素数定理

概 要

『解析的整数論』(末綱恕一) に載っている素数定理の証明を紹介する.『数論 I』定理 7.3 までは用いる．その他は出来るかぎり完結的に整理した．(南海)

目 次

1　チェビシェフの定理

チェビシェフが 1851 年に示した定理を証明する．チェビシェフの定理は，素数分布に関して最初に得られた定理であった.

補題 1
自然数 $n!$ の素因数分解に含まれる素数 p の個数は,

$$\sum_{l=1}^{[\log_p n]}\left[\frac{n}{p^l}\right]$$

である.

証明　$[\log_p n]$ は $p^k \leqq n$ となる最大の k の値である.
1 から n までの自然数のなかでちょうど p^l で割り切れるものの個数は

$$\left[\frac{n}{p^l}\right]-\left[\frac{n}{p^{l+1}}\right]$$

である．$l \geqq [\log_p n]+1$ に対しては $\dfrac{n}{p^l}<1$ となり $\left[\dfrac{n}{p^l}\right]=0$ である．したがって求める個数は

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{[\log_p n]} l\left(\left[\frac{n}{p^l}\right]-\left[\frac{n}{p^{l+1}}\right]\right)\\
=\ &\sum_{l=1}^{[\log_p n]}\left(l\left[\frac{n}{p^l}\right]-(l+1)\left[\frac{n}{p^{l+1}}\right]\right)+\sum_{l=1}^{[\log_p n]}\left[\frac{n}{p^{l+1}}\right]=\sum_{l=1}^{[\log_p n]}\left[\frac{n}{p^l}\right]
\end{aligned}$$

である. □

定理 1
正の定数 $c_1<1<c_2$ で，$x \geqq 2$ に対して

$$c_1\frac{x}{\log x}<\pi(x)<c_2\frac{x}{\log x}$$

となるものが存在する.

証明

$$c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x)$$

となる正の定数の存在を示す.

m を正整数として，整数

$$ {}_{2m}\mathrm{C}_m = \frac{(2m)!}{m!m!}$$

の大きさを 2 通りの方法で評価する.

$p \leqq 2m$ である素数に対して $\dfrac{(2m)!}{m!m!}$ の素因数分解に含まれる素数 p の個数は，補題 1 より

$$\sum_{l=1}^{[\log_p(2m)]} \left(\left[\frac{2m}{p^l}\right] - 2\left[\frac{m}{p^l}\right] \right)$$

である．m を p^l で割った余りを r とするとき

$$\left[\frac{2m}{p^l}\right] - 2\left[\frac{m}{p^l}\right] = \begin{cases} 0 & \left(0 \leqq r < \dfrac{p^l}{2}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{p^l}{2} \leqq r < p^l\right) \end{cases}$$

である．したがって

$$\sum_{l=1}^{[\log_p(2m)]} \left(\left[\frac{2m}{p^l}\right] - 2\left[\frac{m}{p^l}\right] \right) \leqq [\log_p(2m)]$$

これから

$$\frac{(2m)!}{m!m!} \leqq \prod_{p \leqq 2m} p^{[\log_p(2m)]}$$

一方 $p^{[\log_p(2m)]} \leqq 2m$ であるから

$$\prod_{p \leqq 2m} p^{[\log_p(2m)]} \leqq (2m)^{\pi(2m)}$$

つまり

$$\frac{(2m)!}{m!m!} \leqq (2m)^{\pi(2m)}$$

となる．ところが

$$\begin{aligned} \log \frac{(2m)!}{m!m!} &= \frac{(2m)(2m-1)\cdots(m+1)}{m(m-1)\cdots 1} \\ &= \frac{(m+m)(m+m-1)\cdots(m+1)}{m(m-1)\cdots 1} = (1+1)\left(\frac{m}{m-1}+1\right)\cdots(m+1) \\ &\geqq 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^m \end{aligned}$$

なので，上の結果より

$$2^m \leqq (2m)^{\pi(2m)}$$

対数をとって

$$m \log 2 \leqq \pi(2m)\log(2m)$$

つまり

$$\frac{\log 2}{2} \cdot \frac{2m}{\log(2m)} \leqq \pi(2m)$$

次に $m \geqq 1$ に対して

$$\frac{2m}{2m+1} \geqq \frac{2}{3}$$

であるから

$$\begin{aligned}\pi(2m+1)\log(2m+1) > \pi(2m)\log(2m) \geqq \frac{\log 2}{2}(2m)\\ > \quad \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{2}{3}(2m+1)\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{\log 2}{3} \cdot \frac{2m+1}{\log(2m+1)} \leqq \pi(2m+1)$$

したがって整数 $[x]$ に対して

$$\frac{\log 2}{3} \cdot \frac{[x]}{\log[x]} \leqq \pi([x]) \leqq \pi(x)$$

が成り立つ．ここで $[x] > x-1$ なので

$$\begin{aligned}\frac{[x]}{\log[x]} \quad &> \quad \frac{x-1}{\log(x-1)} > \frac{x-1}{\log x}\\ &= \quad \frac{x}{\log x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \geqq \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\log x}\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\log 2}{6} \cdot \frac{x}{\log x} < \pi(x)$$

$c_1 = \dfrac{\log 2}{6}$ とおけばよい．

次に，

$$\pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x}$$

となる c_2 の存在を示す．

$m < p \leqq 2m$ の範囲の素数は $\dfrac{(2m)!}{m!m!}$ の分母を割らない．よって $\dfrac{(2m)!}{m!m!}$ は $\displaystyle\prod_{m<p\leqq 2m} p$ で割り切れる．つまり

$$m^{\pi(2m)-\pi(m)} < \prod_{m<p\leqq 2m} p \leqq \frac{(2m)!}{m!m!}$$

これから

$$(\pi(2m) - \pi(m))\log m < \log \frac{(2m)!}{m!m!}$$

ところが

$${}_{2m}\mathrm{C}_m < \sum_{k=0}^{2m} {}_{2m}\mathrm{C}_k = 2^{2m}$$

より

$$\log \frac{(2m)!}{m!m!} < 2m \log 2$$

$$\therefore \quad (\pi(2m)-\pi(m)) < 2\log 2\frac{m}{\log m}$$

$y \geqq 2$ に対して

$$[2y] \leqq 2y < 2[y]+2$$

なので

$$\begin{aligned}\pi(2y)-\pi(y) &= \pi([2y])-\pi([y]) \\ &\leqq \pi(2[y]+2)-\pi([y]) < \pi(2[y])+2-\pi([y]) \\ &< 2\log 2\frac{[y]}{\log[y]}+2 < (2\log 2+2)\frac{y}{\log y}\end{aligned}$$

ここで x に対して $2^{l+1} \leqq x < 2^{l+2}$ となる l をとり y に $\frac{x}{2}$, $\cdots$, $\frac{x}{2^l}$ を順次代入する.

$$\pi\left(\frac{x}{2^{j-1}}\right)-\pi\left(\frac{x}{2^j}\right) < (2\log 2+2)\frac{\frac{x}{2^j}}{\log x - j\log 2} < (2\log 2+2)\frac{\frac{x}{2^j}}{\log x}$$

$j=1$, $\ldots$, l について辺々加えることにより

$$\begin{aligned}&\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2^l}\right) \\ <\ &(2\log 2+2)\frac{x}{\log x}\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^l}\right) \\ <\ &(2\log 2+2)\frac{x}{\log x}\end{aligned}$$

$$\pi(x) < (2\log 2+2)\frac{x}{\log x}+\pi\left(\frac{x}{2^l}\right)$$

$2 \leqq \frac{x}{2^l} < 4$ なので $\pi\left(\frac{x}{2^l}\right) \leqq 2$ で，さらに $x \geqq 2$ のとき $1 < \frac{x}{\log x}$ であるから

$$\pi(x) < (2\log 2+4)\frac{x}{\log x}$$

つまり $c_2 = (2\log 2+4)$ とすればよい. □

2　素数定理の証明

いくつかの準備をして，素数定理を示す．1930 年代のランダウらの方法である.『数論 I』p.266 にあるように

$$\psi(x) \equiv \sum_{p^m \leqq x} \log p$$

を考える.

補題 2

$s=\sigma+ti$ において $\sigma>1$ なら

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx = s\int_0^\infty \psi(e^u)e^{-us}\,du$$

証明

チェビシェフの定理 1 より

$$
\begin{aligned}
\psi(x) \quad = \quad & \sum_{p\leqq x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p \leqq \sum_{p\leqq x}\frac{\log x}{\log p}\log p \\
& = \pi(x)\log x = O(x)
\end{aligned}
$$

これから積分の存在することは確かである．

$$
-\log(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots
$$

なので

$$
\log\zeta(s) = -\sum_{p}\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p,m}\frac{1}{mp^{ms}}
$$

この両辺を微分することにより

$$
\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)-\psi(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\left\{\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)s\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^{s+1}} = s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx \\
&= s\int_1^{\infty}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx
\end{aligned}
$$

このなかで $x = e^u$ とおけば，第二の積分になる． □

補題 3

v が 0 でない実数なら

$$
\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}\,dt = \frac{\sin^2 v}{v^2}
$$

証明

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}\,dt + \int_0^2\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_{0}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{-vti}\,dt + \int_0^2\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}\,dt\right\} \\
&= \int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)\cos vt\,dt \\
&= \left[\left(1-\frac{t}{2}\right)\frac{\sin vt}{v}\right]_0^2 + \int_0^2\frac{1}{2}\frac{\sin vt}{v}\,dt = \frac{1-\cos vt}{2v^2} = \text{右辺} \quad \square
\end{aligned}
$$

実数 u に対し

$$
H(u) \equiv e^{-u}\psi(e^u)
$$

と書く．明らかに $y_2 \geqq y_1$ のとき

$$
H(y_2) \geqq H(y_1)e^{y_1-y_2} \tag{1}
$$

が成り立つ．

補題 4
$\lambda > 0$ のとき任意の実数 y に対し

$$K(y,\ \lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda y} H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$$

が存在する．かつ

$$\lim_{y\to\infty} K(y,\ \lambda)$$

も存在し，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$ に一致する．

証明

$$\int_0^{\infty} e^{-u(s-1)}\, du = \frac{1}{s-1}$$

となるので，補題 2 より，

$$\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1}\right)\frac{1}{s} = \int_0^{\infty} \{H(u)-1\}\, e^{-u(s-1)}\, du$$

$\lambda > 0,\ \epsilon > 0$ と実数 y に対し

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda y t i}\left\{-\frac{\zeta'(1+\epsilon+\lambda t i)}{\zeta(1+\epsilon+\lambda t i)} - \frac{1+\epsilon+\lambda t i}{\epsilon+\lambda t i}\right\}\frac{dt}{1+\epsilon+\lambda t i} \\
&= \int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda y t i}\left\{\int_0^{\infty}\{H(u)-1\}\, e^{-\epsilon u} e^{-\lambda u t i}\, du\right\} dt \\
&= \int_0^{\infty}\{H(u)-1\}\, e^{-\epsilon u}\, du \int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda(y-u)ti}\, dt \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y}\left\{H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)-1\right\} e^{-\epsilon\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)}\, dv \int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right) e^{vti}\, dt \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y} H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right) e^{-\epsilon\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)}\frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv - \frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y} e^{-\epsilon\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)}\frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv
\end{aligned}$$

『数論 I』**定理 7.3** より $s = 1 + ti\ (t \neq 0)$ で $\zeta(s)$ は零点をもたない．したがって $\lambda \geqq 1$ となる範囲で

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$$

は正則である．この結果 $\epsilon \to 0$ のとき，第 1 行の積分値の極限は存在する．一方，最終行の第二の積分値の極限も存在する．これらの極限では積分内で $\epsilon \to 0$ としてよい．この結果，第一の積分についても同様であり．

$$\begin{aligned}
&K(y,\ \lambda) \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda y t i}\left\{-\frac{\zeta'(1+\lambda t i)}{\zeta(1+\lambda t i)} - \frac{1+\lambda t i}{\lambda t i}\right\}\frac{dt}{1+\lambda t i} + \int_{-\infty}^{\lambda y}\frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv
\end{aligned}$$

が存在した．
右辺の第一の積分は,『数論 I』**定理 7.3** より，ある普通の連続関数をフーリエ級数に展開した係数であるから $y \to \infty$ のときは 0 に収束する．よって

$$\lim_{y\to\infty} K(y,\ \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$$

(注) この値は実は π になるが，有限確定値であること以外は次の定理では使わないので,『解析的整数論』でも示されていない. □

定理 2 (素数定理)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

証明

第 1 段階として,

$$\psi(x) \sim x \quad \text{即ち} \qquad \lim_{y\to\infty} H(y) = 1$$

を示す.

補題 4 の積分値を P とおく.

$$P \equiv \lim_{y\to\infty} K(y,\ \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$$

このとき $\lambda > 0$ なので，補題 4 と不等式 (1) より

$$P \geqq \overline{\lim_{y\to\infty}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv \geqq \overline{\lim_{y\to\infty}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$$

ゆえに

$$\overline{\lim_{y\to\infty}} H(y) = \overline{\lim_{y\to\infty}} H\left(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \leqq \frac{Pe^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}}{\displaystyle\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv}$$

最後の式は $\lambda \to \infty$ のとき 1 に収束するので,

$$\overline{\lim_{y\to\infty}} H(y) \leqq 1 \tag{2}$$

不等式 (2) から $H(y)$ は有界である.

$$H(y) \leqq Q$$

とおく．再び補題 4 と不等式 (1) より

$$\begin{aligned}
P &= \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\lambda y} H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv \\
&\leqq Q \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \frac{dv}{v^2} + \underline{\lim_{y\to\infty}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv + Q \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \\
&\leqq \frac{2Q}{\sqrt{\lambda}} + Pe^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \underline{\lim_{y\to\infty}} H\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)
\end{aligned}$$

つまり

$$\underline{\lim_{y\to\infty}} H(y) \geqq e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \left(1 - \frac{2Q}{P\sqrt{\lambda}}\right)$$

この右辺も $\lambda \to \infty$ のとき 1 に収束するので,

$$\underline{\lim_{y\to\infty}} H(y) \geqq 1 \tag{3}$$

２つの不等式 (2)，(3) から

$$\lim_{y \to \infty} H(y) = 1 \tag{4}$$

が示された．

これをもとに素数定理を示す．$x > e$ に対して

$$\omega = \frac{x}{\log^2 x}$$

とおく．$\omega < x$ である．式 (1) から

$$\begin{aligned} \psi(x) \leqq \pi(x)\log x \quad &\leqq \quad \pi(\omega)\log x + \sum_{\omega < p \leqq x} \frac{\log p}{\log \omega} \log x \\ &\leqq \quad w \log x + \frac{\log x}{\log \omega}\psi(x) \end{aligned}$$

よって

$$1 \leqq \frac{\pi(x)\log x}{\psi(x)} \leqq \frac{x}{\psi(x)\log x} + \frac{\log x}{\log \omega}$$

ここで等式 (4) から

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\psi(x)} = 1$$

また

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{\log \omega} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{\log x - 2\log(\log x)} = 1$$

であるから

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{\psi(x)\log x} + \frac{\log x}{\log \omega} \right) = 1$$

つまり，素数定理は示された． $\square$