ウェブ上に
草の根数学の広場を！

河村央也

1　青空学園数学科

私は，かつて公立高校の教員を十数年間していました．その後いくつかの職業を経て，現在はある塾で高校生に数学を教えていますが，そのかたわら 1999 年初秋からウェブ上でホームページ『青空学園数学科』の制作と管理運営をしています．

青空学園数学科はウェブ上の仮想の学園です．私はそこで，高校数学や受験数学を学問として学び，力をつけようとよびかけています．学問としての高校数学の復権が願いです．同時に私は青空学園数学科を，高校生・受験生，大学初学年生，数学教員，数学をもう一度学ぼうとする社会人の誰にも開かれた，草の根の数学の協同の場としたいと考えてきました．その一環として，メーリングリストを用いた読書会を続けています．

2　読書会の楽しみ

2000 年 5 月に『解析概論』(高木貞治著，岩波書店) の読書会をはじめることにしました．数学をもう一度勉強したいと思いながら，その機会がなく，そのままになっている人は決して少なくないはずだ，そんな人と何か本を読むことが共有できれば，と考えました．

どのような方法をとるか．当時，インターネットが普及しはじめ，メーリングリストが利用できるようになっていました．各自がメールアドレスを登録すれば，サーバーに送ったメールが登録者全員に配送される，それだけの仕組みです．

数学関係の掲示板などで呼びかけ，本誌の「数セミ掲示板」にも載せてもらいました．10 人も集まればはじめようと考えていました．しかし反響は予想以上で，2000 年のうちに 70 人，その後，毎年新しい人が参加し，現在は 400 人を超える人が登録しています．

2.1　『解析概論』を読む

こうして『解析概論』読書会ははじまりました.『解析概論』の第 1 章は「基本的な概念」で，それを補うものが附録 I の「無理数論」です．これを同時に読むことからはじめました.「無理数論」は，実数を切断によって構成しながら，積を収束数列を用いて定義し，それが「得策」であるとしています．議論のはじまりはこのことに関した K さんの投稿でした．

切断を使って次のように積の定義の改良をしたいのですが．

命題　α の切断で 0 を含まない組を C_α，β のそれを C_β とし，$a \in C_\alpha$，$b \in C_\beta$ の積 ab の集合を $C_{\alpha\beta}$ とすると，それはある切断の 0 を含まないほうの組である．

この切断をもって積 $\alpha\beta$ を定義したいのですが，成り立ちますか？

これで俄然，議論が盛り上がりました．定義の内容

に対する疑問や意見，このような定義を考えること自体に対する議論などが飛び交い，議論が錯綜してきたので，途中でまとめを入れました.

普通の解析の教科書は次の 3 項を「実数の公理」として掲げ，この公理を満たす集合 $\mathbb{R}$ を実数とします.

(I) 代数体である.

(II) 全順序集合で加法と正の数の乗法は順序を保つ.

(III) 連続性の公理を満たす.

連続性の公理とは，例えば「実数の切断は下組に最大数があるか，上組に最小数があるかのいずれかである」，あるいは「上に有界な実数の集合は上限をもつ」など，いずれかを公理とする，ということです.

そこで，実数論は有理数体 $\mathbb{Q}$ の存在を前提に次のことを証明します.

(1) 実数の公理を満たす集合 $\mathbb{R}$ は存在する.

(2) 連続性の公理のいずれを採用しても (一定の条件下で) 同型である．つまり (I), (II) を保つ 1 対 1 対応が存在する.

$\mathbb{R}$ の存在証明は，有理数体 $\mathbb{Q}$ から実数の公理を満たす $\mathbb{R}$ を構成することでなされます．構成方法は同等ないくつかの方法があるわけです．切断の方法が最も原理的です.

『解析概論』は解析学の入門書として，実数論は折衷的です．ですから，連続性の公理相互の関係や，構成方法と公理の関係を解明することはそれほど重視されていません.

有理数 $\mathbb{Q}$ の切断の集合 $\mathbb{R}$ に体の構造を入れるにあたって，積の定義と積に関する計算法則成立の証明を，

『解析概論』のように級数でするのではなく，切断でやってみようというのが K さんの問題提起です．

実際に K さんの定義を実行して，報告もしました．

K さんの定義が新たな切断を定めているかの検証をしてみました．ただし切断で定義された実数 $\mathbb{R}$ には，有理数 $\mathbb{Q}$ がすでに埋め込まれ，$\mathbb{Q}$ の全順序と整合する全順序と加法はすでに定義できているとします．切断が有理数のときは $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ の 2 つの切断を同一視し，具体的に考えるときは境界は上の集合に入れることにします．

$\alpha = (A, A')$，$\beta = (B, B')$ とする．以下集合はすべて $\mathbb{Q}$ の部分集合である．

$\alpha > 0$，$\beta > 0$ のとき．$C_\alpha = A' = \{x \mid x \geqq \alpha\}$，$C_\beta = B' = \{x \mid x \geqq \beta\}$ (以下，全順序は定義できているので有理数と無理数でも不等式は意味がある)．

K さんの定義した $C_{\alpha\beta}$ に対し，$K = C_{\alpha\beta}$ とおく．K の補集合を K' とする．$\forall k \in K$，$\forall k' \in K'$ に対し $k' \leqq k$ を示せばよい．

$k < k'$ となったとする．$a \in C_\alpha$，$b \in C_\beta$ として $k = ab$ とする．$k' = \left\{\left(\dfrac{k'}{ab}\right)a\right\}b$ において，$k < k'$ より $\dfrac{k'}{ab} > 1$．よって $\left\{\left(\dfrac{k'}{ab}\right)a\right\} > a \geqq \alpha$ となる．つまり $\left\{\left(\dfrac{k'}{ab}\right)a\right\} \in C_\alpha$．

k' が C_α と C_β の要素の積で表せたので，$k' \in K'$ に矛盾する．よって $k' \leqq k$．つまり (K', K) は切断である．($\alpha > 0$，$\beta > 0$ 以外の場合は略します)

たしかに切断が定義できています．結合法則，分配法則の確認は可能であるようですが，実行はできませんでした．

また，いわゆる「アルキメデスの原則」は『解析概論』では歴史に従いアルキメデスの求積法のところに書かれています．私は，実数論を議論するなら最初に議論すべきと考えたので，次の問題を提起しました．

---

1. 『解析概論』8 ページ，定理 6 の [例 1] の [証] の 3 行目.「右辺 (nh) は n と共に限りなく増大する」とあるがその理由を述べよ.「それは当たり前だ」という方は 87 ページ下から 9 行目「アルキメデスの原則」を見てください.
2. 87 ページを読むと今度は 10 ページ，5 節の 4 つの定理の同値性に疑問が出る．そこで，4 節，5 節の論証で密かに「アルキメデスの原則」が使われているところがあるはずなのだがそれを捜して指摘してください.

これに対してもいろいろな議論が続き，しばらくおいて G さんからつぎの返答がありました.

アルキメデスの原則は『解析概論』に書かれている証明の中では,

(IV) 区間縮小法 $\rightarrow$ (I) Dedekind の定理

の証明において使われています．また, (IV) 区間縮小法以外の公理，(I) Dedekind の定理 (切断)，(II) Weierstrass の定理 (上限・下限)，(III) 有界な単調数列の収束からは「アルキメデスの原則」が導かれることを確認しました.

一応これで議論は落ちつきました．解析の準備として実数の構造を学ぶはずだったのが,「実数論の構造」に深入りして議論がやや難解になりました．進行役として，解決したことと未解決のことを確認しつつ 2 章に進み，計算にも力を入れるようにしました．こうしたやりとりを重ねながら章末問題をすべて解いていったのです．2000 年 6 月から 2002 年 3 月にかけ何とか読み通しました．

これらの記録はすべて現在もウェブ内で公開されています．興味をもたれた方は登録のうえご覧ください．この読書会は,「終わった議論をいつ蒸し返してもよい」ということでやってきています．新たに読まれた方からの疑問・反論・誤りの指摘，大いに歓迎です．

最近になっても「学生時代，何回もつまづいて，あきらめてしまった．人生の終わりに近づき，一歩でも前進したくて『解析概論』に挑戦します」と自己紹介をして登録する人がいます．まことに『解析概論』は日本の数学書の古典だと認識を新たにしました．

2.2　それからの歩み

『解析概論』の次に何か読みたい，解析の後なので代数がいいという意見が多く,『群の発見』(原田耕一郎著，岩波書店) に進みました．その次は幾何,『曲線と曲面の微分幾何』(小林昭七著，裳華房)．それぞれ 1 年をかけて読みました.『解析概論』以来ずっとこの読書会のメンバーである M さんは，この間の歩みをふり返って次のように言っておられます．

最初の頃，数学書の読み方がつかめず，テキストをなぞることから始めた記憶があります．計算中心の数学にばかり接していた学生時代に身につけた，自分流の読み方でも理解することができると，徐々に自信が

出てきました．抽象化・一般化の意義も，計算で確認しようとするとよく理解できることがあります．代数多様体の射影的集合を定義するイデアルが素イデアルであることの証明で，計算してもラチが開かず，視点を変えて代数的に解いたら簡単に解け，よく理解できた経験もあります．

数学の本を一人で読むのはつらいことです．読書会は，わからなければ聞くことができます．同時に，他人に理解させせようと整理する過程で，こちらがわかってくることがよくあります．

ここに，数学の専門家でない社会人にとっての，数学書を読む意義と楽しみがあります．

『曲線と曲面の微分幾何』を読む頃は仕事のほうが忙しくなり，時間を割くことができなくなりました．私は当分休みたいと思い，次の呼びかけがなかなかできませんでした．しかし，読書会を中断すると何か落ち着かない．ここは原点にかえって，自分が読みたい本を読もう．その頃，『数論 I——Fermat の夢と類体論』(加藤和也，黒川信重，斎藤毅著，岩波書店) が出版されました．青空学園数学科には『数論初歩』というタイトルで有理整数論の入門を用意しています．それ以外の準備として,『ガロア理論』(J. ロットマン著，関口次郎訳，シュプリンガー・フェアラーク東京),『代数幾何入門』(上野健爾著，岩波書店) を読み，続いて『数論 I』を読もうと提案しました．2005 年の 1 月，半年ほど休んだ後のことです．

2006 年に入り，いよいよ『数論 I』に進みました．この段階になると，さすがに投稿者は多くありません．草の根のささやかな取り組みですが，楽しみながら，ゆっくりと進んでいきます．あちこちにいろいろな読書会ができて，互いに助けあえればいいと思います．

3　「わかって，にっこり」が授業の原点

3.1　はじめにたち返って考える

私はいわゆる団塊の世代で，60 年代末から 70 年初頭の大学闘争の時代に学生生活を送り，高校に仕事を見つけたのです．はじめて教壇に立ったとき，授業をやっていて何かおかしいことに気づきました．クラスの何人かは分数の計算ができないのです．気づいてすぐに分数計算も授業でやろうとしましたが，今度はできる側の生徒たちから反発を受けました．分かりきったことに時間を割かずに先に進んでくれ，というわけです．悩みました．

そこで，私は分数の定義にたち返って，そこから四則計算の原理と方法に入りました．皆はじめての話ばかりで，よく聞いてわかってくれました．にっこりした顔が忘れられません．はじめてクラスとしての授業ができました[1]．関数の概念は，今も高校生が理解しづらいものですが，ブラックボックスの図を作り,「働き」としての関数を教えていきました．教えることについて実に多くのことが学べました．

3.2　わかる喜びは人間の本質

授業というのは「わかる」喜びを体験する場なのだ，ということをこのとき経験しました．大切なことは，課題を適切に設定し，何が問題なのかを本当に理解させ．そして自分で考えるようにもっていくことです．苦しくても考えずにおくことができないように問題を理解させることです．本当に問題に直面できた生徒は考えます．そして飛躍します．そのときにっこりするのです．これはそれぞれの段階で可能です．何もかも

[1] 先日，その頃の教え子に再会しました．卒業以来 28 年ぶりでしたが，すぐ昔の話になり,「高校でもう一度分数を習うとは思っていなかった」,「関数の話はおもしろかった」など昔のことをよく覚えてくれていました．

こちらで喋ってしまうと,「理解はできるが，納得できない」ままになり，数学の力はつきません.

高校教員時代のこの経験は今も生きています．問題を正しくつかみ，自分で考え，「わかって，にっこり」できる授業を指針にやっています．それが「学問としての高校数学」だと思っています.

数学的な現象のしくみや数学的な事実が成立する根拠を考える．問題に直面し，なぜ解けるのかを考えながら解く．解ければ一般化し，別解はないか調べる．本来，数学とはそんな学問なはずです．特に高校生には，このように学問として正面から勉強し，わかる喜びを知ることが，結局は力をつけるいちばんの道であることも，強調したいところです.

3.3　わかる喜びの継承を

掲示板やメールで，青空学園で勉強する高校生や塾で教えている生徒から質問や相談が寄せられます.

「2 週間ほど前にこのページに辿り着きました．もともと僕は考えることが好きで，数学が好きだったのですが，入試問題にあたると解けなくて苦労していました.『高校数学の方法』を読んでからは解けてしまう問題が増えてしまい，感動しています.」

……掲示板への，こんな書き込みは嬉しいものです．学問として数学を学び，その結果問題が解けていく，それを高校生に経験してほしいのです.

「先生のところに通って本当によかったと今も思います．友人と話していても，塾が苦痛だった人が結構いますが，私は毎週通うのがとても楽しみでした．おかげで数学も好きになれたし….」

……彼女が教育学部の 2 回生なった 6 月にもらったメールです．教育学の勉強をはじめて，高校 3 年のときの自分を思い出したのでしょう．勉強は楽しいのだ

という経験を，そして，わかる喜びをぜひ次の世代に引き継いでいってほしい.

3.4　いまこそ『高い立場からみた初等数学』を

私は，小学校の「算数」も中学・高校の数学も大学初年の数学も，そして専門的な現代の数学も，数学として高い統一性がなければならないと考えています. そのうえで，専門化される前の，文明社会で生きるうえで必要であり, 人間の土台となる数学のすべて，これが「初等数学」です.

現代日本では，初等数学の意義と内容が定まっていません．指導要録はたびたび改変されています．根拠を示すべきところを感覚的な説明に置きかえ，そうすることがわかりやすくすることだと思いちがいをしています．それでは，わからないときにたちかえる土台がなくなり，考える力が育ちません．こうしてますます分数や関数のわからない生徒を増やしています.

数学が現代日本に本当に根づいているとは，まだ言えません．このような現状に対して，いささかでも実践的に問題提起ができないかと考え，青空学園数学科を運営してきました．読書会は，私自身の楽しみであるとともに，この問題意識の上にもあります.

私は，いまこそ，100 年前のクラインにならって，現代日本における『高い立場からみた初等数学』が必要だと思います．初等数学を現代数学から系統的に基礎づける．それを学ぶことで数学教育に携わるもの自身がわかる喜びを知り，逆に現代数学はこの社会での存在意義を獲得する．そんな協同の取り組みがどこかではじまることを願って，筆をおきます.

[かわむら ひさなり]

| 青空学園数学科 URL
| http://www33.ocn.ne.jp/~aozora_gakuen/