次式である．この $(m)$ が $Q_1$ 上に存在することが，$p \vee q$ が $Q_1$ に接することを意味する．

この $(m)$ を $Q_1$ の方程式 ${}^t(x)T(x) = 0$ に代入すると，確かに $(t),\ (s)$ のそれぞれに関する二次の等式になっている．□

この双二次式を $T((t),\ (s))$ と表す．またこの式を $T(p,\ q)$ とも表す．

**補題 20**　平面上に二つの二次曲線 $Q_0$ と $Q_1$ がある．$Q_0$ 上の点 $p_1$ から $Q_1$ にひとつの接線をひき，その延長が再び $Q_0$ と交わる点を $p_2$ とする．$p_2$ から $Q_1$ に $p_2 \vee p_1$ とは異なる接線をひき，その延長が再び $Q_0$ と交わる点を $p_3$ とする．このようにして点 $p_n$ を定める．

点 $p_1$ が媒介変数 $(t)$ で表され，点 $p_n$ が媒介変数 $(s)$ で表されるとすると $(t)$ と $(s)$ の間には，それぞれについて二次の関係式

$$T_n((t),\ (s)) = 0$$

が成立する．

**証明**　数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき．$T_n((t),\ (s))=T((t),\ (s))$ なので成立する．

$n=2$ のとき．$p_2(u)$ として，連立方程式

$$\begin{cases} T((t),\ (u))=0 \\ T((s),\ (u))=0 \end{cases}$$

から $(u)$ を消去する．補題 16 によって，$(t)$ と $(s)$ のそれぞれに関して 4 次の関係式が得られる．

$p_2$ は 2 個とれて，その各々から $Q_1$ には $p_2 \vee p_1$ ともう一つの接線が引ける．よってこの関係式は $(s)=(t)$ を重根にもつ．その部分はは $(t)$ と $(s)$ のそれぞれに関する二次式である．この関係式をこの二次式で約分して，商を $T_3((t),\ (s))$ とすれば．$T_3((t),\ (s))$ は $(t)$ と $(s)$ のそれぞれに関して二次式で，$T_3((t),\ (s))=0$ の 2 根が $p_3$ を与える．

$n \geqq 2$ に対して $T_n((t),\ (s))$ が定まったとする．連立方程式

$$\begin{cases} T_n((t),\ (u))=0 \\ T((s),\ (u))=0 \end{cases}$$

$(u)$ を消去する．補題 16 によって，$(t)$ と $(s)$ のそれぞれに関して四次の関係式が得られる．この 4 次式は $T_{n-1}((t),\ (s))$ を因数にもつ．それで約した式を $T_{n+1}((t),\ (s))$ とすれば $T_{n+1}((t),\ (s))=0$ がなりたつ．数学的帰納法によって証明が終わった．□

これを用いてポンスレの閉形定理を単純な形で証明しよう．

**定理 11 の証明**　　$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対し点 $p_i$ が媒介変数 $t_i$ で表されるとする．

一般に $t_1$ と $t_n$ の間には，それぞれについて 2 次の関係式

$$T_n(t_1,\ t_n)=0$$

が成立する．点 $p_1$ が $p_n=p_1$ を満たすことは，$t_1$ が

$$T_n(t_1,\ t_1)=0$$

を満たすことと同値である．これが他の $t_i$ についても成立する．

さらに，$i$ を 1 から $n$ のいずれかとして $u=t_i$ とする．

$$T(t,\ t_i)=0$$

は $t$ の 2 次方程式で $t=t_i$ は重根である．

$n(\geqq 3)$ に対して 4 次方程式 $T(t,\ t)=0$ は重複度も含めて $2n(\geqq 6)$ 個の根をもつ．よって等式 $T(t,\ t)=0$ は恒等式であり，任意の $t$ に対して成立する．つまり $p_1$ を任意にとり，順次 $p_i$ を定めるとき，$p_n=p_1$ となる．□

### 楕円積分による証明

雑誌『数学セミナー』通巻 296 号の「閉形定理のポンスレによる証明」([32]) に次の記事がある．

> 1828 年に C.G.J. ヤコビ (1804〜1851) はクレレ誌に楕円関数を使った閉形定理の証明を発表した．彼は実平面上の二円，一方は他方の円の内部にある場合に閉形定理を証明した．射影することによって，定理は一方が他方の内部にある二つの楕円の場合に一般化できることをヤコビは注意している．

また『数学点描』[35] で著者のシェーンベルグは,

> ベルトラン (J.Bertrand) がヤコビ (Jacobi) のものとする方法で証明する．しかし，ヤコビの著作集の第 1 巻にある回顧録を調べてみると，この証明はヤコビよりもむしろベルトランによるものだということがわかる．これは初等微分積分学の幾何学へのひとつの注目すべき応用である．

と述べ，解析的なポンスレの定理の証明を行っている．これとまったく同じ内容が，高校生向けに書かれた『高校生に贈る数学 II』[36] の中で,「ヤコビの証明の考え方に基づく，もう少し簡単化されたベルトランの証明を述べてみます」との前置きのもとに書かれている．ここでそれを再構成しよう．

実平面におかれた二円 $Q_0$ と $Q_1$ がある．同心円ならポンスレの定理は自明なので，同心ではないとし，それぞれの中心は O，O′，半径は $R$, $r$ で，円 $Q_1$ は円 $Q_0$ の内部にあり，2 円の中心間の距離は $a$ であるとする．直線 OO′ と $Q_0$ の交点のうち，O′ との距離が大きいものを A とする．$Q_0$ 上の点 P に対して OA から OP への左回りの角を $2\varphi$ とおく．この角に対する点であることを明示するときは $\mathrm{P}(\varphi)$ と書く．

$Q_0$ 上の点 $\mathrm{P}_1$ をとる．点 $\mathrm{P}_1$ を点 P の位置から左回りに円 $Q_0$ 上を動かし，弦 $\mathrm{PP}_1$ が最初に円 $Q_1$ と接するとき，その位置の $\mathrm{P}_1$ あらためて $\mathrm{P}_1$ とする．また接点を Q とする．点 $\mathrm{P}_1$ は点 P に対して一意に定まり，OA から $\mathrm{OP}_1$ への左回りの角を $2\varphi_1$ とすると，$\varphi_1$ は $\varphi$ の関数である．これを明示するときは $\varphi_1(\varphi)$ と書く．また $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}(\varphi_1)$ とも書ける．

三平方の定理と余弦定理から

$$\begin{aligned}
\mathrm{QP}^2 &= \mathrm{O'P}^2 - r^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos(\pi - 2\varphi) - r^2 \\
&= R^2 + a^2 - r^2 + 2aR\cos 2\varphi \\
\mathrm{QP_1}^2 &= \mathrm{O'P_1}^2 - r^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos(\pi - 2\varphi_1) - r^2 \\
&= R^2 + a^2 - r^2 + 2aR\cos 2\varphi_1
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$$k^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 - r^2}$$

とおくと

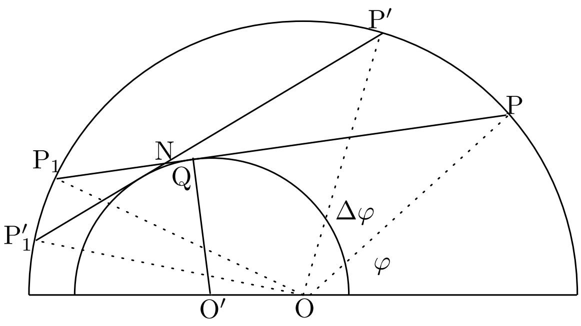
$$\begin{aligned}
\mathrm{QP}^2 &= R^2 + a^2 - r^2 + 2aR(1 - 2\sin^2\varphi) = \{(R+a)^2 - r^2\}(1 - k^2\sin^2\varphi) \\
\mathrm{QP_1}^2 &= R^2 + a^2 - r^2 + 2aR(1 - 2\sin^2\varphi_1) = \{(R+a)^2 - r^2\}(1 - k^2\sin^2\varphi_1)
\end{aligned}$$

と変形される．

**命題 99**　$\varphi$ の関数 $\varphi_1(\varphi)$ の導関数について

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

である．■




**証明**　微少な角 $\Delta\varphi$ をとり，$\mathrm{P}' = \mathrm{P}'(\varphi+\Delta\varphi)$ とおく．また $\varphi_1' = \varphi_1(\varphi+\Delta\varphi)$ とし，$\mathrm{P}_1' = \mathrm{P}(\varphi_1')$，$\Delta\varphi_1 = \varphi_1(\varphi+\Delta\varphi)-\varphi_1$ とする．2 弦 $\mathrm{PP}_1$ と $\mathrm{P'P'}_1$ の交点を N とする．

$\triangle\mathrm{PP'N}$ と $\triangle\mathrm{P}_1'\mathrm{P}_1\mathrm{N}$ の相似と，弦の長さに円弧の長さが比例することより

$$\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi} = \frac{R(2\Delta\varphi_1)}{R(2\Delta\varphi)} = \frac{\mathrm{NP}_1}{\mathrm{NP}'}$$

を得る．$\Delta\varphi \to 0$ のとき，$\mathrm{N}\to\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}'\to\mathrm{P}$ なので

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\mathrm{NP}_1}{\mathrm{NP}'} = \frac{\mathrm{QP}_1}{\mathrm{QP}} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

である．□

**ヤコビの不変量**　関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ の定積分について

$$J(\varphi) = \int_{\varphi}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

とおく．

**補題 21**　関数 $f(x)$ と $p(x)$，$q(x)$ に対し

$$\frac{d}{dx}\int_{p(x)}^{q(x)} f(t)\,dt = f(q(x))q'(x) - f(p(x))p'(x)$$

**証明**　$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおく．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{p(x)}^{q(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\{F(q(x)) - F(p(x))\} \\
&= F'(q(x))q'(x) - F'(p(x))p'(x) \\
&= f(q(x))q'(x) - f(p(x))p'(x)
\end{aligned}$$

である．□

**命題 100**　$J(\varphi)$ は $\varphi$ に依らない定数である．この定数を $\omega$ とおく．■

**証明**　補題 21 より

$$\frac{dJ(\varphi)}{d\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}}\cdot\frac{d\varphi_1}{d\varphi}-\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

である．命題 99 によって，この値は $\varphi$ の値にかかわらず 0 である．導関数が 0 となるので $J(\varphi)$ は定数である． □

この命題を用いて円の場合にポンスレの定理を証明する．補題が必要である．

**補題 22**　関数 $f(x)$ は実数で定義された積分可能な関数であり，$c$ を周期にもつとする．つまり任意の $x$ に対し $f(x+c)=f(x)$ が成りたつとする．このとき任意の整数 $n$ と実数 $a,\ b$ に対し

$$\int_a^{a+nc}f(x)\,dx=\int_b^{b+nc}f(x)\,dx$$

が成りたつ． ■

**証明**　$f(x)$ の周期性から $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+nc}^{b+nc}f(x)\,dx$ なので

$$\begin{aligned}\int_a^{a+nc}f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^{a+nc}f(x)\,dx\\ &= \int_{a+nc}^{b+nc}f(x)\,dx+\int_b^{a+nc}f(x)\,dx=\int_b^{b+nc}f(x)\,dx\end{aligned}$$

である． □

**ヤコビの不変量によるポンスレの定理の証明**　定理 11 の $Q_0,\ Q_1$ を円として示す．実平面なので，点は大文字にし，設定は本節の最初に行ったとおりとする．$Q_0$ 上の点 $\mathrm{P}_1$ から順次点列 $\mathrm{P}_i$ をとり，ある $n$ で $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_1$ となったとする．基準線と $\mathrm{OP}_1$ のなす角を $\varphi_1$ とし，設定で述べた方法で弦 $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}$ が $Q_1$ に接するとき，$\mathrm{OP}_{i+1}$ が基準線となす角を $2\varphi_{i+1}$ とする．

$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_1$ は，

$$\mathrm{P}(\varphi+\pi)=\mathrm{P}_n$$

を意味する．逆にこのとき $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_1$ となる．よって

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_n}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

一方，命題 100 より

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\omega+\cdots+\omega=(n-1)\omega$$

であるから，等式

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=(n-1)\omega$$

が成りたつ．ところが $\varphi_i$ の関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ は周期 $\pi$ をもつ．よって補題 22 によって任意の $\varphi$ に対して

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=(n-1)\omega$$

が成りたつ．これは任意の点 $\mathrm{P}(\varphi)$ を $\mathrm{P}_1$ として，同様に $\mathrm{P}_i$ を定めても，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_1$ となることを意味している．つまり定理 11 で $Q_0$，$Q_1$ を円としたとき，命題の成立が示された． □

**注意 27**　定積分 $\displaystyle\int_{\varphi}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ は楕円の弧長の計算過程で現れる積分なので**楕円積分**といわれる．証明の基本は，2 つの円の一方に接する直線が他方と交わるときの 2 つの交点の位置関係に関する不変量が楕円積分を用いることで得られるという命題 100 である．この命題の下でポンスレの定理そのものは周期関数の定積分のもつ性質として示される．

**注意 28**　図形を，O を原点に，OA を $x$ 軸として座標平面に置く．$\mathrm{Q}_0$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(\varphi)$ と $\mathrm{P}_1(\varphi_1)$ の座標は $(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi)$，$(R\cos\varphi_1,\ R\sin\varphi_1)$ であるから，直線 $\mathrm{PP}_1$ の方程式は

$$(\sin\varphi-\sin\varphi_1)x-(\cos\varphi-\cos\varphi_1)y-R\sin(\varphi-\varphi_1)=0$$

これから

$$x\cos\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\right)+y\sin\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\right)-R\cos\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\right)=0$$

となる．これが $\mathrm{Q}_1$ と接する条件は点 $(-a,\ 0)$ と直線との距離が $r$ であることなので，

$$\left|a\cos\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\right)+R\cos\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\right)\right|=r$$

これが $\varphi$ に対する関数値 $\varphi_1(\varphi)$ を結びつける関係である．

この等式を変形して $\varphi$ で微分することにより，命題 99 が得られるはずであるが，これはまだ出来ていない．

## 5.2　代数幾何へ

### 5.2.1　射影幾何と代数幾何

本節以降は研究ノートである．まだ示せていないことも述べつつ，順次書いてゆく．したがってそのつど必要な改訂がなされる．この節はこれまで展開してきたことをこえる内容を前提とする．つまり，楕円積分と楕円関数の基礎と楕円曲線の代数幾何的理論である．この分野の基本事項については必要なことを明示しつつ，しかし証明は行わない．したがって，この節以下は自己完結ではない．

**第 1，楕円関数によるポンスレの定理の証明**　ヤコビの証明では，2 つの円の一方に接する直線が他方と交わるときの 2 つの交点の位置関係に関する不変量が楕円積分を用いることで得られるという命題 100 を示した．これがポンスレの定理の根拠であった．

この基本思想のもと，ケーリーはさらに考察を深めた．ケーリー (Arthur Cayley) の論文集第 2 巻 [34] 所収の第 113 論文である．このケーリーの方法をもとに，ポンスレの定理 13 の楕円関数による証明を再構成する．

**第 2，ポンスレ多角形の存在条件**　ケーリーはさらに，ポンスレの閉形定理が成立するための 2 つの円錐曲線に関する条件を導きその結論を述べた．それが論文集第 2 巻 [34] 所収の第 115，116 論文である．しかしそこに証明はない．

ところが 1978 年に，Griffiths と Harris によって代数幾何的な証明がなされる．それが『ON CAYLEY'S EXPLICIT SOLUTION TO PONCELET'S PORISM』[38] である．さらにこれは『Poncelet's Theorem』[39] で包括的に展開されている．また,『Poncelet Porisms and Beyond』[40] ではさらに高次の場合にも拡張して，今日の問題まで述べられている．2012 年 7 月に，これらをご教示いただいた有本彰雄先生に心から感謝する．

この理論は本質的にリーマン面の解析的な理論にもとづいている．ますこの内容を再構成し，第 116 論文の定理を証明することをめざす．

**第 3，代数的証明をめざす**　ポンスレの定理そのものは，楕円曲線の代数的方法で証明される．それが『代数幾何学』[37] においてなされている．この本の 13 章の冒頭「前章でポンスレの定理の証明が完成したが，この定理は『いつ $n$ 角形が描けるのか』については何もいっていない．この問題を考えていくのがこの章の目標である」と書かれているが，ポンスレ多角形のケーリーによる条件までは至っていない．ケーリーによる条件はどこまで代数的理論の範囲で求まるのか．あるいは解析理論なしには不可能なのか，ここを見極めたい．

以上のようなこのような目標をおいて勉強をはじめたのが，2012 年の 5 月であった．以下はその過程をそのままにおく．

**一般の位置**　行列 $C$ で定まる円錐曲線 $Q_0$ と行列 $D$ で定まる円錐曲線 $Q_1$ がある．これらの円錐曲線は一般の位置にあるとする．つまり異なる 4 点を共有しているとする．以下において，言割らずともそうであるとする．

『Poncelet's Theorem』[39] では一般の位置にない場合についても包括的に述べている．

### 5.2.2　楕円関数による証明

ケーリー (Arthur Cayley) の論文集第 2 巻 [34] 所収の第 113 論文の方法を再構成する．ケーリーはさらに，続く 115，116 論文において，ポンスレ多角形の存在条件まで得ているのであるが，その証明はない．これは次節の研究課題とし，本節ではケーリーの方法によってポンスレの定理 13 の楕円関数による証明をおこなう．

**曲線束と接線**　$P^2$ の直線 $l$ に対して $\lambda f + g = 0$ がこれと接するとする．$l$ の方程式を用いて $\lambda f + g = 0$ の一文字を消去すれば，他の残る二文字の 2 次同次方程式が得られる．この判別式を 0 とおくことによって，$\lambda$ の 2 次方程式が得られる．つまり $l$ に接する曲線束の曲線を定める $\lambda$ の値は一般に 2 個ある．

以下では $Q_0$ と $Q_1$ を次のように定める．命題 94 によって，一般の位置にある 2 つの円錐曲線は射影変換によって次の形にすることができる．

$Q_0 : x^2 + y^2 + z^2 = 0$ とする．$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

$Q_1 : ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ とする．$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ である．

二つの方程式を連立して解くと

$$x^2 : y^2 : z^2 = b - c : c - a : a - b$$

となり，$Q_0$ と $Q_1$ が相異なる 4 点で交わるという条件は，$a$, $b$, $c$ がすべて異なるという条件と同値である．

**補題 23**　$\lambda$, $\mu$ は異なるとする．$Q(\lambda)$ と $Q(\mu)$ の共通接線は 4 本あり，接線の方程式は

$$\pm x\sqrt{b-c}\sqrt{a+\lambda}\sqrt{a+\mu} \pm y\sqrt{c-a}\sqrt{b+\lambda}\sqrt{b+\mu} \pm z\sqrt{a-b}\sqrt{c+\lambda}\sqrt{c+\mu} = 0 \tag{5.7}$$

である． ■

**証明**　$px + qy + rz = 0$ が $Q(\lambda)$ と $Q(\mu)$ に接するとする．$Q(\lambda)$ と $Q(\mu)$ の方程式は

$$\begin{aligned}(\lambda+a)x^2 + (\lambda+b)y^2 + (\lambda+c)z^2 = 0 \\ (\mu+a)x^2 + (\mu+b)y^2 + (\mu+c)z^2 = 0\end{aligned}$$

である．$q \neq 0$ であるとし，第 1 式で $y$ を消去する．

$$\begin{aligned} & (\lambda+a)q^2x^2 + (\lambda+b)(-px-rz)^2 + (\lambda+c)q^2z^2 \\ = \; & \{(\lambda+a)q^2 + (\lambda+b)p^2\}x^2 + 2(\lambda+b)prxz + \{(\lambda+b)r^2 + (\lambda+c)q^2\}z^2 = 0 \end{aligned}$$

これが 2 次同次方程式として重根もつ．その判別式をとって

$$\begin{aligned} & (\lambda+b)^2p^2r^2 - \{(\lambda+a)q^2 + (\lambda+b)p^2\}\{(\lambda+b)r^2 + (\lambda+c)q^2\} \\ = \; & -(\lambda+b)(\lambda+c)p^2q^2 - (\lambda+a)(\lambda+c)q^4 - (\lambda+a)(\lambda+b)r^2q^2 = 0 \end{aligned}$$

$\mu$ についても同様に成り立ち，$q \neq 0$ としたので

$$\begin{aligned}(\lambda+b)(\lambda+c)p^2 + (\lambda+a)(\lambda+c)q^2 + (\lambda+a)(\lambda+b)r^2 = 0 \\ (\mu+b)(\mu+c)p^2 + (\mu+a)(\mu+c)q^2 + (\mu+a)(\mu+b)r^2 = 0\end{aligned}$$

である．$q^2$ を消去して

$$(a-b)(\lambda-\mu)(\lambda+c)(\mu+c)p^2 - (b-c)(\lambda-\mu)(\lambda+a)(\mu+a)r^2 = 0$$

同様にして $p^2 : q^2$ も定まり，次式を得る．

$$p^2 : q^2 : r^2 = (b-c)(\lambda+a)(\mu+a) : (c-a)(\lambda+b)(\mu+b) : (a-b)(\lambda+c)(\mu+c)$$

$q \neq 0$ としたが，得られた結果の対称性から，他の場合も同様である．これから共通接線の方程式 (5.7) を得る． □

**命題 101**　$Q(\lambda)$ と $Q(\mu)$ の共通接線が $Q_0$ と 2 点 $p,\ p'$ で交わるとする．$p$ における $Q_0$ の接線が $Q(\theta)$ に接するとする．このとき等式

$$\begin{aligned} & (b-c)\sqrt{a+\lambda}\sqrt{a+\mu}\sqrt{a+\theta} \\ + \quad & (c-a)\sqrt{b+\lambda}\sqrt{b+\mu}\sqrt{b+\theta} \\ + \quad & (a-b)\sqrt{c+\lambda}\sqrt{c+\mu}\sqrt{c+\theta}=0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

が成立するように根号の符号を選ぶことができる．

逆にこの関係式が成立するように平方根の符号をとることができれば，$Q(\lambda)$ と $Q(\mu)$ の共通接線と $Q_0$ の交点を $p$ とするとき，$p$ での $Q_0$ の接線は $Q(\theta)$ に接する．■

**証明**　$p(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とおく．$p$ における $Q_0$ の接線は

$$x_1x+y_1y+z_1z=0$$

である．これが $Q(\theta)$，つまり

$$(\theta+a)x^2+(\theta+b)y^2+(\theta+c)z^2=0$$

に接する．$z_1\neq 0$ とする．これから

$$\begin{aligned} & (\theta+a){z_1}^2x^2+(\theta+b){z_1}^2y^2+(\theta+c)(x_1x+y_1y)^2 \\ = \quad & \{(\theta+a){z_1}^2+(\theta+c){x_1}^2\}x^2+2(\theta+c)x_1y_1xy\{(\theta+b){z_1}^2+(\theta+c){y_1}^2\}y^2=0 \end{aligned}$$

判別式をとって整理すると $z_1\neq 0$ なので

$$(\theta+b)(\theta+c){x_1}^2+(\theta+c)(\theta+a){y_1}^2+(\theta+a)(\theta+b){z_1}^2=0$$

対称性から $z\neq 0$ でないときも同様である．${z_1}^2=-{x_1}^2-{y_1}^2$ より

$$(c-a)(\theta+b){x_1}^2-(b-c)(\theta+a){y_1}^2=0$$

これらより

$${x_1}^2:{y_1}^2:{z_1}^2=(b-c)(\theta+a):(c-a)(\theta+b):(a-b)(\theta+c) \tag{5.9}$$

が成り立つ．

符号を適切にとり，その ときの $x_1:y_1:z_1$ が方程式 (5.7) の

$$x\sqrt{b-c}\sqrt{a+\lambda}\sqrt{a+\mu}+y\sqrt{c-a}\sqrt{b+\lambda}\sqrt{b+\mu}+z\sqrt{a-b}\sqrt{c+\lambda}\sqrt{c+\mu}=0$$

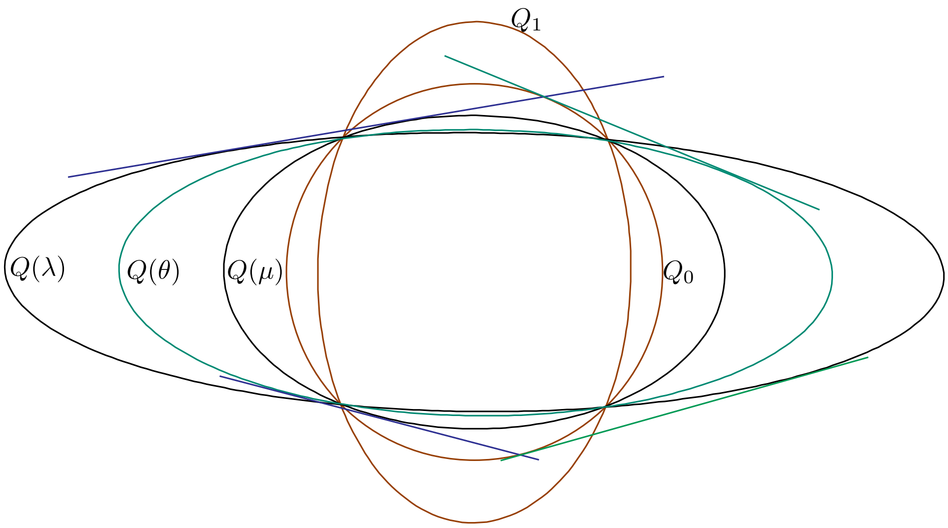
の上にあるようにする．このとき等式 (5.8) が成立する．

逆にこのとき，

$$x_1:y_1:z_1=\sqrt{(b-c)(\theta+a)}:\sqrt{(c-a)(\theta+b)}:\sqrt{(a-b)(\theta+c)}$$

は (5.9) を満たす $Q_0$ 上の点であり，ここでの接線が $Q(\theta)$ に接している．□

**注意 29**　等式 (5.8) は $\lambda,\ \mu,\ \theta$ に関して対称である．したがって，$Q(\lambda)$ と $Q(\mu)$ の共通接線と $Q_0$ の交点における $Q_0$ の接線が $Q(\theta)$ に接するならば，$Q(\lambda)$ と $Q(\theta)$ の共通接線と $Q_0$ の交点における $Q_0$ の接線は $Q(\mu)$ に接し，$Q(\mu)$ と $Q(\theta)$ の共通接線と $Q_0$ の交点における $Q_0$ の接線も $Q(\lambda)$ に接する．これを例示するために，さらに $(x,\ y,\ z)\mapsto(x,\ y,\ iz)$ の座標変換をおこない，実平面に描いてみる．




**楕円積分の補題**　$a$, $b$, $c$ を相異なる定数として

$$\Pi(x) = \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}} \tag{5.10}$$

とおく．

**補題 24**　$x$ と $y$ に対して $z$ を

$$\Pi(x) \pm \Pi(y) = \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$$

で定める．このとき

$$\left\{\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)} \mp \sqrt{(y+a)(y+b)(y+c)}}{x-y}\right\}^2 = a+b+c+x+y+z \tag{5.11}$$

が成り立つ．■

**証明**　$u = \Pi(x)$, $v = \Pi(y)$, $w = \Pi(z)$ とし，$u \pm v = w$ とおいて $w$, $z$ を固定する．

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{-1}{\sqrt{(y+a)(y+b)(y+c)}}$$

である．$u \pm v = w$ が固定されているので $\dfrac{d}{dv} = \mp\dfrac{d}{du}$．よって

$$\frac{dx}{du} = -\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}, \quad \frac{dy}{du} = \mp\frac{dy}{dv} = \pm\sqrt{(y+a)(y+b)(y+c)}$$

である．

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{du^2} &= \frac{dx}{du}\frac{d}{dx}\frac{dx}{du} = -\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)} \\ &\qquad \times -\frac{(x+a)(x+b)+(x+a)(x+c)+(x+b)(x+c)}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\{3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ca\right\} \\
\frac{d^2y}{du^2} &= \frac{1}{2}\left\{3y^2+2(a+b+c)y+ab+bc+ca\right\} \\
\frac{d^2(x+y)}{du^2} &= \frac{1}{2}\left\{3(x^2+y^2)+2(a+b+c)(x+y)+2(ab+bc+ca)\right\}
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d(x+y)}{du}\cdot\frac{d(x-y)}{du}=\left(\frac{dx}{du}\right)^2-\left(\frac{dy}{du}\right)^2 \\
&= x^3-y^3+(a+b+c)(x^2-y^2)+(ab+bc+ca)(x-y) \\
&= (x-y)\{x^2+xy+y^2+(a+b+c)(x+y)+(ab+bc+ca)\}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&(x-y)\frac{d^2(x+y)}{du^2}-\frac{d(x+y)}{du}\cdot\frac{d(x-y)}{du} \\
&= \frac{x-y}{2}\cdot\{3(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)\}=\frac{(x-y)^3}{2}
\end{aligned}
$$

両辺に $\dfrac{2}{(x-y)^3}\cdot\dfrac{d(x+y)}{du}$ を乗じて

$$
\frac{2}{(x-y)^2}\cdot\frac{d(x+y)}{du}\cdot\frac{d^2(x+y)}{du^2}-\frac{2}{(x-y)^3}\left\{\frac{d(x+y)}{du}\right\}^2\cdot\frac{d(x-y)}{du}=\frac{d(x+y)}{du}
$$

両辺 $u$ で積分して

$$
\frac{1}{(x-y)^2}\left\{\frac{d(x+y)}{du}\right\}^2=x+y+C
$$

を得る．積分定数 $C$ は $w$ で決まる．これを明示してこの等式は

$$
\left\{\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}\mp\sqrt{(y+a)(y+b)(y+c)}}{x-y}\right\}^2=x+y+C(w)
$$

となる．次にこの $C(w)$ を決定する．

$$
\begin{aligned}
C(w) &= \left\{\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}\mp\sqrt{(y+a)(y+b)(y+c)}}{x-y}\right\}^2-(x+y) \\
&= \frac{(a+b+c)(x^2+y^2)+x^2y+xy^2}{(x-y)^2} \\
&\quad +\frac{(ab+bc+ca)(x+y)+2abc\mp2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)(y+a)(y+b)(y+c)}}{(x-y)^2}
\end{aligned}
$$

ここで $y\to\infty$ をとると $v\to0$ となり $w\to u$ である．よって

$$
C(u)=a+b+c+x
$$

この結果 $C(w)=a+b+c+z$ となり，等式 (5.11) が成立する． □

**楕円関数**　一般に

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

とおくと $w$ は $z$ の関数であるが，その逆関数をヤコビの楕円関数と言い $z = \mathrm{sn}\, w$ と表す．$k$ を母数，$k' = \sqrt{1-k^2}$ を補母数という．そして

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}$$

とおくと，sn 関数は $4K,\ 2iK'$ を基本周期とする二重周期関数で，奇関数である．

**ケーリーの楕円関数の表示**　$\Pi(x) = u$ に対してその逆関数を $x = P(u)$ とおく．

$\Pi(x)$ の定義 (5.10) において $x = -c + \dfrac{c-a}{z^2}$ とおきかえる．$k = \sqrt{\dfrac{b-a}{c-a}}$ とすると，

$$\Pi(x) = \frac{2}{\sqrt{c-a}} \int_0^{\sqrt{\frac{c-a}{x+c}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

となる．したがって，sn を用いると $\sqrt{\dfrac{c-a}{x+c}} = \mathrm{sn}\dfrac{\sqrt{c-a}}{2}u$ が成り立つ．これを $x$ について解いて

$$P(u) = -c + \frac{a+c}{\mathrm{sn}^2 \dfrac{\sqrt{c-a}}{2}u}$$

を得る．これが $P(u)$ の楕円関数 sn による表示である．これからまた $P(u)$ は偶関数である．

$a,\ b,\ c$ が実数の場合，$a < b < c$ とすると積分 (5.10) はまず $x > -a > -b > -c$ で定義され，その逆関数を複素平面全体に解析接続したものが $P(u)$ である．実数でない場合も同様に考えることができる．

等式 (5.11) は楕円関数 $P(u)$ の加法定理である．実際，$P(u) = x,\ P(v) = y$ とすると，関係式 $\Pi(x) \pm \Pi(y) = \Pi(z)$ は $z = P(u \pm v)$ を意味する．そして

$$\frac{dx}{du} = P'(u) = -\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)},\ \frac{dy}{dv} = P'(v) = -\sqrt{(y+a)(y+b)(y+c)}$$

であるから，等式 (5.11) は

$$P(u \pm v) = \left\{ \frac{P'(u) \mp P'(v)}{P(u) - P(v)} \right\}^2 - P(u) - P(v) - (a+b+c) \tag{5.12}$$

となる．

**注意 30**　$a+b+c = 0$ の場合の $P(u/2)$ がいわゆるワイエルシュトラスの $\wp$ 関数である．

**ケーリーの等式**

**命題 102**　等式

$$\Pi(\lambda) \pm \Pi(\mu) \pm \Pi(\theta) = 0 \tag{5.13}$$

が成り立つ符号のとり方が存在することは等式 (5.8) が成立することと同値である．■

**証明**　等式 (5.13) は $\Pi(\theta) = \pm\Pi(\lambda) \pm \Pi(\mu)$ であるから，補題 24 によって，この等式は補題 24 の $x$, $y$, $z$ を $\lambda$, $\mu$, $\theta$ をに変えた等式

$$\left\{\frac{\sqrt{(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)} \mp \sqrt{(\mu+a)(\mu+b)(\mu+c)}}{\lambda-\mu}\right\}^2 = a+b+c+\lambda+\mu+\theta \tag{5.14}$$

を意味する．よって等式 (5.8) と，符号を適当にとることで等式 (5.14) の成立する $\lambda$, $\mu$, $\theta$ が存在することとが同値であること，これが証明すべきことである．いいかえると，根号部分の平方計算を経て 2 式が同一の式なることが証明すべきことである．

$$\begin{aligned}
& \text{等式 (5.14)} \\
\Longleftrightarrow\quad & \pm 2\sqrt{(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)(\mu+a)(\mu+b)(\mu+c)} \\
& = \lambda\mu(\lambda+\mu) + 2(a+b+c)\lambda\mu + (ab+bc+ca)(\lambda+\mu) + 2abc - (\lambda-\mu)^2\theta \\
\Longleftrightarrow\quad & (\lambda-\mu)^2\theta^2 - 2\{\lambda\mu(\lambda+\mu) + 2(a+b+c)\lambda\mu + (ab+bc+ca)(\lambda+\mu) + 2abc\}\theta \\
& +\lambda^2\mu^2 - 2(ab+bc+ca)\lambda\mu - 4abc(\lambda+\mu) + (ab+bc+ca)^2 - 4(a+b+c)abc = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \lambda^2\mu^2 + \mu^2\theta^2 + \theta^2\lambda^2 - 2\lambda\mu\theta(\lambda+\mu+\theta) - 2(\lambda\mu+\mu\theta+\theta\lambda)(ab+bc+ca) \\
& +(ab+bc+ca)^2 - 4(a+b+c)\lambda\mu\theta - 4abc(\lambda+\mu+\theta) - 4(a+b+c)abc = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \{\lambda\mu+\mu\theta+\theta\lambda-(ab+bc+ca)\}^2 - 4(\lambda+\mu+\theta+a+b+c)(\lambda\mu\theta+abc) = 0 \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

次に，同様にして

$$\begin{aligned}
& \text{等式 (5.8)} \\
\Longleftrightarrow\quad & (b-c)^2(a+\lambda)(a+\mu)(a+\theta) \\
& -(c-a)^2(b+\lambda)(b+\mu)(b+\theta) - (a-b)^2(c+\lambda)(c+\mu)(c+\theta) \\
& +2(c-a)(a-b)\sqrt{(b+\lambda)(b+\mu)(b+\theta)(c+\lambda)(c+\mu)(c+\theta)} \\
\Longleftrightarrow\quad & 4(b+\lambda)(b+\mu)(b+\theta)(c+\lambda)(c+\mu)(c+\theta) \\
& = \{(b-c)^2a - bc(b+c) - 2bc(\lambda+\mu+\theta) - (b+c)(\lambda\mu+\mu\theta+\theta\lambda) - 2\lambda\mu\theta\}^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & (b-c)^2a^2 - 2\{bc(b+c) + 2bc(\lambda+\mu+\theta) + (\lambda\mu+\mu\theta+\theta\lambda)(b+c) + 2\lambda\mu\theta\}a \\
& +b^2c^2 - 2(\lambda\mu+\mu\theta+\theta\lambda)bc - 4\lambda\mu\theta(b+c) + (\lambda\mu+\mu\theta+\theta\lambda)^2 - 4(\lambda+\mu+\theta)\lambda\mu\theta = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \{ab+bc+ca-(\lambda\mu+\mu\theta+\theta\lambda)\}^2 - 4(a+b+c+\lambda+\mu+\theta)(abc+\lambda\mu\theta) = 0 \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

となる．それぞれが同一の式に同値変形されたので，等式 (5.14) となるように符号がとれることは等式 (5.8) となるように符号がとれることと同値であることが示された． □

**系 102.1**　等式 (5.13) が成り立つ符号のとり方が存在することは，等式

$$\begin{aligned}
& (\mu-\theta)\sqrt{\lambda+a}\sqrt{\lambda+b}\sqrt{\lambda+c} \\
+\quad & (\theta-\lambda)\sqrt{\mu+a}\sqrt{\mu+b}\sqrt{\mu+c} \\
+\quad & (\lambda-\mu)\sqrt{\theta+a}\sqrt{\theta+b}\sqrt{\theta+c} = 0
\end{aligned} \tag{5.17}$$

が成立する符号のとり方が存在することと同値である．

**証明**　等式 (5.13) は等式 (5.15) と同値になった．ところがこの式は $(a,\ b,\ c)$ と $(\lambda,\ \mu,\ \theta)$ に関して対称である．よってこれを入れ替え，上記命題の等式 (5.8) から等式 (5.16) にいたる同値変形を逆にたどることで等式 (5.17) を得る． □

**注意 31**　等式 (5.17) は行列式では

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \sqrt{(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)} \\ 1 & \mu & \sqrt{(\mu+a)(\mu+b)(\mu+c)} \\ 1 & \theta & \sqrt{(\theta+a)(\theta+b)(\theta+c)} \end{vmatrix} = 0$$

と表される．

**ポンスレの定理の証明**　ケーリーの定理は，曲線束の 2 つの円錐曲線 $Q(\lambda),\ Q(\mu)$ に接する接線の $Q_0$ との交点における接線が $Q(\theta)$ と接しているとき，$\lambda,\ \mu,\ \theta$ を楕円積分の関係式に表すことができるということであった．この定理をもとに，ポンスレの定理 13 の別証明をおこなう．

**命題 103**　$Q(\lambda)$ と $Q(\mu)$ の共通接線が $Q_0$ と異なる 2 点 $p,\ p'$ で交わるとする．$Q(\lambda)$ の接線が $Q_0$ と交わる点を $p,\ p'$ とする．$p$ と $p'$ での $Q_0$ の接線が $Q(\theta)$，$Q(\theta')$ と接しているとする．このとき，

$$\Pi(\theta) = \Pi(\mu) - \Pi(\lambda),\ \Pi(\theta') = \Pi(\mu) + \Pi(\lambda) \tag{5.18}$$

となるように符号をとることができる． ■

**証明**　命題 102 によって

$$\Pi(\theta) = \pm\Pi(\lambda) \pm \Pi(\mu), \qquad \Pi(\theta') = \pm\Pi(\lambda) \pm \Pi(\mu)$$

となるように符号がとれる．ここで 2 式の右辺の $\Pi(\lambda)$ と $\Pi(\mu)$ の符号がいずれも同符号，またはいずれも異符号であれば，$\Pi(\theta)\pm\Pi(\theta') = 0$ となる．$\Pi(\infty) = 0$ なのでこれは $\Pi(\theta)\pm\Pi(\theta')+\Pi(\infty) = 0$ を意味する．このとき $Q(\theta')$ と $Q(\infty) = Q_0$ の共通接線と $Q_0$ の交点は $p'$ のみであり，その点での $Q_0$ の接線が $Q(\theta)$ と接すること意味し，$\theta = \theta'$ である．$p$ と $p'$ が異なることに反する．

よって一方が同符号で一方が異符号なので，適当に符号をとることによって (5.18) の形にすることができる． □

このとき，関係式 $\Pi(\theta) - \Pi(\theta') = 2\Pi(\lambda)$ が成り立つが，逆も成立する．

**命題 104**　変数 $\theta$ と $\theta'$ が関係式

$$\Pi(\theta) - \Pi(\theta') = 2\Pi(\lambda), \tag{5.19}$$

となるように符号をとることができるなら，$Q_0$ と $Q(\theta)$ の共通接線の $Q_0$ の接点を $p$，$Q_0$ と $Q(\theta')$ の共通接線の $Q_0$ の接点を $p'$ とするとき，直線 $p \vee p'$ は $Q(\lambda)$ に接する． ■

**証明**　$p'$ を通る $Q(\lambda)$ の接線を $l$ とする．曲線束の曲線で $l$ と接するものを $Q(\mu)$ とする．このとき

$$\Pi(\lambda) + \Pi(\mu) + \Pi(\theta') = 0$$

となるように符号を選ぶことができ，条件から

$$-\Pi(\lambda) + \Pi(\mu) + \Pi(\theta) = 0$$

も成立し，$l$ は $p$ を通る．つまり直線 $p \vee p'$ は $Q(\lambda)$ に接する． □

以上の準備によって，ポンスレの定理 13 の楕円積分による証明ができる．ポンスレの定理 13 を，曲線束の記号を用いて再掲する．

> 自然数 $n$ を $n \geqq 3$ とする．与えられた円錐曲線 $Q_0$ 上に頂点をもつ $n$ 角形 $a_1 a_2 \cdots a_n$ がある．辺 $a_1 \vee a_2$，$\cdots$，$a_{n-1} \vee a_n$ はそれぞれ $Q_0$ と同じ曲線束に属する円錐曲線 $Q(\lambda_1)$，$Q(\lambda_2)$，$\cdots$，$Q(\lambda_{n-1})$ に接している．このとき残る辺 $a_n \vee a_1$ も同じ曲線束に属するある円錐曲線 $Q(\mu)$ に接する． ■

**証明**

$$\Pi(\theta_i) - \Pi(\theta_{i+1}) = 2\Pi(\lambda_i) \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

が成り立っている．ここで

$$\Pi(\lambda_1) + \Pi(\lambda_2) + \cdots + \Pi(\lambda_{n-1}) + \Pi(\mu) = 0$$

となるように符号のとれる $\mu$ をとる．このとき

$$\Pi(\theta_1) - \Pi(\theta_n) = 2\Pi(\mu)$$

も成り立ち，$a_n \vee a_1$ は同じ曲線束に属する円錐曲線 $Q(\mu)$ に接する． □

**閉形定理**　同様に閉形定理 14 が示される．定理を再掲する．

> 自然数 $n$ を $n \geqq 3$ とする．与えられた円錐曲線 $Q_0$ 上に頂点をもつ $n$ 角形 $a_1 a_2 \cdots a_n$ で，辺 $a_1 \vee a_2$，$\cdots$，$a_{n-1} \vee a_n$，$a_n \vee a_1$ がそれぞれ $Q_0$ と同じ曲線束に属する円錐曲線 $Q(\lambda_1)$，$Q(\lambda_2)$，$\cdots$，$Q(\lambda_n)$ に接しているものが存在する．このとき，$Q_0$ 上の任意の点 $p_1$ をとり，順次 $p_i$ $(i = 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ を $p_{i-1} \vee p_i$ が $Q(\lambda_1)$，$Q(\lambda_2)$，$\cdots$，$Q(\lambda_{n-1})$ に接するようにとる．このとき残る辺 $p_n \vee p_1$ も $Q(\lambda_n)$ に接する． ■

**証明**　一つの $n$ 角形の存在によって

$$\Pi(\lambda_1) + \cdots + \Pi(\lambda_n) = 0$$

となる．その結果，$p_i$ $(i = 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ を $p_{i-1} \vee p_i$ が $Q(\lambda_1)$，$Q(\lambda_2)$，$\cdots$，$Q(\lambda_{n-1})$ に接するなら，上記記号で

$$\Pi(\theta_1) - \Pi(\theta_n) = 2\Pi(\mu)$$

も成り立ち，このとき残る辺 $p_n \vee p_1$ も $Q(\lambda_n)$ に接する． □

### 5.2.3　存在条件の導出

**存在条件**　$Q_0$ に内接し，$Q_1$ に外接する $n$ 角形をポンスレ $n$ 角形といおう．以下，ポンスレ $n$ 角形を考えるときは $n \geqq 3$ とする．$Q_0$ と $Q_1$ がどのような条件を満たせばポンスレ $n$ 角形が存在するのか．

ケーリーはこれにも答えている．しかしケーリーは結果のみを書いている．証明は，あるいはケーリーにとっては余りに自明なことであったのかも知れない．

その結果に対して，1978 年グリヒス (Griffiths) と ハリス (Harris) が代数幾何的な証明をおこなった．それが『ON CAYLEY'S EXPLICIT SOLUTION TO PONCELET'S PORISM』[38] で

ある．グリヒスとハリスは,「このような十分条件を当初は知らなかった．この結論をケーリーは煩雑な楕円関数の考察から得たのかも知れない．しかしいずれにせよあまりにも結論は簡明である．この結論に対して代数幾何的な証明ができる」とのべ，それを実行している．

19 世紀中葉，複素函数論にはじまり楕円関数からさらにその先へと，リーマン, アーベル，ヤコビ，そしてガウスらによって解析的な代数幾何がきり拓かれ，大きく展開した．それは代数，幾何，解析の交叉する古典数学の華であった．同じ頃，ポンスレらによる射影幾何もまた大きく発展した．ポンスレの定理からケーリーのポンスレ条件の発見もまた，この時代のことであった．ヤコビ，ケーリーの仕事にその結びつきの端緒があった．1970 年代になって，この二つが深く結びつき，ポンスレ条件の代数幾何による証明がなされたのである．ここでその基本的な論の構成を行う．証明はできない．証明をつけきるならもっと演繹的で構成的な順にしなければならない．ここでは逆に根拠をたどる方向で構成する．証明や演繹的な構成は参考文献『Poncelet's Theorem』[39],『Poncelet Porisms and Beyond』[40] などを見てもらいたい．

**双対曲線**　$P^2$ にある円錐曲線 $Q$ の接線は双対空間 $P^*$ の点である．円錐曲線 $Q$ の接線の集合は双対空間 $P^*$ の曲線をなす．この曲線を $Q$ の双対曲線といい $Q^*$ と表す．

**命題 105**　円錐曲線 $Q$ を定める行列を $T$ とする．このとき $Q^*$ は $T^{-1}$ で定まる $P^*$ の円錐曲線である．■

**証明**　$P^2$ の座標を $(x) = (x,\ y,\ z)$，$P^*$ の座標を $(X) = (X,\ Y,\ Z)$ とする．$Q$ の方程式を ${}^t(x)T(x) = 0$ とする．$Q$ 上の点 $(a) = (a,\ b,\ c)$ での接線は ${}^t(x)T(a) = 0$ である．この接線は $P^*$ の点 $(\alpha) = T(a)$ に対応する．よって $(a) = T^{-1}(\alpha)$ であり，$T$ は対称なので ${}^t(a) = {}^t(\alpha)T^{-1}$ である．${}^t(a)T(a) = 0$ なので,

$${}^t(\alpha)T^{-1}(\alpha) = 0$$

つまり，点 $(\alpha)$ は方程式

$${}^t(X)T^{-1}(X) = 0$$

を満たす．逆も成り立つ．よってこれが $Q^*$ の方程式である．□

**系 105.1**　$(Q^*)^* = Q$ である．■

明らかである．

**楕円曲線**　${Q_1}^*$ の点は $P$ の直線に対応する．$P^*$ の点と $P$ の直線を同一視する．2 つの円錐曲線の直積集合 $Q_0 \times {Q_1}^*$ の部分集合 $E$ を次のように定める．

$$E = \{(p,\ l) \mid (p,\ l) \in Q_0 \times {Q_1}^*,\ p \in l\} \tag{5.20}$$

次の事実が成り立つ.

**命題 106**　$E$ は楕円曲線である．つまり，種数 1 の滑らかな代数曲線であり，ある点を単位元 $\mathfrak{o}$ に選ぶことによって可換群の構造を入れることができる．■

『代数幾何学』[37] での証明は代数的な計算による．この証明はまた,『Poncelet's Theorem』[39] にあるように，$E$ に解析構造を入れ，リーマン面としこれが楕円曲線であることを示す，という方向でもなされる．

以下，楕円曲線の点の間の和と差は加群としての演算である．

接線 $l$ と $Q_0$ との他の交点を $p'$ とする．これによって写像

$$\iota_1 : E \to E\ ; (p,\ l) \mapsto (p',\ l)$$

が定まる．点 $p'$ を通り $Q_1$ に接する他の接線を $l'$ とする．これによって写像

$$\iota_2 : E \to E\ ; (p',\ l) \mapsto (p',\ l')$$

が定まる．これらはそれぞれ $E$ 上の対合である．その合成をとり

$$\varphi = \iota_2 \circ \iota_1$$

とおく．これを用いると，ポンスレの定理は次のように表される．

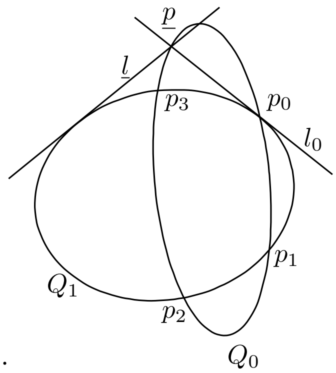
**命題 107**　自然数 $n$ に対して，$x_0 \in E$ で $\varphi^n(x_0) = x_0$ となるものが存在すれば，$\varphi^n$ は $E$ の恒等写像である．■

このようにとらえることで，ポンスレの定理を $E$ とその上の対合の合成に関する命題としてとらえることができる．この命題そのものは，われわれもさまざまの方法で証明してきた．さらに次に示すような代数群としての $E$ の演算を用いる証明が出来る．

**ポンスレ条件**　どのような条件を $Q_0$ と $Q_1$ が満たせば，ポンスレ $n$ 角形が存在するのか．ポンスレ $n$ 角形の存在条件をポンスレ条件といおう．

ここでケーリーからグリヒスに引き継がれた考え方を用いる．

$Q_0$ と $Q_1$ の 4 つの交点を $p_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ とし $p_0$ における $Q_1$ の接線を $l_0$ とする．$E$ の単位元として $\mathfrak{o} = (p_0,\ l_0) \in E$ をとる．そして $\underline{x} = \varphi(\mathfrak{o}) = (\underline{p},\ \underline{l})$ とおく．




これを用いるとポンスレ条件は次のように表される．

**命題 108**　自然数 $n$ に対して，$E$ の任意の元 $x(\in E)$ にはじまるポンスレ $n$ 角形存在するための必要十分条件は，$n\underline{x} = \mathfrak{o}$ となることである．■

この命題は次の事実から示される．

**命題 109**　対合の合成である $E$ の自己同型 $\varphi$ は，ある定点 $y_0$ を用いて

$$\varphi(x) = x + y_0$$

と表される．■

これは代数的にも解析的にも証明される．『代数幾何学』[37] 等参照．

ところが

$$\varphi(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o} + y_0 = y_0 = \underline{x}$$

より $\varphi(x) = x + \underline{x}$ となる．この結果

$$\varphi^n(x) = x + n\underline{x}$$

となる．よって $\varphi^n$ が恒等写像であることと $n\underline{x} = \mathfrak{o}$ が同値となる．

**ポンスレの定理 107 の証明**　以上の考察は，ポンスレ条件を求めるために準備として行ったのであるが，この時点でポンスレの定理 107 そのものは証明される．$\varphi^n(x_0) = x_0$ となる $x_0$ が存在すれば，

$$\varphi^n(x_0) = x_0 + n\underline{x} = x_0$$

より $n\underline{x} = \mathfrak{o}$ が結論され，$\varphi^n(x) = x$ がすべての $x$ で成立する．□

これが楕円曲線によるポンスレの定理の証明である．

**n 分点**　$n\underline{x} = \mathfrak{o}$ となるような $\underline{x}$ を $n$ 分点という．$\underline{x}$ が $n$ 分点となる $Q_0$，$Q_1$ の条件，それがポンスレ条件である．それを具体的に記述するために，$E$ にあわせてさらにこれと同型な二つの楕円曲線，線束楕円曲線と複素平面のトーラスで定まる楕円曲線を導入する．

### 線束楕円曲線とトーラス

**線束楕円曲線との同型**　定義 29 で定義された線束楕円曲線を $S$ とする．$S$ を非斉次座標で考えその方程式を

$$y^2 = |xC + D| \tag{5.21}$$

とする．$Q_0$，$Q_1$ が一般の位置にあるので，系 90.1 より 3 次方程式 $|xC + D| = 0$ は相異なる 3 根 $a_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ をもつ．$x \neq a_i$ のときは $x = \lambda$ に対して $S$ の 2 点

$$(\lambda,\ \pm\sqrt{|\lambda C + D|})$$

が対応する．$x = a_i$ のときは 1 点 $(a_i,\ 0)$ が対応し，$x = \infty$ のときは 1 点 $(\infty,\ \infty)$ が対応する．

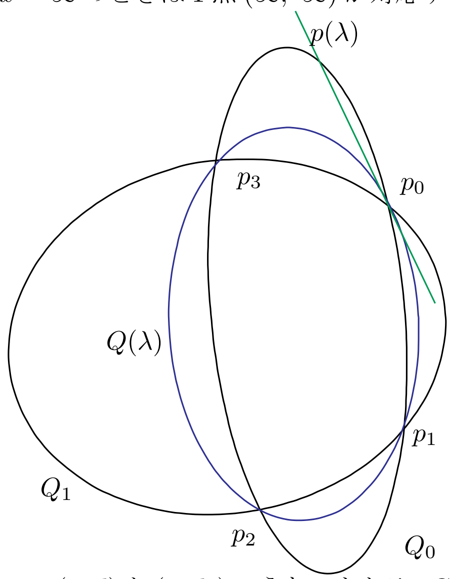
次に $E$ の点と複素数 $\lambda$ の対応を次のように定める．

曲線束の曲線 $Q(\lambda)$ に $p_0$ を通る接線を引き，その接線と $Q_0$ の交点のうち $p_0$ でないものを $p(\lambda)$ とする．$Q(\infty) = Q_0$，$Q(0) = Q_1$ なので，$p(\infty) = p_0$，$p(0) = \underline{p}$ である．また $Q(a_i)$ は退化二次曲線，つまり 4 交点を通る 2 直線であるから，

$$\{Q(a_i)\} = \{p_i\}$$

である．

したがって $\lambda \neq a_i$，$\infty$ の $\lambda$ に対しては，$E$ の 2 点が対応し，$\lambda = a_i$，$\infty$ に対しては 1 点が対応する．




$\mathbb{C}$ と $E$ の対応において，$\lambda = 0$ に対応する $E$ の 2 点 $\underline{x} = (\underline{p},\ \underline{l})$ と $(\underline{p},\ l_0)$ のうち $\underline{x}$ をとる．$\mathbb{C}$ と $S$ の対応において，$\lambda = 0$ に対応する $S$ の 2 点 $(0,\ \pm\sqrt{|D|})$ のいずれかをとる．ここでは $(0,\ \sqrt{|D|})$

をとるものとする．$\lambda$ に対応する $E$ と $S$ のそれぞれ 2 点のうち，ここからの解析接続で定まる方をとる．これによって $E$ と $S$ の間の一対一対応 $\psi$ が定義される．

**命題 110** 対応 $\psi$ は，定義 5.20 で定まる楕円曲線 $(E,\ \mathfrak{o})$ と，方程式 5.21 で定義された線束楕円曲線 $(S,\ (\infty,\ \infty))$ の同型対応である． ■

**注意 32** 私は当初，ケーリーの第 113 論文と『代数幾何学』[37] を学んだ段階で，補遺「線束楕円曲線の同型性」5.3.1 のような形で同型を示した．しかしこれは点の対応まで見通せていないものであり，このままではポンスレ条件の導出はできなかった．

**ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数** 線束楕円曲線 $S$ はまた，複素平面から作られるトーラスをリーマン面とする楕円曲線と同型である．

$\omega_1$，$\omega_2$ を比が実数倍でない二つの複素数とする．

$$\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

をこれらで張られる格子とする．このとき商集合 $\mathbb{C}/\Lambda$ はトーラストなる．

次にこの格子に対してワイエルシュトラスの $\wp$ 関数を次の無限級数で定義する．

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

和は $\omega \neq 0$ である $\Lambda$ 全体にわたる．定義から $\wp$ は

$$\wp(z + m\omega_1 + n\omega_2) = \wp(z), \quad (m,\ n \in \mathbb{Z})$$

という二重周期関数である．次の命題が成り立つ．

**命題 111**

i) 級数 $\wp$ は $\Lambda$ と交わらない任意のコンパクトな領域で一様に収束する．したがって $\wp(z)$ は $\Lambda$ を除く $\mathbb{C}$ のうえで解析的である．そして $\Lambda$ の各点で 2 位の極をもつ．

ii) すべての $z$ に対して $\wp(-z) = \wp(z)$ である．

iii) $\wp(z)$ は $\omega_1$，$\omega_2$ を周期とする楕円関数である． ■

この基礎のうえに次の事実が成り立つ．

**命題 112**

i) $\wp'(z)$ は $\Lambda$ の各点で 3 位の極をもつ楕円関数である．

ii) $\wp(z_1) = \wp(z_2)$ は，$z_2 \equiv \pm z_1 \quad (\mathrm{mod.}\ \Lambda)$ と同値である．

iii) $\Lambda$ で定まる 2 定数 $g_2$，$g_3$ を

$$g_2 = g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\omega \neq 0} \omega^{-4},\ g_3 = g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\omega \neq 0} \omega^{-6}$$

とおくと

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

が成り立つ．

iv) 3 次方程式 $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$ は相異なる 3 根をもち，それは

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\ e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right),\ e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$$

で与えられる． ■

また $\wp$ は次の形の加法定理をもつ．これは加法定理 (5.12) からの直接の帰結でもある．

**命題 113**　$\wp$ 関数の加法公式：

$$\wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(u) \mp \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right\}^2$$

が成り立つ． ■

**命題 114**　3 次方程式 $4t^3 - c_2 t - c_3 = 0$ が重根をもたないとき，つまりその判別式 $D = -\frac{1}{16}\left({c_2}^3 - 27{c_3}^2\right)$ に関して ${c_2}^3 - 27{c_3}^2 \neq 0$ が成り立つとき，格子 $\Lambda$ で

$$g_i(\Lambda) = c_i,\quad (i = 2,\ 3)$$

となるものが存在する． ■

**系 114.1**　$e_1 + e_2 + e_3 = 0$ である相異なる 3 数に対して命題 111 の iv) となる $\wp$ 関数が存在する． ■

**線束楕円曲線と $\wp$ 関数の同型**　3 次方程式 $|\lambda C + D| = 0$ は相異なる 3 根 $a_i$ $(i = 1,\ a_2,\ a_3)$ をもつ．行列 $C$ や $D$ は定数倍の同値類の代表であるから，$|C| = 1$ にとれる．このとき線束楕円曲線 $S$ の方程式 (5.21) は

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \tag{5.22}$$

と因数分解される．このとき $S$ を $S(a_1,\ a_2,\ a_3)$ と表す．

**命題 115**　$S(a_1,\ a_2,\ a_3)$ に対して格子 $\Lambda$ が存在し，$S(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は楕円曲線 $\mathbb{C}/\Lambda$ と同型になる．逆に任意の格子 $\Lambda$ に対し $\mathbb{C}/\Lambda$ と $S(a_1,\ a_2,\ a_3)$ が同型となる $a_1,\ a_2,\ a_3$ が存在する． ■

この対応は次のようになされる．$a_1,\ a_2,\ a_3$ に対して $s = a_1 + a_2 + a_3$ とし，$e_i = a_i - \frac{s}{3}$ とおくと $e_i$ の和は 0 なので，系 114.1 より格子 $\Lambda$ でその $\wp$ 関数が

$${\wp'}^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

となるものが存在する．$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\varphi(z) = \left(\wp(z) + \frac{s}{3},\ \frac{\wp'(z)}{2}\right)$$

とおくと，この $\varphi$ が $\mathbb{C}/\Lambda$ から $S(a_1,\ a_2,\ a_3)$ への同型を与える．

この二つの同型で $E$ の点 $\underline{x}$ に対応する $\mathbb{C}/\Lambda$ の点を $\tau$ とする．

$$\begin{array}{ccccc}
E & \sim & S(a_1,\ a_2,\ a_3) & \sim & \mathbb{C}/\Lambda \\
\mathfrak{o} & : & (\infty, \infty) & : & 0 \\
\underline{x} & : & (0,\ \sqrt{|D|}) & : & \tau
\end{array}$$

したがって，ポンスレ条件 108 はこの $\tau$ に関して

$$n\tau \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ \Lambda) \tag{5.23}$$

が成り立つ条件と言いかえることが出来た.

**楕円関数**　ここで楕円関数に関する古典的な事実を用いる. $\mathbb{C}/\Lambda$ 上の有理型関数を楕円関数と言った. 次の命題が成立する.

**命題 116**　$f$ を周期 $\omega_1$, $\omega_2$ をもつ定数でない楕円関数とする.

i) $f$ は極をもつ.

ii) 極における留数の和は 0 である.

iii) 重複を考えた $f$ の零点の個数の和と極の個数の和は等しい.

iv) $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_n$ で零点をもち，$b_1$, $b_2$, $\cdots$, $b_n$ で極をもつ楕円関数 $f$ が存在するための必要十分条件は

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \cdots + b_n \quad (\mathrm{mod.}\ \Lambda)$$

である. ■

楕円関数で，0 において高々 $n$ 位の極をもつものの集合を $V_n$ とする.

**命題 117**　$V_n$ は $\mathbb{C}$ 上の $n$ 次元ベクトル空間である. $V_n$ の基底として

$$1,\ \wp,\ \wp',\ \cdots,\ \wp^{(n-2)}$$

をとることが出来る. ■

ポンスレ条件 5.23 は命題 116 の iv) の条件において

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \tau,\ b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$$

としたものである. 命題 116 の iv) から，ポンスレ条件 5.23 は，$V_n$ の楕円関数 $f$ で，$f \neq 0$ かつ $\tau$ で $n$ 位の零点をもつものが存在すること，と同値である. このとき，$f$ は必然的に 0 で $n$ 位の極をもつ.

**命題 118**　$f_1$, $f_2$, $\cdots$, $f_n$ を $V_n$ の基底とする. $f \neq 0$ かつ $\tau$ で $n$ 位の零点をもつものが存在する条件は,

$$W(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

とおくとき，$W(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)(\tau) = 0$ となることと同値である. ■

**注意 33**　$z$ の関数 $f(z)$ が $z=\tau$ で解析的で $m$ 位の零点をもてば $a_m \neq 0$ で

$$f(z) = a_m(z-\tau)^m + \cdots$$

と展開される．ここで $u=g(z)$ で $u$ が $z=\tau$ で解析的で $g'(\tau) \neq 0$ とする．つまり $c_1 \neq 0$ で

$$u = g(z) = g(\tau) + c_1(z-\tau) + \cdots$$

と展開されたとする．$f$ を $u$ の関数と見たとき，$u=g(\tau)$ で $l$ 位の零点をもつとする．このとき

$$\begin{aligned} f(u) &= b_l(u-g(\tau))^l + \cdots \\ &= b_l(c_1(z-\tau)+\cdots)^l + \cdots \end{aligned}$$

となるので，$l=m$ である．

　したがって $z=\tau$ で位数 $n$ の零点をもつ関数の存在条件である，条件 $W(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)(\tau)=0$ は，$f_1,\ \cdots,\ f_n$ を $u$ の関数と見たときの条件 $W(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)(g(\tau))=0$ と同値である．

**ケーリーの定理**　以上の準備のもとにポンスレ条件を $Q_0$ と $Q_1$ の行列 $C$ と $D$ で書き表すケーリーの定理が証明される．

線束楕円曲線 $S(a_1,\ a_2,\ a_3)$ と．トーラスで出来る楕円曲線 $\mathbb{C}/\Lambda$ が同型となる格子 $\Lambda$ をとり，それによって定まる関数 $\wp$ をとる．$\mathbb{C}/\Lambda$ から $S(a_1,\ a_2,\ a_3)$ への同型を $\varphi(z)=(x,\ y)$ とすると

$$x(z) = \wp(z) + \frac{s}{3},\ y(z) = \frac{\wp'(z)}{2}$$

となり，この同型で

$$\varphi(0) = (\infty,\ \infty),\ \varphi(\tau) = (0,\ \sqrt{|D|})$$

となるのであった．

**定理 17**

$$y = \sqrt{|xC+D|} = \sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

とする．このときポンスレ条件は,

i) $n=2m+1$ $(m \geqq 1)$ のとき

$$\begin{vmatrix} A_2 & \cdots & A_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m} \end{vmatrix} = 0.$$

ii) $n=2m$ $(m \geqq 2)$ のとき

$$\begin{vmatrix} A_3 & \cdots & A_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m-1} \end{vmatrix} = 0.$$

と同値である．　■

**証明**　$x(\tau)=0$ であり $x'(\tau)=\wp'(\tau)\neq 0$ である．したがって注意 33 によって，条件 $W(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)(z=\tau)=0$ は条件 $W(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)(x=0)=0$ と同値である．

$V_n$ の基底として

$$
\begin{aligned}
&1,\ x,\ \cdots,\ x^m; y,\ xy,\ \cdots,\ x^{m-1}y, \qquad (n=2m+1)\\
&1,\ x,\ \cdots,\ x^m; y,\ xy,\ \cdots,\ x^{m-2}y, \qquad (n=2m)
\end{aligned}
$$

をとる．この基底を用いて $W=W(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)$ を計算する．

$n=2m+1$ の場合に示す．$n=2m$ の場合も同様である．非負整数 $j,\ k$ に対して

$$
\left.\frac{d}{dx^j}x^k\right]_{x=0} = \begin{cases} 0, & (j\neq k)\\ j! & (j=k)\end{cases}
$$

また $0\leqq j\leqq m-1$ に対して

$$
x^j y=\sum_{k=j}^{\infty}A_{k-j}x^k
$$

であるから $m+1\leqq l\leqq 2m$ に対して

$$
\left.\frac{d}{dx^l}x^j y\right]_{x=0}=l!A_{l-j}
$$

となる．これより $W$ は

$$
W=\begin{vmatrix} A & B\\ O & C\end{vmatrix}
$$

と分けられる．ここで $A$ は $(m+1)\times(m+1)$ の対角行列式で，成分は $1,\ 1,\ 2!,\ \cdots,\ m!$ である．$B$ は $(m+1)\times m$ の行列式，$O$ は $m\times(m+1)$ の零行列式である．そして $C$ は

$$
\begin{aligned}
C &= \begin{vmatrix} (m+1)!A_{m+1} & \cdots & (m+1)!A_2\\ (m+2)!A_{m+2} & \cdots & (m+2)!A_3\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (2m)!A_{2m} & \cdots & (2m)!A_{m+1}\end{vmatrix}\\
&= \pm(m+1)!(m+2)!\cdots(2m)!\begin{vmatrix} A_2 & \cdots & A_{m+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m}\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

（複合は並べ替えの回数で決まる.）

これより $W=0$ と $\begin{vmatrix} A_2 & \cdots & A_{m+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m}\end{vmatrix}=0$ の同値性が示された．　□

**例 8**　命題 97 の記号を用いると

$$
y=\sqrt{|xC+D|}=\sqrt{x^3\,|C|+x^2\Theta_1+x\Theta_2+|D|}
$$

である．$f(x)=x^3\,|C|+x^2\Theta_1+x\Theta_2+|D|$ とおく．

$$
A_0 \quad = \quad \sqrt{f(0)}=\sqrt{|D|}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}\Big]_{x=0} = \frac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}} = \frac{\Theta_2}{2\sqrt{|D|}} \\
A_2 &= \frac{d^2}{dx^2}\sqrt{f(x)}\Big]_{x=0} = \frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\Big]_{x=0} \\
&= \frac{2f''(0)f(0) - f'(0)^2}{2f(0)\sqrt{f(0)}} = \frac{4\Theta_1|D| - {\Theta_2}^2}{2D\sqrt{|D|}} \\
A_3 &= \frac{d^3}{dx^3}\sqrt{f(x)}\Big]_{x=0} = \frac{d}{dx}\frac{2f''(x)f(x) - f'(x)^2}{2f(x)\sqrt{f(x)}}\Big]_{x=0} \\
&= \frac{4f'''(0)f(0)^2 - 6f''(0)f'(0)f(0) + 3f'(0)^3}{f(0)^2\sqrt{f(0)}} \\
&= \frac{24|C||D|^2 - 12\Theta_1\Theta_2|D| + 3\Theta_2^3}{8D^2\sqrt{|D|}}
\end{aligned}
$$

これより得られる $n = 3$, 4 の結論が，定理 15 と命題 98 に他ならない．

**注意 34**　すでに，線型代数を用いる証明の中で $n = 3$，$n = 4$ の場合を示した．そこでは $n = 3$ のときは必要十分条件であることまで示せたが，$n = 4$ の場合は注意 24 に書いたように，十分性しか示せていなかった．ところが上記定理によって，$Q_0$ と $Q_1$ が一般の位置にあるという条件の下で，$A_3 = 0$ が必要十分条件であることが示された．

## 5.3 補遺

### 5.3.1 未解決経過

#### ポンスレの定理関連

#### 線型代数による証明で一般の位置にない場合

［注意 26 の補遺］

1)　このとき必要条件の部分は次のような計算がなされる．定理の証明前半と同様の考察から

$$g(x) = {x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_0x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_0 = (x_0 + x_1 + x_2)^2$$

とできる．

$$f_1(x) = g(x) - 2(ka_{12}x_1x_2 + k'a_{01}x_0x_1 + k''a_{20}x_2x_0)$$

は同じである．これによって定まる二次曲線が $Q_1$ である．またその行列を $D$ とする．

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 - k'a_{01} & 1 - k''a_{20} \\ 1 - k'a_{01} & 1 & 1 - ka_{12} \\ 1 - k''a_{20} & 1 - ka_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

である．

$$
\begin{aligned}
|D| &= 1 - (1 - ka_{12})^2 - (1 - k'a_{01})\{1 - k'a_{01} - (1 - ka_{12})(1 - k''a_{20})\} \\
&\quad +(1 - k''a_{20})\{(1 - k'a_{01})(1 - ka_{12}) - (1 - k''a_{20})\} \\
&= 1 - (1 - ka_{12})^2 - (1 - k'a_{01})^2 - (1 - k''a_{20})^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & & +2(1-ka_{12})(1-k'a_{01})(1-k''a_{20}) \\
 & = & -2(ka_{12}{}^2+k'a_{01}{}^2+k''a_{20}{}^2)+(k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20})^2-kk'k''\,|C| \\
\Theta_1 & = & -a_{12}{}^2-a_{20}{}^2-a_{01}{}^2+2(1-k'a_{01})a_{12}a_{02}+2(1-k''a_{02})a_{01}a_{12} \\
 & & +2(1-ka_{12})a_{01}a_{02} \\
 & = & -2(a_{12}{}^2+a_{20}{}^2+a_{01}{}^2)+(a_{01}+a_{12}+a_{20})^2-(k+k'+k'')\,|C| \\
\Theta_2 & = & 2a_{01}\{-(1-k'a_{01})+(1-ka_{12})(1-k''a_{20})\} \\
 & & +2a_{20}\{(1-k'a_{01})(1-ka_{12})-(1-k''a_{20})\} \\
 & & +2a_{12}\{-(1-ka_{12})+(1-k'a_{01})(1-k''a_{20})\} \\
 & = & 2a_{01}(kk''a_{20}a_{12}+k'a_{01}-ka_{12}-k''a_{20}) \\
 & & +2a_{20}(kk'a_{12}a_{01}-k'a_{01}-ka_{12}+k''a_{20}) \\
 & & +2a_{12}(k'k''a_{01}a_{20}-k'a_{01}+ka_{12}-k''a_{20}) \\
 & = & 4(k'a_{01}{}^2+ka_{12}{}^2+k''a_{20}{}^2)-2(a_{01}+a_{12}+a_{20})(k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20}) \\
 & & +(kk'+k'k''+k''k)\,|C|
\end{array}
$$

この場合

$$
\begin{array}{rl}
 & \{\Theta_2-(kk'+k'k''+k''k)\,|C|\}^2-4\,(|D|+kk'k''\,|C|)\,\{\Theta_1+(k+k'+k'')\,|C|\} \\
= & \{4(k'a_{01}{}^2+ka_{12}{}^2+k''a_{20}{}^2)-2(a_{01}+a_{12}+a_{20})(k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20})\}^2 \\
 & -4\{2(ka_{12}{}^2+k'a_{01}{}^2+k''a_{20}{}^2)-(k'a_{01}+ka_{12}+k''a_{20})^2\} \\
 & \times\{2(a_{12}{}^2+a_{20}{}^2+a_{01}{}^2)-(a_{01}+a_{12}+a_{20})^2\} \\
= & 8\{(k'-k)(k'-k'')a_{01}+(k-k')(k-k'')a_{12}+(k''-k)(k''-k')a_{20}\}\,|C|
\end{array}
$$

となる．これは射影変換で不変の関係がない．この場合の考察は未完である．
2)　さらにまた，十分条件の証明でえられた関係式 (5.6) の残余項を $\alpha-1$ で括るとき，残る因数部分がどのようになるのか，$\alpha$ が残るのか否かを含めてこの考察も未完である．
3)　曲線束が一般的でない場合，例えば $Q_0$ と $Q_1$ が 1 点で接し 2 点で交わる場合などのときに，本定理がどのように成り立つのかの考察も未完である．

### 楕円曲線関連

#### 線束楕円曲線の同型性

［注意 32 の補遺］

**命題 119**　$Q^0$ と $Q^1$ を $Q_0: x^2+y^2+z^2=0$，$Q_1: ax^2+by^2+cz^2=0$ とする．
　このとき楕円曲線 $E$ は方程式

$$y^2=(x+a)(x+b)(x+c)$$

で定まる $\mathbb{C}^2$ におかれた楕円曲線と双有理同型である．■

**証明**　$D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ であるから ${Q_1}^*$ は方程式

$$\frac{X^2}{a}+\frac{Y^2}{b}+\frac{Z^2}{c}=0$$

で定まる円錐曲線である．よって集合 $E$ は

$$E=\{(x,\ y,\ z,\ X,\ Y,\ Z)\mid x^2+y^2+z^2=0,\ \frac{X^2}{a}+\frac{Y^2}{b}+\frac{Z^2}{c}=0,\ xX+yY+zZ=0\}$$

と表される．

$zZ=-(xX+yY)$ より

$$\frac{z^2X^2}{a}+\frac{z^2Y^2}{b}+\frac{(xX+yY)^2}{c}=0$$

これから

$$\left(\frac{z^2}{a}+\frac{x^2}{c}\right)X^2+\frac{2xy}{c}XY+\left(\frac{z^2}{b}+\frac{y^2}{c}\right)Y^2=0$$

$\left(\frac{z^2}{a}+\frac{x^2}{c}\right)$ をかけて平方完成して

$$\left\{\left(\frac{z^2}{a}+\frac{x^2}{c}\right)X+\frac{xy}{c}Y\right\}^2+\left(\frac{z^2}{ab}+\frac{x^2}{bc}+\frac{y^2}{ca}\right)z^2Y^2=0$$

を得る．以下計算を簡明にするため非同次座標で考える．$W=\dfrac{X}{Y}$ とする．

$t=\dfrac{i}{z}\left\{\left(\dfrac{z^2}{a}+\dfrac{x^2}{c}\right)W+\dfrac{xy}{c}\right\}$ とおく．

$x^2+y^2+z^2=0$ は $x=s^2-1,\ y=2s,\ z=i(s^2+1)$ という媒介変数表示をもつので，

$$\begin{aligned} t^2 &= \left(\frac{z^2}{ab}+\frac{x^2}{bc}+\frac{y^2}{ca}\right)=\left(\frac{-x^2-y^2}{ab}+\frac{x^2}{bc}+\frac{y^2}{ca}\right) \\ &= \frac{1}{abc}\left\{(a-c)x^2+(b-c)y^2\right\}=\frac{1}{abc}\left\{(a-c)(s^2-1)^2+4(b-c)s^2\right\} \end{aligned}$$

つまり適当な平方根をとって

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{abc}{a-c}}t\right)^2 &= (s^2-1)^2+\frac{4(b-c)}{(a-c)}s^2 \\ &= \left(s^2+\frac{2b-a-c}{a-c}\right)^2+\left\{1-\frac{(2b-a-c)^2}{(a-c)^2}\right\} \\ &= \left(s^2+\frac{2b-a-c}{a-c}\right)^2+\frac{4(b-c)(a-b)}{(a-c)^2} \end{aligned}$$

を得る．ここで

$$s=\frac{v}{\sqrt{2}u},\ \sqrt{\frac{abc}{a-c}}t=u-\left(s^2+\frac{2b-a-c}{a-c}\right)$$

と置き換えると

$$u^2-2\left(\frac{v^2}{2u^2}+\frac{2b-a-c}{a-c}\right)u=\frac{4(b-c)(a-b)}{(a-c)^2}$$

これから

$$v^2 = u\left\{u - \frac{2(b-a)}{a-c}\right\}\left\{u - \frac{2(b-c)}{a-c}\right\}$$

となる．$\dfrac{a-c}{2}u$ を $u$，$\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^{\frac{3}{2}} v$ を $v$ にとり直すことによって

$$v^2 = u(u-b+a)(u-b+c)$$

最後に $u-b$ を $X$ にとり直して．

$$v^2 = (u+a)(u+b)(u+c)$$

を得る． □

**命題 120**　2 つの円錐曲線 $Q_0$ と $Q_1$ を定める行列を $C$，$D$ とする．定義 5.20 で定まる楕円曲線 $E$ は定義 29 で定義された線束楕円曲線と双有理同型である． ■

**証明**　命題 94 から射影変換によって $Q_0$ と $Q_1$ を $Q_0 : x^2+y^2+z^2=0$，$Q_1 : ax^2+by^2+cz^2=0$ とすることができる．このとき命題 119 から $E$ は $v^2=(u+a)(u+b)(u+c)$ と変形できた．ところが

$$(u+a)(u+b)(u+c) = \begin{vmatrix} u+a & 0 & 0 \\ 0 & u+b & 0 \\ 0 & 0 & u+c \end{vmatrix} = |uC+D|$$

である．これを同次座標に置きかえる．そして命題 97 から射影変換をおこなう．その行列を $A$ とすると $v^2=|uC+D|$ は

$$v^2 = |A|^2\,|uC+D|$$

となる．$v|A|^{-1}$ を改めて $v$ にとることにより，線束楕円曲線は不変である．よって本命題が成立する． □

# 第6章　結論

## 6.1　変換と不変

### 6.1.1　空間と変換

#### 動くなかで動かないものを見出す

#### 命題が命題である根拠を探究する

普遍的規則
準則

### 6.1.2　変換群と幾何

『数学辞典』「射影幾何学」－「射影幾何とエルランゲンの目録」

> F.Klein のエルランゲンの目録の立場からは、射影幾何学は射影変換群により不変な図形の性質の研究であるといえる．これにより他の古典幾何学との関係が明白になる．係数体が実数体である射影空間 $P^n$ の 1 つの超平面 $\Pi_\infty$ を指定するとき，これを不変にする射影変換全体の集合は射影変換群の部分群を作り，これに従属する幾何学がアフィン幾何学である．さらに $\Pi_\infty$ 内にある正則 2 次超曲面 $Q_2^{n-2}$ を指定し，これをも不変にする部分群に従属する幾何学が相似幾何学であり，ユークリッド幾何学はその 1 種である．非ユークリッド幾何学や共形幾何学も $P^n$ や $P^{n+1}$ 内のある正則 2 次超曲面を不変にする射影変換群の部分群に従属する幾何学として射影幾何学に含まれる．射影幾何学が最も広いといわれるのはこの意味においてである．

## 6.2　幾何学の精神

# 関連図書


[1] Pascal : Pansées，Texte de l'édition Brunschvicg. CLASSIQUES GARNIER，1968

[2] パスカル：パンセ，小品集，編集：前田陽一，世界の名著 24，中央公論社，1966

[3] パスカル全集第一巻,『円錐曲線試論』（原亨吉訳）,『幾何学の精神』（前田陽一訳）所収，人文書院，1959

[4] パスカル全集第二巻，人文書院，1959

[5] 三木清：パスカルにおける人間の研究，岩波書店，1926

[6] ルフェーブル，H.：パスカル，川俣晃自訳，新評論社，1954

[7] 中村雄二郎：パスカルとその時代，東京大学出版会，1965

[8] ルイ・コニュ：ジャンセニスム，朝倉剛・倉田清共訳，文庫クセジュ，白水社，1966

[9] 森有正：デカルトとパスカル，筑摩書房，1971

[10] 田辺保：パスカル　痛みとともに生きる，平凡社新書，2002

[11] 吉永良正：『パンセ』数学的思考，みすず書房，2005

[12] Taton,Runé : L' ≪ Essay pour les Coniques ≫ de Pascal，1955

[13] クライン：19 世紀の数学 (石井省吾，渡辺弘訳)，共立出版，1995

[14] ヒルベルト：幾何学基礎論 (中村幸四郎訳)，ちくま学芸文庫，2005.

[15] 秋月康夫・滝沢精二：射影幾何学，現在数学講座，共立出版，1957

[16] 岩村聯：束論，共立全書，1966

[17] 弥永昌吉・平野鉄太郎：射影幾何学，朝倉書店，1959

[18] 河田敬義：アフィン幾何・射影幾何，岩波講座・基礎数学，1976

[19] 郡敏昭：射影平面の幾何学，遊星社，1988

[20] Salmon,George : A Treatise on CONIC SECTIONS，Longmans Green，1917.

[21] サーモン：解析幾何学 (円錐曲線)，小倉金之助訳，山海堂，1923

[22] 窪田忠彦：解析幾何学（第一巻），内田老鶴圃，1942

[23] 長友次郎吉：幾何学，東京教学社，1969

[24] 小松醇郎：いろいろな幾何学，岩波新書，1977

[25] 矢野健太郎：幾何の有名な定理，数学ワンポイント双書，共立出版，1981

[26] 清宮俊雄：幾何学－発見的研究法―（改訂版），モノグラフ，科学新興社，1988

[27] 小平邦彦：幾何のおもしろさ，数学入門シリーズ 7，岩波書店，1991

[28] 難波誠：代数曲線の幾何学，現代数学社，1991

[29] 寺坂秀孝：幾何とその構造，日本評論社，1992

[30] 小平邦彦：幾何への誘い，岩波現代文庫，2000

[31] コセクター：幾何学入門上下 (銀林浩訳)，ちくま学芸文庫，2009

[32] オールト，F.，ボス，H.J.M.：閉形定理のポンスレによる証明,『数学セミナー』通巻 296 号所収，上野健爾訳，日本評論社，1986

[33] 寺杣 友秀：射影幾何のある風景,『数学セミナー』通巻 490 号所収，日本評論社，2002

[34] Cayly,Arthur : The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley.Vol.2

[35] シェーンベルグ,I.J.：数学点描，三村護訳，近代科学社，1989

[36] 上野健爾，志賀浩二，森田茂之：高校生に贈る数学 II，岩波書店，1995

[37] 硲文夫：代数幾何学，数学選書，森北出版，2005

[38] Griffiths,Phillip/Harris,Joseph : ON CAYLEY'S EXPLICIT SOLUTION TO PONCELET'S PORISM

[39] Flatto,Leopold : Poncelet's Theorem (Amer Mathematical Society,2009/3/30)

[40] Dragovic,Vladimir/Radnovic, Milena Poncelet Porisms and Beyond: Integrable Billiards,Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics (Frontiers in Mathematics)

[41] 日本数学会：数学辞典増訂版，岩波書店，1960

[42] 日本数学会：数学辞典第 4 版，岩波書店，2007.

[43] 岩田至康（編）：幾何学大辞典 1，槇書店，1971

[44] 岩田至康（編）：幾何学大辞典 2，槇書店，1971

[45] 岩田至康（編）：幾何学大辞典 6，槇書店，1982

[46] 京都大学数理解析研究所：教師に必要な数学能力に関する研究，数理解析研究所講究録 1711，2010

[47] 京都大学数理解析研究所：教育数学の構築，数理解析研究所講究録 1801，2012

[48] ウェブサイト Cut The Knot 内： Pascal's Theorem: What is it?，Pascal in Ellipse

[49] ウェブサイト 数学教材の部屋内： 円のパスカルの定理， 楕円のパスカルの定理