数学対話 5期

青空学園数学科

2022 年 10 月 14 日

目 次

はじめに 14

第 1 章　基礎分野 **17**

1.1　量と数 17

1.1.1　はじめに 17

1.1.2　量で数を教える 19

1.1.2.1　水道方式 19

1.1.2.2　昔の授業 23

1.1.2.3　今省みる 27

1.1.3　数で量を捉える 33

1.1.3.1　量の獲得 33

1.1.3.2　量の条件 36

1.1.3.3　量の定義 40

1.1.4　終わりに 49

1.1.4.1　私の願い 49

1.1.5　参考文献 52

1.2　自然数と数学的帰納法 54

1.2.1　自然数の定義 54

1.2.1.1　自然数 54

1.2.1.2　ペアノの公理 54

1.2.2　数学的帰納法 55

1.2.3　同型定理と演算 57

1.2.3.1　自然数の和・積 58

1.3　実数とは何か 59

1.3.1　実数の集合は可付番でない 59

1.3.2　実数の構成と連続性 61

1.4　数列の極限と e の定義 65

1.4.1　数列の極限とはさみうちの原理 65

1.4.2　自然対数の底 67

1.5　複素数の構成 73

1.5.1　教科書の定義 73

1.5.2　体 75

1.5.3　複素数の構成 (一) 76

1.5.4　複素数の構成 (その他) 79

1.5.5　複素数と図形 81

1.5.6　根号について 86

1.6 方程式と恒等式 88
1.6.1 文字を用いて式に表す 88
1.6.2 定数と変数 91
1.6.3 方程式と恒等式 92
1.6.4 恒等式の判定法 93
1.7 関数と数列 96
1.7.1 関数 96
1.7.2 合成関数，逆関数 99
1.7.3 対応 100
1.7.4 数列は関数だ 102
1.8 座標の方法 104
1.8.1 座標 104
1.8.2 座標幾何のはじまり 105
1.8.3 関数のグラフ 107
1.8.4 ベクトルと座標 107
1.9 計量ということ 110
1.9.1 三平方の定理 110
1.9.2 三角形の成立条件と距離の公理 112
1.9.3 曲線の計量 116
1.9.3.1 微分可能曲線の長さ 117
1.9.4 角という量 118
1.9.5 三角関数 119
1.9.5.1 余弦定理 119
1.9.5.2 加法定理 120
1.9.6 余弦定理と正弦定理 121
1.9.7 弧長と三角関数 122
1.10 定積分の定義 124
1.10.1 なぜ「微積分の基本定理」? 124
1.10.2 アルキメデスの方法 127
1.10.3 定積分の定義 130
1.10.4 微分と積分 133
1.11 確率論の基礎 135
1.11.1 確率論の始まり 135
1.11.1.1 同様に確からしい 135
1.11.1.2 確率は賭け事の理論 136
1.11.2 確率の定義 138
1.11.2.1 言葉の再定義 138
1.11.2.2 標本空間と確率 139
1.11.2.3 余事象，和事象 141
1.11.2.4 根元事象が同様に確からしいとき 142
1.11.3 確率分布と期待値 142
1.11.3.1 確率変数 143
1.11.3.2 期待値の定義 143

1.11.3.3 パスカルとフェルマの往復書簡 144
1.11.3.4 和の期待値 145
1.11.3.5 確率変数の独立と積の期待値 147
1.11.3.6 二項分布 148
1.11.4 条件付確率 149
1.11.4.1 条件付確率 149
1.11.4.2 事象の独立 150
1.12 命題と条件 153
1.12.1 命題と命題関数 153
1.12.1.1 教科書は何といっているか 153
1.12.1.2 命題と命題関数 154
1.12.1.3 命題関数と真理集合 156
1.12.2 命題の否定，論理和，論理積 156
1.12.2.1 でない，または，かつ 156
1.12.2.2 条件の否定，論理和，論理積 158
1.12.3 命題の構成 160
1.12.3.1 条件から命題を作る 160
1.12.3.2 必要条件と十分条件 161
1.12.4 数学の論証 163
1.12.4.1 証明とは 163
1.12.4.2 背理法 163
1.13 対角線論法と不完全性定理 165
1.13.1 対角線論法 165
1.13.1.1 太郎が「太郎は嘘つき」と言う 165
1.13.1.2 リシャールの逆理 167
1.13.1.3 カントールの対角線論法 169
1.13.1.4 べき集合の濃度 173
1.13.2 数学の基礎 176
1.13.2.1 集合論の逆理 176
1.13.2.2 数学体系の対象化 178
1.13.2.3 非ユークリッド幾何学 180
1.13.2.4 ヒルベルトの計画 183
1.13.3 不完全性定理 187
1.13.3.1 形式化された数学 187
1.13.3.2 ゲーデルの対角線論法 189
1.13.4 参考書 194
1.14 ラムゼー型定理 196
1.14.1 ある問題と一般化 196
1.14.2 ラムゼー数 199
1.14.3 存在定理 200
1.14.4 漸化不等式 201
1.14.5 エルディシュ問題 204
1.14.6 参考書 208

第 2 章　代数分野 **209**
2.1　三次方程式 209
2.1.1　ある三次式の因数分解 209
2.1.2　根と解 210
2.1.3　根の公式とは 212
2.1.4　三次方程式を解く（その 1） 212
2.1.5　三次方程式を解く（その 2） 214
2.1.6　三次方程式の判別式 215
2.1.7　虚数の意義 217
2.1.8　カルダノの解法によるまとめ 218
2.2　四次方程式 221
2.2.1　入試問題から 221
2.2.2　別の b の値なら？ 222
2.2.3　四次方程式の一般的解法 (1) 222
2.2.4　四次方程式の一般的解法 (2) 223
2.2.5　ガロアの生涯 224
2.3　ラグランジュの試み 226
2.3.1　根の公式とは 226
2.3.2　ラグランジュの飛躍 226
2.3.3　二次方程式 227
2.3.4　三次方程式 228
2.3.5　四次方程式 229
2.3.6　五次方程式へ 232
2.4　1 の 17 乗根 234
2.4.1　1 の 7 乗根 234
2.4.2　1 の 5 乗根の計算 236
2.4.3　1 の 17 乗根 236
2.4.4　追加の考察 239
2.5　スツルムの定理 241
2.5.1　入試問題から 241
2.5.2　重根の判定 242
2.5.3　根の限界 243
2.5.4　スツルムの定理 247
2.6　原始多項式 252
2.6.1　整数係数の整式 252
2.6.2　原始多項式 253
2.6.3　因数分解のアルゴリズム 256
2.6.4　代数的整数 257
2.7　チェビシェフの多項式 259
2.7.1　いくつかの入試問題 259
2.7.2　チェビシェフの多項式 260
2.7.3　チェビシェフの多項式の応用 264
2.7.4　チェビシェフの多項式の係数 268

2.7.5 さらなる性質 . . . 272
2.7.6 関連入試問題 . . . 273
2.8 整式の整数論 . . . 276
2.8.1 整数と整式の類似 . . . 276
2.8.2 整数の基礎 . . . 276
2.8.2.1 整数の除法 . . . 276
2.8.2.2 約数・倍数 . . . 277
2.8.2.3 因数分解 . . . 279
2.8.2.4 差で閉じた部分集合 . . . 280
2.8.2.5 1 次不定方程式の解の存在 . . . 281
2.8.3 整式の整数論 . . . 282
2.8.3.1 整式の除法 . . . 282
2.8.3.2 整式の約数・倍数 . . . 283
2.8.3.3 最小公倍数・最大公約数 . . . 284
2.8.3.4 因数分解 . . . 285
2.8.3.5 整式のイデアル . . . 286
2.8.3.6 不定方程式の解の存在 . . . 287
2.8.3.7 ユークリッドの互除法 . . . 288
2.8.4 問題 . . . 289
2.9 終結式と不変式 . . . 291
2.9.1 不変式としての判別式 . . . 291
2.9.2 不変式の定義 . . . 297
2.9.3 対称式と基本対称式 . . . 299
2.9.4 判別式と終結式 . . . 305
2.9.4.1 終結式 . . . 305
2.9.4.2 終結式と判別式 . . . 307
2.9.4.3 終結式の不変性 . . . 308
2.9.4.4 終結式の行列式表現 . . . 309
2.9.5 方程式の不変式 . . . 312
2.9.5.1 判別式だけか . . . 312
2.9.5.2 SL(2) の分解 . . . 313
2.9.5.3 微分作用素 . . . 314
2.9.5.4 2 次方程式の不変式 . . . 316
2.9.5.5 問題の一般化 . . . 319
2.9.6 存在と構成 . . . 323
2.9.6.1 ヒルベルトの第 14 問題 . . . 323
2.9.6.2 ヒルベルトの基底定理 . . . 325
2.9.6.3 有限群の場合 . . . 326
2.9.6.4 ユニタリー群の場合 . . . 328
2.9.6.5 有限性の証明への道 . . . 331
2.9.7 参考にした文献 . . . 334
2.10 二項間漸化式 . . . 335
2.10.1 漸化式とは何か . . . 335

2.10.1.1 漸化式の定義 . . . 335
2.10.1.2 漸化式を解く . . . 336
2.10.2 $a_{n+1} = ra_n + f(n)$ の解法 . . . 336
2.10.2.1 解法 1:一つの解を見つける . . . 337
2.10.2.2 解法 2:3 項間漸化式に持ちこむ . . . 337
2.10.2.3 解法 3:等比数列との比をとる . . . 338
2.11 三項間漸化式と行列の累乗 . . . 341
2.11.1 三項間漸化式と連立漸化式 . . . 341
2.11.1.1 三項間漸化式と連立二項間漸化式の定義 . . . 341
2.11.1.2 連立二項間漸化式から三項間漸化式へ . . . 342
2.11.1.3 三項間漸化式から連立二項間漸化式へ . . . 343
2.11.2 三項間漸化式を解く . . . 343
2.11.2.1 行列で解く . . . 343
2.11.2.2 等比数列を作って解く . . . 345
2.11.2.3 三項間漸化式を満たす数列の集合 . . . 346
2.11.3 固有値の方法 . . . 348
2.11.4 関連入試問題 . . . 350
2.12 カタラン数 . . . 353
2.12.1 ある入試問題 . . . 353
2.12.2 カタラン数 . . . 353
2.12.3 カタラン数の意味 . . . 355
2.12.4 関連入試問題 . . . 358
2.13 一次変換を見る . . . 360
2.13.1 一次変換は平面全体の変換だ . . . 360
2.13.1.1 固有方程式が 2 実解の場合 . . . 360
2.13.1.2 重解の場合 . . . 363
2.13.1.3 虚数解の場合 . . . 363
2.13.1.4 回転の場合 . . . 364
2.13.1.5 その他の場合 . . . 365
2.14 線型代数の考え方 . . . 369
2.14.1 ベクトル空間と線型写像 . . . 369
2.14.1.1 一次変換から線型写像へ . . . 369
2.14.1.2 ベクトル空間と線型写像の定義 . . . 373
2.14.1.3 ベクトル空間の基底 . . . 375
2.14.1.4 内積とベクトルの大きさ . . . 377
2.14.2 線型写像と行列 . . . 380
2.14.2.1 線型写像の行列表現 . . . 380
2.14.2.2 線型写像の演算と行列の演算 . . . 382
2.14.2.3 逆行列の存在条件 . . . 383
2.14.2.4 基底変換と行列の変換 . . . 385
2.14.3 行列と行列式 . . . 387
2.14.3.1 行列式がみたすべき条件 . . . 387
2.14.3.2 行列式の定義 . . . 389

2.14.3.3 行列式の展開 . . . 395
2.14.3.4 クラメルの公式 . . . 397
2.14.4 固有ベクトルと線型写像の対角表現 . . . 399
2.14.4.1 固有値と固有ベクトル . . . 399
2.14.4.2 行列の対角化 . . . 402
2.14.4.3 ハミルトン・ケイレイの定理 . . . 406
2.14.4.4 ジョルダンの標準形 . . . 408
2.14.5 内積と直交変換 . . . 410
2.14.5.1 内積と二次形式 . . . 410
2.14.5.2 内積の対角型行列表示 . . . 412
2.14.5.3 正規直交基底 . . . 415
2.14.5.4 直交変換と直交行列 . . . 416
2.15 ムーアヘッドの不等式とその応用 . . . 418
2.15.1 入試問題の一般化 . . . 418
2.15.1.1 ある入試問題 . . . 418
2.15.1.2 入試問題の一般化 . . . 419
2.15.2 ムーアヘッドの不等式 . . . 422
2.15.3 定理の一般化 . . . 426
2.16 単位分数のエジプト分数による下からの近似 . . . 430
2.16.1 入試問題の一般化 . . . 430
2.16.2 シルベスター数列の拡張 . . . 430
2.16.3 一般化定理 . . . 431
2.16.4 1 変数のムーアヘッドの不等式 . . . 431
2.16.5 一般化定理の証明 . . . 432

第 3 章 幾何分野 435
3.1 フェルマ点 . . . 435
3.1.1 問題の発見 . . . 435
3.1.2 トレミーの定理 . . . 436
3.1.3 フェルマ点 . . . 438
3.1.4 フェルマ点証明の解析的方法 . . . 441
3.1.5 その他の方法 . . . 441
3.1.6 関連入試問題 . . . 442
3.2 シュタイナー楕円 . . . 444
3.2.1 入試問題の分析 . . . 444
3.2.2 内接楕円 . . . 445
3.2.3 一次変換とシュタイナー楕円の特徴付け . . . 448
3.2.4 一次変換からの準備 . . . 448
3.2.5 シュターナー内接楕円 . . . 450
3.3 包絡線 . . . 451
3.3.1 はじめに . . . 451
3.3.2 通過領域と境界の曲線 . . . 451
3.3.3 計算の実行 . . . 452

3.4 根軸 454
3.4.1 二円の交点を通る円 454
3.4.2 二円が交わらないときは？ 455
3.4.3 曲線族と「束」 455
3.4.4 一般的に考える 456
3.5 九点円の不思議 459
3.5.1 九点円とフォイエルバッハの定理 459
3.5.1.1 九点円 459
3.5.1.2 九点円の証明 461
3.5.1.3 フォイエルバッハの定理 462
3.5.2 座標の方法による証明 462
3.5.3 幾何の論証による証明 467
3.5.4 反転法による証明 468
3.5.5 直極点 472
3.5.6 参考書 478
3.6 反転と円環問題 479
3.6.1 和算の問題 479
3.6.2 反転 480
3.6.3 反転と根軸 487
3.6.4 円環の諸定理 490
3.6.5 空間での反転 493
3.6.6 六球連鎖 495
3.6.7 参考書 496
3.7 デカルトの円定理と一般化 497
3.7.1 デカルトの円定理 497
3.7.2 一般化と線型代数の準備 500
3.7.2.1 球定理 500
3.7.2.2 n 次元空間 500
3.7.2.3 行列式 503
3.7.3 ヘロンの公式再考 504
3.7.4 一般の場合の証明 508
3.7.5 ヘロンの公式の一般化 512
3.8 重心座標 516
3.8.1 重心座標と三角形の五心等 516
3.8.1.1 重心座標 516
3.8.1.2 重心と内心 518
3.8.1.3 重心座標と面積 519
3.8.1.4 外心 520
3.8.1.5 垂心 520
3.8.2 三線座標 520
3.8.2.1 三線座標の定義 521
3.8.3 重心座標による図形の方程式 523
3.8.3.1 直線の方程式 523

3.8.3.2　円錐曲線の方程式 525
3.8.4　パスカルの定理の別証明 526
3.9　特別な四面体 529
3.9.1　ある入試問題 529
3.9.2　四面体の重心と平行六面体への埋め込み 530
3.9.3　四面体の外心と内心 531
3.9.4　直辺四面体 532
3.9.5　九点円の一般化 535
3.9.5.1　n 次元 $n+1$ 面体 537
3.9.6　等面四面体 539
3.9.7　等面四面体の特徴付け 542
3.10 線型幾何と四面体 546
3.10.1 座標空間での直線と平面 546
3.10.1.1 平面上の直線 546
3.10.1.2 空間内の平面と直線 549
3.10.2 外積と図形 554
3.10.2.1 外積の定義と基本性質 554
3.10.2.2 符号のある面積 557
3.10.2.3 四面体とベクトル 558
3.10.3 四面体の諸命題 561
3.10.3.1 空間でのチャップル型定理 561
3.10.3.2 等面四面体への応用 564
3.10.3.3 直辺四面体 567
3.10.3.4 モンジュ点 568
3.10.3.5 その他の命題 571
3.10.3.6 関連入試問題 572
3.11 十二点球と一般化 574
3.11.1 一般化について 574
3.11.2 モンジュ点 574
3.11.3 いくつかの命題 575
3.12 円錐曲線・二次曲線 578
3.12.1 はじめに 578
3.12.2 円錐曲線の定義と離心率 578
3.12.2.1 楕円 579
3.12.2.2 双曲線 580
3.12.2.3 放物線 580
3.12.3 平面曲線としての円錐曲線 582
3.12.4 円錐曲線の座標表現 585
3.12.5 二次曲線としての円錐曲線 587
3.12.6 二次曲線と接線 590
3.12.7 接線の極方程式表示と応用 596
3.12.8 包絡線としての円錐曲線 599
3.13 パスカルの定理 601

3.13.1 無限遠点，射影直線，射影平面 601
3.13.2 二次曲線の接線 603
3.13.3 パスカルの定理 604
3.13.4 特別な場合の演習問題 608
3.14 パップスの定理 610
3.14.1 ある図形問題の解法 610
3.14.2 パップスの定理 612
3.14.3 パップスの定理のユークリッド平面上での座標的証明 614
3.14.4 パップスの定理のユークリッド平面上での図形的証明 616
3.14.5 射影平面と双対原理 618
3.14.6 射影変換 620
3.14.7 射影幾何的証明 621
3.14.8 パップスの定理はパスカルの定理の特別な場合 621
3.14.9 参考文献 626
3.15 デザルグの定理 627
3.15.1 メネラウスの定理再考 627
3.15.1.1 古い入試問題 627
3.15.1.2 メネラウスの定理の空間図形による証明 628
3.15.1.3 射影の方法 629
3.15.2 デザルグの定理 630
3.15.2.1 入試問題の逆命題 630
3.15.2.2 デザルグの定理 631
3.15.3 双対原理 632
3.15.4 モンジュの定理 633
3.16 ポンスレの定理 635
3.16.1 三つの入試問題の分析 635
3.16.2 特別な場合に閉形定理を計算で示す 639
3.16.2.1 放物線と円，$n=3$ の場合 639
3.16.2.2 円と円の場合 643
3.16.2.3 中心の一致する楕円と円，$n=3$ の場合 646
3.16.2.4 中心の一致する楕円と円，$n=4$ の場合 649
3.16.3 円の場合を一般的に考える 653
3.16.3.1 根軸について 653
3.16.3.2 円の場合の一般的証明 655
3.16.4 二次曲線の閉形定理 656
3.16.4.1 複素数導入の必然性 656
3.16.4.2 複素射影空間内での証明 661

第 4 章 解析分野 **667**
4.1 生成関数の方法 667
4.1.1 二つの入試問題 667
4.1.2 生成関数 669
4.1.2.1 基本的な生成関数 669

4.1.3 生成関数による別解 . . . 670
4.1.4 カタラン数を生成関数で求める . . . 672
4.1.4.1 c_n の漸化式 . . . 672
4.1.5 ある入試問題の一般化への生成関数の活用 . . . 673
4.2 微分方程式とは . . . 677
4.2.1 微分方程式 . . . 677
4.2.2 微分方程式の解 . . . 680
4.2.3 微分方程式を解く . . . 681
4.2.4 微分方程式を立てる . . . 684
4.2.5 関連入試問題 . . . 685
4.3 相加相乗平均の不等式 . . . 688
4.3.1 共通の設定 . . . 688
4.3.2 凸函数の性質を使うもの . . . 688
4.3.3 特殊な函数を使うもの . . . 691
4.3.4 数列だけで証明するもの . . . 696
4.4 凸関数と不等式 . . . 704
4.4.1 凸領域 . . . 704
4.4.2 凸関数 . . . 708
4.4.3 ヘルダーの不等式とコーシー・シュワルツの不等式 . . . 714
4.4.4 ミンコフスキーの不等式と三角不等式 . . . 716
4.4.5 高校範囲で考える . . . 718
4.5 オイラーの公式 . . . 720
4.5.1 オイラーの公式 . . . 720
4.5.2 関数の展開 . . . 720
4.5.3 オイラーの公式へ . . . 723
4.5.4 いくつかの話題 . . . 724
4.6 代数学の基本定理 . . . 726
4.6.1 複素数係数の方程式 . . . 726
4.6.2 代数学の基本定理の証明 . . . 729
4.7 円周率を表す . . . 732
4.7.1 円周率に収束する数列 . . . 732
4.7.2 ビエタの公式 . . . 735
4.7.3 ウォリスの公式 . . . 736
4.7.4 関数 $\frac{1}{1+x^2}$ の活用 . . . 737
4.7.5 オイラーの発見した円周率の公式 . . . 740
4.7.6 ゼータ関数の値 . . . 743
4.8 縮閉線 . . . 746
4.8.1 縮閉線の定義 . . . 746
4.8.2 二次曲線 . . . 747
4.8.3 サイクロイド . . . 753
4.9 $\zeta\,(2l)$ を関・ベルヌーイ数で表す . . . 755
4.9.1 関・ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式 . . . 755
4.9.2 倍角公式から得られる代数方程式 . . . 758

4.9.3 係数定理 . . . 760
4.9.4 $\zeta(2l)$ を関・ベルヌーイ数で表す . . . 762
4.10 素数の分布 . . . 764
4.10.1 素数の分布とは . . . 764
4.10.2 素数が無数にあることの別証明 . . . 765
4.10.3 素数分布の探求 . . . 768
4.10.4 素数定理 . . . 773
4.10.4.1 素数定理の証明 . . . 774
4.11 光線の包絡線 . . . 778
4.11.1 問題の設定 . . . 778
4.11.2 光線の包絡線 . . . 779
4.11.3 外サイクロイドと内サイクロイド . . . 780
4.11.4 一般化の試み . . . 782
4.11.5 円族の包絡線としてのサイクロイド . . . 784
4.12 懸垂線と双曲線 . . . 787
4.12.1 懸垂線の方程式 . . . 787
4.12.1.1 懸垂面 . . . 790
4.12.2 双曲線関数 . . . 790
4.12.3 双曲線関数の逆関数 . . . 793
4.12.4 放物線の弧長 . . . 794
4.13 惑星は楕円軌道を描く . . . 795
4.13.1 ケプラーの法則とニュートンの法則 . . . 795
4.13.1.1 ケプラーの法則 . . . 795
4.13.1.2 ニュートンの法則 . . . 796
4.13.1.3 万有引力の法則 . . . 797
4.13.2 惑星の運動方程式を立てる . . . 798
4.13.2.1 運動法則の意義 . . . 798
4.13.2.2 惑星の運動法則 . . . 799
4.13.3 運動方程式を読み解く . . . 800
4.13.3.1 惑星運動は平面運動である . . . 800
4.13.3.2 面積速度一定の法則 . . . 803
4.13.3.3 運動方程式から軌道方程式を導く . . . 805
4.13.3.4 ケプラーの第 3 法則 . . . 809
4.13.4 参考文献 . . . 809
4.14 最速降下曲線 . . . 811
4.14.1 問題の設定 . . . 811
4.14.2 微分方程式を立てる . . . 812
4.14.2.1 方法 1：スネルの法則を用いる . . . 812
4.14.2.2 方法 2：オイラー＝ラグランジュ方程式 . . . 815
4.14.3 微分方程式を解く . . . 817
4.14.4 等時性の証明 . . . 818
4.14.5 最速であることの証明 . . . 820

第 5 章　解答 **824**

参考文献 **899**

はじめに

雑誌『数学セミナー』2006 年 6 月号に載せた拙文「ウェブ上に草の根数学の広場を！」の締めで次のように書いた．

> 私は，小学校の「算数」も中学・高校の数学も大学初年の数学も，そして専門的な現代の数学も，数学として高い統一性がなければならないと考えています．そのうえで，専門化される前の，文明社会で生きるうえで必要であり, 人間の土台となる数学のすべて，これが「初等数学」です．
>
> 現代日本では，初等数学の意義と内容が定まっていません．指導要録はたびたび改変されています．根拠を示すべきところを感覚的な説明に置きかえ，そうすることがわかりやすくすることだと思いちがいをしています．それでは，わからないときにたちかえる土台がなくなり，考える力が育ちません．こうしてますます分数や関数のわからない生徒を増やしています．
>
> 数学が現代日本に本当に根づいているとは，まだ言えません．このような現状に対して，いささかでも実践的に問題提起ができないかと考え，青空学園数学科を運営してきました．読書会は，私自身の楽しみであるとともに，この問題意識の上にもあります．
>
> 私は，いまこそ，100 年前のクラインにならって，現代日本における『高い立場からみた初等数学』が必要だと思います．初等数学を現代数学から系統的に基礎づける．それを学ぶことで数学教育に携わるもの自身がわかる喜びを知り，逆に現代数学はこの社会での存在意義を獲得する．そんな協同の取り組みがどこかではじまることを願って，筆をおきます．

ここでいう**初等数学**とは，人間が成長過程で身につけ人間形成の土台とするべき数学のすべてを言う．**高校数学**とは，人間が 15〜18 歳の頃に身につけ，上述のような内容において人間形成の土台とするべき数学の一定の範囲をいうのであって，何か特別な数学があるわけではない．この高校数学の周辺を掘りさげ，それがどのように成立し，どのような世界とつながっているのかを考えよう．それがまた，初等数学を「高い立場から見る」でつかみ理解を深める端緒となるだろう．

一方，高校生の現実には受験がある．この現実から逃げることはしない.「受験数学をしばらく忘れて数学を楽しもう」という言葉を聞くがこれは現実逃避だ.『高校数学の方法』のはじめにも書いたが，入試数学といっても何か特別な数学があるわけではない．入試問題ももそれなりに数学的現象の呈示そのものとしてとらえることが出来る．高校生のおかれた現実を忘れないで，入試問題に現れた数学を分析するところからはじめた．

『**数学対話**』はそのような問題意識をもって対話形式で書きためてきたものである．問題が解けたことで終わりにせず，この事実が成り立つ根拠は何だろう，一般化は出来ないのか，などを考えている高校生，教えていることの背景や一般化を深めようという数学教育に携わる人，数学が好きでいろいろ考えることが楽しみな社会人を念頭において，高校数学での問題や，あるいは身近な自

然現象からはじめて，できるだけ論証を飛躍させることなく掘り下げ，大きな枠の中でとらえ，できうるかぎり一般化することを心がけた．

書きっぱなしである．二十年近くにわたるので，形式も内容的にも統一はされていない．また，まだまだ探求が足りないものも多い．それはそのことに気づいた人がまたそこで考え続けてほしい．そのようにして引き継がれていくことを願っている．それがまた，日本列島弧でおこなわれる草の根の数学の営みが，深まることになる．数学は個人ものではない．数学の歴史は人間の歴史そのもだ．それにしても数学のような世界が人間の前に開かれたことは本当に不思議だ．

私は高校時代，数学教員や同級生と数学同好会を作り群論の入門書などを読んでいたが，数学的現象をとらえ調べるということはできなかった．あの当時の自分が，いまの自分に出会っていたら，もっと深く学ぶことがで来ただろう．その意味で，これは高校時代の自分といまの自分の対話でもある．

大きく次のように分けているが，もちろん幾何的ことがらを代数の方法で考えることなど，分野は二重三重に重なっている．

『**基礎分野**』は，高校数学の土台であり，高校数学成立の根拠となっている基礎的な事実を，その定義から掘り下げて考えようとする．定義ができ，また成立する根拠を考えること，これが大切なことなのだ．根拠を問うという姿勢は教科書からはなかなか身につかない．しかし，ここに科学のはじまりがある．科学の精神を大切にしたい．ここで考えたことのうち，実数の構成や実数の連続性，極限などは『解析基礎』のなかで基礎的な諸概念を再定義し，最初から証明をつけている．また「対角線論法と不完全性定理」と「ラムゼー型定理」はここに含めた．前者は数学基礎論の範疇であり，ヒルベルトの考えとゲーデルの証明まで考え，どのような歴史を踏まえて現代の数学があるのかまで思いをはせる．また後者は組合せ論の応用である．

『**代数分野**』は，文字と方程式の分野から高校数学を掘りさげたものである．人間は，文字を導入することで抽象力を飛躍的に高めた．文字の発明によって，個別の数から解放され，数の世界の構造を一般的に考察することができるようになった．これが代数学である．高校数学の基本的なねらいは，文字によって考えることができるようにあるということである．三次方程式，四次方程式を考えるところから始めて「原始多項式」や「スツルムの解法」で深める.「終結式と不変式」では十九世紀の数学から二十世紀の数学への飛躍を学ぶ．代数分野にはまた線型代数関連の内容も含めた．線型な関係とは，1 次元の場合は比例関係，またはその展開としての 1 次式で表される関係のことである．多次元の場合には行列で表現される．

『**幾何分野**』は，図形に関連する分野から高校数学を掘りさげたものである．平面に入れられた座標構造によって，図形の関係を代数的な関係に還元し，方程式の問題として図形問題を考える．これが第一である．線型幾何，ベクトルを用いた幾何について考える．これが第二である．またこれらの応用として，江戸時代の和算の問題を取りあげた．第三は,「パスカルの定理」では，軌跡に現れる除外点の意味を考えることから射影幾何に入っていく．ユークリッド平面から射影平面へ，その発展を考えす.「ポンスレの閉形定理」では，入試問題に現れた閉形定理のすべてを解明するとともに，その過程で現れた四次式の意味を追求し，一般的な証明をめざす．それによって複素射影幾何の立場が打ち出される．

『**解析分野**』は，微分積分に関わる分野から高校数学を掘りさげたものである．微分積分の歴史はアルキメデスやそれ以前の「取りつくし法」にまでさかのぼれる．それは今日の積分の始まりともいえる．近代解析学は，フェルマーやライプニッツによって曲線の接線を考える上で考え出された微分法にはじまる．その前提としての座標の導入が必要であった．ニュートンは，ケプラーやガリレオがとらえた現象の本質をつかみ力学を確立した．微分積分の方法が決定的なものであった．彼は微分と積分を統合して，両者がある意味で逆の関係にあることを見抜いた．それはアルキメデ

スの方法からの飛躍であった．オイラーらによって解析学は大きな進歩を遂げた．しかし初期には級数の収束性も厳密ではなかった．十九世紀に入ってその基盤を洗いなおし，コーシーやワイエルシュトラウスによって微積分学の基礎ができた．実数の連続性に関するデーデキントやカントールの深い研究は，実数を特徴付ける条件を見いだし．この辺りまでの事々を，高校数学につながる道筋で考えたのである．

この対話によって，逆に公理を立て体系的に叙述することの大切さもわかる．そしてそれを実行したのが,『数論初歩』,『解析基礎』『幾何学の精神』である．これらはいずれもこの数学対話を下に，体系的に再構成したものである．

2018.03.29 追記

第1章　基礎分野

1.1　量と数

2013.2.21/2013.2.16/2008.2.18

1.1.1　はじめに

太郎　2012 年の暮れから 2013 年にかけて，かけ算の順序に関する新聞記事や，テレビ放送が続きました．最初は 11 月 5 日の「中日新聞」でした．その骨子は次のようなことです．

> 正しい順序にこだわる？
>
> 小学 2 年生は毎秋、学校で掛け算を習い始める。多くの子どもが掛け算の式には”正しい順序”があると教わるが、式の順序を逆にしても答えは同じ。このため、保護者や教育関係者らの論争が毎年のように繰り返される。どの教科書も順序にこだわっているように見えるが、子どものためになっているのか。（栗山真寛）
>
> 「毎年この時期、掛け算の式の順序が話題になります」と話すのは、東北大理学部数字料の黒木玄助教。先生によって掛け算の式を直された答案用紙がインターネットに出回り、「バツを食らった子供の親が怒りだす」と言う。自身も学校での指導法に疑問を持ち、インターネット上で情報を発信している。
>
> 中学の数学では乗法の交換法則として ab=ba と習うにもかかわらず、黒木助教らが調べたところ、小学校の算数の教科書を発行している六社とも、掛け算は「『一つ分の数』掛ける『いくつ分』」という順序の教え方をする。さらに、各教科書に対応した教師向けの指導書では、順序が逆なら誤りとする教え方を載せている。
>
> 教科書会社はどう考えているのだろうか。東京書籍の編集局は「掛け算の意味を理解させることに尽きる」と説明する。２×３とは２が三つ分、つまり２＋２＋２の意味であり、３×２＝３＋３とは区別される、という主張だ。「文章に出てきた数字の順で式に書く子は多い」と、文章題の意味を理解しているかを判別する一つの手掛かりとして式の順序を見るという。
>
> 「文部科学省の学習指導要領に、そのような説明はない」と主張する黒木助教らに対し、東京書籍は文科省が発行する指導要領の解説に「10 × 4 は、 10 が四つあることから、40 になる」といった記述があることを挙げ、「順序に意味がある」と反論する。
>
> これらの議論について文科省初等中等教育局教育課程課は「掛け算の意味を理解させるよう定めているが、順序については国が定めるものではない」と距離を置く。ただ、指導要領の解説に対する教科書会社の解釈には「探く考えすぎだと思う」と打ち消す。
>
> 結局、掛け算の式の順序にこだわる教え方は何に基づくのか。教科書会社と文科省の主張はかみあわない。「指導要領に書かれている」と誤解している教員もいた。黒木

助教は「子どものやる気が下がってしまう」と、子どもの算数嫌いを助長しないかと心配する。

この記事には,「3 人に 2 個ずつリンゴを配ります．リンゴは何個必要ですか」に対して式「3 × 2=6」は誤りで「2 × 3=6」でなければならない，という答案の写しもそこでは紹介されていました．

次に，同じ問題が 2013 年 1 月 25 日の朝日新聞 でも取りあげられました．見出しは【小学校のかけ算　えっ？　順序が違うと「バツ」】というものでした．

にも同様の図が載っています．また，1 月 25 日のフジテレビ・スーパーニュースでも取り上げられたようです．番組内容要旨を紹介するサイトに次のようにありました．

> かけ算の順番をめぐって論争が起きている。論争になっているのは「6 本のペンを 8 人分」とした場合、「8 × 6」と書くと不正解になるというもので、芝小学校でかけ算の授業を取材し、教員に話を聞いた。文部科学省によると国として正しい順序は決めていないとしているが、教育書出版社はかけ算の正しい順番を重要視していると回答した。専門家の飯高茂氏はナンセンスだとコメント、子供がもっと自由な発想で自分で考えて一番いい方法を考えることが必要だと話した。

南海　飯高先生は，東京書籍の小学算数の教科書の著作関係者代表 2 人の 1 人だそうだ．中日新聞記事の東京書籍の編集局の意見と飯高先生の意見は矛盾している．先生は自分が「代表」の教科書にどんなことが書いてあり，編集局がどのように考えているのかを知っておられないということになる．

後で紹介するが，1972 年にも同様の記事が朝日新聞に載っている．ということは，積の順序という問題は，実は 40 年間，解決しないままにきているということだ．

このような問題がくりかえされるのは，実際のところ積の指導に教育方法としての難しさがあるということと，明治以降，近代になって教えられるようになった数学が，まだまだ日本では根のあるものになっていないということがあると思う．

数や量をどのようにとらえるのかという問題は，基本的な問題であり，多くの先人が苦労をしてきた問題だ．そうであるなら，くりかえし基本から考えよう．そして少しでも教育の現場の役に立ちたいものである．

太郎　私がかけ算をはじめて習ったとき，その順序のことをどのように習ったのか，もう覚えていないのですが，積はやはり難しいです．例えば，負の数と負の数をかけるとなぜ正の数になるのか．これをどのように示すのか，改めて考えるとなかなかうまく示せません．

南海　かつて青空学園の掲示板にも，なぜ $(-1)\times(-1)=1$ となるのか，これをどのように説明すればよいのかという質問があった．同じようになぜと改まって聞かれると答えに窮する問いがある．どうして分数の割り算は

$$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b\times c}{a\times d}$$

のように割る方の分子分母を逆にしてかけるのか，という問いだ．

このような問題は，教育の仕事についたものがつねに出会うことなのだ．またそこで教えるということの難しさに直面する．

今日の数学の世界では，一定の公理系を定め，それによって数学の対象を捉える．公理をどのように定めるか，公理相互の関係はどうか，その探究は数学それ自体であり，そのことを通して数学が姿を現す．その公理系の中で，積の可換性，$(-1)\times(-1)=1$ や分数の積の計算法がいかに導か

れるのかという問題と，これを納得して理解できるようにどのように教えてゆくのかという問題が，深く関係しながらも，しかし同一ではない問題として現れる．ここに問題の難しさがある．

つまり，数学の世界と教育の世界は同じ面と異なる面とをもつ．その分離と統一．数とそれが表す現実の量をどのような関連のもとでとらえるのかという，世界観にもかかわる問題と，それをどのように小学生に納得できるように教え，しかもそれを定着させるかという問題．これは深く関連し，かつそれぞれ別の問題である．

太郎　分かっているようでいて，改めて量とは何か，数とは何かといわれると，考えてしまいます．

南海　青空学園ではこれまでも高木貞治の本,『解析概論』,『初等整数論講義』や『代数学講義』を何回か参考文献としてきた．その高木貞治に『新式算術講義』（ちくま学芸文庫）,『近世数学史談・数学雑談』（共立出版）等の復刻本，および『数の概念』（岩波書店）がある．これらの本を通した高木貞治の考え方の深まりは，数を考える上で大きな示唆を与えてくれる．これらも参考に，数と量について考えてみよう．

『新式算術講義』の歴史と近代日本の数学の流れは，この文庫本の後にある高瀬正仁さんによる解説に詳しい．この本の初出は明治 36 年である．欧州に学び戻った著者が，洋行前に書いていた旧著を書き直したものだ．それを横書きに直して文庫本にしたのが，この『新式算術講義』だ．その緒言に，理論と教育方法論について次の言葉がある．

> 普通教育に於ける算術の論ずる所は一見甚（はなはだ）卑近なるが如しと雖（いへど）も，若（も）し深く問題の根柢に穿入せんとするときは，必しも然らず．夫（そ）れ教師は其教ふる所の学科につきて含蓄ある知識を要す．算術教師が算術の知識を求むる範囲，其教ふる児童の教科用書と同一程度の者に限らるること，極めて危殆なりと謂（い）ふべし．確実なる知識の欠乏を補ふに，教授法の経験を以てせんとするは，「無き袖を振はん」とするなり．是を以て此書は広く算術の教授に従事する教師諸氏の中に其読者を求めんと欲す．

つまり，高木貞治はすでにこのとき次のことを言っている．数学理論と教育方法を混同してはならない．明確に分離し，その上で理論と実践の統一，つまり理論にもとづく教育方法を工夫すべし．教育実践の経験は貴重である．しかし教えた経験で理論の穴埋めをしてはならない．

実際また「確実なる知識の欠乏を補ふに，教授法の経験を以てせん」とすれば，結局は，議論が果てしなくなり，学校が混乱し，子どももまたわからないままになってゆく．

そこで，量や数という問題について，まず私が教育の場でどのようにやってきたのか，それをふり返りたい．その中では，その頃考えてきたことをそのまま書いてみたい．その上で，その中にある理論を省み，改めて量と数について考えたい．そして，数学としての体系をはっきりさせたい．私には，もういちどこれらの教材を工夫し実践で検証する機会はないと思うので，理論までということになるが，自分自身のまとめとしてやっておきたい．

1.1.2　量で数を教える

1.1.2.1　水道方式

根拠を問う

南海　まず昔自分が授業でおこなったことをふりかえりたい．そしてそれをいまもういちど考えなおしたい．かつてどのように考えていたのかを話してみよう．

私は 26 歳の頃，大学院の博士課程を中途退学して，兵庫県で高校教員をはじめた．その高校は，中学校までの教育のなかで，どちらかと言えば社会的ないろんな要因によって学力をつけることができなかった生徒が多く来ていた．

はじめて教壇に立った頃，教科書のまま話してゆくとどうも様子がおかしい．なぜかと聞いてゆくと，クラスのなかに分数計算ができない生徒が何人かいることがわかった．そこで次の時間に，分数の計算方法の再確認をやろうとすると，今度は，それはできるという生徒が面白くない．早く先に進んでくれという．若かった私は大いに悩んだものだった．

そこであるとき，分数はできるというが，なぜ分数の乗法は分子と分母をそれぞれかけ，除法は割る側の分数の分子と分母を逆にして同様の操作をすればよいのか．それはなぜだか理由が説明できるか?　こちらから質問した．答えられるものがいなかった．計算の仕方は知っている生徒も，その理由を説明することはできない．

なぜだろうと考えはじめるところから，数の乗法や除法を，基本に立ちかえって授業した．今度は誰にとっても初めてのことなので，みなよく聞き，そして考えた．そのとき用いた方法が「量に立ちかえる」ことを標榜する「水道方式」だった．ここから私の授業が進んでいった．これは事実である．

どんなクラスにも，やり方のわからない生徒と，すでにやり方は理解している生徒がいる．そのとき，やり方がわかっている生徒にその方法の根拠を問う．多くの場合，わかっているかいないかの違いは，やり方を知っているかいないかの違いに過ぎず，方法の根拠まで理解していることは少ない．そこで一歩原則に立ちかえり，その方法の根拠から一緒に考える．これは，受験生に数学を教えるようになってからも，私の基本的な授業方法となった．

考えてみれば，青空学園でいろいろ作ってきたのも，生徒に根拠を問う準備として，まず自分ではっきりさせておこうということが動機の一つになっている．

私自身についていえば，このときの授業の背景となる量に立ちかえるという方法を，数学として点検し，また深めることはあまり進んでいなかった．授業を思い起こし，そのうえでもう少しこの問題を深めたい．

太郎　『私の考え，私の願い』や『ウエブ上に草の根数学の広場を！』に書かれていますが，そういうことですか．数学を教えるという仕事に興味がわきます．

南海　根拠を問うことを身につけるのは，教育の根幹であると考えているが，教育方法においても，根拠を問うことはたいへん重要であった．これがよくわかった．

そして，計算方法ということに関して，納得のいくように教える一つの糸口は，量に立ちかえり，量から考えることだった．人間の歴史にとって，やはり現実世界の量的な把握は数が生まれた現場である．この現場を追体験する，これが数学の基礎にあることもよくわかった．

太郎　量ですか．数学の授業では，余り量は聞きません.「図形と計量」「量の微分積分」に量という言葉が出てくるくらいです．現実の世界を対象にするのは自然科学などではありませんか．

南海　ここでいう量とは，自然科学の対象としての量よりももっと一般的なことだ．月日を数えたり，獲物の数を数えるのは，やはり現実の世界のことではないか．もちろん，現代では物理学と数学は分化しているので，現実世界の量的な把握は自然科学ではないかという疑問は当然なのだが．

近代物理学と数学でいえば，物理学の対象はすべて量の世界だ．ある意味では，物理というのは＜量としてつかまれた世界＞の科学だ．もちろん＜いかに量としてつかむか＞自体が物理学であり，そこに物理学の発展もあった．

数学はまずはこの量の科学を数の言葉で書きしるすところからはじまった．現実の世界に存在するもののある側面を，長さや重さといった量としてつかみ，それを数値化し，こうして量と数は発展してきた．

一方，数学は物理を記述する言葉だけのことであるのか，そうではない．数学は独自の数学的世界をもち，その世界もまた大きく広がった．それもまた数学的な現実世界だ．そこがおもしろいところだ．人間が，いかに抽象的に現実とは切り離して数の世界で考えても，そこに真実かあれば再び現実とつながるときがある．人間の脳自体がこの世界の物理法則の下にあるのだから，当然といえば当然なのだが．

今日では量と数の分化が進み，高校教科書等にもその影響があって，量はほとんど登場しない．しかし，計算の基本などを考えるときには，量に立ちかえることでその仕組みを考えるヒントが得られる．これは実際に経験した事実である．

水道方式

南海　当時私は次のように考えた．

量は現実の第一段階の抽象であり，量は抽象的な数と現実を結びつけるものだ．だから，量から考えることは数学が現実から離れてしまわないために必要なことだ．

そのように考えどのような授業をしたのか．そのときに頼ったのが，数学教育協議会 (数教協) の提唱する**水道方式**であった．量を外延量と内包量に分け，その違いに着目し，乗法というものを内包量で考えてみようとするのが，水道方式の背景になる理論だ．

いま出てきた外延量や内包量という考え方は，1950 年代から 60 年代にかけて数教協において遠山啓先生が，数学教育における一つの方向を打ち出されたなかで提起されたものだ．最初の提起は 1957 年の数教協の大会であったという．そこで「分離量と連続量について」,「文章題の量的分析」,「外延量と内包量」等の問題提起が行われた．

数教協は教育方法として「水道方式」を打ち出した．1960 年代後半から 70 年代にかけて，小学校から高校のさまざまの教育現場ですでに多くの実践が行われていた．その蓄積は膨大なものであった．

私もまた水道方式に出会い，早速それを用いたのである．負数と負数の積や分数計算の方法を根拠に立ちかえって理解するということで，量の理論や水道方式による教育方法は確かに大きな力をもっていた．

水道方式は，日本の初等数学教育のなかに根強くあった「数え主義」に反対し，数を量から導くといわれる．もちろん，量が数化されて認識されるうえで，数えるための数は前提である．そのうえで，数を集合の基数と見た上で，具体的な例で考えながら，一対一対応のつく類の代表をタイルで表現する．そのタイルを連続的な量と見なし，それを分割することから分数の定義と演算を考える．こうして得られる分数の計算法が，その根拠から納得して高校生のものとなったのは事実であった．序数としての自然数の準備と，基数としての自然数の理解，そして量を表す分数，この道筋に必然性があることを，実際の経験で知った．

また，水道方式は一般の理解から個別へという演繹過程を軸にすることを提起している．実際にやってみて，人間の認識は定式化された一般の場合を先に理解し，そのあと例外的な場合を考える方が理解が易しいのも事実であった．これらはもっと深められて，高校数学の土台に据えられてよい．

計量単位

南海　この量だが，日本の「計量法」という法律には次のような量が載っている．

計量単位の統一は社会が組織されるための一つの基本事項である．

> （目的）第１条　この法律は、計量の基準を定め、適正な計量の実施を確保し、もって経済の発展及び文化の向上に寄与することを目的とする。

（定義等）第 2 条　この法律において「計量」とは、次に掲げるもの（以下「物象の状態の量」という。）を計ることをいい、「計量単位」とは、計量の基準となるものをいう。

1. 長さ、質量、時間、電流、温度、物質量、光度、角度、立体角、面積、体積、角速度、角加速度、速さ、加速度、周波数、回転速度、波数、密度、力、力のモーメント、圧力、応力、粘度、動粘度、仕事、工率、質量流量、流量、熱量、熱伝導率、比熱容量、エントロピー、電気量、電界の強さ、電圧、起電力、静電容量、磁界の強さ、起磁力、磁束密度、磁束、インダクタンス、電気抵抗、電気のコンダクタンス、インピーダンス、電力、無効電力、皮相電力、電力量、無効電力量、皮相電力量、電磁波の減衰量、電磁波の電力密度、放射強度、光束、輝度、照度、音響パワー、音圧レベル、振動加速度レベル、濃度、中性子放出率、放射能、吸収線量、吸収線量率、カーマ、カーマ率、照射線量、照射線量率、線量当量又は線量当量率

2. 繊度、比重その他の政令で定めるもの

太郎　ずいぶんとあるのですね.

南海　ここに載っている量は，ある点から見れば，2 つの種類に分けられることに気づくだろうか.

太郎　長さや質量は実数ですが，速さはベクトルです．1 次元の量か 2 次元の量，ですか?

南海　いや，ここでいう速さは速度ベクトルの大きさの方を表している．1 次元の量か 2 次元の量かということで言えば，計量法の量は，基本的には 1 次元の量であるとしてよい．これらの量の単位はどのようになっているか.

太郎　長さや面積の単位は m , g 等です．それに対して速さは m/秒 ，密度は g/m^3 等です．そうか．上の量には，その単位が分数の形をしていないものと，しているものがあります．単位が分数形の場合についてみると，例えば「速さ」は 1 時間あたりの移動量であり，密度は $1m^3$ あたり何 g かを意味しています.

南海　私は当時，このような量の単位の形も参考に，水道方式の内包量をつかんだ.

速さや密度などの量は 2 つの量の商から定まる．このときはその単位も分数形になる．単位が分数形になっている量を**1 あたり量**，または**内包量**という．それに対して長さや面積といった単位が分数形でない量を**外延量**という.

さらに，外延量と 1 あたり量との，量としての内在的な違いの一つは，加法性があるかないかということである，とした．加法性というのは，2 つのものを重なりなく合併したとき，対応する数値も和になる，という性質である，

これは水道方式の考え方である．当時，私もそのように考えた.

太郎　確かに 1m の棒と 2m の棒を重なりなくつなぐと 3m になります.

それに対して，2 %の濃度の食塩水と 5 %の濃度の食塩水を加えると，2 %と 5 %の間の数値になり和にはなりません.

南海　それが内包量だと考えた．しかしよく考えると，内包量といっても，例えば速度でいえば，秒速 1m/秒で動くものと秒速 2m/秒で動くものを繋ぐと動けないし，秒速 2m/秒で動くものの荷台に秒速 1m/秒で動くものを載せ，同じ方向に動かせば，載っているものは 3m/秒で動く.

このようにものをあわせるということ自体は，現実にどのようなモデルをとるかという問題があり，ものをあわせるとき量が和になるかならないかは，量の内在的な性質とはいえない．しかし当時はこのように考えていた．この辺までいろいろな文献を読んで勉強し，教材を準備して，授業をはじめたのだ.

1.1.2.2　昔の授業

1 あたり量

南海　かつて教えたときは高校 1 年生の授業のなかでのことだったので，およそ 5 時間ほどしか使えなかった．もとより体系的に量の授業をするということではなく，分数の積と商の計算法に絞った授業であった．次のような内容で授業をした．

(1) 1 あたり量: 量というもの．量をはかること．内包量と積の定義．

(2) 量の正負と積: (負数) × (負数) はなぜ正数か?

(3) 量と分数: 連続量を分数に表す．分数で表された量の積

(4) 分数で表された量の商 (1): 1 あたり量と商の意味．分数による商の計算

(5) 分数で表された量の商 (2)

まず上のように 1 あたり量を導入し，乗法との関係を明らかにする．

$$(1\text{ あたり量}) \times (\text{いくら量}) = (\text{全体量})$$

のような図式で説明していたと思う．

分数の積の授業が目的であったので，量の導入も最初からではなかった．しかし，それでも高校生にとって 1 あたり量を理解することは困難ではなかった.（何々）が（いくつ）というのは，分数「2 ／ 5」を「5 分の 2」と読む日本語に助けられている．この分数の理解は（5 分の 1）が（2 つ）と読んでいるのであるから，1 あたり量もこの分数の読解から自然に導かれる．

太郎　2 %の濃度の食塩水が 400g あるとき，その中に含まれている塩の量は

$$\frac{2}{100} \times 400 = 8(g)$$

です．1 箱に 5 個の玉が入っている．7 箱では玉はいくらあるか，というときも

$$5 \times 7 = 35(\text{個})$$

とかけ算が出てきます．

南海　さまざまの量があるが，1 あたり量と全体量は次のような図式になる．

1	→	p
a	→	m

太郎　この 1 や p などは数ですか．それとも量ですか．

南海　教えているときは量だ．単位をつけることが多い．しかし高校生に教えるときは明確にはいわなかったように思う．高校生には数と量の境界を明確にはしないままであったと思う．

さてこのとき，m を p と a の積という．つまり乗法とは

1	→	5
7	→	$\boxed{35}$

と$\square$内の値を求めることを意味している．例えば，

密度が $3(kg/m^3)$ のものが体積 $2(m^3)$ あるとき，重さは $3 \times 2 = 6(kg)$ ある，

ということになる．

このようにして積を考えたのだ．しかしいま考えれば，これは積の定義とは言えない．数の積は量においてはこのように (1 あたり量) と (いくら量) から (全体量) を求まる「計算」として解釈できるが，なぜそこに 35 が来るのかの内在的な意味づけは出来ない．

2012〜2013 年に，積の順序という問題が新聞紙上などでふたたび取りあげられた．学校では (1 あたり量) × (いくら量)=(全体量) の順に書くことを教え，逆に書くと間違いとされる，という問題だ．これに対して「こだわるとかえって混乱を来す」や順にこだわるのは「ナンセンスだ」と言う意見が紹介されている．

これらの報道を読み，またウエブ上に現れた意見などを見ると，(1 あたり量) × (いくら量) という考え方との関連で，ここにはいくつもの考えるべき問題がある．

1. 3×5 という式は，数と数の積なのか，量と量の積なのか．それを明確にして教えられているか．

2. いずれを先に書くかについていえば，日本語の構造からは，(1 あたり量) を先に書く方が自然で，分かりやすい．しかし，わかりやすいということは，(1 あたり量) を先に書く理由にはならない．

3. 「順序に拘泥しない」という考え方は生徒に混乱を起こす．肝心なことは，(1 あたり量) が a で (いくら量) が b である時の (全体量) と，(1 あたり量) が b で (いくら量) が a である時の (全体量) は一致する，その根拠をどのように教えるのかである．

4. 「かけ算に順序はない」という意見もあるようだが，これは違う．$a \times b$ と $b \times a$ は演算として異なる．しかし数においては相等しい．だから「可換」であるという概念が生まれる．

5. 3×5，5×3 のいずれでも正解とするとして，どの水準での可換性であるのか，明確ではない．

このあたりにいろいろ考えるべきことがあり，しかもそれが追究されないままに，長い長い時間が経過した．

負数の積

南海　内包量の考え方をもとに，負数の積を考える．負数を考えるのだから，もちろんここでは先に負の量が考えられている，正負の量を考えることは，量に向をつけて考えることである．

太郎　負の量を考えるのですか．

南海　面積なんかでも負の面積もある．△ABC で 3 点 A，B，C が反時計回りにまわっているとき面積を正，反時計回りにまわっているとき面積を負，とすると決めればよい．原点と 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ で △OAB の面積 S を正負のある量としてこの意味で定義すると

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

となる．しかし，当時，面積は 1 あたり量ではないので積を考えるのには向かない，と考えた．そこで負数と負数の積を，量と数を対応させながら，量の方ではどのようなことになるのか考えるために，

$$\text{速さ} \times \text{時間} = \text{移動量}$$

で考えた．まず東方向を正にとる．時速 $-2m$/秒 といえば東に向かって秒速 -2 m で進むことであるが，これは西向きに秒速 2 m に進むことと同じである．また時間は未来を正にとる．

移動量もまた東方向への移動を正，西方向への移動を負とする．

太郎　わかってきました．$(-2)\times(-3)$ は

東方向へ秒速 -2 m/秒 で歩いている人が，-3 秒間後にはどこにいるか．

を意味します．これは

西方向へ秒速 2 m/秒 で歩いている人が，3 秒間前はどこにいるか．

と同じことなので，今いるところから東へ $6m$ にいることがわかり，

$$(-2)\times(-3)=6$$

が示されました．これは実感がわく解法です．

南海　今回，足立恒雄先生の『数とは何か　そしてまた何であったか』（2011 年，共立出版）第 1 章の 3 節,「負数」に教えられたのであるが，自然数をものの個数として正の数でとらえ，正の数から考えはじめるのは，西洋固有の伝統であって，東洋においては，数でとらえるものは，ものの個数ばかりでなく，場所，位置，事物（財産と負債のような）などがあり，正の数と負の数ははじめから考えられていた．16 世紀のインドの数学の本の中に「負数と負数をかけ合わせると正数を得ることは羊飼いや牛飼いでも知っている」とあるそうだ．

太郎　そうか．私たちは学校教育で正数を基本とする授業を受けてくるから，負数と負数の積が難しいように考えるが，量をはじめから負も含めて考えれば，これは難しいことではないのか．

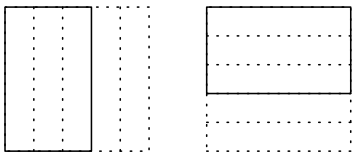
南海　これからこのような問題も見直されてゆかねばならない．

分数の積

南海　分数の積と商についても同様のことがいえる．

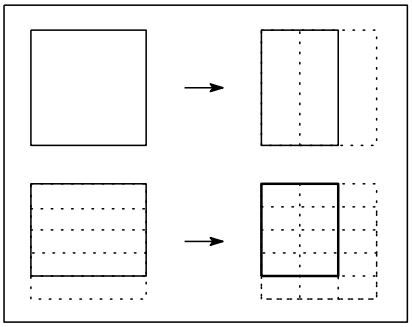
水道方式では，さまざまの量とその数化の間に中間的な抽象物として，タイルを用いる．これは優れた方法だった．量はそれぞれ具体的な量である．しかしそこに量としての共通性がある．この量としての共通性を目に見える形にしたのがタイルだ．私もかつてこの方法を学び授業で使った．

タイル法はとくに分数に数化される量を一般的に表すのに優れていた．正方形の 1 つのタイルが 1 を表すとき，分数 $\dfrac{3}{5}$ に対応する量を表すタイルは右のようになる．



太郎　縦に分けても横に分けてもかまわないのですね．

分数の積ですが，例えば $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}$ なら 1 あたり $\dfrac{2}{3}$ であるとき，$\dfrac{4}{5}$ にはいくらの量が対応するかなので，



のように，1 つのタイルを 3×5 に分けたうちの 2×4 が対応することがわかります．

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

南海　私も若いときそのような授業をした．確かにこのモデルにおいて，分数の積の計算方法は説明できる．当時は授業を成り立たせることで精一杯で，それ以上には考えられなかった．

分数の商

南海　次に 1 当たり量における除法は 2 つの種類がある

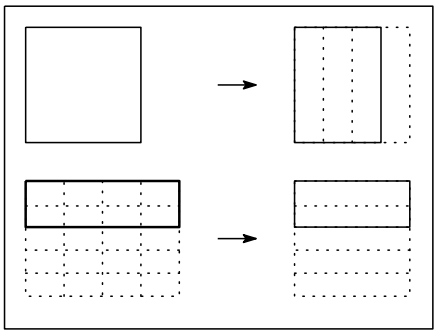
$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & \to & p \\ ? & \to & m \end{array}} \quad , \quad \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & \to & ? \\ a & \to & m \end{array}}$$

?のところに来る量がそれぞれ

$$m \div p \quad , \quad m \div a$$

である．これによって商を考えてみよう．

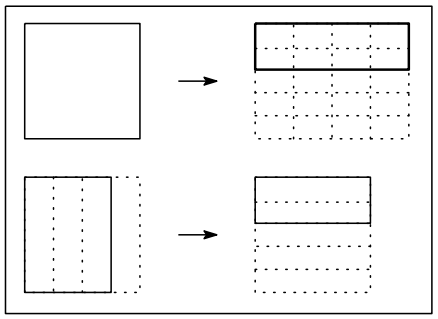
太郎　積の場合と同様に考えます．例えば $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ を第 1 の方で考えると全体から $\frac{3}{4}$ だけとったなら $\frac{2}{5}$ になるような元のタイルなので，



のように，

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$$

がわかる．第 2 の方では，$\frac{3}{4}$ 分が $\frac{2}{5}$ となるときの 1 あたり量ですから，同様に



となります．確かにタイルでは考えやすいですが，実際の量ではこの 2 つの割り算はずいぶん違ったものになります．

(1) 密度 $\frac{3}{4}$g/cm^3 のものが $\frac{2}{5}$g ある．体積はいくらか．

(2) 体積 $\frac{3}{4}$cm^3 のものが $\frac{2}{5}$g ある．密度はいくらか．

です．これが同じ計算でできるのです．確かにタイルを使うことで実感をもって計算方法をつかむことができます．

南海　もちろん実際の授業ではもっとていねいにした．割り算もまず個数の場合で割り算になることを理解してから，そのうえで分数の乗除に入った．

こうして分数計算の根拠についての授業を終え，そこからクラスとして考えてゆくということができた．もちろん，実際はそんなに簡単ではなかった．

その後，関数のところでも水道方式の世話になった．関数の概念は，今も高校生が理解しづらいものだが，ブラックボックスの図を作り「働き」としての関数を教えていった．教えることについて実に多くのことが学べた．

2005 年になって，その頃の教え子に再会した．卒業以来 28 年ぶりだった．すぐ昔の話になり「高校でもう一度分数を習うとは思っていなかった」,「ブラックボックスの話はおもしろかった」などよく昔のことを覚えていてくれた．印象に残るものであったことはまちがいない．

私は教師になったばかりの頃にこのような授業をした．私の働いた高校では，地元のいわゆる障害生学級卒業の子も受け入れていた．私自身が，教員になってその問題に取り組んだ．そして授業そのものは，取り出しでやっていた．そこでの授業でも，量から入ることではじめて計算方法も定着するという経験もした．

その後私は高校教員を辞め，他の仕事につき，それからまた高校生に教える仕事に戻ってきた．このときにやった授業をもういちど振り返りたいと思いながら，なかなかできなかった．

水道方式はこのように確かに有効な教育方法であったが，数学としてこれを見直すことが私自身の宿題で，青空学園でいろいろ作ってきたのも，その宿題に答えようとすることという意味もあった．ようやく 2008 年にはじめて書いてみることが出来たが，量の捉え方は昔の水道方式のままであった．

1.1.2.3　今省みる

集合・量・数

南海　私の授業のもとになったのは，水道方式といわれる教育法であった．それを提唱されたのが遠山啓先生である．私は，数学教育への提言を続けられた先生の生き方を尊敬してきた．それを遠山啓式の算数教育と考えてきた．

その先生が 1972〜6 年頃，ちょうど水道方式の提唱から 20 年の時点で，いくつかの見解を述べておられる．数学者に向けたものとしては『岩波講座・基礎数学』の月報 5（1976 年 10 月）に「集合・量・数」がある．また一般の読者に向けたものでは，雑誌『科学朝日』（1972 年 5 月号）に「6 × 4，4 × 6 論争にひそむ意味」という一文をよせておられる．いずれもこれも「遠山啓著作集数学教育論シリーズ〈5〉の『量とはなにか I』に収められている．それを読んで，かつての自分の実践を振り返りたい．

まず「集合・量・数」である．これが発表されたのは，ちょうど私が最初に教えた生徒らが高校 3 年生のときである．この当時はこの一文を知らなかった．あるいは読んでもとくに何も疑問を待たなかったのかも知れない．当時，数学の指導要領から集合をなくすのかどうかが議論になっていたらしい．少し長いが考え方がよくわかるので，ここに紹介する．

いま，数学教育のなかでは，集合をめぐってさまざまな論議が展開されている。アメリカ流の現代化は，現代数学の基礎は集合論である，という数学研究者にとってはいちおう妥当な判断を直線的に数学教育にもちこんで，集合を小学校から学ばせる方法をとるようになったようである。アメリカは戦争に勝ったから，数学教育でも先進国であると信じこんでいるらしい文部省は，このやり方を直輸入して，1968(昭和 43)年の指導要領をつくった。しかし，このやり方は苦情続出のありさまで，つぎの指導要領からは集合を追放するらしいというわさがもっぱらである。

集合という新しい教材が量や数などのような伝統的な教材とどのような内的関連をもっているかをじゅうぶんに吟味しないで，安易にそれを新奇な概念として導入したことがまちがいのもとであった。そのために有限集合も無限集合も無差別にとりいれるという誤りを犯してしまったのである。いうまでもなく，無限集合を小学校にとりいれることなど無謀もはなはだしい。無限集合をとり入れたら，かならず濃度の問題にぶつかるのであるが，濃度の難点を避けて無限集合を教えようとしても，かならず破綻が生ずる。

では，有限集合も小学校から追放すべきであろうか。ここでは ”集合 ” という術語のことをいっているのではなく，集合の概念そのものをいっているのである。

集合の概念そのものを追放して小学校の算数が教えられるか。それはいちおう可能である。その試みはかつて ”数え主義 ” によってなされた。数え主義のよりどころになったのはクロネッカーであった。彼は「数の概念について」(Über den Zahlbergriff) という論文のなかで，集合ではなく，順序にもとづいて整数の理論を構築したのであった。おそらく，この論文は論敵のカントルを意識して書かれたものと想像されるが，この理論を数学教育に応用したのが数え主義であり，それを日本に輸入して 30 年にわたって国定教科書として使用された『尋常小学算術書』(黒表紙) をつくったのが藤沢利喜太郎であった。

藤沢は ” 量の放逐 ” をとなえて，

集合→量→数

という概念の発展系列を否定して，

順序→数

という系列をもってそれにかえようとしたが，いまからみると，それは失敗であった。

クロネッカーの理論をさらに精密化したのがペアノの公理であるとも考えられるが，そのもとになっている ” 後続者 ” という操作だけては算数を教えることができない。なぜなら，数詞そのものが十進構造をもっているからである。” 十ずつ束（集合）にする ” という十進構造の核をなす操作は集合づくりを避けて教えることができない。

十進構造がわからなければ，算用数字のしくみを理解することはできないのであるが，藤沢は，その難点を筆算の早期導入によってきりぬけようとした。これは明らかにゴマカシであった。なぜなら，筆算は算用数字にもとづく計算であるし，算用数字は十進構造と位取りと 0 の徹底的な理解を不可欠の前提とするからである。その結果，形式的な計算はいちおうできるが，数の意味を理解できない子どもをおおぜいつくりだしてしまった。その欠陥をなおそうとして登場してきたのが 1935 年の緑表紙であっ

たが，それは算用数字と筆算を目のかたきにする極端な暗算主義の立場をとった。これは，やはり，”数え主義”の流れをくむもので，”修正数え主義”とでも呼んだほうがよいくらいだが、これもやはり，失敗におわろうとしている。なぜなら，いまでは暗算主義の破綻は，もう救済できないものになってしまったからである。

クロネッカーの流儀が誤りであるとすれば，もうひとつの道である〈集合→量→数〉という系統をとるほかはないだろう。

「皿のなかにミカンがいくつありますか」という問いのなかには，ミカンの集合が考えられている。そのさい，集合という術語を使うかどうかはどうでもいいことである。

この問いはミカンの集合の量を問題にしているのだが，そのためには，その集合の要素が等質もしくは等質に近いものであるという前提が必要である。つまり，集合から量が導きだされるためには等質化という条件が加わらねばならない。2 個のミカンの集合と 3 個のリンゴの集合との合併集合をつくることはつねに可能であるが，$2+3=5$ という加法によって，その集合に 5 という量を与えることはふつうやらない。ミカンとリンゴは異質だからである。

だから，クライン流にいえば，集合の各要素が等質で，いれかえ可能なとき，換言すれば，ある集合が対称置換群を許容するとき，はじめて量の概念が発生するといえるだろう。

量よりさらに抽象的な概念が数である。3 個のミカンと 3 個のリンゴは，量としてはまるで異なったものであるが，数としてはおなじである。その根拠に 1 : 1 の対応づけが可能であるからである。

だいたい以上のような理由から，私は，

集合→量→数

という概念の発展系列を数学教育の主軸の一つと考えているのである。もちろん，これに対して，多くの反対意見がありえるし，また，実際にある。とくに多くの数学者から量など不必要だという意見がだされている。たしかに数だけて数学はいちおうやっていける。しかし，数学，とくに解析学は，本質的には量の科学だといってよいと思う。測度論でいう加法的な測度はいわゆる外延量であるし，二つの加法的な測度の微分に関する Radon-Nikodym の定理は，まさに内包量の創出に相当するものだといえよう。

集合から出発しても量を放逐して，

集合→数

という系列をとることも不可能ではない。もちろん，分離量 (自然数) まではそれでいける。しかし，連続量（実数）になるといきづまる。藤沢の黒表紙は分数×分数の意味を説明することができないで，それを天下りの約束として教えこむほかはなかったのである。

2013 年，あの授業をしたのが 1974 年であるからもう 40 年近くになる．その後紆余曲折を経て，この 20 年来，受験生に数学を教えるようになり，高校数学の土台を深めなければならないということで，この 15 年は青空学園でいろいろ考えてきた．

それをふまえて今この一文を読むといろいろ考えさせられる．この一文への疑問点は，それはそのままかつての自分の考えへの疑問である．

(1) 集合とは全体集合の元のうち一定の条件を満たす元よりなる．リンゴはリンゴのまま，ミカンはミカンのままでものを一つにしても，それは集合とはいえないのではないか．集合という以上，より一般的な条件があってはじめて，リンゴとミカンは一つの集合をなす．この場合は「果物であること」を条件とすれば集合となる．「2 個のミカンの集合と 3 個のリンゴの集合との合併集合」はその意味で集合ではない．単なるものの集まりと定義された集合が混同されてはいないか．

(2) クロネッカーの数え主義にもとづくかつての算数教育が実際どのようなものであったのか，今となってはわからない．遠山先生の言われる，順序数よりも集合に基礎をおく基数を基礎にしなければならないという主張は主張として理解できる．

しかし集合の一対一対応での同値類から基数を定義することは，数を学んだ後に数を捉え直す考え方であって，子どもは先に数えることを知っていて，はじめて集合の個数が分かるのではないか．同値類につけられた名前としての数を基礎とすることは，教育に適しているだろうか．

(3) 集合を基礎に量を導入する，というのであるが，その一方で，小学校では有限集合の考え方が重要で，無限集合は難しいといわれる．しかし量で重要なのは連続量であり，連続量は無限集合を基礎とする．ということは，水道方式の体系で，分数を教えるときに用いるタイルは，集合の考え方には基づいていないのか．集合を基礎に量を導入する立場は連続量にも適用されているか．

(4) さらに先生は「量で重要なのは連続量」といわれるが，連続量で実際に小学校の教育の場に出てくるのは分数である．しかし，分数つまり有理数の集合は実数の中で稠密であっても連続ではない．小学算数の指導者に，デデキントやカントールが稠密から連続への飛躍を果たした貴重な歴史が，誤って伝えられないか．

(5) 「数学，とくに解析学は，本質的には量の科学だといってよい」といわれる．しかし事実は，量から自由に数を基礎づけ，その上に数学は発展してきた．量から自由となった数そのものの公理論的な意味での実在，これが数学が目指してきたことではないのか．実数論が公理系で定義され，その上に解析学が築かれたのは事実であり，解析学もまた量から自由である．

(6) 「集合→量→数　という概念の発展系列」といわれるのだが，量の認識には数がなければならない．数は量を量として分節する言葉である．数の言葉があるから，量を捉えることができるのではないか．矢線「量→数」は一方の方向ではなく「数→量」と相互に行きかうのではないか．したがって「概念の発展系列」とは言えず，数によって量を対象化して認識することこそ，発展ではないか．

実はこれは私がやってきた授業の基礎を問うたときに出てくる疑問そのものである．

積の順序

南海　少し私の独白が続くが聞いてほしい．次に「6 × 4，4 × 6 論争にひそむ意味」である．長いので見出しと要旨を紹介する．

雑誌『科学朝日』(1972 年 5 月号)「6 × 4，4 × 6 論争にひそむ意味」

●－－テストは教育の目的か手段か

1972 年 1 月 26 目の『朝日新聞』に小学校のテストをめぐる論争がのった。それによると，昨年の秋，大阪府松原市・松原南小学校の 2 年生のテストに，つぎのような問題があったという。

6 人のこどもに 1 人 4 こずつみかんをあたえたい。みかんはいくつあればよいでしょうか

これに対して何人かの子どもは，

$$6 \times 4 = 24$$

と書いたが，その答案は，答えの 24 こにはマルがつけられ，式の 6 × 4 にはバツがつけられ，4 × 6 と訂正されたという。そこで，これに疑問をいだいた親が，文部省にも質問状をだして論争がまきおこったらしい。

この論争をのせた新開を送ってもらって読んでみたが，じつにおもしろかった。そこには学校教育をめぐるいろいろの意見をかいま見ることができた。これを読んでまず感じたことは，テストはなんのためにやるのか，という疑問であった。そして，この論争に参加しているほとんどすべて人びとが，テストの意味について考えていないらしいということであった。

…

ところが，それとは反対にテストが教育の手段に使われるなら，そのテストの結果はおおいに利用できるだろう。6 × 4 と書いた子どもがいたら，バツをつけるまえに，その子になぜそう書いたかをクラス全体の子どもに説明させて，いいかわるいかを討議させるといいだろう。そうすると，その討議の過程で，その子がまちがっていたら，なぜ誤りとされたかを納得するだろう。また，4 × 6 と書いた子どもも，その子の説明をきいて 6 × 4 の考え方がわかって，賛成するかもしれない。

…

この問題をめぐって寄せられた投書をみると，ほとんどがマルをつけるかバツをつけるかにだけ気をとられて，テストの意味の意味そのものに立ちかえって考えたものはなかった。ただ，ある主婦の投書に,「授業中に別の考え方が出れば，授業がいっそう充実したものになると思います。たまたまテストで別の考え方が発見されたら，先生はていねいに取上げてほしいというのがあった。この意見は正しい点をついている。

ところが「言語，文字，数式などは社会的な約束です。4 × 6 であって 6 × 4 ではないというのは約束です。約束を守り，守らせることは思考の統制ではありません」というのは元小学校長の投書であった。この人は，すべての子どもを賢くするよりは，どうも管理することに関心のあった人らしい。

●――かけ算はたし算のくりかえしか

では，本題にはいって，いったい 6 × 4 は正しいか，まちがっているかについて考えてみよう。この問題の答えとして，4 × 6 だけが正解であり，ほかを誤りとする理由はどこにもない。もともと算数の考え方は一通りしかないと思いこむのがおかしいので，多種多様な解き方があってよいのである。ミカンを配るのに，トランプを配るときのやり方で配ると，1 回分が 6 こ，それを 4 回くばるのだから，それを思い浮かべる子どもは，むしろ，

$$6 \times 4 = 24$$

という方式をたてるほうが合理的だといえる。

…

また，4 × 6 は，

$$4 \times 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

という意味だとすることにも私は反対である。

…

●－－加法・減法と乗法・除法はべつの演算と教えよ

日本式のかけ算の意味をどのように教えるかというと，かけ算をたし算から切りはなして教えることが前提となる。

…

そのことは，数がはじめにあって，そのあとでメートルとかキログラムとかのような量が生まれてきた，というのではなく，逆に量がさきにあって，数がそのあとからでてきたと考えなおすことから出発している。

ところで，量には，大別すると，二種類ある。まず体積・長さ・重さなどのように，ものをあわせると，たし算になるような量がある。それは，とうぜん，＋と－とに関係してくる。これは”大きさ”や”広がり”を表わすもので，外延量とよばれている。

これに対して，速度・密使・濃度などにのように，なんらかの性質の”強さ”を表わす量がある。これは”質量的”とでもいうべきもので，内包量といわれている。

ここには遠山先生の算数教育に対する考えが端的に述べられている．これは 1972 年のことである．同じ問題が 2012 年に中日新聞で，また 2013 年 1 月 25 日朝日新聞で報道されたわけだ．40 年間，一体何をしてきたのか．算数教育は何も前進しなかったのか．

2013 年の朝日新聞の記事は 41 年前と言葉がやや変わっている．変わったのは,「被乗数×乗数」から「1 つ分×いくつ分」となっている．これは中日新聞も同じなので，指導要領などにあわせているのだろう．そして朝日新聞の記事そのものは「被乗数 5 ×乗数 3」は「被乗数 3 ×乗数 5」でも良いというトランプ配りの観点だけでなく,「いくつ分× 1 つ分」の順でも良い，という議論になっている．

このように言葉づかいは 41 年間で少し変わったが，学校で混乱が続いていることは何も変わっていない．かけざんの教育はそれだけ難しいということなのだ．いま遠山先生の一文を読んで，次のようなことを考える．

(1) 6 × 4 とした生徒に根拠を問え，といわれている．これはまったくそうである．私もまた，分数の積で分母と分母，分子と分子を掛ける根拠を問うた．単にバツをするだけでは教育にはなり得ない．この点，まったく我が意を得たり，である．

(2) その上で,「加法・減法と乗法・除法はべつの演算と教えよ」というのには賛成できない．4 × 6 は，

$$4 \times 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

でもあることを教えたい．

それはこういう経験があるからである．かけ算を習って間もない 2 年生で 100 × 3=300 は知っている子に，こちらが思わず 3 × 100 と 100 × 3 と同じだといったら，その子は「ほんまか」と言いながら 3 を 100 回たして，確かに 300 になることを確認し「ほんまや」といった．

算数にしろ数学にしろ，まず自分の手持ちの方法で確認すること，この基本態度が大切だ．だからかけ算でも，それを和から定義してやれば，自分で確認できる．

「加法・減法と乗法・除法はべつの演算」とすれば，逆になぜ 5 × 3 が 5+5+5 と等しいのか，いつも成り立つのはなぜかを教えなければならない．

最近は積を和から定義しているようだが，これは教える上での要請の結果だろう．

(3) 「加法・減法と乗法・除法はべつの演算と教えよ」の前提にある「量がさきにあって，数がそのあとからでてきたと考えなおすことから出発している。」は客観的な事実ではなく，後に「数は母語」で考えたいが，量の認識は数なしにはありえないのではないか．

太郎　私は，4 × 6 は 4 が 6 個分あると理解します．この 6 個分はやはり 6 回たすことです．4 × 15 が出てきたとき，いちいち 4 を 15 回たすことは面倒ですが，いちどは自分で確認することは大切だと思います．そのうえで，いわゆる積み算による計算で出来ることを理解して，かけ算のありがたさがわかるように思うのです．

南海　確かにそうだ．3 × 100=100 × 3 をたし算で確認するのは「ようやる」であるが，もうすこし小さい値のときは，何回か和での計算と積の計算と，結果が同じになることを確認し，それがなぜかを，それこそ 10 進法で考えるということも，大切だと思う．

このように知っている演算である和から，新たに積を定義することは，自分で確認できるという点からも重要である．

またこれなら，4 を 7 回たすのと，7 を 4 回たすのが同じ結果になることを確認し，そのうえでなぜなのかを考えさせるという授業も出来るのではないか．

教員になったばかりの私は量を用いて数を教えた．次節では，人間と量，数の歴史をたどりつつ，量と数について，私自身の責任で考えをまとめたい．

1.1.3　数で量を捉える

1.1.3.1　量の獲得

体感量

南海　量というもの，そして数のはじまりをもういちど考えてみよう．

人間が力をあわせて働きはじめたとき，人と人をつなぐ言葉が獲得される．言葉によって協同して働く生命，これが人間だ．言葉は同時に考えるということのはじまりでもある．

働くことと言葉をもつことを土台として，量の意識が形成される．あの山の麓まで行ったときとあの川辺まで行ったとき，体の疲れ方が違う．それは一体何が違うのだろうか．その違いをもたらす根拠として山の方が「遠い」，川の方が「近い」．さらに進んで歩いたときの疲れの違いをもたらす要因としての「遠さ」が認識されていく．量はまず比較にはじまる．

さらに「高い－低い：高さ」が知られ，どこかで「遠さ」と「高さ」に共通する「長さ」へ飛躍していったに違いない．ここに至るのにいったいどれだけの時間がかかったことだろうか．耕す土地の広さもまた，仕事の量として認識されていったのだろう.「広い－狭い：広さ」である．

「広い」という言葉はすでに万葉集に出てくる.「天地は比呂之（ヒロシ）といへど」(『万葉集』八九二)．それに対して量としての「大きい」は比較的新しい．室町時代以降よく使われるようになった．それだけ抽象的なのだ．また，入れものに入る水の量から，容器の「大きい－小さい：大きさ」が知られ，この量がまた，岩の「大きさ」と同じ量であることがどこかで認識されたのだ．

このように人間は身体の感覚を基礎として比較を可能にする根拠として量をつかむ．そしてそこに共通することがらをつかむことで，より一般な量を抽象していった．それにしても「広い－狭い」の本質を「広さ」と言い，あまり「狭さ」とは言わない.「高さ」とは言うが「低さ」とは言わない.「短さ」,「小ささ」とも言わない．これは，はるかな昔から，人間が量の方向性を意識していたことを示している．

ただし，それを「量」として認識するのはまた別のことがらであり，長い年月を要した．結論的に言えば，量そのものは近代においてはじめて認識された．それとともに量にもいろいろな種類のあることが改めて認識された．

かぞえる

太郎　量は身体感覚に基づく比較によって獲得されたのですね．では，数えるということはどのようにはじまり，またそれはどのように量と結びつくのですか．

南海　そう．もう一つ人間にとって大切な働きが「かぞえる」ということだ．

「かぞえる」という言葉は古い.「か」は「十日 (とうか)」「二十日 (はつか)」に今も生きている「か (日)」と何らかの関係がありそうである．つまり,「かぞえる」のはじまりは「日にち」を数えることと関係しているのではないだろうか．植物の生長を待ってその実を採集する文明では，日にちが過ぎていくことは大変重要なことであった.「出でて行きし日を可俗閇（カゾへ）つつ」(『万葉集』八九〇).「かぞえる」ことから「かず」が抽象され，自然数が獲得されるまでには長い月日が必要だった．このように日にちの運行の認識が数えることのはじめかも知れない．序数としての自然数である．

「多い」という言葉も古い.「恋しくの於保加流（オホカル）我は見つつ偲（しの）はむ」(『万葉集』四四七五).「おおい」は「命長ければ，辱おほし」(『徒然草』) のように「何々が－多し」の形で用いられてきた．この例では「辱が大きい」のではなく「辱をかくことが多い」という意味である．このように「多い－少ない」は「はかる」ものではなく，回数や個数を「かぞえる」ものである．

序数と基数

南海　数える数から，ひとまとまりしたものの個数としての数へ，それがいわゆる序数から基数へということなのだが，どのような過程を経たのだろう．そこでもまた長い長い時間が経過した．それを子供は成長の過程で反復する．それを見てみよう．二つの道がある．

第一は，3 枚の皿に 3 個のみかんをひとつずつおいていけば，皿が余ったり，みかんが余ったりすることなくちょうど 1 枚の皿にみかんが 1 つずつおける．このような経験のなかから 3 枚の皿と 3 個のみかんは何かが「同じ」だ，と気づく．何が同じなのかと考えて「個数」が同じだ，と知っていく.「3 枚の皿」と「3 個のみかん」が同じ「3」であることが分かるとき人間は自然数「3」を知る．

第二は，この「3」が，皿を 1 枚 2 枚と数えた 3 枚や，みかんを 1 個 2 個と数えた 3 個と一致することを知る．数えた数が同じなら，すべての皿にちょうど 1 個ずつみかんが乗る．こうして数える数と個数との一致に気づく．

量を数で捉えることと，個数の認識とは，相互に深まりながらすすんでいったに違いない．また，個数の発見は，実際はもっと生産に直結した場で起こったのだろう．

毎朝放牧した羊と，夕べに帰ってきた羊が同じだけあるのかどうか，数そのものを知らない段階ではどのように判断するか．羊が小屋を出るたびに石をひとつ並べていく．帰ってきたときは，羊が小屋に入るたびに石をひとつ除く．こうしてちょうど最後の 1 頭が戻ったとき最後の石が除か

れれば，増減がなかったことがわかる．この話は，ホメロス（紀元前 8 世紀末）の「オデュッセイア」のなかにも載っている．

序数が先か基数が先かという議論がある．定義においていずれを先とするかは数の体系の公理の問題である．歴史的事実とは異なる．歴史では，いずれが先かはいえず，相互に深まり豊かになってきたに違いない．

石を並べることが長く続いた後，並べられた石の個数としての数を発見したのだ．基数としての自然数である．このようにして人間のものになった数が，親から子へと伝えられて，子供は数を身につける．大人からの伝達の作用によって，人類の長い歴史が凝縮されて，子供のなかで反復されるのだ．

太郎　そうか．子供が育つというのは長い歴史の蓄えを自分のものにしていくことでもあるのですね．

南海　幼い段階での教育では，どこかでこの歴史を追経験することがなければならない．そして人間が生きてゆくのは，その蓄えられた経験の上に，なんらかの新しい蓄えを加えることなのだ．あるいはそれまでの経験を大きく打ち破ることであってもよい．

はかる

南海　数えることができるようになると，量の比較が数を媒介にするようになる．「今日は昨日の 2 つ分働いた」．「あの川に行くには，その池に行くのの 3 倍は歩かなければならない」．このように単なる大小の比較から，数を仲立ちにした比較へすすんだのだろう．

太郎　数えることから，個数にいたり，ものの集まりに数をおくことを身につける．それがあれば，量を大きい小さいという比較から，2 倍 3 倍と数を用いて比べることにすすむことができる．ここでも長い長い時間が必要だったのでしょう．こうして，量を「はかる」にいたるのですね．

南海　「はかる」も古い言葉である．『東大寺諷誦文平安初期点』に「丈尺を以て計（ハカリ）しかども」とある．古典に出てくる例では，このように計量の意味で使われた文献は少なく，『日本霊異記』上・三五（興福寺本訓釈）の「時に市人評（ハカリ）て曰はく」のように「推し量る」意味で使われることが多かった．日本語学者である大野晋の『日本語の形成』(岩波書店，2000) によれば，「はかる」はタミル語＜ vakai ＞に起源をもつ．南インドの民であるタミル人は，紀元前 10 世紀の頃インド大陸北方に欧州系のアーリア人が進入したとき，それにおされて東南アジアにも分散した．その一部が日本列島にまで至り，彼らによって水田耕作技術がもたらされた．こうして弥生時代の農耕文明がはじまったとき「はかる」もまた日本語にもたらされ定着したことはまちがいない．

太郎　「はかる」は奥の深い言葉です．これが水田耕作技術とともにもたらされたというのは印象深いですね．

南海　数を獲得すると，今日は昨日の 2 倍働いたとか，明日は昨日の 3 倍働かなくてはと考えることができる．これが「はかる」ということだ．個別単位の誕生である．他の人とも比べられるようにしたい．となれば共通の単位がいる．これが発展して普遍単位が生まれたのだ．

このように，量の深まりと数の深まりとは相互にすすんできた．量が先であるとも言えないし，数は量と関係ないともいえない．子どもはその成長過程でこのような量と数の相互展開を追体験するものなのだろう．

「量」が先なのか「数」が先なのかという論争がそれぞれの立場からあるわけだが．歴史的にも個々人の認識においても，いずれが先でもない．人間は言葉で存在を分節し，切りとってつかむ．だから言葉が存在より先にあるとは言えない．人間がこの世界のなかで生きてゆくとき，つまり労働において，言葉は労働の深まりとともに相互に豊かになってきた．

量と数についても，比べようとする何かがあることに気づくこと．日にちを数えること．これらがまず長い年月をかけて豊かになり，そして，ものの大きさや遠さの比較が，比としてつかまれ，単位量をもとに数で量を表すようになる．このように，直接比較－間接比較－個別単位－普遍単位，という段階を，本当に長い時間をかけてふんできた．

太郎　確かに．今私たちが当然のように数を用いるのも，本当に長い時間の中でのことです．それを考えると，不思議でもありまた何か厳粛な気持ちになります．

南海　人間は長い長い時をへて，量の認識に至った．概念として量が先行するとはいえ，量の認識に数は不可欠である．量と数は互いの展開を促しながら相互に発展してきた．現代においては，数は公理的に構成され，構成された数によって量を仲立ちにして現実の世界を近似してつかむ．量とは現実と数を媒介する概念である．

数学は量の学問ではない．数の学問である．しかしそのことと，教育において量を重視することは，別の問題である．教育においては，量と数が相互に発展してきた過程そのものを追体験しなければ定着しない．またわからない．出来上がった数とその計算法を天下りに教えても，まったくそれは教育ではない．個体発生は系統発生を繰り返すといわれるが，数の習得もまたそうである．だから量と数の相互の高めあいを自ら経験しなければならない．その場を与えその経験を踏ませる作業，それが教育である．

数の世界の完結と，量と数の相互発展の経験の場としての教育と，この分離と統一，これが重要であり，またいまだに未解決の問題である．

1.1.3.2　量の条件

比較可能

南海　量を後に定義する。この量がどのような性質をもつべきであるかを考えるために，定義されたとして，X で同じ種類の量の集合を表そう．そのうえで，量に要請される性質を考えよう．

太郎　X は長さの集合とか，重さの集合ですか．単位によって数値が違いますが．

南海　まだ数値化はしていない．1 尺と言おうと 10／33 メートルと言おうと同じ長さだ．その長さの集合を考える．

X の元である量を A のように大文字で表そう．量であるために，X はどのような構造をもたねばならないのか．逆に言うと，人間が歴史的に認識し生みだしてきた量とは，どのようなものであるのか．

まず比較可能性である．では何を比べるのか．

太郎　普通は大小を比べます．

南海　比べるということから，逆に大小ということがつかまれたのだろうが，量の比較可能性の前提として，量には大小関係が定まらねばならない．量が満たすべきことを公理としてまとめてゆこう．

公理 1-1　X には関係「$<$」が定義され，X の 2 つの量 A と B に対して

$$A < B,\ A = B,\ A > B$$

のいずれかが成り立ち，かつどれか一つだけが成り立つ．

これは比較できるということの最も基本的な性質である．だがこれは 2 つの量の間で直接の比較ができるというだけである．次の間接比較の可能性が保障されなければ量を定めるとはいえない．それは仲立ちになるものを媒介にして比較するということである．つまり，

公理 1-2

$$A < B,\ B < C \text{ ならば } A < C$$

が成り立たつ．

量 B が量 A より大きく，量 C が量 B より大きければ，量 C は量 A より大きいという．

ここまでの性質だけでは，大小の比較はできるが，大きさの程度の比較はできない．量は大きさの程度が比較できねばならない．大きさの程度が比較できない例，苦しみについて．これは確かに大小の比較はできる．人間がなんらかのことに遭遇したとき，今回の苦しみはあのときの苦しみより大きいということができる．だがどれくらい大きいかが比較できるわけではない．この意味で苦しさはまだ量になっているとはいえない．

和差可能

南海　とすると，次にどのような性質をもたねばならないか．

太郎　容器に水が入っていて，容器とあわせて 10g とする．ここにさらに水 2g を入れると 12g となる．このように合併すると値が和になる，というのも大切ではありませんか．

南海　次のように定式化してみよう．

公理 2-1　X の 2 つの量 A と B についてその和 $A+B$ が定まり，次のことが成り立つ．

$$A+B=B+A,\ (A+B)+C=A+(B+C)$$

しかし和を定めただけでは意味がない．比較できることとあわせて次の公理が要請される．

公理 2-2　2 つの量 $A,\ B$ と量 C がある．このとき命題

$$A < B \quad \Longleftrightarrow \quad A+C < B+C$$

が成り立つ．とくに $C < B+C$ も成り立つ．

$B+C=D$ とおく．このとき C のことを $C=D-B$ と書き表し差という．これがつねに成りたつように次の公理をおこう．

公理 2-3

$$A < B \text{ なら量 } C \text{ で } B=A+C \text{ となるものが存在する．}$$

太郎　しかし，いつも合併すると和になるでしょうか．

長さ，質量，時間，物質量，面積，体積，等はこの性質をもっています．しかし，濃度は明らかにこの性質をもっていません．2 種類の濃さの塩水を混ぜると，濃さは 2 つの濃さの中間の値になります．

南海　そこが量を考える難しいところだ．3g/cm^3 の塩水と 5g/cm^3 の塩水を混ぜあわせても，8g/cm^3 にはならない．その通りだ．しかしまた，濃度 3g/cm^3 と濃度 5g/cm^3 に対して，その和となる濃度 8g/cm^3 が考えられなければならないことも確かだ．それをどのようにつくるのか，ということが問題になるということは，逆に濃度の和を考えている．

このような濃度などの和は，長さや重さのようにものの合併から量の和へとすすんだ場合からの類推であることはその通りであるが，量はものそのものではない．

太郎　前に速さで言われましたが，10m/秒で動くものと 2m/秒で動くものをつないでも 12m/秒では動きません．しかし，10m/秒で動くものの上に 2m/秒で動くものを乗せると 12m/秒で動きます．そうか．量は量である以上和があって，それをどのように実現するかは，また別の問題といえるかも知れません．

南海　私が昔勉強した水道方式では，ものの合併が量の和になるとき，それを量の性質と考え，そのような量を外延量といい．濃度のような量を内包量といった．いま考えると，量の性質と，ものの性質の間に混同があった．少なくとも自分の理解ではそうであった．

「ものの量をはかる」という以上，はかられた結果得られる量は，ものから一定の側面の切り出しがある．切り出される量の満たすべき性質として，和とそして 2 つの量の間を和でつなぐ量としての差を要請するのは，自然であるといまは考えている．

計測可能

南海　公理 2-1 から，和のくりかえしが可能になる．A の和 $A+A$ と A の和 $(A+A)+A$ をとる．公理 2-1 からこれは $A+(A+A)$ でもあり，和をとる順序は関係ないので $A+A+A$ と書ける．この和をとることをくりかえして

$$A+A+\cdots+A$$

のような量が再び X に属することになる．

太郎　これは要するに A の何倍と言うことですか．何倍と言うことは，そこで自然数が出てきます．

南海　そう．くりかえしという操作のうちに，実はすでに自然数が前提されている．自然数は，公理的にその構造を定めることが出来るが，量の構造を考えるためにも，あらかじめ自然数は用意されてなければならない．

われわれはすでに自然数はもっているものとする．量 A と量 A の和と A の和をとる．この操作を $n-1$ 回くりかえし得られる量を A が n 個分であるからこの順も考え An と表そう．

これを準備して，少し考えよう．これまでの公理から直接比較と間接比較は可能である．しかしこれだけでは，人間が得た量の性質をすべて公理に出来ているとはいえない．

太郎　これまでのことからすると，単位が存在することですか．

南海　直ちに単位の存在にはならない．単位とは，X のすべての量がある量 U を用いて表せること，等号の成立まで要請するが，一気にそこまではいかない．あくまで大小の区別である．

太郎　C が単位なら，2 つの量 $A<B$ と量 C に対して，$A<Cn<B$ となる自然数 n がある，ですか．しかしどんな C でもよいとすれば，自然数 n ではダメで有理数でないといけないし．

南海　いいところに来ている．有理数の問題になるその前提として，量の集合に次の公理を加える．

公理 3　X の任意の 2 つの量 A と B で $A<B$ のとき，

$$B<An$$

となる自然数 n が存在する．

これを**アルキメデスの原則**という．X はアルキメデスの原則が成り立つという．

『解析概論』では「アルキメデスの原則」『量の世界－構造主義的分析』(銀林浩著) では「アルキメデスの公理」，また手元の微積の参考書では「アルキメデスの性質」となっているものもあって一定していない．ここでは『解析概論』の言葉を使う．

これをなぜ「アルキメデス」の名を冠して呼ぶのか．それは『数学対話』「定積分の定義」の中にあるアルキメデスの求積法を見てほしい．そこでこの性質が使われている．

後に実数の定義をおこなった上でアルキメデスの原則をもういちど取り上げ，そこで示すが，アルキメデスの原則を満たしかつ順序の定義された量は，有理数体を含みかつ実数体に埋め込むことが出来る．

以上が量の満たすべき基本的な性質だ．

連続性

南海　このように量を定義してくると，計量法に定める量以外に重要な量があることがわかる．それは個数である．人口も立派に量の定義を満たす．このような個数の集合 X も量の公理を満たす．これを他の量と区別する．それを量自体の側から行うにはつぎのようにする．

量の集合 X の部分集合

$$\{\ A-B \mid A>B;\, A,B\in X\ \}$$

を考える．これは普通にいえば正の量の集合ということだ．われわれの量の集合 X は，方向ある量も含めているので，このようにした．

記号 $\geqq$ は $>$ または $=$ のいずれかが成り立つことを表すとする．この部分集合に最小の値が存在するとき，つまりある量 $A-B$ で，他の任意の $C-D$ に対して

$$C-D\geqq A-B$$

が成り立つようなものが存在するとき，その量の集合は分離的であるといい，各量を**分離量**，または**離散量**という．このような最小の元が存在しないとき，その量の集合は稠密（ちゅうみつ）であるといい，各量を**稠密量**という．計量法で定める量はすべて稠密量である．

稠密というのは任意の 2 つの量 $B<A$ に対して，$B<C<A$ となる量 C が量空間 X に存在することをいう．$D-E<A-B$ となる量 $D-E$ をとる．そして $C=B+(D-E)$ とおく．確かに $B<C<A$ となる．

太郎　稠密量とは聞き慣れない言葉です．

南海　かつて読んだ遠山先生や数学教育協議会の文書では，分離量と連続量という分け方をしていた.『量の世界』（銀林浩）では「最小限がある場合（離散的な場合）,「最小限がある場合（連続的な場合)」という記述がある．

しかし，例えば数直線で，座標が有理数である点を考え，原点からその点までの方向のある量の集合を X とすると，X は以上の公理をすべて満たす．そしてこれは正の最小要素をもたない．しかし無理数は入っておらず，連続ではない．つまり分離的でもなく連続的でもない量の集合がある．よって分けて考えるべきだ．

『数学雑談』（高木貞治）に，直線から 1 点を取り除くと連続性は失われる．しかし稠密性は失われない，との例をあげて「稠密は連続に及ばざること遠しである」とある．分離量と連続量という分け方は正しくない．分離量と稠密量であり，稠密量の中にさらに連続量という区分けがある．

太郎　なるほど．しかしそれではいったい連続とは何ですか．

南海　デデキントはこの問題を考え続けた．そしてついに 1858 年 11 月 24 日，次の公理を立てるならば，連続性をつかむことが出来ることを見出した．このあたりのことはデデキント自身が『数とは何か』で語っている．また上記『数学雑談』にも詳しい.「永らくに考えに考えて遂に到達した」とデデキント自身が言っている．このような苦労の末につかまれた連続性である．稠密性とのちがいをしっかりつかみたい．

量の集合 X の量を二つの集合 Y と Z に次の条件を満たすように分ける．

$$X=Y\cup Z,\ A\in Y \text{ かつ } B\in Z \text{ なら } A<B$$

このとき，Y に Y で最大の量があるか，または Z に Z で最小の量があるか，いずれか一方が成立する．

これを**デデキントによるの連続の公理**といおう．

太郎　そうか．有理数の集合 $\mathbb{Q}$ で，

$$A = \{x \mid x < \sqrt{2}\},\ B = \{x \mid \sqrt{2} < x\}$$

とすると，A に最大の量はなく，B に最小の量はない．しかし実数では，こういうことは起こらない．それが実数を特徴づける．
南海　そういうことなのだ．

1.1.3.3　量の定義

数は母語
太郎　ここで量に要請した性質はほとんど数への要請そのものではありませんか．
南海　そのとおり．量のもつべき性質を考えるとき，助けになっているのは実直線だ．基点からの長さが量のいちばん簡明なモデルになる．実直線は，目盛りを打てば，つまり座標を入れれば，数にそのまま対応する．

一般的に言って，量としての把握の深まりは，つねに数の深まりと一体であった．だから，量が現実の物理的な世界のことであるとして，それを量としてつかむときに，そこには必ずそれを写し取る数があった．

逆にいうと量は現実世界と数を媒介するものだ．媒介するものとして，量の条件で考えたような構造をもっている．しかしそれはただちに数の構造である．

一方，数学の世界もまた物理世界から抽象化された単なる言葉などというものではなく，豊かで深い世界である．何らかの数学的実在，あるいは数学的現象の実在はまちがいない．
太郎　人間のたどってきた長い歴史を考えさせられます．
南海　同感．さて,『知識は永遠の輝き』というブログの 2010-03-30 付「量とは-3- 負の量」に次の記事があった．

> また青空学園数学科では次のような記載があります。「速度と時間の場合には確かに負数と負数の積は正数だが，それでなぜすべての量で成立することが示せたのかという問題もある．量を数化すると同じ計算法則を満たす．だから計算法則の方から証明しておけば，すべての量で成り立つ．この道を通らないと，個別の量を超えた量一般での証明は難しい.」
>
> これは少し論理が甘いでしょう。「量を数化すると同じ計算法則を満たす」ということが全ての量で成り立つことが示されないと、上記の論理は完全ではないからです。でもそれは個別の量で個別にしか確認できないことです。そもそも負値を取らない量だってあるのですから。

これはまったくその通りである．

最初に『量と数』を書いたのは，2008.2.18 であった．その後，2008.9.10 から『解析基礎』「まえがき」「第 1 章」を作り，2009.2. 17 に『解析基礎』終章までを仕上げた．その過程でこちらの考えも深まった.『解析基礎』のなかで

> 人間は長い長い時をへて，量の認識に至った．概念として量が先行するとはいえ，量の認識に数は不可欠である．量と数は互いに相手の展開を促しながら相互に発展してきた．現代においては，数は公理的に構成され，構成された数によって現実の世界の諸々を近似する．量とは現実と数を媒介する概念である．

と書いた．確かに最初の『量と数』の書き方では,「量を数化すると同じ計算法則を満たす」ことがすべての量で成り立つことは証明されない，というのは正しい．事実は，数が先に準備されていて，それによって現実を近似して量としてつかむのである．つかまれた量がその数の法則を満たすのは，したがって当然である．数を離れて「すべての量で成り立つ」ことがいえるのではない．

数学の立場からは，量は数による現実の近似的把握の結果，つかまれることである．それ自体で数から独立に客観的に存在するのではない．量が認識されるとき，数による近似的把握が行われている．うまく近似できないとき，別の数体系が必要となるかも知れない．正値だけの数の集合が必要かも知れない．だから私のもとの文章で「すべての量で成り立つ」としたところは,「一つの数体系で近似するかぎりその量においては成り立つ」としなければならない．

太郎　現実を分節して切りとってつかむのが言葉であると言われます．これから言うと，数も言葉ですね．

南海　成長とともに身につける言葉を母語という．これからすると，数は第二の母語であるといえる．数があってはじめて，比べうる何かが量としてつかまれる．比べうる何かは先にあるが，それはまだ量ではない．量としてつかむ前提は数である．そして，同じ数でつかまれた量は同じ構造をしている．

数の準備

南海　われわれは現代，つまり数を公理的に構成することが出来る時代にいる．どのような数をわれわれはすでにもっているのか．あるいはどのように数を定義するのか．この問題を数学者として取り組み，世界に向けておのれの考え方をのべたのは，高木貞治であった．彼は生涯，数の基礎的な構成について 4 冊の書を書いている．その展開とその内容については『数とは何か　そしてまた何であったか』（足立恒雄）に詳しい．この本はすばらしいものであり，また読みやすい．

太郎　青空学園でも数の公理的な構成についてはいくつか読んだことがあります．

南海　これまで青空学園で数の構成について考えてきたのは次の四つである．

『数学対話』の「自然数と数学的帰納法」

『数論初歩』の「存在と構成」

前者で自然数の構成を，後者で自然数，整数，有理数の公理的な構成を行った．

数えるということから自然数が定義される．そこでは**ペアノの公理**によって自然数を定義した．『整数の基本』では自然数を次のように定義した．

> 1 からはじめて,「1 たす」という操作だけで作られる数の集合を自然数の集合といい，
> その要素を自然数という．

これを公理に定式化したのがペアノの公理であり，数えるということの本質をついている.『数論初歩』では次の定義を採用した。

定義 1 (ペアノの公理)　次の性質を持つ集合 $\mathbb{N}$ を考える．

(i) 1 という要素がある．

(ii) 集合 $\mathbb{N}$ の要素 x に対し集合 $\mathbb{N}$ の要素 $x+1$ を対応させる規則が定まっている．

(iii) $x+1=y+1$ ならば $x=y$ である．

(iv) 要素 $x+1=1$ となる要素 x は存在しない．

(v) 集合 $\mathbb{N}$ は (i)(ii)(iii)(iv) を満たす最小の集合である．つまり $\mathbb{N}$ のどのような真部分集合も (i)(ii)(iii)(iv) を満たさない．

このとき $\mathbb{N}$ を自然数の集合といい， $\mathbb{N}$ の要素を自然数という． ■

これは集合をもとに考えているので，ペアノ自身の定義とは異なることになるのだが，一般的には分かりやすい。

自然数からはじめて，整数，有理数と順次構成した．そこで用いた方法はいずれも，それまでにできている数の世界の二つの数の組 $(a,\ b)$ の集合を考え，その同値関係による商集合として定義した．

太郎　それぞれを読んでみました．いろいろな計算規則も，公理系から証明できそうです．

南海　このような公理系のなかでは，かつて量を用いて教えた負数×負数 =正数であることや，分数のかけ算では分子と分子，分母と分母をかければよいことなども，証明できる．

$$(-a)\times(-b)=a\times b$$

が次のように示される．

(1)

$$a=1\times a=(0+1)\times a=0\times a+1\times a=0\times a+a$$

$$\therefore\quad 0\times a=0$$

(2)

$$0=0\times a=\{1+(-1)\}\times a=1\times a+(-1)\times a=a+(-1)\times a$$

$$\therefore\quad (-1)\times a=-a$$

(3)

$$a+(-a)=1\times\quad a+(-1)\times\quad a=\{1+(-1)\}\times a=0\times a=0$$

$$\therefore\quad -(-a)=a$$

ところが

$$-(-a)=(-1)\times\{(-1)\times a\}=\{(-1)\times(-1)\}\times a$$

なので

$$\{(-1)\times(-1)\}\times a=a$$

$a=1$ とすると

$$(-1)\times(-1)=1$$

よってまた

$$(-a)\times(-b)=(-1)\times a\times(-1)\times b=\{(-1)\times(-1)\}\times a\times b=a\times b$$

太郎　確かに．しかし，量による説明の方がよくわかります．計算の公理からの論証は，これでないといけないという必要条件という感じですが，量による説明は，必要十分な感じがします．

南海　確かにそうなのだ．そこに，歴史的に積みあげられてきた数学と，子どもたちに自分で確認できるところから積みあげて数を伝える数学教育とを，どのように統一しつつ分離するかという問

題があり，かけ算の積の順の問題のように，40 年間解決していない課題もまた多く残されている．この問題がもういちど最後に考えよう．

さて実数については，次のところで述べてきた．

『数学対話』の「実数とは何か」

『解析基礎』の「実数の構成」

実数の集合 $\mathbb{R}$ を次の公理によって定まる構造をもつものとして定義した。

I) 全順序集合である．

II) 可換体である．

III) $\mathbb{R}$ の上に有界な部分集合 A には上限 $\sup A$ が存在する．

今後この対話をふまえて『解析基礎』を改訂したいと考えているが，第 1 版ではこのようなものとして実数を定義した．

太郎　この公理を満たすような集合が本当にあるのか，という問題が出てくるように思います．

南海　それを有理数から構成するうえでは，カントールの方法とデデキントの方法がある．『解析基礎』ではそれを実行し，そのうえでいくつかの基本性質を証明した．

そこにも述べられているように，基本列 (コーシー列) が極限をもつことを「完備性」という．デデキントとカントールの二つの方法は同値で，いずれにおいても実数はこの意味で完備である．そして実数とは「数列が収束するための必要十分条件は基本列 (コーシー列) であることである」が満たされる集合であることを示した．

太郎　基本列というのは

> 数列 $\{a_n\}$ で，任意の正数 ϵ に対して，番号 N で，$m,\ n > N$ のとき $|a_n - a_m| < \epsilon$ となるものが存在する．

ということでした．

有理数や実数からなるこのような数列は，実数の中であればつねに極限をもつ．これが実数の完備性ですね．

南海　そうだった．これらは，自然数からはじめて順次数を構成してゆくものであり，実際に 19 世紀の西洋でなされてきた経過にしたがっている．

量の空間

南海　ここで基本的な定理を証明しよう．先に準備した実数は，量を捉える数として十分なものであるということを示す．これは『量の世界』（銀林浩）に教えられたことだ．

そのために，まだ定義していなかった量を定義し，先に考えてきた量への要請を満たす量は，すべて実数で捉えることが出来ることを示そう．

量とは「もの」に付随する，比較することや一定の操作をすることができるような何らかのことである．人間は長い時間と歴史を経て，比較するための普遍単位を獲得した．例えば，長さについていえば，フランス革命を経てメートル原器が定められた．つまり 1m の確定である．その後，地球の周の長さから定めたり，ある種の光線の波長から定めたりと，観測技術の発展に応じて定め方は変わってきた．が，単位となる量を普遍的に定め，それに数値をかけることで，量を定めてきた．

太郎　その数値というのは，実数ですね．

南海　実際はそうなのだが，論理的な順として，いまは単に数として考える．また，かつてハミルトンは四元数を発見し，それによって物理的な現象を記述しようとした．また電気などの取り扱い

では複素数が使われることもある．これらの場合は量自体も多元的なものになり，量への要請を満たすとはかぎらない．

数 N は，準備された数のある部分集合とし，和と積が定義されそれに関して閉じ，乗法の単位元を含むとする．このとき，単位と呼ばれる U と数を用いて，形式的な次の集合 X を考える．

$$X = \{Ux \mid x \in N\}$$

太郎　これは単位を用いています．単位は単位量をもつ量です．ですから量そのものの概念を定義したとは思えないのですが．また Ux は U と x の積ですか．
南海　数学として量を定義するときは，一定の公理で定義される構造を定めるのだ．その意味で，単位 U そのものは無定義用語でよい．Ux もまた形式的な結合と考えてよい．そのモデルとしては，現実の量と同じく，単位の量をある数 x だけ倍したものでとることが出来る．
南海　この集合に次のような構造を入れる．

(1) $x \neq y$ なら $Ux \neq Uy$.

(2) X の 2 つの元 Ux と Uy の和を次式で定める．

$$Ux + Uy = U(x + y)$$

(3) X の元 Ux と数 $y \in N$ に対して $(Ux)y$ を次式で定め，量 Ux の y 倍という．

$$(Ux)y = U(xy)$$

南海　これを**公理 I** としよう．
太郎　これだけですか．量に積はないのですか．
南海　積は新たな量を生みだす．
太郎　そうか．長さと長さの積は面積という別の量になる．
南海　これだけではもとより量の前提的な定義である．

(1) X に大小関係 $<$ が定まり，公理 1-1，1-2 を満たす．

(2) 和に関して，公理 2-1，2-2，2-3 を満たす．

(3) X は公理 3 を満たす．つまりアルキメデスの原則が成り立つ．

これを**公理 II** としよう．公理 I，II の成り立つ集合を量空間といい，公理 I のみ成り立つ集合を非アルキメデス量空間という．

量空間とは，比較可能性，和差可能性，計測可能性をみたす量の集合であるといえる．このとき次の基本的事実が成り立つ．

定理 1　自然数が定義されているという条件の下で，量空間は，大小関係と和を保存したまま，実数の集合に埋め込むことができる．

証明
1)　$X \to N$ を $Ux \mapsto x$ で定めることにより，X と N は一対一に対応する．$Ux < Uy \iff x < y$ で N に順序を入れると，N は全順序集合になる．埋め込みを示すので，集合

$$N' = \{x - y | x > y\} \cup \{0\} \cup \{y - x | x > y\}$$

は N を含み，自然に加法に関して群になる．$z = x - y$ で $x > y$ のとき $0 < z$ と定め，$x < y \iff -x > -y$ によって全順序集合となる．

したがってはじめから，N は全順序加法群でアルキメデスの公理が成り立つものとしてよい．

2)　N の数 $a > 0$ をとる．任意の数 x に対して

$$(n-1)a \leqq x < na$$

となる自然数 n が存在する．なぜなら，自然数 $\mathbb{N}$ の部分集合 L を

$$L = \{nx < na\}$$

で定める．公理から L は空集合ではない．自然数の部分集合には最小値が存在する．それをあらためて n とおくとこの n が条件を満たす．

3)　N の部分集合 N_+ を

$$N_+ = \{x | x > 0\}$$

とおく．N_+ の元 a で，任意の $x \in N_+$ に対して $x \geqq a$ となる a が存在すれば，これを N_+ の最小の元という．

4)　N_+ に最小の元が存在する場合．

N_+ の元 x に対し，$(n-1)a \leqq x < na$ となる自然数 n をとる．$x-(n-1)a \in N$ で $x-(n-1)a \geqq 0$ であるから，もし $x-(n-1)a \neq 0$ なら a の最小性と矛盾．よって $x = (n-1)a$ となる．$x \mapsto n-1$ は単射でありこれによって N_+ は自然数に埋め込まれた．その結果 N は整数に埋め込まれる．この対応によって順序が保存されることの証明は難しくない．それは略する．

5)　N_+ に最小の元が存在しない場合．

まず，N は 1 を含む加法群であるから整数を含むとしてよい．この整数はそのまま自然に大小関係を保存して実数体の中に埋め込まれているとする．

N は大小関係 $<$ に関して稠密である．なぜなら任意の $x < y$ に対し，$y - x \in N_+$ で仮定から $0 < z < y - x$ となる z が存在する．このとき $x < x + z < y$ となるからである．

$x \in N$ に対して，実数体の中の数列 $\{r_n\}$ を次のように定める．$a = 1$ で上記議論を用いることにより，自然数 n に対して $nx < m(n)$ となる最小の整数 $m(n)$ をとる．これに対して $r_n = \dfrac{m(n)-1}{n}$ とおく．

$$m(n) - 1 \leqq nx < m(n),\ m(n+1) - 1 \leqq (n+1)x < m(n+1)$$

より

$$(n+1)\{m(n)-1\} \leqq n(n+1)x < (n+1)m(n),\ n\{m(n+1)-1\} \leqq n(n+1)x < nm(n+1)$$

これから実数体 $\mathbb{R}$ の中で

$$(n+1)\{m(n)-1\} < nm(n+1),\ n\{m(n+1)-1\} < (n+1)m(n)$$

となる．この結果

$$r_n - \frac{1}{n} < r_{n+1},\ r_{n+1} - \frac{1}{n+1} < r_n$$

つまり

$$-\frac{1}{n} < r_{n+1} - r_n < \frac{1}{n+1}$$

となり，数列 $\{r_n\}$ は基本列である．実数の完備性により数列 $\{r_n\}$ は収束する．この極限値を α とする．$N \to \mathbb{R}$ の写像を $x \mapsto \alpha$ で定めることにより，N は実数体に埋め込まれる．

太郎　この数列は，例えば x が整数なら，r_n は一定ですね．

南海　そうだ．そして N の稠密性を根拠に，この埋め込みが大小関係を保存することも同様に示される．細部は略する．これによって量空間は実数体 $\mathbb{R}$ に埋め込むことができる．量に対応する数の集合は実数で十分であること，つまり実数をはみ出すことはないことがわかる．

太郎　計量可能な量は，結局実数値をとるのですね．わかりました．

南海　そして，これが逆に実数体の特徴づけになっている．ヒルベルトは実数体を「極大アルキメデス順序体である」として特徴づけた．ヒルベルトのなかには量を実現するに十分な集合としての実数, という考え方があったように思う．

最後に，積の可換性がどのようにして示されるのか，まとめておこう．

(1) 自然数での可換性 $mn = nm$ は，積の定義にもとづき，n を固定して，

$$(m+1)n = mn + n = nm + n = n(m+1)$$

より m に関する数学的帰納法で示される．

(2) 有理数の積の可換性は,『数論初歩』の定義から直ちに出る．

(3) 実数の積の可換性.『解析基礎』で行ったように，切断で実数の積が定義され，有理数の積の可換性から，実数の積の可換性も導かれる．

(4) 基本列で実数を定義する場合.

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を基本列とする．

i)　基本列は有界である．数列 $\{a_n\}$ で，任意の正数 ϵ に対して，番号 N で，$m,\ n > N$ のとき $|a_n - a_m| < \epsilon$ となるものが存在する．

$m_0 > N$ を固定すると $n > m_0$ なら

$$a_{m_0} - \epsilon < a_n < a_{m_0} + \epsilon$$

なので，$m_0 + 2$ 個の数

$$|a_1| \cdots,\ |a_{m_0}|,\ |a_{m_0} - \epsilon|,\ |a_{m_0} + \epsilon|$$

の最大値を M とすると，すべての n に対し $|a_n| \leqq M$ となる．

ii)　$|a_n|,\ |b_n| \leqq M$ となる M をとる．任意の正数 ϵ に対して，$\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2M}$ とおき，この ϵ' に対して $m,\ n > N$ のとき $|a_n - a_m|,\ |b_n - b_m| < \epsilon'$ となる N をとる．このとき，

$$|a_m b_m - a_n b_n| \leqq |a_m|\,|b_m - b_n| + |b_n|\,|a_m - a_n| < M(\epsilon' + \epsilon') = \epsilon$$

となり，$\{a_n b_n\}$ も基本列である．

iii)　$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ で定まる実数を α と β とし，その積 $\alpha\beta$ を基本列 $\{a_n b_n\}$ で定まる実数として定義する．

その可換性は有理数の可換性 $a_n b_n = b_n a_n$ の帰結である．

太郎　「6 本のペンを 8 人分」と「8 本のペンを 6 人分」が等しいことは，1 本のペンを U とするとき

$$(U6)8 = U(6 \cdot 8) = U(8 \cdot 6) = (U8)6$$

で示されるわけですね．

アルキメデスの原理を要請するかぎり，積は可換である以外ありえない．

南海　もとより，これをどのように納得できるように教えるのかは，別の問題であるのだが．

数の公理

南海　私はこの「量と数」改訂にあたり,『数について』（デデキント）『新式算術講義』（高木貞治），『数学雑談』（同）,『数の概念』（同），また『量と数の理論』（田村二郎）,『数とは何か　そしてまた何であったか』（足立恒雄）などを，はじめて読んだりまた読みかえしたりした．

多くのことを学んだが，とりわけ高木貞治が，いかに数を捉えるかについて，生涯の研鑽を積んでいたことを改めて認識し得たことは大きかった．

西洋の自然数にはじまる数の構築に対して，高木貞治の最後の著作となった『数の概念』では，はじめから整数を公理として定義しようとする．より世界的というか，東洋的というか，そういう数の世界をふまえた公理系が示されている．

それは，これまで青空学園でやってきたものより根底的で明晰なものである．また実数の公理についても，数の準備としていかに他の分野から独立し内在的な定義をするか，最後まで考え続けていた．それを改めて知ることが出来た．

証明は行わないが，その内容のみここで紹介したい．

定義 2 (高木貞治による整数の定義) 集合 $\mathbb{Z}$ と写像 $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ が次の公理を満たすとき，$(\mathbb{Z},\ \varphi)$ を整数空間，$\mathbb{Z}$ の元を整数，$\mathbb{Z}$ をすべての整数の集合という．

公理 1：φ は $\mathbb{Z}$ 上の全単射写像である．

公理 2：$M \subset \mathbb{Z}$ かつ $\varphi(M) = M$ ならば $M = \mathbb{Z}$ である．

公理 3：$\mathbb{Z}$ は無限集合である．

ここで集合 A が無限集合とは，A の真部分集合 B で，A と B の間に全単射が存在するものが，存在することである．

太郎　これが整数ですか．…．そうか，ペアノの公理で $+1$ の操作にあたるのが φ ですね．

南海　-1 でもかまわない．一つの元をとり，それを 0 とする．$\varphi(0) = 1$，$\varphi^{-1}(0) = -1$．これから整数の諸性質を導くこと自体は，これまでにもやってきたことである．

太郎　そして，公理 2 がペアノの公理の数学的帰納法に対応するものです．

南海　高木貞治は「我々の整数は，物の数でもなく，物の順序を示すものでもない」（『数の概念』）という立場で整数を定義する．数は，数え主義も集合主義もこえているというのである．これは世界的にも他にない一般的な考え方である．

また，19 世紀の西洋数学では，あくまで自然数が基礎であり，負数や有理数は逆の存在から必要のために導かれるという立場である．つまり正の数こそ存在する第一のものであり，負数はそこから導かれるという立場である．これにたいして,『数の概念』における定義は，最初から負数も含めた整数の定義である．

太郎　東洋では，伝統的に量とははじめから，両方向にのびるものであったと言われました．そういう東洋の伝統なのでしょうか．

南海　それはわからないが，数学的にも，はじめから整数を定義した方がはるかに簡明である．ペアノ以来，というよりギリシア以来，西欧では正の数が存在する量であったが，そのときも東洋では両方向にのびるものとして量がつかまれていた．

だから，もし東洋で近代数学が内部から発展して現れたなら，そのときは自然数からではなく，整数からはじめただろう．高木貞治の半世紀にわたる数の研究の結果として，先祖返りではないが，東洋的な数のつかみ方に至ったことは，たいへん感慨深い．

次に連続体の定義にすすもう．すでに用いてきた用語の定義をまとめる．

i) 集合 X の任意の 2 つの元 a と b に関係 $a < b$ が定まり，次の条件を満たすとき，A を**全順序集合**または**線型順序集合**という．

　1．$a < b$，$a = b$，$b < a$ のいずれか一つに定まる．

　2．$a < b$ かつ $b < c$ ならば，$a < c$ である．

ii) 全順序集合 X の元 a で，任意の元 x に対して $x = a$ または $x < a$ のいずれかが成り立つものが存在するとき，A は**上に有界**という．対称的に**下に有界**も定義される．

iii) 全順序集合 X を二つの集合 Y と Z に次の条件を満たすように分ける．

$$X = Y \cup Z,\ a \in Y \text{ かつ } b \in Z \text{ なら } a < b$$

　Y に最大の元があるか，または Z に最小の元があるか，いずれか一方が成立するとき，X は連続であるという．

　ただし，Y の最大の元とは，$a \in Y$ で任意の Y の元 y に対して $y < a$ または $y = a$ が成り立つものをいう．

定義 3 (連続体の定義) 空でない全順序集合 Ł において次のことが成り立つとき**連続体**という．

無限界性 1：Ł は上にも下にも有界ではない．

連続性：Ł は連続である．

最小性：連続かつ無限界な全順序集合には，Ł と同型な部分集合が存在する．

これが高木貞治が至った連続体の定義だ．連続体とは，実直線に他ならない．人間は長い歴史を経て，直線というものをこのようにつかんだといえる．

『数とは何か　そしてまた何であったか』において足立先生は試案としてさらにもうすこし異なる公理系を立てておられる．それについてはまだまだ議論の余地がありそうだ．まだいまの議論がなされていると言うことだ．

太郎　どのような公理を立てるのかがなぜそんなに問題になるのですか．

南海　公理相互の関係を解明し，可能なかぎり一般的で前提の少ない公理系をうち立てたい．またそのように公理相互の関係を研究すること自体が，そのことを通して実数というものを研究することなのだ．

数学的現象は事実として存在する．それを公理系で捉えようとする．公理は絶対的真理ではなく，数学的な対象を捉えるための方法であり，公理相互の関係の中にその対称の本質的なところが顕れている．

1.1.4　終わりに

1.1.4.1　私の願い

教育数学を耕す

南海　数学教育に携わるものは，みずからわかる喜びを知り, それを次代に伝えようとする情熱をもたねばならない．私はこのように考えてきた．と言うより，みずからわかることの喜びを経験すれば，それを伝えようとすることは，自然なことである．そしてここにまた，教育を支える教師のやりがい，生きがいが生まれる．

青空学園では，教育数学ということを友人に教えられ考えてきた.『射影幾何の精神』の「はじめに」で教育数学に関する意見を次のように書いている．

> 私は，数学教育の根幹にはわかる喜びの継承がなければならない，と考える．高校生に数学を教えることを生業としてきたが，授業というのは，わかる喜びを体験する場なのだ，ということが，経験を通しての確信である．生徒が自ら問題を正しくつかみ，自分で考え，わかってにっこりする．それが「学問としての高校数学」を生きた学問にする.「理解はできるが，納得できない」段階からの飛躍である．その指導に数学教育の難しさと醍醐味がある．
>
> しかしそれを可能にする前提として，教えるもの自らがわかる喜びを経験していなければならない.「わかった」という経験のないものが数学を教えるなら，生徒たちがわかる喜びを経験するように指導することは難しい.「わかる喜びの継承」は文化である．授業を通してわかる喜びを次代に伝える，ここに数学教育の根幹があり，それを可能にするのが教育数学である．

これは高校数学だけではなく，もっと小さい小学生，中学生の教育においてもあてはまる．もとより小中の学校は，様々の世間の問題が学校にもおよび，先生方が研究し勉強する時間も余裕もないのが現実である．

いま，学校とは何かが根本から問われねばならない時代に入っている．確かに，一方で国家や行政による教育現場への統制と，その一方で，このもとで，この教育体制を，命がけで告発する生徒がいるという状況である．

ただそれでも，本来，智慧を次代に伝える教育という仕事の，それが行われるところとしての学校は，こういう場でなければならないと考える私の立場から，そしてまた「はじめに」で紹介した高木貞治の言葉から，やはり私は教育に携わるものこそ，人間は数をどのように捉えてきたのかについて，その概括はつかんでいたいと思う．

太郎　教育の仕事は奥が深いのですね．

南海　奥が深く，かつ時代に翻弄されてきた．制度的にももっともっと先生が勉強し，互いに学びあい，また研究することが出来るようにしなければならない．しかし，現実にはこの半世紀，教員を取りまく環境は厳しくなるばかりだった．

太郎　昔の授業と，逆に数の準備との話を聞かせてもらって，確かに量からする計算法の理解は実感を伴い，よくわかります．印象にも残ると思いました．

南海　タイルによる分数の積や商の考察は，乗法や除法の定義ではなく，数の計算に対応する量の操作を手にとってできるようにすることで，理解と納得を可能にしたというべきなのだ．

太郎　そうですね．量が要請する数の性質をみたすように数を構成していった．その数の計算を理解するためには，量に立ちかえって考えると，実感を伴って理解できる，ということでしょうか．

南海　このように量との対比で理解することが高校数学においても大変重要なのだ．実際，長く物理学も数学も一体の学問であった．

太郎　確かに．物理学や数学と分化したのはほんの近代のことなのですね．

南海　ガウス (1777〜1855) は,『数学対話』にもあるように「代数学の基本定理」をはじめて証明し，また若くして『整数論研究』で整数論にはじめて完全な体系を与えた人だ．同時に彼は終生天文台の長であり，天文学、測地学、電磁気学にも大きな業績を残している．また，リーマンは (1826〜1866) は，リーマン幾何，リーマン面，ゼータ関数，リーマン予想，代数幾何学と現代数学の基礎的な考え方をつくりあげたまさに天才だが，リーマン全集には理論物理学の論文「有限な振幅をもつ空気中の平面波の電波について」や自然哲学の論文「自然哲学の数学的新原理」も載っているように，物理学，自然哲学もまたリーマンにとっては，その数学ととぎれることのない一体の考えるべきことであったのだ．リーマンが歴史を切りひらいた「幾何学の基礎にある仮説について」も，読んでみるとまったく量の構造の数学的基礎づけそのものだ．第 1 章は「n 重外延量の概念」なのだ！

私などにはうかがい知ることはできないが，ガウスやリーマンにとっては，物理学的存在も数学的存在も，等しく明確に存在することであったに違いない．

今にほんの子供達の理科離れがいわれて久しい．この問題は奥が深い．簡単なことではない．総合学習のような経験主義的な試みは失敗した．単なる生活経験を集めてもそれだけでは考える力がつかない．一方，現実との交流のない数学教育は，いくらやっても限界がある．

私になし得ることとして，18〜19 世紀の数学を，教育に携わるものが研究しうるように，いま再構成するということをやってきたわけだが，日暮れて道遠し，との思いはぬぐえない．

根拠を問う教育

南海　『青空学園だより』12/10/16 に「根拠を問う」と題して書いた．

> 高校以来，いろんなことに関心を持ち，世間的に見れば仕事もまたいろいろした．そのなかでひとつ一貫して持ち続けてきたのは，根拠を問う，ということだった．高校時代に数学をとおして，根拠を問うということを学んだ.「$f(0)<0,\ f(1)>0$ で $f(x)$ が連続なら，$0<c<1$ で $f(c)=0$ となる c が存在する．その根拠は？」,「この問題は解ける．その根拠は？」等々考えることで，どのような言明に対してもその根拠を問うようになった．その結果いろいろ仕事を変えることにもなったと言えるのだが，それはそれでよい．高校生に数学を教えることを生業として，途中 10 年ほど寄り道もあったが，都合 30 年ほどやってきた．
>
> この 40 年，高校数学はまずい方向に一貫して変えられてきた．そのことは『解析基礎』の「高校解析の現状」に書いた．このような中で，高校生に教える以上，教えるものの責任として，教えている内容の根拠を掘り下げて書きおきたいと考えた．教える内容の少なくともその周辺までをおさえなければ，本当には教えることはできない．高校数学の土台のところを掘り下げ，考える場を作る，これが青空学園のそれこそ根拠であった．高校数学の範囲で，意欲的な高校生や教える立場のものが根拠をさかのぼるということに関しては，ほぼ青空学園にあるものでなされている．確率の「大数の法則」，方程式の解ける根拠を問う「ガロア理論」，これがまだ残っている．そして公理的数学の立場は「対角線論法」で書いたが，これはもういちど手を入れなければならない．こうして考えたことごとを WEB 上においておくことで，根拠を問おうとする高校生や教員の何かの役には立つだろうと考えてきた．やってみるとおもしろく，

実のところ自分自身の楽しみでもあった．

日本の教育は明治以来一貫して，根拠を問うことを教えないできた．むしろ根拠を問わないように問わないように小学生の時期から大学教育まで，生徒や学生を誘導してきた．根拠を問うことなく結果を受け入れる．そうすることが，近代日本の出世の道であった．こうして官僚制と原子力村が形成された．これが日本の旧体制である．根拠を問うことは，現実を批判することと一体である.「原発は安全だ」に対して,「どうしてそんなことが言えるのか．その根拠は？」と問い，自ら少し調べれば，たちまち安全の根拠は何もないことがわかる．ところが研究者の世界でも，地域住民の中でも，根拠を問うものはつねに少数派であった．それは日本の近代教育の結果であり，その果てに福島の核惨事が起こった．

19 世紀は，ワイエルシュトラスの函数論やカントールの集合論，デーデキントの実数論，そして 20 世紀初頭の数学基礎論へ，数学の根拠が問われた時代であった．19 世紀は同時に，マルクスやエンゲルスが資本主義の原理的な批判を行った世紀でもあった．二つはその根底でつながっている．それでもまだそれは西洋世界内でのことであった．そして今，資本主義が世界大に行きわたった時代に，再び世にあるものの根拠を問うことが求められている．日本においては，それがいわゆる原子力村に対する原理的で根底的な批判である．

…

「根拠を問え．ここに科学がはじまる．根拠を問うとは，すべてを疑い，現象を根本において捉えることである．さらにその根拠をも問い直す．この永続運動が科学である．科学精神の復興は青空学園の願いです！」とは，青空学園の HP の玄関の言葉であるが，終わりのない永続運動として根拠を問うこと，これがわれわれの知的風土となることを願っている．数学を本当に考えるなら，それは必ず根拠を問うことに至らざるを得ない．そういう数学を根づかせたい．われわれは近代日本の愚民政策に抗って自ら賢くならねばならない．東電核惨事を経て，いまこそこれが切実な問題であると考えている．

遠山先生も，かけ算の順という問題に関して,「なぜその順にかけたのか，その考えを問え」と言われる．その通りだと思う．先生の水道方式も，根拠を問いそれに答えるという所からはじまったと考えると，よくわかる．

そのためには 3 × 5 を 3 を 5 回たすことであることも教えた方がよい．こうすればたし算を知っていれば 3 × 5=15 を自分で確認することが出来る．3 × 5 = 5 × 3 も確認できる．自分で確認することが大切だ．

そのうえで，数学的内容は様々に議論し，深めていってほしい．心ある教員のなかから，子どもたちに何ごとであれ，その根拠を問うことを教えて欲しいと思っている．

議論の深まりを

南海　それにしても，かけ算の順序に関して 40 年間議論がくりかえされたのは驚きだ．

太郎　はじめにかえりますが，

「6 本のペンを 8 人分」とした場合, 6 × 8 が正解で 8 × 6 と書くと不正解

と言う問題で，この 6 × 8 は数と数のかけ算なのか，6 本という量と 8 という数の積なのか，1 人あたり 6 本という量と 8 人という量の積なのか，はっきりしていません．

南海　数と量についてそれぞれの思い込みが違っている可能性もある．われわれの量の定義からすれば，6 本が量で，それに 8 という数をかけている．

太郎　8 × 6 も正解だという人の見解にも，2 つあるように思います．

量と数の積は，いずれを先に書いてもよい，という量 6 と数 8 はそのままにして，書き方の問題でいう見解．

それに対して「6 本のペンを 8 人分」と「8 本のペンを 6 人分」は同じ量になるという，積の可換性を根拠にどちらでもよいという見解．

さらに,「6 本のペンを 8 人分」と「8 本のペンを 6 人分」は同じというときに，量レベルでいう見解と，6 × 8=8 × 6 という数の積の可換性を根拠にする見解．

南海　おそらくそれぞれの立場をはっきりさせれば，解決するはずなのだが，それが出来ていない．日本の数学者の責任は大きい．ここではこのような立場がさまざまにあることを指摘し，教育的には，その子にその解答の根拠を問うところからはじめようという，遠山先生の意見に賛成して，現場での議論に待ちたい．

私は，小学校の「算数」も中学・高校の数学も大学初年の数学も，そして専門的な現代の数学も，数学として高い統一性がなければならないと考えている．小学校では算数といい，中学からは数学と言い習わしてきた．しかし本当は一つの数学である.「小学数学」,「中学数学」,「高校数学」でなければならない．

一つの数学として，過程をおって何を伝えるのか，それが定まっていない．いまもってかけ算の順序問題になり，それが 40 年間くりかえされる根本には，近代日本の数学教育の理念と理論が打ち立っていないという事実が，ある．数学者の責任もまた大きい．

くりかえすが，日本の学校を取りまく環境では，そのような教員の自主的な研究の時間も空間も失われつつある．そのことは十分理解している．これも『解析基礎』からの引用であるが，次のことを指摘したい．

> 1970 年代初頭，日本の教育は大きな転換をした．このころ中央教育審議会は「人的資源の開発」ということを言いはじめる.「人的資源」とは生産活動に必要な技術をもった労働力ということそのものである．人を人として育てる教育から，人を資源として使えるようにする教育への転換である．この能力を開発するのが教育だというわけである．教育を生産活動の一部とする考え方が表面化する．人的資源という観点からすれば，現実を批判するよりも，ひたすら従順に働く労働者のほうが都合がよいことになる．現実批判力より感性的理解による現状肯定の教育．この方向性はいまも変わっていない．数学の教科書の変転の背景である．

この方向で，人間を育てる教育から,「人的資源」としてのつまりは金儲けの資源として人を見る教育へ，突き進んできた．学校はいろいろな意味で荒廃しつつある．2013 年の今日，もはやそれはこのままでは修復できなほどになっている．

そのような状況で，教育数学の研究を，ということの空しさもわかっているつもりだ．しかしまた，であるからこそ，本来教育とはこういうことであったのではないか，ということははっきりと言っておきたい．

そのような教育が再びこの地に甦ることを願って，取りあえずこの対話のシメとしよう．

1.1.5　参考文献

- J.W.R. デーデキント　『数について』，河野伊三郎訳（岩波書店，1961）

- ヘルマン・ワイル　『数学と自然科学の哲学』（岩波書店）
- 高木貞治　『新式算術講義』（ちくま学芸文庫）
- 高木貞治　『数学雑談』（共立出版）
- 高木貞治　『数の概念』（岩波書店）
- 田村二郎　『量と数の理論』（1978 年，日本評論社）
- 足立恒雄　『数とは何か　そしてまた何であったか』（2011 年，共立出版）
- 遠山啓　『教師のための数学入門　関数・図形編』 (国土社，1965)
- 遠山啓, 銀林浩　編集『量と構造』(「数学教育現代化の基礎〈1〉，国土社，1971)
- 遠山啓, 銀林浩　編集『関数・空間』(「数学教育現代化の基礎〈3〉，国土社，1971)
- 銀林浩　『量の世界―構造主義的分析』(麦書房，1975)
- 遠山啓　『量とはなにか I』(「遠山啓著作集数学教育論シリーズ〈5〉，太郎次郎社，1981)
- 遠山啓　『量とはなにか II』(「遠山啓著作集数学教育論シリーズ〈6〉，太郎次郎社，1981)
- 銀林浩　『量の世界－構造主義的分析』(教育文庫〈8〉，麦書房，1975)

1.2　自然数と数学的帰納法

2000.11.12

1.2.1　自然数の定義

1.2.1.1　自然数

南海　「自然数」は，人が成長する過程の最初に習得する数である．

3 枚の皿に 3 個のみかんをひとつずつおいていけば，皿が余ったり，みかんが余ったりすることなくちょうど 1 枚の皿にみかんが 1 つずつおける．このような経験のなかから 3 枚の皿と 3 個のみかんは何かが「同じ」だ，と気づく．何が同じなのかと考えて,「数」が同じだ，と知っていく．「3 枚の皿」と「3 個のみかん」が同じ「3」であることが分かるとき人間は自然数「3」を知る．

このように，個別のものの形や質などに規定された具体的な量から，個別の性質を捨て一般的な「数」を抽象する力を，人間は長い時間をかけて身につけた．数の発見は，実際はもっと生産に直結した場で起こったに違いない．毎朝放牧した羊と，夕べに帰ってきた羊が同じだけあるのかどうか，数を知らなければどのように判断するか．羊が小屋を出るたびに石をひとつ並べていく．帰ってきたときは，羊が小屋に入るたびに石をひとつ除く．こうしてちょうど最後の 1 頭が戻ったとき最後の石が除かれれば，増減がなかったことがわかる．石を並べることが長く続いた後，人は数を発見したのだ．このようにして人間のものになった数が，親から子へと伝えられて，子供は数を身につける．大人からの伝達の作用によって，人類の長い歴史が凝縮されて，子供のなかで反復されるのだ．

みかんのように数えられるものの個数がつかまれたなら，つぎは「水がバケツに 3 杯ある」などのように連続量をはかる単位が生まれ，単位の個数として水の量をつかむことができるようになったと考えられる．

史織　考えてみれば不思議なことです．

南海　このようにして見いだされた「自然数」は，数えるという行為と一体である．数えるという行為とは，このものを認識し，その次のものを確認して，自然数によって指示される抽象的な数との間に対応をつけていく，ということにある．最後に対応した数をその集合の要素の個数と認識する，ということである．このことを定式化して自然数を改めて数学の対象として定義しなおす．それが自然数の公理である．

1.2.1.2　ペアノの公理

南海　自然数は，数のなかでもっとも根源的なものであるから，あらゆる数の存在を前提とせずに，構成しなければならない．そしてそれは可能なのだ．近代数学では集合とその構造を定義することで，数学としての対象を定義する．それが次に紹介するペアノ (G.Peano,1858-1932) による「公理」である．

ペアノの公理　次の性質を持つ集合 N を考える．

(i) 1 という要素がある．

(ii) 集合 N の要素 x に対し集合 N の要素 $x+1$ を対応させる規則が定まっている．

(iii) $x+1=y+1$ ならば $x=y$ である．

(iv) 要素 $x+1=1$ となる要素 x は存在しない．

(v) 集合 N は (i)(ii)(iii)(iv) を満たす最小の集合である．つまり N のどのような真部分集合も (i)(ii)(iii)(iv) を満たさない．

このとき N を自然数の集合といい， N の要素を自然数という．

史織　これは要するに，1 が最初で，その後はつねに次の要素があって，それ以外の余分なものはない集合を自然数という，ということですよね．このような集合は本当に存在するのですか．

南海　確かに存在する．

$$\{1,\ 1+1,\ (1+1)+1,\ ((1+1)+1)+1,\cdots\}$$

である．ここで (　)+1 は，上の公理で作られた N の要素を (　) 内に記し，さらにそれに (ii) の対応を施すことを意味する．

この公理は，人間の「数える」という行為をそのまま定式化したものであるが，これが自然数論の基礎となるには色んな検証が必要である．ここでは数学基礎論には立ち入らないが，数学基礎論では，この公理体系は矛盾が起こらないことが示されている．さらにこの公理はわれわれの自然数に対する素朴な理解と合致し，同型なものはひとつしかない．体系に矛盾がないことと，同じ型をしたものがただひとつであること，これで数学研究の対象が明確に定義できたのである．

無矛盾性の証明は難しい．ここでは数学的帰納法の原理と呼ばれる自然数の基本性質と，それを用いて自然数の体系はすべて同型であることを示そう．

1.2.2　数学的帰納法

ここで「昇列」を定義する．N の部分集合 K で

$$x\in K \quad\Rightarrow\quad x+1\in K$$

が成り立つとき K を「昇列」という．N の要素 a を含むすべての昇列の共通部分を $K(a)$ とする．これは a からはじめて $+1$ の規則で作られた要素だけの集合である．

定理 2 自然数の集合 N は，次の性質をもつ．

(i) 1 を含む昇列はひとつしかなく $N=K(1)$ である．

(ii) **数学的帰納法の原理** 自然数の集合 N の部分集合 M において

(i) $1\in M$

(ii) $k\in M\Rightarrow k+1\in M$

が成り立てば $N=M$ である．

(iii) 1 以外のすべての要素 x は $x=z+1$ となる要素 z をただ一つもつ．

(iv) N の任意の空でない部分集合 M には，$m\in M$ で $M\subset K(m)$ となるものがただひとつある．

証明

(1) 1 を含む任意の昇列 K に対し，N において x に $x+1$ を対応させる規則を K に制限した規則を考える．定義より，$k \in K$ のとき $k+1 \in K$ であるから，これは K の要素 k に $k+1$ を対応させる規則となる．この対応の規則によって， K は 自然数の公理 (i)(ii)(iii)(iv) を満たす．N の最小性から $N = K$ である．よってまた 1 を含む昇列はすべて N に一致する．

(2) M は 1 を含む昇列である．ゆえに (1) から $N = M$.

(3) N において，a にはじまり $+1$ の操作を繰り返して b に至る系列はただひとつである．二つあれば，そのいずれかの系列を定めその中にのみ存在する要素を N から取り除いても，N は 1 を含む昇列となり N の最小性に反するからである．N の要素 a で 1 でなく，しかも $a = x+1$ となる要素 x が存在しない要素の集合を Q とする．

$$N' = N - Q$$

とする．N' の任意の要素 x に対して $x+1 \notin Q$ つまり $x+1 \in N'$ である．ゆえに N' は 1 を含む昇列であるから $N' = N$ ．つまり Q は空集合であり，1 以外で直前の要素の存在しない要素はない．

次に $z \neq z'$ かつ $z+1 = z'+1$ となるものがあるとする．二つの系列

$$\begin{aligned} l &: 1 \to 1+1 \to \cdots \to z \to z+1 \\ l' &: 1 \to 1+1 \to \cdots \to z' \to z'+1 = z+1 \end{aligned}$$

が存在し，系列の唯一性に反する．ゆえに直前の要素はただひとつである．

(4) $1 \in M$ なら $M = K(1)$ なので $1 \notin M$ とする．

$$R = \{x | M \subset K(x)\}$$

とおく．$1 \in R$ なので R は空でない．$a \in R$ であるが $a+1 \notin R$ であるような要素 a が R に存在する．なぜなら，もしなければ R が N 自身になる．ところが $x \in N$ に対して $x \notin K(x+1)$ だから $\bigcap_{x \in N} K(x) = \emptyset$ である．つまり

$$M \subset \bigcap_{x \in N} K(x) = \emptyset$$

となって M が空集合になるのである．$M \not\subset K(a+1)$ なので $m \in M,\ m \notin K(a+1)$ が存在する．つまり

$$m \in K(a),\ m \notin K(a+1)$$

となり $a = m$ ，つまり $M \subset K(m)$ となる m が存在した．m と m' と二つあれば $m \in K(m')$ かつ $m' \in K(m)$ となり，m から m' をへて m にいたる系列ができる．m から m にいたる系列が 2 つでき，系列がただ一つであることに反する． □

このように構成された集合 N の要素は

$$1,\ 1+1,\ (1+1)+1,\ \cdots,$$

という形をしている．これを表記の簡単のために

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

と書くのである．

史織　なぜ先の定理が数学的帰納法の原理 とよばれるのですか．

南海　数学的帰納法とは次のような証明方法であった．$p(n)$ を自然数 n に関する条件とする．

(1) $p(1)$ が成立する．

(2) $p(k)$ が成立するなら $p(k+1)$ が成立する．

(3) (1), (2) より, すべての自然数 n に対して $p(n)$ が成立する．

南海　数学的帰納法を言いかえると，条件 $p(n)$ の真理集合，つまり $p(n)$ が真となるような n の集合が，自然数全体であることを示すということになる．

史織　集合の記号を用いると条件 $p(n)$ の真理集合 M は

$$M = \{n \mid p(n) \text{ が成立},\ n \in N(\text{自然数の集合})\}$$

となります．自然数の性質によって，M が N と一致するのですね．

数学的帰納法の (1) は $1 \in M$ を示している．(2) は $k \in M$ なら $k+1 \in M$ を示している．つまり M は 1 を含む昇列なので $M = N$ (自然数の集合) である．条件が成立する n の集合 M が自然数全体となり，すべての自然数 n でなり立つ，つまり (3) の成立がわかる．これが数学的帰納法です．

南海　そのとおり．自然数の集合というのは,「1 があって k が要素であれば $k+1$ も要素である」ような集合でいちばん小さいもの，として特徴づけられる．このように数学的帰納法が証明の方法として成立するのは，自然数の性質が土台にあるからである．

1.2.3　同型定理と演算

南海　自然数の公理を満たすものがいくつもあっては困る．しかし実は一つしかないことが示される．

定理 3 自然数の集合 N はすべて同型である．つまり二つの自然数の集合 N と N' があるとする．N と N' のあいだの 1:1 対応 $f(x)$ で

(1) $f(1) = 1$

(2) $f(x+1) = f(x) + 1$

となるものがある．

証明　$N_n = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ の N' への埋め込み（中への同型対応）$f_n(x)$ を数学的帰納法で定める．

(i) $n = 1$ のとき $f_1(1) = 1$ とする．

(ii) $f_k(x)$ が定まったとき

$$f_{k+1}(x) = f_k(x)\ (x = 1,\ 2,\ \cdots,\ k),\ f_{k+1}(k+1) = f_k(k) + 1$$

とする．一対一であることは明らか．

つまり，次のように $f_n(x)$ を構成する．

$f_k(x)$ は集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$ から N' への写像．これができたとき，これを用いて $\{1, 2, \cdots, k, k+1\}$ から N' への写像 $f_{k+1}(x)$ を，$1, 2, \cdots, k$ に対しては $f_k(x)$ と同じ，$k+1$ に対して $f_{k+1}(k+1) = f_k(k)+1$ で定める．この $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ に対して

$$f(x) = f_x(x)\ \ x \in N$$

と定める．作り方から $f(N)$ は N' における 1 を含む昇列である．

$$\therefore \quad f(N) = N'$$

このとき

$$f(x+1) = f_{x+1}(x+1) = f_x(x) + 1 = f(x) + 1$$

であるから題意を満たしている． □

1.2.3.1 自然数の和・積

南海　この自然数の集合には，和と積という演算が定義される．

和の定義 $x,\ y \in N$ に対して，$x + y$ を作る演算を次のように定める．

(1) $y = 1$ なら $x + y = x + 1$.

(2) $y > 1$ のとき

$$x + y = (x + (y - 1)) + 1$$

このとき $x + y$ がただ一通りに決まり次の性質を持つ．

(i) 結合法則:$(x + y) + z = x + (y + z)$

(ii) 交換法則:$x + y = y + x$

南海　これはゆっくりやればできるので，やってみてほしい．およそこのようにして，自然数は厳密に定義される．それから有理数が構成され，実数，複素数と進んでいくのだ．

史織　このようにある意味では単純に定義される自然数が，因数分解をもち，素数というものがあり，いろんな未解決の問題があるというのは不思議です．

南海　まったく同感．

1.3　実数とは何か

＞ 2000.8

1.3.1　実数の集合は可付番でない

史織　自然数の集合はよくわかりました．有理数は，分数で表される数として理解できます．しかし，実数はどのようにして構成されていくのかよくわかりません．有理数から無理数を作るのなら $x^2 = 2$ のような方程式を考えればいいと思うのですが，それでは円周率 π や自然対数の底 e が出てきません．確か，これらの数は有理数係数の代数方程式の根にはならないと読んだことがあります．

南海　実数を構成するためには,「連続性」を考えなければならない．日本の高校の教科書では証明なしに次のことが成り立つとされる．

閉区間で連続な関数は，その閉区間で最大値および最小値をもつ．

なぜそんなことが保証されるのか，と考えたことはないだろうか．

史織　当然成り立つものとして考えていますが，確かにこれはその後に習う「中間値の定理」や,「ロルの定理」,「平均値の定理」の基礎になっています．

南海　ときどき，高校数学の土台になっているのに証明なしに使っていることを，考えてみるのはよいことだ．もちろん，数学の歴史でもはじめから実数について今日のような理解があったわけではない．デデキント (Julius Wilhelm Richard Dedekind，1831〜1916）やカントール（Georg Cantor，1845〜1918）らによって実数論や集合論が開拓された．岩波文庫にはデデキントの『連続性と無理数』の翻訳がある．高校生が読んですべてがわかるわけではないが，しかし読める．デデキントがどのようなところから実数論を考えていったかよくわかる．数学は，ある面ではそういう厳密性とは独立に進み，あるときにはその理論を支えるために厳密性を求めて進み，こうして相互に発展してきた．

連続関数の閉区間における最大値，最小値の存在を保証する根拠となっているのは，実数の連続性といわれる性質だ．実数の構成についていくつか考えてみよう．

日本の高校でも「集合」の概念は習う．しかし，実際に扱うのは要素の個数が有限である場合がほとんどだった．実は，集合は無限集合を考えるとき，面白く不思議なことが起こる．自然数の集合 N，正の偶数の集合 A という 2 つの集合を考えよう．

$$A \subset N,\ A \neq N$$

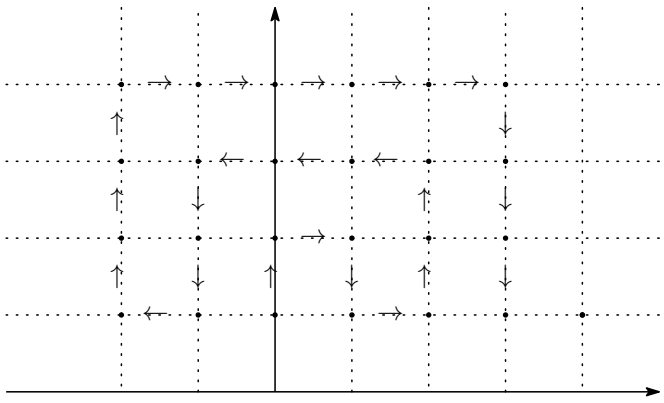
である．しかし

$$n \in N \quad \text{に対し} \quad 2n \in A$$

を対応させると，これは N の要素と A の要素の間の 1 : 1 の対応だ．つまり N と A の要素は「同じだけ」ある！　部分が全体と等しい？　無限集合ではこのように部分集合の各要素と全体集合の各要素の間に 1 : 1 の対応ができることがある．

史織　有理数と自然数の間にも 1 : 1 対応があるということを聞いたことがあります．対応の仕方は覚えていません．

南海　Q を有理数の集合としよう．次のようにすると，N の各要素と Q の各要素の間に $1:1$ の対応が付けられる．第 1 象限と第 2 象限の格子点を $(0,\ 1)$ から始めて図の矢印のようにとっていく．格子点 $(m,\ n)$ に対して有理数 $\dfrac{m}{n}$ を対応させると有理数の列ができる．



$$\frac{0}{1}\to\frac{0}{2}\to\frac{1}{2}\to\frac{1}{1}\to\frac{2}{1}\to\frac{2}{2}\to\frac{2}{3}\to\frac{1}{3}\to\frac{0}{3}\to-\frac{1}{3}\to-\frac{1}{2}\to\cdots$$

このような有理数の列から既約なものだけを選ぶと，

$$\frac{0}{1}\to\frac{1}{2}\to\frac{1}{1}\to\frac{2}{1}\to\frac{2}{3}\to\frac{1}{3}\to-\frac{1}{3}\to-\frac{1}{2}\to\cdots$$

という有理数の列ができる．すべての有理数はこのどこかに登場する．この列にはじめから順に番号を打つと，確かに自然数と有理数の間に $1:1$ の対応ができる．このように自然数と $1:1$ の対応が作れる無限集合を「**可付番**である」という．

ところが，である．カントールは「実数の集合は可付番でない」ことを示したのだ．カントールは三角関数の級数の研究から集合論を創始．また，位相空間論の基礎を築いた．現代的な数学のはじまりとなったものだ．それがまた背理法で示されるのだ．

区間 $[0,\ 1]$，つまり $0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数の集合が可付番であると仮定する．つまり $0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数全体に番号を付けて次のようにできるとする．

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_n,\ \cdots$$

このような実数 α はすべて十進小数で

$$\alpha=0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

と表される．だからそれらに番号が付けられれば順に並べて

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1 & = & 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\cdots a_n^{(1)}\cdots\\
\alpha_2 & = & 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots a_n^{(2)}\cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha_n & = & 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\cdots a_n^{(n)}\cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

のようにできる．ここに $a_i^{(j)}$ は j 番目の小数の，小数第 i 位の数を表している．

この対角線に並んでいる数 $a_n^{(n)}$ に対して数 b_n を次のように作る．

$$b_n = \begin{cases} 1 & (a_n^{(n)} \neq 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (a_n^{(n)} = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

こうして作った数 b_n から小数 β を次のように定める．

$$\beta = 0.b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$$

すると $0 \leqq \beta \leqq 1$ である．しかし β はどの α_n とも一致しない．なぜなら α_n と β は第 n 位が必ず異なるからである．これは α_n が $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数の全体という仮定と矛盾した．つまり $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数の集合は可付番でないことが示された．この背理法を「カントールの対角線論法」という．実数は有理数よりこの意味でたくさんあるのだ！

1.3.2 実数の構成と連続性

史織　このカントールの背理法から逆にわかってきました．つまり実数というのは十進法で表したとき，有限小数と無限小数の全体である，ということですね．

南海　大変鋭い．実数を有理数の世界から構成する糸口がここにある．無限小数とは要するに有限小数でできた数列の極限だ．

史織　今は有理数から実数を構成することが問題なので，有理数からできた数列 $\{a_n\}$ を考える．それが収束するときその極限の集合を実数とする．有理数そのものは数列 $\{a_n\}$ のすべての項をおなじ有理数にしておけばよいので，この集合は有理数を含みます．これで実数が得られる，というのはどうでしょうか．

南海　集合そのものはその通りだ．しかしこの集合が実際に四則演算をもち，それが今までの演算と同じであることを示すには，もう少し分かりやすく構成しなければならない．

史織　そうか．単に極限をもつというだけでは，同じ値に収束する数列がいくつもあり得る．

南海　そこで次のようにしよう．今有理数の集合 Q を基礎にする．

(1) 各項が有理数からなる数列 $\{a_n\}$ が，任意の正の Q の要素 c に対して，ある番号 n_0 で $n > n_0$ のとき $-c < a_n < c$ となるものが存在するとき，$a_n \to 0$ と表し，0 に収束するという．

(2) $a_n - b \to 0$ となる b が存在するとき，$a_n \to b$ と表し a_n の極限という．極限は存在してもただ一つであることを示すことができる．

(3) 任意の正の Q の要素 c に対して，ある番号 n_0 で $m,\ n > n_0$ のとき $-c < a_n - a_m < c$ となるものが存在するとき，数列 $\{a_n\}$ を基本列という．

(4) 有理数 b に収束する数列は基本列である．逆に有理数からなる基本列は，有理数に収束するとはかぎらない．そこで集合 H を有理数からなる基本列 α の集合とする．H に属する 2 つの基本列 $\alpha = \{a_n\},\ \beta = \{b_n\}$ が $a_n - b_n \to 0$ のとき，$\alpha \sim \beta$ と書き表す．集合 H においてこの関係「$\sim$」で結ばれたものを一つの部分集合にまとめ，これを類 (class) と呼ぶ．こうしてできる類の集合を R と書き，**実数**という．

集合 A の要素の間に $\alpha \sim \beta$ という関係で

(i) $\alpha \sim \alpha$

(ii) $\alpha\sim\beta$ なら $\beta\sim\alpha$

(iii) $\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma$ なら $\alpha\sim\gamma$

が成り立つとき,「〜」を「同値関係」という.

同値関係があると，同値なものを「同一視」することができる．同値なものをひとまとめにしてしまうのだ.

例えば，整数 m と n が $m-n$ が 7 の倍数になるとき $m\sim n$ と定めると，これは同値関係だ．そしてこの同値関係で同値なものをひとまとめにすると….

史織　7 で割った余りが同じものを一つの集合にするということですね.

南海　それらの集合のことを「同値類」という．この場合は同じ余りの集合なので「剰余類」ともいう.

史織　$7k+1$ と書けるものはすべて同値になるので，結局整数の集合が 7 で割った余りの違いによって 7 つの部分集合に分けられます．この部分集合の集合は 7 つからできていて，余りの集合と同じです．つまり，剰余類は 7 つあって，剰余類を集めると 7 で割った余りの集合と同じものができます.

南海　これを，整数を 7 で割った余りで類に分けるという．類とは部分集合で，7 で割った余りが等しいものからできている．類は 7 つある．これらの類を $\overline{0}$ や $\overline{1}$ 等と，その類に属する要素に上線を付けたもので表す.

$$\overline{3}=\overline{10}=\overline{-4}=\{\cdots,\ -11,\ -4,\ 3,\ 10,\ \cdots\}$$

要するに 7 で割って 3 余る整数の集合だ.

南海　有理数からなる数列の間に定義された先の〜も同値関係である.

史織　基本列の集合を，差が 0 に収束するとき同値であるとして，この同値関係で同じものを類にまとめると，まとめられた一つ一つの類が実数の一つ一つになるのですね.

南海　基本列の集合 H からこの同値関係で類に分けた類の集合が G だ．$\alpha\in H$ に対して，$\overline{\alpha}\in G$ となる．もちろん，2 つの基本列 α と β が定める G の要素 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ に対してその和 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ や積 $\overline{\alpha}\overline{\beta}$ をどのように定めるのか．またべき $\overline{\alpha}^{\overline{\beta}}$ も定めなければならない．ここではそれはしないが，関心があれば何か読んでほしい.

これがカントールの方法だ．そして基本列が必ず極限をもつことを「完備性」といい，実数が完備であることを，実数の連続性という.

史織　どんな参考書がありますか.

南海　いくらでもある．私が高校のときに読みかけたのは，大阪教育大学の黒崎達先生の『必修教程数学原論』だった．いまこれは槙書店から改訂新版が出ている．もちろん高木貞治『数の概念』(岩波書店) は古典だ.

史織　実数の定義は違う方法もあるのですか.

南海　デデキントによる「切断の方法」だ．有理数を大小関係で 2 つに分ける分け方の全体が実数になる，というものだ．例えば，$\sqrt{2}$ があれば，それより大きい有理数とそれより小さい有理数に分かれる.

有理数 Q が 2 つの集合 A と B にわかれ，A の任意の要素 a と B の任意の要素 b の間につねに $a<b$ が成り立っていれば，A と B の境目として実数が定まる.

有理数 Q が 2 つの集合 A と B にわかれ，A の任意の要素 a と B の任意の要素 b の間につねに $a<b$ が成り立っているとき，これを $<A|B>$ と書いて「切断」と呼ぶ．切断の集合が実数というわけだ.

史織　実数が先にあって有理数の切断があるのではなく，有理数の切断によって実数を定めるのですね．カントールとデデキントの 2 人の方法で同じものができるのですか．

南海　できる．先に紹介した黒崎先生の本には確か「2 つの実数の定義は同値である」ということが書いてあった．高校生の私にその証明のすべてが理解できたわけではなかったが,「定義の同値性」ということにひどく感動したのを覚えている．

史織　実数がこのように完備な集合として構成されることがわかりました．実数が完備であるから，閉区間で定義された連続関数がつねに最大最小をもつのですね．

南海　そうなのだが，一つ一つの論証を積み重ねるのは簡単ではない．それはここではせずに，結論の概略のみを述べよう．先の実数の定義から次のことが成り立つ．閉区間 $I_n = [a_n,\ b_n]$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ において，

(i) $I_{n+1} \subset I_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$

(ii) n が大きくなるとき区間の幅 $b_n - a_n$ がいくらでも小さくなる．

このとき，これらの区間に共通な要素がただ一つ存在する．

これを**区間縮小法**というのだが，実数とはこのような集合としても特徴づけられる．以下は次のような過程で，閉区間で定義された連続関数に最大値と最小値が存在することが示される．

(1) x_0 が実数の部分集合 S の集積点であるとは，x_0 のどれだけ近いところにも，S の要素が無数に存在することをいう．実数の部分集合で要素が無数にあり，かつ有界な部分集合には集積点が存在する．

∵　S の要素は区間 $I_0 = [a,\ b]$ の中にあるとする．この区間を 2 等分するとそのいずれかには S の要素が無数に存在する．無数に存在する区間を I_1 とする．I_1 を 2 等分する．そのいずれかには S の要素が無数に存在する．無数に存在する側を I_2 とする．この操作をくりかえす．区間の長さはいくらでも小さくなる．したがってすべての区間に共通な要素 x_0 が存在する．x_0 を含む区間 $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ はいくらでも小さくなる．ゆえに x_0 のどれだけ近いところにも，S の要素が無数に存在する．つまり x_0 は集積点である．

(2) 実数の部分集合 S が閉集合であるとは，S のすべての集積点が S に属することである．閉区間は閉集合である．実数の有界な閉集合 S には最大値と最小値が存在する．

∵　有理数を S のすべての要素より大きい要素からなる部分集合と，その補集合に分ける．これは有理数の切断なので，実数 a がさだまる．$a < x$ なる x は S に属さず，$x < a$ なる x で十分 a に近いものは S に属する．a が S の要素であることを示す．

S の任意の要素を a_0 とする．$a_0 < x < a$ を中央で 2 つに分け，a に近い側から a_1 をとる．同様の操作をくりかえし数列 $\{a_n\}$ を定める．途中で a が選べれれば a は S の要素である．

この数列 $\{a_n\}$ は a との距離が 0 に近づくので基本列である．その極限は a でありかつ S が閉集合なので a は S の要素である．a が最大値である．最小値も同様．

(3) $f(x)$ を実数の閉区間 I で定義された連続関数とする．$f(x)$ の値域には最大値と最小値が存在する．

∵　$f(x)$ の値域を J とする

$$J = \{f(x) \mid x \in I\}$$

J は有界閉集合である．なぜか．有界でないとする．したがって

$$2f(a_n) < f(a_{n+1}) \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる無限数列 $\{a_n\}$ が I に存在する．I は閉区間だから $\{a_n\}$ の集積点は I に属する．その一つを x_0 とする．数列 $\{a_n\}$ の部分列で x_0 に収束するもの $\{a_{l_n}\}$ がとれる．$f(x)$ は連続であるから

$$\lim_{n\to\infty} f(a_{l_n}) = f(x_0)$$

ところが $f(a_{l_n}) > 2^{l_n} f(a_0)$ なのでこれは矛盾である．

実数を J のすべての要素より大きい要素からなる部分集合と，その補集合に分ける．これは有理数の切断なので，実数 b が定まる．(2) と同様に b に収束する J 内の数列 $\{b_n\}$ が存在する．$b_n = f(a_n)$ となる数列 $\{a_n\}$ をとる．$\{a_n\}$ は I において集積点 x_0 をもつ．数列 $\{a_n\}$ の部分列で x_0 に収束するもの $\{a_{l_n}\}$ をとる．$f(x)$ が連続なので

$$\lim_{n\to\infty} f(a_{l_n}) = f(x_0)$$

$\{b_n\}$ は収束列なのでその部分列も同じ極限に収束する．つまり $f(x_0) = b$.

よって $b \in J$ となり J に最大値が存在した．最小値についても同様である．

1.4　数列の極限と e の定義

2003.11.24

1.4.1　数列の極限とはさみうちの原理

史織　数列 $\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$ が

$$a_n < b_n < c_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたしている.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \quad \cdots ①$$

なら

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \quad \cdots ②$$

となる．これが「はさみうちの原理」ですが，この証明を次のように考えていました.

$a_n < b_n < c_n$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n \leqq \lim_{n\to\infty} c_n$$

$$\therefore \quad \alpha \leqq \lim_{n\to\infty} b_n \leqq \alpha$$

つまり

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

でも,「はさみうちの原理」というにしては簡単すぎるし，これで証明になっているのでしょうか.

南海　ともすればこのように考えやすいが，これは「はさみうちの原理」の証明としては不完全だ.

一般に，極限の入った等号 ② は何を意味しているのかといえば

左辺の極限が存在し，その値が右辺に等しい.

ということだ.

史織　すると，私の証明では，数列 $\{b_n\}$ が収束すること，極限の存在の証明が抜けているのですね．でもそれはどのようにして示せばよいのですか.

南海　そういうときは「定義にかえれ」だ．数列 $\{a_n\}$ が値 α に収束するとはどういうことか.

史織　「n が大きくなれば a_n の値が α に近づく」ということです.

南海　「近づく」というのはどういうことか.

史織　「数直線上の距離が小さくなる」，ですか?

南海　そうだ．つまり $|a_n - \alpha|$ がいくらでも小さくなるということが，数列 $\{a_n\}$ が値 α に収束するということの定義だ.

史織　でも,「いくらでも小さくなる」が「0 に収束する」ということなら,「収束」を定義するのに「収束」を用いたことにはなりませんか.

南海　うーん．それは鋭い質問だ.「いくらでも小さくなる」といったあいまいな言葉を使わずに収束することを定義しなければならない．いろんな人もこのようなことを考えた．そこで考え出されたのが次のような定義だ．これは「実数の連続性と代数学の基本定理」で同じことが言われているのだが，改めて数列「収束」を定義しよう.

定義 4 (数列の収束) 数列 $\{a_n\}$ と数 α がある．任意の正の実数 ϵ に対して，番号 N で

$N < n$ であるすべての n について $|a_n - \alpha| < \epsilon$

となるものが存在するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在し，極限値が α であると定める．

「任意の正の実数 ϵ に対して，番号 N で…となるものが存在」というところは「どのような小さい」正の実数 ϵ が指定されても，それに対して,「つねに」番号 N が存在する，ということなのだ．そのような副詞を省いて論理の骨子で言うと先のようになるのだ．

この定義がわかりにくいときは例で考える．数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ とする．これはもちろん 1 に収束する．ϵ を $\dfrac{1}{100}$ にして，ある番号 N より大きい番号では

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{100}$$

にせよ，といわれれば，

史織　(少し考え)$N = 100$ ですね．そうか，$\dfrac{1}{10000}$ より小さくしたければ $N = 10000$ だ，どんなに小さい ϵ でも，つねに番号 N は存在しますね．では，$a_n = n \sin \dfrac{1}{n}$ も 1 に収束しますが，

$$\left| n \sin \frac{1}{n} - \alpha \right| < \frac{1}{100}$$

となると，どうなるのでしょう．

南海　いろいろ考えるな．一般には具体的に N を求めるのは簡単でない．

史織　実際に N を求めるということではなく，N が存在するということで,「収束」を定義するのですね．この「収束」の定義って「いくらでも」とか「近づく」とかのよくわからない言葉が入っていませんね．

南海　そうなのだ．その代わりに「任意の」という論理の言葉が入る．これがいわゆる $\epsilon - \delta$ 論法というもので，大学初年に習う解析の最初の関門だが，このように考えれば自然な発想であることがわかる．

史織　今は δ ではなく N でしたが．

南海　$\epsilon - \delta$ 論法は次のように $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ を定義する．

定義 5 (関数の収束) 関数 $f(x)$ と数 α がある．任意の正の実数 ϵ に対して，正の実数 δ で

$|x - a| < \delta$ である x について $|f(x) - \alpha| < \epsilon$

となるものが存在するとき，極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し極限値が α であると定める．

史織　これもわかります．

南海　いずれにせよ，このような厳密な定義があるということを知ったうえで，数列 $\{a_n\}$ が数 α に収束するとは，n が大きくなるとき，絶対値 $|a_n - \alpha|$ がいくらでも小さくなることと理解すればよい．

この定義のもとではさみうちの原理を証明しよう．条件 ① のもとで，$|b_n - \alpha|$ がいくらでも小さくなることを示せばよい．

$$\begin{aligned} |b_n - \alpha| &= |b_n - a_n + a_n - \alpha| \\ &\leqq |b_n - a_n| + |a_n - \alpha| = b_n - a_n + |a_n - \alpha| \\ &< c_n - a_n + |a_n - \alpha| \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\{c_n - a_n + |a_n - \alpha|\} = \alpha - \alpha + |\alpha - \alpha| = 0$$

なので n が大きくなると $|b_n - \alpha|$ がいくらでも小さくなる．よって数列 $\{b_n\}$ は α に収束する．つまり

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

史織　三角不等式ですか．

南海　そう．そこで注意を一つ．

$$0 < |a_n - 1| < \frac{1}{2^n}$$

などで，「$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$ なのではさみうちの原理によって $\lim_{n\to\infty}|a_n - 1| = 0$」と書く人がいるが，これは収束の定義そのものでさみうちの原理によるのではない．

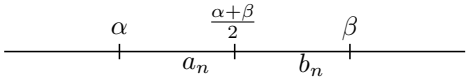
はさみうちの原理は $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ のいずれもが定数でないときに両方が同じ値に収束すれば，$\{b_n\}$ も収束してその極限値が α であることを示すものである．これはしっかりと押さえておきたい．

南海　せっかく収束を厳密に考えたのだから，次のことも示しておこう．2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がすべての n で $b_n < a_n$ を満たし，各々が収束すれば

$$\lim_{n\to\infty} b_n \leqq \lim_{n\to\infty} a_n$$

史織　それぞれの極限を α, β とする．$\alpha < \beta$ であると仮定する．$\dfrac{\beta - \alpha}{2}$ より小さい ϵ をとる．N が存在して $N < n$ に対して $|\alpha - a_n| < \epsilon$，$|\beta - b_n| < \epsilon$ となる．このとき図のように $a_n < b_n$ なので，条件と矛盾した．

南海　これでよい．



1.4.2　自然対数の底

史織　自然数の底 e について質問します．本来は

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \cdots ③$$

で e を定める．そして

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

を示す．ところがこの方式では数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ の収束や，また

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

を示すのが簡単でない．それで最近の日本高校でははじめから第一の関数の極限を，収束性の証明なしに定義にしている．このように聞きました．

では収束の定義がはっきりすれば ③ の左辺の収束が証明できるのでしょうか．

南海　いやそれほど簡単ではない．「実数とは何か」で話した実数の連続性を根拠にしなければならない．次のことが示される．

定理 4 実数からなる数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_n < a_{n+1}$$

かつ，すべての n に対して，$a_n < M$ となる実数 M があるとする．このとき数列 $\{a_n\}$ は収束する．

このような数列を「単調増加有界数列」という．単調減少で下に有界なときは，すべての項の符号を逆にして考えれば「単調増加」で上に「有界」な数列になる．したがってこの定理を一言でいえば,「単調有界数列は収束する」ということである．

「実数の連続性と代数学の基本定理」で，閉区間で定義された連続関数には最大値と最小値があることの証明の概略を示した．その証明の概略のなかで，閉区間内に無数の点の集合 S があれば，S には集積点が存在することを，概略で示した．集積点 x_0 とは，x_0 を含むどのように小さい区間をとっても，その区間のなかに S の要素が無数に存在するような点である．

証明　「単調有界数列は収束する」ことの証明は次のように論証される．

(i) 数列 $\{a_n\}$ の各項はすべて閉区間 $[a_1,\ M]$ に含まれるので，集積点 α が存在する．

(ii) すべての n に対して $a_n < \alpha$ である．仮に，$\alpha \leqq a_n$ という項があるとする．数列 $\{a_n\}$ は単調増加なので a_n より小さい値の項は $n-1$ 個で有限である．したがって α を含む区間 $[a_1,\ a_{n+1}]$ には n 個の項しか存在しない．

(iii) 任意に与えられた正の数 ϵ に対して，α を含む長さ ϵ の区間 I をとる．I には S の要素が存在する．$a_N \in I$ とする．単調増加性から $n > N$ に対するすべての a_n は $a_N < a_n < \alpha$ となる．この範囲の n について $|\alpha - a_n| < \epsilon$ が成り立つ．

よって数列 $\{a_n\}$ は α に収束する．　□

定理 5

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

とする．数列 $\{a_n\}$ は収束する．

証明　数列 $\{a_n\}$ が単調増加で有界であることを示せばよい．

二項定理から

$$a_n = 1 + {}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n} + {}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^n}$$

である．$k \geqq 2$ のときその一般項は

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_k\frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} < \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3 \end{aligned}$$

また

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

であるから，a_n と a_{n+1} では，各 k 番目の項が a_{n+1} の方が大きく，さらに a_{n+1} は 1 項多いので

$$a_n < a_{n+1}$$

である．よって数列 $\{a_n\}$ が有界かつ単調増加なので，確かに収束する． □

この極限値を自然対数の底といい e と表すのだった．

この証明には区間縮小法による方法もある．「実数の連続性と代数学の基本定理」で紹介したが次のことが成り立つ．実はこのような共通の要素が存在することが実数の連続性に他ならないのだ．

区間縮小法

閉区間 $I_n=[a_n,\ b_n]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ において，

(i) $I_{n+1}\subset I_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

(ii) n が大きくなるとき区間の幅 b_n-a_n がいくらでも小さくなる．

このとき，これらの区間に共通な要素がただ一つ存在する．

先の証明のように二項定理を用いても出来るのだが，いろいろ役立つ便利な補題を紹介しよう．

補題 1 任意の自然数 n と相異なる正数 $a,\ b$ に関して次の不等式が成り立つ．

$$\left(\frac{na+b}{n+1}\right)^{n+1}>a^nb$$

史織　これは相加相乗平均の関係不等式です．a と b が異なるので等号は成立しません．

$$\begin{aligned}\frac{na+b}{n+1} &= \frac{a+a+\cdots+a+b}{n+1}\\ &> (a\cdot a\cdot\cdots\cdot a\cdot b)^{\frac{1}{n+1}}=(a^nb)^{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

両辺 $n+1$ 乗すれば補題が得られます．

南海　補題を $a=\dfrac{n+1}{n},\ b=1$ で用いると，$\dfrac{na+b}{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}$ なので，

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

これは数列 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が単調増加であること示している．

次に補題を $a=\dfrac{n-1}{n},\ b=1$ で用いると，

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}>\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

逆数をとって

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

これは数列 $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ が単調減少であること示している．また $a_n < b_n < b_1 = (1+1)^2 = 4$ なので

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} = a_n \frac{1}{n} < \frac{4}{n}$$

より $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ である．

したがって区間 $I_n = [a_n,\ b_n]$ に区間縮小法を適用すると，2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は同一の極限に収束することがわかる． □

史織　これで e の値もある程度計算できますね．

	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$
$n=1$	2	4
$n=2$	2.25	3.375
$n=3$	2.370	3.160
	$\cdots$	
$n=10$	2.5937	2.8531

ここで例題を一つ．

例題 1.4.1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

を示せ．

史織

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n}$$

ここで分母が 1 に収束することを示す．

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1 - {}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n^2} + {}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^4} - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^{2n}}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\left|\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right| &= \left|-{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n^2} + {}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^4} - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^{2n}}\right| \\
&\leqq {}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n^2} + {}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^4} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^{2n}} \\
&< \frac{1}{n} + \frac{1}{2!n^2} + \frac{1}{3!n^3} + \cdots + \frac{1}{n!n^n} \\
&< \frac{1}{n}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \to 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

南海　そう．

史織　以上の e の定義から

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

が結論として出てくるのですね．

$h \to +0$ のときは $x = \dfrac{1}{h}$ とおく．

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

を示せばよい．そこで…．

南海

$$n \leqq x < n+1$$

となる n，つまり $n = [x]$ をとってはどうだろうか．

史織　逆数をとって

$$\frac{1}{n} \geqq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$$

これから

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n} \leqq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

つまり

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ところが

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\end{aligned}$$

なので，まさにはさみうちの原理から

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

である．

$h \to -0$ のときは．

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

を示せばよい．同様にして $-(n+1) < x \leqq -n$ となる n をとると，

$$1-\frac{1}{n+1} > 1+\frac{1}{x} \geqq 1-\frac{1}{n}$$

これから

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \geqq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)}$$

となり先の例題からこの場合も成立する．

南海　これではじめて e^x の微分ができるのだ．

史織

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

ここで $e^h - 1 = X$ とおく．$h = \log(X+1)$ である．

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{X}{\log(X+1)} = \frac{1}{\log(X+1)^{\frac{1}{X}}}$$

$h \to 0$ のとき $X \to 0$ なので

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{X\to 0}\frac{1}{\log(X+1)^{\frac{1}{X}}} = \frac{1}{\log e} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

南海　これで自然対数の底を定義し e^x の微分を求めたので，従来通り e^x や $\log x$ に関する微積分ができる．

1.5　複素数の構成

2013.1.10/2002.11.22

1.5.1　教科書の定義

南海　複素数の話に移ろう．複素数はやはり何といっても難しい．しかし，複素数の発見は人間の大きな発見だし，実数の世界の関数なども実は複素数の世界から見てこそその本質がはっきりとわかるのだ．複素数を発見して，はじめて次のことがわかった．

(1) **代数学の基本定理**

複素数係数の n 次方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

は，常に n 個の複素数の根をもつ．ただし， k 重根は k 個と数える．

(2) **オイラーの等式**

2 つの基本定数 π, e と虚数単位 i の間に

$$e^{i\pi} = -1$$

が成り立つ．

(1) は，代数方程式を解くことに関しては複素数より大きい世界は要らない，ということを意味している．これまではそうではなかった． $2x + 3 = 0$ は，係数は整数だが，その根は整数でなく有理数だし， $x^2 - 2 = 0$ なら根は無理数だ．実数の世界まで広げなければ根がない．このように，これまでは係数が属する世界より外の広い世界を考えなければ根がないということが起こったが，複素数係数の代数方程式のすべて根は複素数の中に存在するので，代数方程式を解くということでは，これより広い数の世界は要らないのだ．このことを「複素数は代数的に閉じている」という．その意味で複素数は十分に広い世界なのだ．

もちろん高校数学では，複素数を変数とする関数は，一次分数関数 $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ や反転 $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ ，あるいはせいぜい $w = z + \dfrac{a}{z}$ 以外は出てこないし，また複素数を変数とする関数の微分積分，つまり複素関数論は，もちろん習わない．高校数学は実数の世界が中心だから，複素数が特別なものに見えるのは仕方がない面もある．

そこで例によって質問．複素数とは何か．

史織　教科書には次のように書かれています．

平方すると -1 になる新しい数を一つ考えて，これを文字 i で表し，虚数単位とよぶ．
すなわち

$$i^2 = -1$$

さらに，二つの実数 a, b を用いて

$$a + bi$$

と表される数を考え, これを複素数という．

このようになっています．でも「新しい数を一つ考えて」と言いますが，なんかこれでは「勝手に」考えただけではないのか，勝手に作っただけではないか，本当に虚数というのはあるのか，と感じます．それと bi と前提なしに書かれていますが，これは b と i をかけたものなのか，そのかけ算とはどう定義するのか，また $+$ は何と何を加えるのか，とかいろいろわかりません．新しい数を作ったのに，その定義式に出てくる+や積はまだ定義されていない，これは変ですね．また「平方すると -1 になる数」は $\pm$ と二つあるはずなのに，どちらをとってもいいのか，ということもわかりません．

南海　するどい！　確かに．この定義では，複素数が実在するという感じがしない．今回は，この問題をいろいろ考えてみよう．とりあえずこのような $a+bi$ からなる集合を C と書くことにしよう．C には四則計算などが成り立つ．

複素数の基本的な性質として何が書かれているか．

史織　はい，この定義に続いて次のことが出てきます．

(1) 複素数の相等: $a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c, b=d$

(2) 加減法 $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+i(b\pm d)$ (複号同順)

(3) 乗法 $(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) 除法 $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

(5) 共役複素数: $z=a+bi$ に対して，$a-bi$ を z の共役複素数といい $\bar{z}$ と記す．

計算の仕方は，普通に i を文字のようにして計算し，i^2 が出るたびに -1 に置きかえるということです．これで確かに四則計算は実数と同じようにできます．

性質 (1)(2) は 2 つのベクトル $(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ の相等，加減法と同じです．しかし，(3) 以降はベクトルにはないことでした．

南海　いいところに気づいた．今したことは，複素数 $a+bi$ にベクトル $(a,\ b)$ を対応づけるということだ．

史織　でも「何かよくわからない i」 を用いて定義された $a+bi$ をベクトル $(a,\ b)$ に対応させるといっても，はじめの「何かよくわからない i」ということはいっこう変わりません．

南海　そうだな．ここは発想を変えねばならない．ところで質問だが，$x^2=2$ の解は何か．

史織　$x=\pm\sqrt{2}$ です．

南海　その $\sqrt{2}$ はどんな数なのか．

史織　2 乗すると 2 になる正の数です．

南海　実際にどんな数なのか．

史織　$1.41421356\cdots$ ですが….

南海　それは本当に数として存在するのか．i はあるのかないのか分かりにくいというが $\sqrt{2}$ は大丈夫か．

史織　でも，数直線上の目盛りを打ったこの辺りに，….

南海　$\sqrt{2}$ が有理数でなく無理数だということは背理法で示される．が，そもそも $\sqrt{2}$ が存在するのかということを厳密に示そうとすれば難しい．19 世紀になっていろいろ数学の基礎が問題になってはじめて，実数の深い性質が研究され解明された．しかし，そのような基礎づけを知らなくても $\sqrt{2}$ は存在すると確信できる．それは，実数に対して数直線というモデルがあって，実数をその上の点としてとらえることができるからだ．

複素数もそのように具体的なモデルがあれば存在が確信できる．

史織　それが複素数平面ですか．

南海　結果として，複素数平面は具体物の一つなのだが，先に「何かよくわからない i」を用いて複素数 $a+bi$ を定義して，それからこれに $(a,\ b)$ を対応させたのでは，はじめの複素数がわからないままになる．そこで複素数を「何かよくわからない i」 からはじめるという構成を変えて，存在が実感できるものから構成したいのだ．ただし，構成する以上，どのようなものを作るのかはっきりしていなければならない．

1.5.2　体

そこで聞きたいのだが，**数**とは何か．

史織　「数」ですか．

南海　「数」と名のつくものはどんなものがあるか．

史織　まず，自然数，それから負の数，自然数と 0 と負の数をあわせて整数．有理数，無理数，それから有理数と無理数をあわせて実数．

南海　これはいずれも集合である．それら「数」の集合の特徴は．

史織　足し算，かけ算ができる．引き算は，自然数だと $2-5$ はもう自然数ではない．自然数の集合には属さない．逆にこれらの引き算でできる数まであわせた集合が整数といえる．割り算，整数を整数で割ると整数の集合には属さないものが出る．それらをあわせた集合が有理数．

南海　先にあげてくれたような具体的な数の集合の特徴として，四則演算が定義されるということがある．その演算の結果が再びもとの集合に属したりしなかったりする．有理数と実数は四則演算の結果が再び有理数か実数である．ある集合である演算ができ，さらにその演算の結果がその集合に属するとき，その集合はその演算に関して「閉じている」という．

そこで，四則演算で閉じている集合 K を考え，これを**体**と呼ぼう．実際には次のように体であるための条件が整理される．以下集合 K を考え， a や b で K の任意の要素を表す．集合 K が次の条件を満たすとき,「体」という．

(1) 2 つの演算，加法 $+$ と乗法 $\times$ が定義されている．つまり，K の要素 $a+b,\ a\times b$ がそれぞれ確定する．

(2) 2 つの演算は結合法則を満たす．

$$(a+b)+c=a+(b+c)\ ,\quad (a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

(3) 加法は可換である．$a+b=b+a$ が成り立つ．

(4) $a+e=a$，$a\times f=f\times a=a$ となる要素 e と f が存在する．e を加法の単位元といい，通常 0 と書く．f を乗法の単位元といい，通常 1 と書く．

(5) $a+x=0$ となる x が存在する．これを a の加法の逆元といい，$-a$ と書く．

(6) 0 でない要素 a に対して $a\times x=1$ となる x が存在する．これを a の乗法の逆元といい，a^{-1} と書く．

(7) 加法と乗法について分配法則が成り立つ．

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c\ ,\quad (b+c)\times a=b\times a+c\times a$$

乗法についても可換 $a \times b = b \times a$ が成り立つものを「可換体」と呼ぶ．実際には可換体しか考えないのだが，行列の積のように「積」には可換でないものも高校数学で出てくるので，体の定義も一般的にしておいた．

史織　えーっと，体とは，要するに加法と乗法があって，加法も乗法も逆元がなければならないのだから自然数や整数はだめで，体になっているのは上にいわれた有理数の集合．それから実数の集合…，でもこれだけしか思い浮かびません．他にないのですか．

南海　いっぱいある．その例を練習問題にしよう．その前に今後よく使うので有理数の集合を Q，実数の集合を R と書くことにする．

史織　四則について閉じているといいますが，体の定義には引き算や割り算の定義はありません．それはどうなるのですか．

南海　可換体でないと複雑になるので，体は可換体，つまり乗法が交換可能であるとする．このとき

$$a - b = a + (-b)$$
$$a \div b = a \times b^{-1}$$

で，減法，除法を定める．逆元との和や積なので，減法，除法の結果も K に属する．

史織　そうか，わかりました．加法と乗法での逆元の存在が，四則演算で閉じていることを示しているのですね．

南海　さて，有理数を含み，実数に含まれる体の例として

$$A = \{a + b\sqrt{2} \mid a,\ b \in Q\ \}$$

がある．その確認などを練習問題とする．

史織　$\dfrac{2}{3} + \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$ のような形をした数の集合ですね．

演習 1　解答 1

次の集合が体であることを示せ．ただし，実数が体であることは用いてよい．

(1)

$$A = \{a + b\sqrt{2} \mid a,\ b \in Q\ \}$$

(2)

$$B = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a,\ b,\ c,\ d \in Q\ \}$$

南海　体の例としてはその他に x を変数とする有理式全体の集合がある．これを普通は $R(x)$ と書く．

$$R(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \middle| f(x),\ g(x) \text{ は } x \text{ の多項式} \right\}$$

1.5.3　複素数の構成 (一)

南海　そこで，平面ベクトル，あるいは同じことだが，平面上の座標 $(x,\ y)$ からはじめて，これを体にしようということなのだ．

史織　でもベクトルなら加法はすでにありますね．

南海　そうだ．しかしそれも改めて確認しよう．まず集合をはっきりさせなければならない．集合 V を

$$V = \{(a,\ b) \mid a,\ b \in R\ \}$$

とする．実数の集合 2 つの直積ということだからこの V はまた R^2 とも書かれる．

まずこの集合 V の加法を次のように定める．

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d)$$

このとき，加法の単位元と逆元は?

史織　ベクトルと同じですから単位元は $(0,\ 0)$ で $(a,\ b)$ の逆元は $(-a,\ -b)$ です．

南海　では乗法をどのように定めるかだが，それは最初の

$$(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

を参考にすればよい．

史織

$$(a,\ b) \times (c,\ d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

とさだめるのですね．

演習 2　解答 2

この 2 つの演算 $+,\ \times$ によって V は体にあることを確認せよ．

南海　すべての条件を点検するのは結構面倒だが，複素数の計算を参考にしながらやればできる．成分で見れば，V と C の加法と乗法が同じ演算になっていることがわかるはずだ．これで平面上の点の集合が体になった．

ところで V の要素で $(a,\ 0)$ という形をしたものからなる部分集合を考える．

$$\begin{aligned}(a,\ 0) + (b,\ 0) &= (a + b,\ 0)\\ (a,\ 0) \times (b,\ 0) &= (ab - 0,\ a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab,\ 0)\end{aligned}$$

になるので，第一の成分について見れば実数の四則と同じになり，第二成分は常に 0．したがってこのような要素の全体も体の定義を満たす．体 V の部分集合でそれ自身体なので V の部分体という．

史織　これって，複素平面の実数軸と同じではありませんか．

南海　その通りなのだ．これが複素数の部分体である実数の集合 R に対応するものだ．このとき

$$(a,\ 0) \times (b,\ c) = (ab - 0 \cdot c,\ ac + 0 \cdot b) = (ab,\ ac)$$

であるから，$(a,\ 0)$ と $(b,\ c)$ の積は，ベクトルの実数倍と同じになっている．また

$$(a,\ b) = (a,\ 0) \times (1,\ 0) + (b,\ 0) \times (0,\ 1)$$

と表すことができる．

ところでこの $(0,\ 1)$ だが $(0,\ 1) \times (0,\ 1)$ はいくらか．

史織

$$(0,\ 1) \times (0,\ 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,\ 0) = -1$$

です.

南海　したがって V は，実数 R と同じものを含み，かつ 2 乗すると -1 になる要素が存在する体である．このような体が実際に構成された．

次にこの V と 教科書で作られた C が，実質的に同じもの (体として同型) であることを示そう．集合 V から複素数の集合 C への写像

$$f\ :\ V\ \to\ C$$

を

$$f((a,\ b)) = a + bi$$

で定める．これは明らかに一対一写像で， V の演算の定義と C の計算法則から，加法や乗法の演算の結果も f で対応する．つまり

$$f((a,\ b) + (c,\ d)) = (a + bi) + (c + di)$$
$$f((a,\ b) \times (c,\ d)) = (a + bi) \times (c + di)$$

一対一写像があって演算もこのように対応するとき二つの集合は「体として同型」であるという．このとき二つの体は同一視できる． V と C は同型なのだ．$(a,\ 0)$ の形をした要素からなる V の部分集合は，この写像でちょうど C の部分集合である実数 R に対応する．

i はあるのかないのかわからないが C と同じ型の具体的なモデルが構成できた．最後に,「『平方すると -1 になる数』は $\pm$ と二つあるはずなのに，どちらをとってもいいのか」という質問に関していえば，先の同型写像 f のかわりに

$$f((a,\ -b)) = a + bi$$

としても，やはり一対一同型になるのだ．だからどちらを i にしても，同じものができると考えてよい．

ここで座標から複素数を構成する方法に関係する入試問題を一つ紹介する．

演習 3　［90 東京女子大］解答 3

座標平面上の 2 点 $\mathrm{X}(x_1, x_2)$, $\mathrm{Y}(y_1, y_2)$ に対し，座標が $(x_1y_1 - x_2y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$ である点を記号 $\mathrm{X} \circ \mathrm{Y}$ で表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 原点以外の 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ に対し，$\mathrm{A} \circ \mathrm{X} = \mathrm{B}$ なる点 X および $\mathrm{A} \circ \mathrm{Z} = \mathrm{A}$ となる点 Z の座標を求めよ．

(2) 原点以外の相異なる 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ よりなる集合を M とする．M のどの点 X に対しても $\mathrm{X} \circ \mathrm{P},\ \mathrm{X} \circ \mathrm{Q},\ \mathrm{X} \circ \mathrm{R}$ がいずれも M の点であれば，点 $(1, 0)$ は集合 M に属することを示せ．

(3) (2) の条件がみたされるとき，P の座標が $(1, 0)$ であるとする．このとき，$\mathrm{Q} \circ \mathrm{R} = \mathrm{P}, \mathrm{Q} \circ \mathrm{Q} = \mathrm{R}$ となることを示せ．

(4) Q, R の座標を求めよ．

南海　この (2)(3) は結構難しい．複素数平面が高校数学になかったときの出題だ．

1.5.4　複素数の構成 (その他)

南海　複素数の集合 C のモデルの構成法は一つではない.

R を今までどおり実数体とする． 実数係数の文字 x の多項式の全体を

$$R[x] = \{\ f(x) \mid f(x) \text{ は実数係数の多項式 }\}$$

とする．明らかに $R[x]$ は体の定義のうち,「乗法の逆元の存在」以外のすべてを満たす.

「乗法の逆元の存在」以外のすべてを満たすものを**環**という．$R[x]$ を「実数体上の多項式環」という.

そこで多項式 $f(x)$ を多項式 x^2+1 で割った余りを $r(f(x))$ と書くことにし，集合 A を x^2+1 で割った余りの集合

$$A = \{\ r\left(f(x)\right) \mid f(x) \in R[x]\ \}$$

とする.

$$r(x^2+3x-1),\ r(ax+b),\ r(x^2)$$

はいくらになるかな.

史織

$$\begin{array}{lll} x^2+3x-1 = (x^2+1)+3x-2 & \therefore & r(x^2+3x-1) = 3x-2 \\ ax+b = 0(x^2+1)+ax+b & \therefore & r(ax+b) = ax+b \\ x^2 = (x^2+1)-1 & \therefore & r(x^2) = -1 \end{array}$$

南海　割り算の余りなので

$$r(f(x)+g(x)) = r(f(x))+r(g(x)),\ r(f(x)g(x)) = r\{r(f(x))r(g(x))\}$$

が成り立つ．だから集合 A の四則演算を，多項式の四則演算そのもので定めれば，体の条件のうち除法の逆元の存在を除いてその他が成立することはほとんど自明である．そこで気になる人は実際に確かめてもらうことにして，逆元の存在証明に進もう.

例 1.5.1 任意の一次式 $a+bx$ に対して

$$r((a+bx)g(x)) = 1$$

となる一次式 $g(x)$ が存在することを示せ.

史織　求める $g(x)$ を $g(x) = c+dx$ と置きます．まず $r((a+bx)g(x))$ を求めます.

$$(a+bx)(c+dx) = ac+(ad+bc)x+bdx^2 = ac-bd+(ad+bc)x+bd(x^2+1)$$

$$\therefore\quad r((a+bx)(c+dx)) = ac-bd+(ad+bc)x$$

なんだかこれって，複素数の積

$$(a+bi)\times(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

と似ています．そこで,

$$r((a+bx)(c+dx)) = (ac-bd)+(ad+bc)x = 1$$

より，

$$ad + bc = 0,\ ac - bd = 1$$

これから c と d を a と b で表すと

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2},\ d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

つまり $g(x) = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}x$

南海　かくして A には乗法に関する逆元が存在した．A も体である．実数 a に対して $r(af(x)) = ar(f(x))$ である．だから $x^2 + 1$ で割った余りとしての x や 1 を $r(x)$ や $r(1)$ と書くと

$$r(a + bx) = ar(1) + br(x)$$

つまり

$$A = \{ar(1) + br(x) \mid a,\ b \in R\ \}$$

となる．そしてこれが体である．

史織

$$r(x)^2 = r(x^2) = -1$$

だから，A は C と同じ型なのですね．

南海　さよう．正確にいうと，A から C への写像

$$g\ :\ A\ \rightarrow\ C$$

を

$$g(ar(1) + br(x)) = a + bi$$

でさだめると，これが一対一写像でしかも演算の結果も対応する．つまり同型を定める写像である．A も複素数体と同型でそのモデルであるといえる．

先に作った V と今回の A ももちろん体として同型である．つまり V から A への写像

$$h\ :\ V\ \rightarrow\ A$$

を

$$h((a,\ b)) = ar(1) + br(x)$$

で定めればよい．この対応で，V の要素と A の要素は 1 対 1 に対応し，演算の結果も対応しているから，同じ型である．結局教科書の複素数の定義と同型である 2 つのモデルが構成できたわけだ．このモデルは 2 つとも，確かに存在している．

複素数体 C は，このようなモデルから平面の点であるとか多項式の余りであるとかの他の要素を捨象し，体としての構造を抽出したものといえるのだ．

「みかん 1 個」と,「スプーン 1 本」などから数「1」が抽出されたように，i は $(0,\ 1)$ や $r(x)$ から抽出されたものを表す記号である．それは勝手に作ったものではない．つまり i は「平方すると -1 になる新しい数を一つ考え」たのではなく，抽出されたものとして確かに存在しているのだ．

史織　「みかん 1 個やスプーン 1 本の〈1 個〉や〈1 本〉は存在するが〈1〉は存在しない」などとは思いません．確かに 1 はあるものとして計算しています．それと同じように i も存在するのですね．

南海　その通りだ．さてもう一つ行列を用いる構成方法がある．それは演習にする．

演習 4　解答 4

2 次行列の部分集合 M を次のように定める．

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right) \middle| \, a,\ b \in R \right\}$$

M において加法，乗法は 2 次行列の加法，乗法をそのまま用いるとする．

このとき次の問に答えよ．

(1) M が可換体であることを示せ．

(2) M と C が同型であることを示せ．

これに関係する入試問題を一つ．

演習 5　［00 東京理科大］　解答 5

行列 $\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ を E で表し，行列 $\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$ を J で表す．複素数 $a+bi$ (a, b は実数) に行列 $aE+bJ$ を対応させる．例えば，複素数 $1+i$ には行列 $\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$ が対応する．

(1) 次の複素数に対応する行列を $\left(\begin{array}{cc} s & t \\ u & v \end{array} \right)$ の形に表せ．

(ア) $\sqrt{3}+i$　　(イ) $(1+i)(\sqrt{3}+i)$　　(ウ) $(\sqrt{3}+i)^{-1}$

(2) 複素数 α に対応する行列が A であり，複素数 β に対応する行列が B ならば，複素数 α, β の積 $\alpha\beta$ に対応する行列は行列 A, B の積 AB であることを証明せよ．

(3) 次の複素数を極形式 ($r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r>0)$ の形) で表せ．

(ア) $1+i$　　(イ) $\sqrt{3}+i$　　(ウ) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

(4) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ に対応する行列を D とするとき， D^{18} を求めよ．

1.5.5　複素数と図形

南海　複素数 $a+bi$ に直交座標平面の点 $(a,\ b)$ を対応させることにより，実数の集合が数直線になるように，複素数の集合 C は複素平面になる．これがわれわれが構成したモデル V と同じものになることは明らかだ．複素平面のうち実数に対応する部分を実軸，純虚数に対応する部分（と 0）を虚軸という．

史織　複素平面といったり複素数平面といったりしますが．

南海　もともとは複素平面だ．数年前に高校教科書に複素平面が登場したとき，これを「複素数平面」といったのだ．今も大学教科書は複素平面だ．だからどちらでもよい．私は複素平面だ．とにかくこれによって，平面図形を複素数で考えることができるようになる．

極形式とド・モアブルの定理

南海　座標に極座標というのがあった．複素数平面上の点を極座標で表すことができる．つまり直交座標で $(x,\ y)$ となる点が極座標では $(r,\ \theta)$ であったとする．すると 2 つの座標の間には $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ が成り立つのだった．

これに応じて，複素数はさらに**極形式**という表し方がある．$z = a + bi$ のとき

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{ただし } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ r\cos\theta = a, r\sin\theta = b$$

「形式」というのは「形」でのことで，同じ複素数 z が，$a + bi$ と $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ という 2 つの形をもつ．極座標の r は任意の実数でよいのだが，極形式のときには $r = |z|$ でとるので負にはしないようにするのが約束である．また，角 θ は x 軸の正の方向から反時計回りに計る．角 θ は**偏角**とよばれ $\arg z$ と書く．

ところがこの「極形式」は単に複素数のもう一つの表し方というだけではない．三角関数の加法定理と複素数の積が対応するのだ．

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}$$

これから同様にして

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$

これから分かる偏角の性質．

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \\ \arg\frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 \\ \arg\frac{1}{z} &= -\arg z = \arg\overline{z} \end{aligned}$$

あたかも対数関数のような形になる．そこで

定理 6 (ドモアブルの定理) 任意の整数 n に対して

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つ．

史織

証明　$n \geqq 0$ のとき．数学的帰納法で示す．

$n = 0$ のときは両辺 1 であるから成立する．

$n=k$ で成立するとして，$n=k+1$ で成立することを示す.

$$\begin{aligned}
& \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta \\
= \ & (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta) \\
= \ & (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
= \ & (\cos\theta + i\sin\theta)^k \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\
= \ & (\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1}
\end{aligned}$$

よって，n が負でないときは示された.

次に, $n=-m$ $(m>0)$ のとき

$$\begin{aligned}
\cos n\theta + i\sin n\theta &= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta) \\
&= \cos m\theta - i\sin m\theta = \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \\
&= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \left(\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right)^m \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n
\end{aligned}$$

よって，この場合も成立し，題意は示された． □

南海　この背景には人類が発見したもっとも美しい数学の公式「オイラーの公式」がある．これらの背景と本質が知りたければ「オイラーの公式」を見てほしい.

2003 年からまた複素数平面が高校数学から消える． 2012 年に復活したが今度は行列が消える．このように消えたり復活したりするのは，日本の教育政策に理念がないからだ.

青空学園数学科は，高校時代に勉強するべき内容は長い歴史のなかで形成されるものであって，国の教育政策で変えられるものではないと考えている． ド・モアブルの定理，複素数平面はまさに高校生が学ぶべき内容の一つである． 小学校の教育課程が世間の批判を受けてまた変わろうとしている． まったく右往左往しているのが今の文部科学省の姿だ． 複素数平面を高校数学に入れたり入れなかったりしているということは， 教育課程を決めている人がいかに高校数学に対してしっかりした見識をもっていないかを示している.

青空学園を訪れた高校生諸君は， 自分で「ド・モアブルの定理」までは理解するようにしてほしい.

複素数とベクトル

史織　複素数で図形問題を考えるとき，すぐに $z=x+iy$ と置いたり，ベクトルのように考えるのです．複素数で図形を考える意味がよくわかりません.

南海　ベクトルなら成分に置くのではなく矢線で図形的に考えるのに，複素数ならすぐに成分で書く人が確かに多い．すでに V で確認したように，複素数は加法，減法，実数倍を考えるかぎりは，ベクトルとまったく同じである．2 つの複素数 α と β が $\arg\alpha \neq \arg\beta + n\pi$ となる（つまり α, β, O が同じ直線上にない）とき，2 つの実数 s, t に対して

$$s\alpha + t\beta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s = t = 0$$

が成り立つことも，ベクトルと同じである．だからこれらのことを考えるかぎり，ベクトルとして考えてかまわない.

しかし複素数で図形を考えるということは，複素数独自の方法を用いてこそ意味があるわけだ．だからすぐ成分表示したり，ベクトル的に考えると，複素数で図形を考える値打ちがない．ベクトルと複素数の図形を考える上での違いがいくつかある．それをしっかり押さえてほしい.

いちばん大きい違いは，複素数には積があり，積を用いて回転が表せることである．直線 $\alpha\beta$ を α のまわりに角 θ 回転した点を γ とすれば

$$\gamma - \alpha = (\cos\theta + i\sin\theta)(\beta - \alpha)$$

となる．したがって直交することの処理もちがう．

$$\begin{aligned}
&\square \quad 0 \text{ でない } 2 \text{ つのベクトル} \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \text{が直交する} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \\
&\square \quad \text{複素数 } z_1 \text{と } z_2 \text{が原点のまわりになす角の大きさが } \frac{\pi}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad &\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{z_2}{z_1} = -\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}
\end{aligned}$$

つぎに絶対値，つまりは大きさの表し方が違う．

$$\begin{aligned}
\text{ベクトル} \quad &: \quad |\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \text{ (内積)} \\
\text{複素数} \quad &: \quad |z|^2 = z\overline{z}
\end{aligned}$$

複素数と直線

南海　さて，直交座標平面で直線の表し方は二つあった．

史織　一つは 2 点 $(a_1,\ a_2)$ と $(b_1,\ b_2)$ を通る直線は

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

となる．もう一つは，点 $(x_0,\ y_0)$ を通りベクトル $(p,\ q)$ に垂直な直線は

$$l \ : \ p(x - x_0) + q(y - y_0) = 0$$

となる．

南海　それと同じように，複素数による直線の表し方も二通りある．

P(z) を動点とし，A(α), B(β), C(γ) などを定点とする．また O は原点である．P が次の図形上にあるとき，z の満たすべき式を α, β, γ などの複素数の（共役, 絶対値などを用いた）等式で表わしてほしい．まず第一の型に関するもの．

例 1.5.2　(1) P は A を通りベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と平行な直線上にある．

(2) P は直線 AB 上の点である．

史織

(1) 実数 t を用いて

$$z - \alpha = t\beta$$

と表される．つまり $\dfrac{z-\alpha}{\beta}$ が実数である．

$$\therefore \quad \frac{z-\alpha}{\beta} = \overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\beta}z - \beta\overline{z} = \quad \overline{\beta}\alpha - \beta\overline{\alpha}$$

(2) 直線 AB 上の点は A を通り AB に平行な直線であるから (1) から

$$\overline{(\beta-\alpha)}z-(\beta-\alpha)\overline{z}=\overline{(\beta-\alpha)}\alpha-(\beta-\alpha)\overline{\alpha}$$

つまり

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-(\beta-\alpha)\overline{z}=\overline{\beta}\alpha-\beta\overline{\alpha}$$

南海　大変よろしい．次は第二の型．

例 1.5.3　(1) P は定点 z_0 を通り，線分 OA と直交する直線上にある．

(2) P は線分 AB の垂直二等分線上にある．

史織

(1) $\dfrac{z-z_0}{\alpha}$ が純虚数．

$$\therefore\quad \frac{z-z_0}{\alpha}+\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{\overline{\alpha}}=0\quad\Longleftrightarrow\quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0}$$

(2) 線分 AB の垂直二等分線上の点は A と B からの距離が等しい点である．

$$\therefore\quad |z-\alpha|=|z-\beta|\quad\Longleftrightarrow\quad (\overline{\alpha}-\overline{\beta})z+(\alpha-\beta)\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}$$

南海　最後のは，点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を通り $\alpha-\beta$ に直交することから求めることもできる．だから一般に

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=k\ (\text{一定})$$

という形をした式は，α と直交する直線を表す．なぜならこの式を満たす任意の一点 z_0 をとる．

$$\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0}=k\ (\text{一定})$$

二式の辺々を引く．

$$\overline{\alpha}(z-z_0)+\alpha(\overline{z}-\overline{z_0})=0$$

つまり

$$\frac{z-z_0}{\alpha}+\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{\overline{\alpha}}=0$$

となるので，$\dfrac{z-z_0}{\alpha}$ が純虚数．ゆえに，条件式を満たす z の集合は α と直交する直線になる．

入試問題を紹介しておこう．

演習 6　［02 早大・人文］改題 解答 6

複素数平面において，原点を通らない直線の方程式は，0 でない複素数 α を用いて $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2$ と表すことができる．

(1) 点 A(1) 点 B($\sqrt{3}i$) とを通る直線 L の方程式を

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2$$

と表すとき，複素数 α を求めよ．

(2) 直線 L と複素数 α は (1) のものとする．点 Q(ω) を与えるとき，点 Q と直線 L に関して対称な点 Q$'$(ω') を ϖ (と複素数定数) を用いて表せ．

1.5.6　根号について

南海　先日も根号に関して掲示板質問があった．次のどこが間違っているのか．

例 1.5.4　「$-1=1$」を証明するという次の論証の誤りを指摘せよ．

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1} &= \sqrt{-1} \\
\sqrt{\frac{1}{-1}} &= \sqrt{\frac{-1}{1}} \\
\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} &= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \\
\sqrt{1}\cdot\sqrt{1} &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} \\
\therefore\quad 1 &= -1
\end{aligned}$$

史織　これは 2 行目から 3 行目への移行が言えません．つまり一般に

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

は a, b が正の数のときしか使ってはいけないと習いました．

南海　その通りである．ではなぜ正の数のときしか使ってはいけないのだろうか．すこし考えておこう．一般に

$$\sqrt[n]{a}$$

は何を表すのか．

史織　0 でない任意の複素数 a に対して

$$x^n=a$$

の根 root は全部で n 個ある．そのうちのどれかですが…．

南海　言い方が悪かった．質問は，どのように決めればよいか，ということだ．a が実数のときとしよう．

史織　a が正の実数なら n 個の根のうち正の実数のもの，つまり

$$x^n=a$$

の根で偏角が 0 のものを表す．そうでないときは…．

　a が負でも， n が奇数なら，$x^n=a$ の実数根は一つだから，それを表すのですね．a が負で n が偶数なら $x^n=a$ の実数根は 2 つあるからどれをとるかが難しい．

南海　$a=-b$ とする． $b>0$ である．このとき $\sqrt[n]{b}$ は正実数のものに決まる．それに $\sqrt[n]{-1}$ をかけることにすればよいのだが， $n\geqq 4$ に対しては複雑で記号としての意味がない．例えば $x^4=-1$ の 4 つの根は？

史織

$$\frac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$$

の 4 つですから $\sqrt[4]{-1}$ をどれにするかは決められない．

南海　そこで $n=2$ のときは $\sqrt{-1}$ として i をとることに決めるのだ．

史織

$$\sqrt{-2} = \sqrt{-1}\sqrt{2} = \sqrt{2}i$$

ですね．したがって

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{3}i \cdot \sqrt{2}i = -\sqrt{6}$$

ですね．だから $\dfrac{1}{i} = -i$ なので無理に書けば

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$$

です．

南海　まとめると a, b が正なら

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

であるが，負が混じると成立しない．

1.6　方程式と恒等式

2004.9.16

1.6.1　文字を用いて式に表す

南海　数学の教科書や問題には考える数学的な対象を「文字」においたものがたくさんある．数学の問題を解くということは，文章で記述されたさまざまの数学的な現象を文字を用いて式に表し，必要な結論を引き出す，ということである．つまり数学的な現象を記述した文章を数式に翻訳し，その数式を操作して結論を示す．そうでないときもあるのだが，これが問題を解くということの基本だ．

例えば「平面上に 2 点 A, B があり，線分 AB 上に点 P がある.」これは文章である．これを「数学の言葉」に翻訳しなければならない．この文章を式にするにはどんな翻訳があるか．

史織

(1) 点 A を原点，点 B を $(b,\ 0)$ として，線分 AB を xy 平面におき，$0 \leqq t \leqq b$ の実数 t を用いて $\mathrm{P}(t,\ 0)$ とする．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ の実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおく．

等いろいろできます．

南海　このように「さあ，問題を解こう」とするとき，まず最初に考えなければならないのは「**何をどのように文字を用いて表すか**」ということである．これが問題解決の第一歩．適当な文字の導入によって，問題を数学の言葉に翻訳する．数学が苦手な人は，この「文字の導入による問題の数式への翻訳」が苦手な場合がほとんどである．

数学の対象に文字が使われる場は大きくいって 2 つある．

(i) 個別のものに名前をつける場合．
これは文字というより言葉の働きそのものなのだが，数学的対象に名をつけるときには英語やギリシャ語のアルファベットを用いる．

ベクトル $\vec{a} = (1,\ 2)$ といえばこれは数の組 $(1,\ 2)$ をベクトルと見なし，これに $\vec{a}$ という名前をつけたのだ．△ABC 等もそうだ．

(ii) 数を入れる箱としての文字の場合．
$x^2 + ax + 1 = 0$ での文字 x と a は,「数を入れる箱」だ．x と a のように異なる文字が使われているのは，それが異なる箱であることを示している．そして箱 a に入る数と 箱 x に入る数の間に $x^2 + ax + 1 = 0$ という関係が成り立っていなければならない，ということだ．

後者の文字は変数といわれ，そこに代入されるのが値だ．人間は，幼い頃 3 つのリンゴとか 3 枚の皿のように実際の量の世界にいる．この 2 つが同じ「3」であることがわかるのは，何歳の頃なのだろう．こうして量から数への抽象ができるようになる．量の世界，数の世界もそれぞれに複雑なのだが，さらに数の世界の構造を抽象して文字の世界に足を踏み入れるのだ．

史織　それはどういうことですか．

南海　例えば

$$2 + 1 = 1 + 2,\ 3 + 5 = 5 + 3$$

などが, どのような 2 つの数でも成り立つ．これを

$$a+b=b+a$$

と書きあらわすようになるのだ．

史織　a や b にどんな数を入れても成り立つ，つまり数の加法に交換法則が成り立つということですね．

南海　その通り．そして量や数にもいろいろあるように文字の使われ方にもいろいろある．量，数，文字にはどんなものがあるかといえば，それぞれ次のような分化が起こる．

量の世界：　連続量 (長さ等) と分離量 (個数等)，内包量 (1 当り量) と外延量 (長さ等)
数の世界：　自然数，整数，有理数，無理数，実数，虚数，複素数
文字の世界：　定数，変数，未知数，媒介変数

このように人は徐々に考える世界を広げてきた．

史織　文字が使われるようになったのはいつ頃からなのですか．

南海　文字そのものの使用は結構古いが，文字を用いて個別の数を抽象してとらえ，色んな変化する数の間の関係を研究する「代数」が生まれたのは古いことではない．例えば，『2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式が $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である』ということは，高校生なら皆知っている．

しかし，このような公式にたどり着くまでには，多くの人の努力と長い歴史があった．9 世紀のアラビアの数学者アルコワリズミ（Al-Khowarizmi　825 頃）は『アルジェブル・アルムカバラ（al-gebr w'almuqabala)』という代数学の本を書いた.「代数（algebra)」の言葉の起源になる本だ．そのなかで平方の出てくる問題を次の 6 種類に分類し，その解法を研究した（分類は，遠山啓著『数学入門（上)』岩波新書/1959 による）.

(1) 根の平方が根の倍数に等しい

(2) 根の平方が定数に等しい

(3) 根が定数に等しい

(4) 根の平方と根の倍数の和が定数に等しい

(5) 根の平方と定数の和が根の倍数に等しい

(6) 根の平方が根の倍数と定数の和に等しい

当時は今のような「式」がまだなかったのだ．これらは今風に書けば

(1) $x^2=ax$

(2) $x^2=a$

(3) $x=a$

(4) $x^2+bx=a$

(5) $x^2+a=bx$

(6) $x^2=bx+a$

となる．アルコワリズミは文字と等式を知らなかったので，これをすべて文章で書いている．そしてその解き方ももちろん文章で書いている．例えば，(4) はどのように書いているか． $b = 10, a = 39$ のとき，つまり根の平方とその根の 10 倍との和が 39 に等しいという問題の解き方をつぎのように述べる．

> だからこの型についての問は，いいかえるとつぎのようになる．その根の平方に 10 個の根を加えたとき，その根はいくつか．このような問題の解き方はつぎのようにする．根の平方に加えるべきその根の数を半分にする．いまこの問題では根の数は 10 である．だから 5 になる．その数にその数自身をかける．すると 25 になる．これを 39 に加えると合計は 64 になる．その平方根を計算すると 8 になる．それから根の数の半分の 5 を引け，残りは 3 である．これが求めていた数であって，その平方は 9 である．

何がいいたいかわかるだろうか．式に書けば次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 10x = 39 \\
&x^2 + 5x + 5x + 5^2 = 39 + 5^2 \\
&(x+5)^2 = 64 \\
&x + 5 = 8 \\
&x = 8 - 5 \\
&x = 3
\end{aligned}
$$

一つ一つの場合についてこのような解き方を述べるのである．書く方も読む方も大変だ．文字を用いて数式を立てることがどんなにすばらしい発見かわかる．

では先の 6 つの場合分けはなぜ必要だったのだろうか．気づいたかもしれないが，0 と負の数を知らなかったのだ．0 や負数を用いれば，

$$
\begin{aligned}
x^2 = ax &\Rightarrow x^2 + (-)ax + 0 = 0 \\
x^2 = a &\Rightarrow x^2 - 0x + (-a) = 0 \\
x = a &\Rightarrow 0x^2 + x + (-a) = 0 \\
x^2 + bx = a &\Rightarrow x^2 + bx + (-a) = 0 \\
x^2 + a = bx &\Rightarrow x^2 + (-b)x + a = 0 \\
x^2 = bx + a &\Rightarrow x^2 + (-b)x + (-a) = 0
\end{aligned}
$$

となり，いづれも

$$px^2 + qx + r = 0$$

になってしまうのだ．

今からおよそ 1050 年前のことだ．このような時代があって，それから負の数が用いられ，さらにデカルトの時代になって，ようやく文字が一般的に使われはじめ，今に至っている．このように文字は次のような役割を果たす．

(1) 量や数の間に成り立つ構造や関係を表す．

(2) 変化する量を表すことで動きをとらえる．

みなさんが何気なく勉強していることの中に長い人類の歴史が生きていることが，言いたかった．文字も大事に使おう．

1.6.2　定数と変数

史織　文字には定数と変数があります．また，未知数というのもあります．

未知数はわかるのですが，定数と変数の区別がよくわかりません．例えば，

(1) 関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ での最小値 $m(a)$ を求めよ．

(2) a が実数を動くとき $m(a)$ の最大値を求めよ．

というよくある問題で，小問 (1) では a は定数ですが，(2) ではその定数を変化させる，といっています．

南海　定数と変数は固定的なものではない．動きを止めて考えている方を定数といい，動かして考えている方を変数 (未知数) という．例えば多項式 $x^2+ax+a-2$ がある．これから x を変数とす る関数 $f(x)=x^2+ax+a-2$ も考えらるが，a を変数とする関数 $g(a)=(x+1)a+x^2-2$ も考えられる．問題文をよく読み自分で考え方を決めなければならない．1 つの問題を考えよう．

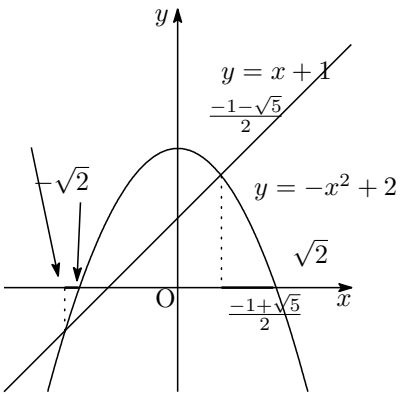
例題 1.6.1 2 次方程式 $x^2+ax+a-2=0$ で，定数 a が $0 \leqq a \leqq 1$ の範囲にあるとき，解 x のとりうる値の範囲を求めよ．

南海　これを解くのに，2 つの考え方がある．

一つは問題文通り x を変数 (未知数)，a を定数としたうえで $a(x+1)=-x^2+2$ より $y=-x^2+2, y=a(x+1)$ の交点が $0 \leqq a \leqq 1$ でどのような範囲にあるかを見る方法である．

もう一つはこれを「a の 1 次方程式 $(x+1)a+x^2-2=0$ で，解 a が $0 \leqq a \leqq 1$ の範囲にあるとき，定数 x のとりうる値の範囲を求める」とし，a の 1 次関数が a の区間 $0 \leqq a \leqq 1$ で a 軸と交わる範囲として x の範囲を出す方法である．

2 文字 (以上) の関係式があるときどちらを定数と見なし，どちらを変数と見なすかによって異なる方法になる．



この例題を解いてみよう．

史織　やってみます．

$$x^2+ax+a-2=0 \quad \cdots ①$$

とします．まず最初の方法です．

方法 1

① は $a(x+1)=-x^2+2$ と変形される．これから，2 つのグラフ

$$y=-x^2+2, \quad y=a(x+1)$$

の交点がどのように変化するかを考える．第 2 式の直線はつねに $(-1,\ 0)$ を通る直線で傾き a が 0 から 1 まで変化するのだから，図のように

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq -\sqrt{2}, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$$

とわかる．

史織　第二の方法は，a の 1 次式と見るのですね．

南海　そうだ．x が求める範囲にあるということは，$0 \leqq a \leqq 1$ で① を満たす a がとれるということだ．つまり $0 \leqq a \leqq 1$ の a が存在するような範囲として x の範囲が定まる．

a が存在する？　それは a の方程式ということだ．

それで，定数と変数の見方を変えると，① は a の 1 次方程式で x が定数とも考えられる．このように見れば a の 1 次方程式① が $0 \leqq a \leqq 1$ に解をもつような定数 x の範囲として，求まることになる．

史織　やってみます．

方法 2

$$g(a) = x^2 + ax + a - 2$$

とおくと，$g(0)g(1) \leqq 0$ であればいい．つまり

$$(x^2 - 2)(x^2 + x - 1) \leqq 0$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + x - 1) = \left(x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)(x + \sqrt{2})\left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)(x - \sqrt{2})$$

より同じ結論を得る．

南海　x や y を変数や未知数，a や b を定数と見るのは習慣に過ぎない．要は 2 つの文字 x と a の間に ① の関係が成り立っている，ということだけがある．いずれを変数とし，いずれを定数とするかは固定されていない．いくつかの文字の混じった式では，どの文字を固定してどの文字を動かすのかよく考えたい．

史織　いままでは、文字定数は数字の代表だと思ってました。解いてみての考えなのですが、例題の方程式を x と a の 2 変数実関数、$f(x.a) = 0$ の解で第 2 座標が $0 \leqq a \leqq 1$ の解について解析するというふうに思ったのですが正しいでしょうか．こうすれば逆手流もすんなりうけいれやすいとおもうのですがいかがですか？

南海　それはその通りなのだ．ただ「$f(x.a) = 0$ の解」といってもこれは ax 平面内の曲線である．$f(x.a) = 0$ を満たす点の集合を調べるのに，先に a を固定して調べるか，先に x を固定して調べるかの違いだと考えればよい．また，$x^2 + ax + 3 = 0$,(ただし、a 定数で $a > 1$) の解の個数を調べるときは，$a = -1/x(x^2 + 3)$ のグラフを ax 平面に書いて，$a = k$ の直線を $k > 1$ の範囲で動かしていったときに，曲線との交点がいくつあるか，という問題として解くことも出来る．

いずれにしても，習慣として x は変数や未知数を表し，a は定数を表す，これは習慣に過ぎない．2 つの文字の間の関係式が大切なのであって，それを満たす点集合を調べる過程で，先にどちらを止めるか，止めた方をその時点で定数というのだ．

1.6.3　方程式と恒等式

南海　文字を用いて表された式を 2 つ用意し，それを等号でつないだものが「等式 equality」だ．等式にはどのようなものがあるのか．

史織　「方程式」と「恒等式」です

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

第一の等式は特別な x の値でしか成立しません．このような等式を「方程式」，その値を方程式の解，といいます．第二の等式は任意の x で成立します．このような等式を「恒等式」といいます．

史織　方程式における文字を「未知数」という．恒等式における文字は定数とも考えてよいし変数と考えてもよい．

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

の x は，定数でもあり，二つの関数 $f(x)=x^2+2x+1$ と $g(x)=(x+1)^2$ が同じ関数であるという意味なら，変数とも考えられる．

史織　変数が 2 つあるときはどうなるのですか．

南海

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$$

ならこれは明らかに恒等式だ．では

$$x+y=1$$

は．

史織　$(2,\ 3)$ では成立しませんから恒等式ではありません．$y=-x+1$ ですから，y は x の関数？

南海　そのようにも言えるし，y を定数とし x の方程式とも見ることができる．この場合解は $x=-y+1$ ．

史織　xy 平面の直線とも言える．

1.6.4　恒等式の判定法

南海　ここでは「恒等式を発見する」で書いたことを少し深めたい．

現在の教科書では，恒等式の定義を習った段階で，因数定理はまだである．そのため，次の大変重要な基本定理が高校数学から抜け落ちている．

定理 7 (恒等式) $f(x),g(x)$ が高々n 次の x についての整式であるとき，次の三つの命題は同値である．またこのとき，等式 $f(x)=g(x)$ は **恒等式** であるという．

(i) $f(x)$ と $g(x)$ は同一の式である．つまり，次数が等しくかつ同じ次数の項の係数が等しい．

(ii) 任意の x の値に対して $f(x)$ と $g(x)$ は同一の値をとる．

(iii) 等式 $f(x)=g(x)$ が互いに異なる $n+1$ 個の x の値に対して成り立つ．

証明

(1) (i) ⇒ (ii):明白である．

(2) (ii) ⇒ (iii):明白である．

(3) (iii) ⇒ (i): $H(x)=f(x)-g(x)$ は n 次以下の整式である．$a_i(1\leqq i\leqq n+1)$ のあい異なる a_i に対して, $H(a_i)=0$ であるから，因数定理より， $H(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n+1})Q(x)$ と因数分解される．もし $Q(x)\neq 0$ なら，左辺の次数は n 以下であり，右辺の次数は $n+1$ 以上となる．よって矛盾が起こる．従って $H(x)=0$ ．つまり $f(x)=g(x)$ である．

このとき (ii) ⇒ (iii)，(iii) ⇒ (i) より (ii) ⇒ (i)．ゆえに (i) と (ii) は同値．他も同様．ゆえに三つの条件は互いに他の二つの必要十分条件になっていることが示された． □

$f(x)$ が多項式関数でなければ，成り立つとはかぎらないことにも注意しよう．

史織　関数 $f(x)$ で (i) ⇒ (ii) が成り立たない例．

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

式は違うがすべての実数 x で成立．

関数 $f(x)$ で (ii) ⇒ (iii) が成り立たない例．

$$\sin x=2\sin x$$

x が π の整数倍ならつねに成立するが，もちろんすべての x で成立するわけではない．

南海　その通り．一般に周期関数で反例が作れる．

史織　「$H(x)=0$．つまり $f(x)=g(x)$」と言うところはそれぞれ恒等式として成立ということですね．

南海　その通り．整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ で割ったとき，商が $Q(x)$ で余りが $R(x)$ なら

$$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$$

と書けるのだが，この除法の式は「恒等式」なのだ．

ところで，上の恒等式の基本性質によると，n 次の整式 $f(x)$ に対し，x の $n+1$ 個の値

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$$

に対する $f(x)$ の値

$$f(\alpha_0),\ f(\alpha_1),\ \cdots,\ f(\alpha_n)$$

が定まれば，$f(x)$ は一つしかないことになる．

史織　$f(x)$ と $g(x)$ が同じ値になるとすると

$$f(\alpha_0)=g(\alpha_0),\ f(\alpha_1)=g(\alpha_1),\ \cdots,\ f(\alpha_n)=g(\alpha_n)$$

と $f(x)=g(x)$ が異なる $n+1$ この値で成立するので，恒等式として $f(x)=g(x)$ というわけですね．

南海　その通り．さて，となると次の問題が考えられる．

$n+1$ 個の値

$$f(\alpha_0),\ f(\alpha_1),\ \cdots,\ f(\alpha_n)$$

が与えられた n 次式 $f(x)$ を求めよ．

史織　『青空学園』で見ました.「ラグランジュの補間公式」です.

$$\begin{aligned}f(x) \;=\;& f(\alpha_0)\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)\cdots(\alpha_0-\alpha_n)}\\ &+f(\alpha_1)\frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_0)(\alpha_1-\alpha_2)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}\\ &+\cdots\\ &+f(\alpha_n)\frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha_0)(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}\end{aligned}$$

これは確かに

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$$

での値が

$$f(\alpha_0),\ f(\alpha_1),\ \cdots,\ f(\alpha_n)$$

になるし，そのようなものは一つしかない．

南海　それではもう一つ．次の今年の京大の問題を，数学的帰納法を用いないで，ラグランジュの補間公式を用いて解け．

演習 7　［02 京大後期理系］ 解答 7

$f(x)$ は x^n の係数が 1 である x の n 次式である．相異なる n 個の有理数 $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n$ に対して $f(q_1),\ f(q_2),\ \cdots,\ f(q_n)$ がすべて有理数であれば，$f(x)$ の係数はすべて有理数であることを，数学的帰納法を用いて示せ．

南海　この問題は数学的帰納法と方法を指定しない方がよかった．とりあえず以上としよう．またわからないことがあれば質問してほしい．

史織　ありがとうございました．

1.7　関数と数列

2002.10.20

1.7.1　関数

史織　今日は関数について教えて下さい．
南海　まず教科書はどのように書いているのかそれから見てみよう．
史織　教科書ではまず写像を定義し，その上で関数を定義しています．

二つの集合 A, B において，ある対応によって

A のどの要素にも, B の要素が一つずつ対応している

とき，この対応を A から B への**写像**といい記号 f などを用いて

$$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

と書きあらわす．

写像 $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ において集合 A を定義域という．写像 $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ によって A の要素 a に対応する B の要素を $f(a)$ と書き，これを f による a の**像**，または f の a における**値**という．また値全体の集合 $\{f(a) \mid a \in \mathrm{A}\}$ を写像 f の**値域**という．

定義域と値域が，ともに数の集合である写像を**関数**という．

南海　これが基本的な関数と写像に関する**定義**だ．
史織　関数を $y = f(x)$ などと書きます．これはどういうことになるのでしょうか．
南海　ここで文字とは何であったかを思い起こそう．それは「数を入れる箱」だった．
史織　$y = f(x)$ では箱 x に集合 A の要素を入れると，それに対応して B の要素が定まる．その値を入れる箱 が y です．
南海　関数を考えるときに用いる箱としての文字のことを「変数」というのだった．定義域側の変数を **独立変数** といいこれを普通 x で表わし，値域側の変数を**従属変数** といいこれを普通 y で表わすことが多い．
史織　$f(x) = x^2$ なら x に 2 を入れれば y には 4 が入る.「$y = f(x)$ の $x = 2$ における値が $y = 4$」ということですね．
南海　$y = f(x)$ における「等号」の意味もいま言った通りだ．つまり「その値を入れる箱 が y」ということを「$=$」で表すのだ．
史織　日頃何となく使っている記号もしっかりとして意味があるのですね．
南海　その通り．あいまいなことは何もない．関数についていくつかの注意を述べよう．
まず関数というのは，数から数への対応の規則なので，一つの式で表される必要はない．例えば，

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & (\ x \leqq -1 \text{ のとき}) \\ x^2 & (-1 \leqq x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\ 0 \leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

も立派に「一つの」関数である．対応の規則 f が x の式で定められているときに，その式が x の整式であるなら，その次数によって一次関数，二次関数，などと呼ぶ．その式が整式のとき，整式

関数 (多項式関数，有理整関数) と呼ぶ．また，その式が，x の有理式のとき有理関数，無理式のとき無理関数，さらに同様に三角関数，指数関数，対数関数，などと呼ぶ．

その上で以下は二次関数を例にとって考えよう．二次関数とは対応の規則が二次多項式であるものだ．つまり $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ と表せる関数のことである．定義域が全実数の場合，$f(x) = ax^2 + bx + c$ に対する二次関数 $y = f(x)$ の値域を，y についての不等式で表すと次のようになる．

(1) $a > 0$ なら，$-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \leqq y$ ．

(2) $a < 0$ なら，$-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \geqq y$ ．

これは平方完成してもわかるが，微分法で考えてもよい．$f'(x) = 2ax + b$ より，$x = -\dfrac{b}{2a}$ で極値 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ をとり，

(1) $a > 0$ なら $x = -\dfrac{b}{2a}$ で極小かつ最小．

(2) $a < 0$ なら $x = -\dfrac{b}{2a}$ で極大かつ最大．

であることからわかる．

つぎに，定義域が $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の場合，二次関数 $y = f(x)$, $f(x) = a(x-p)^2 + q$ $(a > 0)$ の値域はどのようになるのか．

史織

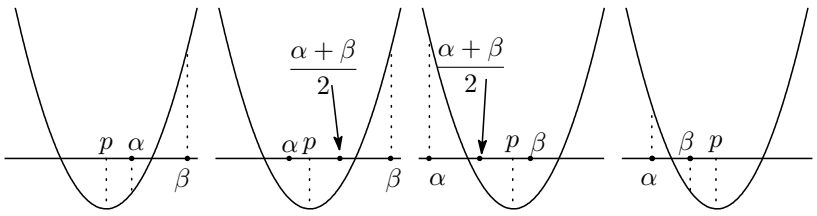
(1) $p < \alpha$ なら，$f(\alpha) \leqq y \leqq f(\beta)$ ．

(2) $\alpha \leqq p < \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ なら，$f(p) \leqq y \leqq f(\beta)$ ．

(3) $\dfrac{\alpha + \beta}{2} \leqq p < \beta$ なら，$f(p) \leqq y \leqq f(\alpha)$ ．

(4) $\beta \leqq p$ なら，$f(\beta) \leqq y \leqq f(\alpha)$ ．

です．これはグラフで考えました．



南海　グラフとは何かということは後で考えるとしてこれでよい．だから軸がどこにあるかで最大値や最小値がかわってくる．軸による場合分けの練習問題を掲げておくのでやってみてほしい．

演習 8　解答 8

(1) 関数 $y = x^2 - ax + 1$ の最小値を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，関数 $y = x^2 - ax + 1$ の最小値を求めよ．

演習 9　解答 9

$x + y = 1, x \geqq 0, y \geqq 0$ のとき， $ax^2 + y^2$ の最大値を $M(a)$, 最小値を $m(a)$ とする． $M(a)$, $m(a)$ を求めよ．

演習 10　解答 10

$a < 1$ とする． $x + y = 1, x \geqq 0, y \geqq a$ のとき，$x^2 - y$ の最大値を $M(a)$, 最小値を $m(a)$ とする．$M(a)$, $m(a)$ を求めよ．

南海　関数の値域が確定すれば，関数の取る値の最大値と最小値が確定する．しかし，逆に，次の例が示しているように，関数の取る値の最大値と最小値が確定しても，その間のすべての値を取るとはかぎらないので，値域は確定しない．

例 1.7.1 実数全体で定義された関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\ x \leqq -1 \text{ のとき}) \\ -x^2 - x + 1 & (-1 < x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\ x = 0 \text{ のとき}) \\ x^2 - x - 1 & (0 < x < 1 \text{ のとき}) \\ -1 & (\ 1 \leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

$y = f(x)$ のグラフをかき，値域，最大値 M ，最小値 m を求め，値域が $m \leqq y \leqq M$ とはならないことを確認してほしい．このようにグラフが連続していない関数では，値域は必ずしも，最大値と最小値の間のすべてをとるわけではない．このことに注意し，最大値，最小値問題でも，基本的には値域を確定することによって，求めるようにしたい．

さらにもう一題．

例 1.7.2 「$x > 0$ を定義域とする関数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ の値域を求めよ」という問題に対し，A 君の解答の一部を示す．

［解答］相乗平均，相加平均の関係をもちいると，

$$x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

したがって， $x > 0$ において $y \geqq 2$ ．

これについて以下の問に答えよ．

(1) 上の答案の誤りを指摘せよ．

(2) 上の問題を，y の値を与えることができる x の範囲は $x > 0$ である，ことに帰着させる方法で解け．

(3) $y = x + \dfrac{1}{x}$ の微分を用いて値域を求めよ．

南海　これはどうだろうか.

史織　えっ．この解答でいいと思うのですが.

南海　だが，例えば 定義域を $x>0$ として関数 $y=\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+1}$ はどうか．これも確かに

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+1}\geqq 2$$

だが，$\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+1}=2+\dfrac{1}{(x+2)(x+1)}$ なので単調に減少し値域は $\dfrac{5}{2}>y\geqq 2$ だ.

史織　そうか．$y=x+\dfrac{1}{x}$ のばあいも 2 以上であることはまちがいないが，2 以上の値をすべてとることができるかどうかはわからないのですね.

南海　相加相乗平均の関係の不等式は必要条件なのだ．上の問の続きをやってみてほしい.

史織　はい．$x+\dfrac{1}{x}=k$ とおくと $x^2-kx+1=0$ となる．これが $x>0$ の解をもつ条件を求める．2 解の積は 1 で正なので条件は

$$k>0 \text{ かつ } D=k^2-4\geqq 0$$

これから $k\geqq 2$ ．よって値域は $y\geqq 2$.

これは十分条件でもあるのですか.

南海　そう． k が存在しうる範囲の必要十分条件が $x>0$ が存在することだからだ.

史織　これはいわゆる逆像法という方法ですね.

次に (3) の方法．$y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ ．したがって $x=1$ で極小かつ最小でこのとき最小値は 2．$\lim\limits_{x\to\infty} y=+\infty$ なので値域は $y\geqq 2$ ．いつもはこんなに詳しくやっていません.

南海　本当はやらなくてはいけない． x の関数 y が整理すると $x+\dfrac{1}{x}$ で表され，$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおいて y の最大値や最小値を求める問題はよくある．このとき t のとりうる値の範囲を求めなければならない.

ところが参考書でも t の値域をしっかり求めるのではなく，相加相乗平均の関係の不等式で必要条件としての t の範囲だけで求めて，その後最大や最小を与える x を実際に求めて存在を示しておくことで，済ましているものも多い．それでよいときもあるが，ここは常に正確に考えるようにしよう.

1.7.2　合成関数，逆関数

史織　これまで考えたことをふまえ，合成関数，逆関数についても，正確につかみたいと思います.

南海　集合 A から集合 B への関数 $y=f(x)$ と，集合 B から集合 C への関数 $y=g(x)$ を考える.

この場合，集合 B に対する変数を y ，集合 C に対する変数を z と定めておく方が考えやすいので， g については $z=g(y)$ と表す．このとき，$z=g(f(x))$ は A から C への関数となる．これを二つの関数 f g の合成関数といい，$g\circ f$ と表わす．つまり， $g\circ f(x)=g(f(x))$ である.

A から B への関数 $y=f(x)$ で $x_1,x_2\in$ A に対し，$x_1\neq x_2$ ならば $f(x_1)\neq f(x_2)$ であるとき， f を A から B への **1 対 1 関数** という．A から B への関数 $y=f(x)$ が 1 対 1 関数であるとする．このとき値域の要素 y にたいして，$f(x)=y$ となる A の要素 x がただ 1 つ対応する．これによって B の部分集合である値域から A への関数が定まる．この関数を f^{-1} と表わす．定義より $f\circ f^{-1}(x)=x,\ f^{-1}\circ f(x)=x$ である.

現実的な逆関数の作り方は，$y=f(x)$ を逆に解いて，$x=g(y)$ を作ればよい．独立変数を x，従属変数を y とするのならこの x と y を入れ替えて，$y=g(x)$ としたものが，求める $f^{-1}(x)$ である．

演習 11　解答 11

次の f と g に対して，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ を合成した関数 $f\circ g(x)$ を求めよ．

(1) $f(x)=-x+2,\ g(x)=2x$

(2) $f(x)=2x^2+x-3,\ g(x)=x-1$

(3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1},\ g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

(4) $f(x)=x^2-2px+q,\ g(x)=x+p$

(5) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ g(x)=\dfrac{px+q}{rx+s}$

(6) $f(x)=\dfrac{2x}{x+4},\ g(x)=(3x-5)^2$

(7) $f(x)=x^3-2x,\ g(x)=x+\dfrac{1}{x}$

演習 12　解答 12

次の関数の逆関数 $f^{-1}(x)$ と定義域を求めよ．

(1) $f(x)=3x+2$

(2) $x\leqq 2$ で定義されている $y=-x^2+4x+2$ 〔神戸女子薬大〕

(3) $f(x)=x^2-2x-1,\ (1\leqq x)$

(4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

(5) $f(x)=ax+b$

(6) $f(x)=x^2-2px+q,\ (p\leqq x)$

(7) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ (ad-bc\neq 0)$

1.7.3　対応

南海　写像や関数の定義では「ある対応によって」とか「一つずつ対応している」など,「対応」という言葉が使われている.「対応」とはどういうことか.

史織　えっ,「対応」の定義ですか?

南海　というより,「対応」とは結局どのようなものかということをここで考えようということなのだ．$y=f(x)=x^2$ という関数で $x=2$ と $y=4$ は対応しているが $x=2$ と $y=0$ は対応していない．逆にいえば集合 A の任意の要素 a と集合 B の任意の要素 b が対応しているか対応していないかを明確に決める条件が存在すれば，それによって集合 A と集合 B の間の「対応」が定まる．

史織　そうすると写像の定義の冒頭は次のようにならなければならない．

集合 A の任意の要素 a と集合 B の任意の要素 b がある条件をみたすとき a と b は「対応している」という．

二つの集合 A, B において，

A のどの要素にも, B の要素が**一つずつ**対応している

とき，この対応を **A から B への写像**という．

史織　対応というのは大変広い意味がありそうですね．しかし高校数学ではあまり必要ないようです．

南海　ところがそうではないのだ．話は逆で高校数学のもっとも基本的な内容が実は「対応」の問題として統一的にとらえることができるのだ．少しその話をしよう．値域，軌跡，通過領域に関することだ．

史織　値域つまり関数のとる値の範囲，軌跡つまりある条件を満たす点の集合で曲線になるもの，通過範囲つまりある条件を満たす点の集合で領域になるもの，などを求める問題はどれも同じ形をしていて解き方も基本は同じだということは知っています．

南海　値域や軌跡，通過範囲が解き方が同じというだけではなく，問題そのものが同じなのだということである．それを少し説明しよう．

A, B を数直線や座標平面，またはその部分集合とする．A の要素を動く変数 X と B の要素を動く変数 Y の間に関係式で対応が定まっているとする．この関係式を $F(X,\ Y)=0$ と象徴的に書こう．象徴的というのは，式が一つとはかぎらないからである．また，X や Y と大文字を使ったのは，$X=(2,\ 3)$ のような平面の点のこともあるからだ．1 変数のときは小文字を使う．媒介変数には T が用いられることも多い．

(1) A, B が実数で $f(x)=x^2$ とし関数 $y=f(x)$ を考える．このとき対応を定める F は $F(x,\ y)=-x^2+y$ となる．$x=2$ と $y=4$ は対応しているが $x=3$ と $y=4$ は対応していない．

x が実数を動くとき $F(x,\ y)=0$ によって各 x と対応するような y の集合 $V=\{\ y\mid y\geqq 0\}$ が**値域**である．

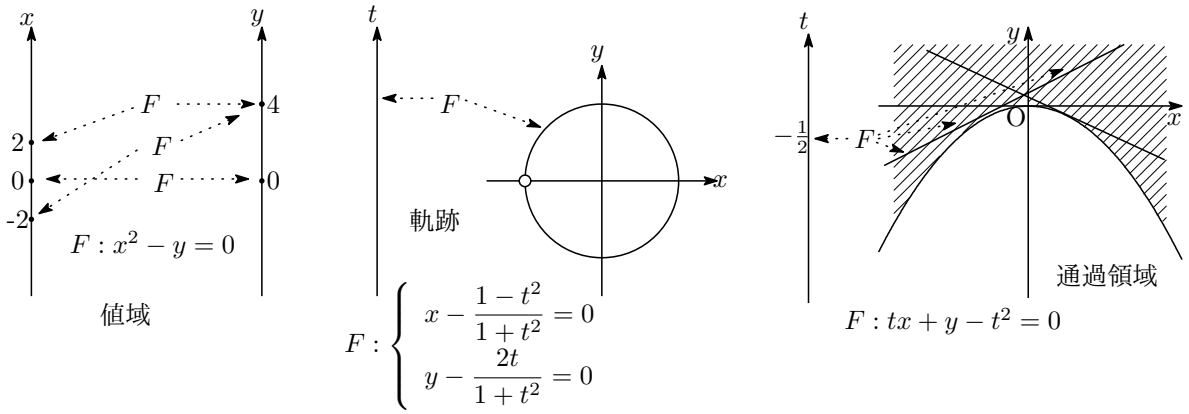
(2) A が実数で B が xy 平面．

二つの式 $F:\begin{cases} x-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=0 \\ y-\dfrac{2t}{1+t^2}=0 \end{cases}$ で実数 t と対応するような xy 平面の部分集合が**軌跡**そのもの．

(3) A が実数で B が xy 平面．

一つの式 $F:tx+y-t^2=0$ で対応を定める．$t=1$ と $(2,\ -1)$ は対応している．$t=1$ には $x+y-1=0$ で定まる xy 平面の直線上の各点が対応する．

実数 t が実数を動くとき, 対応する点よりなる xy 平面の部分集合が**通過領域**.



史織　そうか．確かに高校数学の対象のほとんどは「対応」だ．

南海　値域，軌跡，通過領域はどれも，集合 A に対して

A の要素と対応する B の要素全体

という形をしている．対応の条件を $F(T,\ X) = 0$ とし，これを集合で書けば

$$\mathsf{V} = \{X | X \in \mathsf{B},\ F(T,\ X) = 0 \text{ となる } T \in \mathsf{A} \text{ が存在する } \}$$

となる．この V があるときは値域であり，軌跡であり，通過領域と言われる，ということだ．

史織　「値域」,「軌跡」とか「通過領域」とかいっても要するに「一定の条件を満たす点の集合」のことなのですね．だから，T が A に存在する条件として V が求まるのです．これが V を定めるいちばん論理的な方法です．

南海　もちろん論理的にこうだからと言って，いつも求まるともかぎらないのだが，この論理的な考え方が高校生には大切だ．

1.7.4　数列は関数だ

南海　数列は関数だ．

史織　定義域が自然数の関数が数列でした．数列 $\{a_n\}$ に対して $f(n) = a_n$ と定めると自然数に対して定義された関数 $f(n)$ が得られます．

南海　そうなのだ．数列を関数の立場から考えることが大切だ．自然数に対して定義された関数 $f(n)$ を解析する基本は

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

を解析することである．これはつまり階差数列である．

階差を取る作用は $\Delta f(n) = \dfrac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n}$ としてみればわかるように，n の増分 1 に対する平均変化率だ．実は「階差をとる」ことを「差分する」ともいうのだが，これは言うまでもなく「微分する」と対応する言葉の使い方だ．ついでながら階差数列からもとの数列を見出す

$$f(n) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta f(k)$$

という操作は，関数 $f(x)$ では，原始関数を求める積分そのものだ．ついでに言えばこの操作を「和分する」という.「積分する」に対応する言葉だ．

このような観点から，いくつかの問題を紹介しよう．いずれも高校数学としては難問である．

演習 13　解答 13

$f(x)$ を実数係数の k 次の整式とする. 任意の整数 n に対して $f(n)$ が整数値をとるための条件を次の方法で考えよ.

(1) 『任意の整数 n に対して, $f(n)$ が整数となるための必要十分条件は
$f(x)$ の $k+1$ 個の連続する整数 $m,\ m+1,\ \cdots,\ m+k$ に対する値

$$f(m),\ f(m+1),\ \cdots,\ f(m+k)$$

がすべて整数値である』ことを示そう.

(i) n 次の整式 $f(x)$ に対して

$$f(x+1)-f(x)$$

は $n-1$ 次以下であることを示せ.

(ii) 冒頭の命題を数学的帰納法で示せ.

(2) 0 以上の整数 l に対し

$$u_l(x)=\frac{x(x-1)\cdots(x-l+1)}{l!}\ (l\geqq 1 \text{ のとき}),\quad u_0(x)=1$$

とおく.

(i) k 次多項式 $f(x)$ は実数 $c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_k$ を用いて次のように表されることを示せ.

$$f(x)=\sum_{l=0}^{k} c_l\cdot u_l(x)$$

(ii) 任意の整数 n に対して $f(n)$ が整数となるための必要十分条件は, $f(x)$ を上のように表したとき, $c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_k$ がすべて整数となることであることを示せ.

演習 14　解答 14

実数係数の k 次多項式 $f(x)$ が

$$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=4,\ \cdots,\ f(k)=2^k$$

をみたしている．このとき，$f(k+1)$ の値を求めよ.

史織　ありがとうございました.

1.8　座標の方法

2002.11.3

1.8.1　座標

南海　今回は，座標とベクトルを見直し，そのうえで座標平面と関数のグラフの関係や意味を考えたい．また，空間ベクトルと空間座標についても，いくつか考えよう．ところでまず平面で座標とは何か．

史織　平面上の点を $(1,\ 4)$ のように数の組で表すこと，ですか．

しかし極座標というのもあるから，よく考えなければ．

南海　平面上の点を数の組で表す，ということは正しい．その方法がいろいろある．

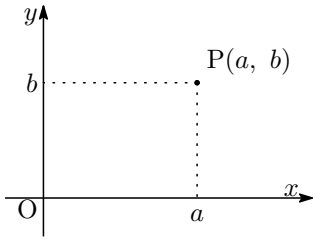


図 1

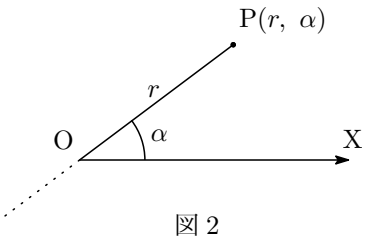


図 2

図 1 のように，2 本の数直線をそれぞれの 0 の点で直角に交わるようにして平面におく．この交点を原点と呼ぶ．平面上の各点からこれら 2 本の数直線に垂線を下ろし，それぞれの交点の値が a と b であるとすれば，この点に数の組 $(a,\ b)$ を対応させる．するとこの対応は一対一対応で，平面上のすべての点を数の組 $(a,\ b)$ で完全に表すことができる．

史織　これが直交座標ですね．

南海　極座標を説明しよう．図 2 のように，基準の半直線 OX を定める．始点 O と点 P を結ぶ直線が半直線 OX となす角を定める．つぎにその角の方向から見た O と P の距離をとる．この距離は負でもよい．これで点 P に数の組を対応させることができる．これが極座標だ．この場合も一対一対応だろうか．

史織　いや，例えば $(1,\ 30^\circ)$ と $(1,\ 390^\circ)$ は同じ点です．

南海　角度を度数法で表すと，これは一般的な「数」ではない．極座標ではやはり弧度法で $\left(1,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ や $\left(1,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi\right)$ といわねばならない．いずれにしても表し方は一通りではない．さらに $\left(1,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ と $\left(-1,\ \dfrac{\pi}{6}+\pi\right)$ はどうか．

史織　これも同じ点になります．

南海　このように極座標では数の組と平面の点は一対一対応ではないが，数の組によって点が定まることは確かなのでこれも座標といえる．

ついでに言えば複素数の極形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表示では r は $|z|$ のことなので非負の値にとる約束だ．が，極座標 $(r,\ \theta)$ で r は任意の実数でよい．平面の同じ点が直交座標で $(x,\ y)$，極座標で $(r,\ \theta)$ となったとするとこれらの間には相互の関係式がある．

史織　はい．

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

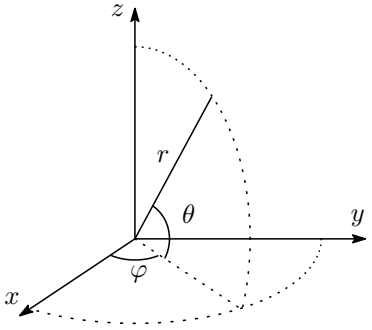
です.

南海　角は一般角だから当然周期 2π で同じ点になる．さらに

$$r\cos\theta = (-r)\cos(\theta+\pi),\ r\sin\theta = (-r)\sin(\theta+\pi)$$

なので $(r,\ \theta)$ と $(-r,\ \theta+\pi)$ も同じ点を定める．

史織　ところで今は平面の場合でした．空間の場合，直交座標は習いますが，極座標があるのですか．



南海　それは次のようにすればよい．このとき

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\varphi \\ y &= r\cos\theta\sin\varphi \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$

になる．角度は軸から動経の方にはかるとする．また角 θ は z 軸の正の方からはかる方式もある．

さて，数学の問題に対し，座標の方法によって何ができるか．

(1) 図形問題を式に移して考えることができる．

(2) 逆に関数を視覚的に考えることができる．

この二つはたがいに関連しているし，実際関連して発展してきた．

1.8.2　座標幾何のはじまり

南海　図形問題を座標で考える．これは高校生諸君にとっては当たり前のことだが，人間が関数や図形を座標で考えるようになるまでには長い長い道のりが必要だった．まず前提として

(1) 数を一般的な文字であらわすこと．

(2) 平面上の点を (3, 2) のように数の組であらわすこと．

ができていなければならなかった．

史織　この二つが準備されれば関数や図形を式にすることができると思いますが．

南海　ところがそうではなかったのだ．その歴史を少し話そう．

高校で「座標幾何」といっているものは，一般には「解析幾何学」といわれている．この解析幾何学は，座標の考え方で図形問題を解決しようということなのだが，人間がこのように考えられるまでには上の二つの前提の上に，さらに飛躍が必要だった．決定的な飛躍をしたのが**デカルト** (René Descartes,1596-1650) である．デカルトの時代にすでに文字で考えることは行われていた．しかし，図形と数を結びつけるとき a とか x とか一つの文字で 1 次元の量 (数直線上の値) を表わすということが確固としていた．だから，ab といえばこれは a と b との積なので，面積を表わすと考えられていた．すると $ax+by=c$ のような式は，面積の和が長さに等しいことを示すことになり，このような式は意味のない式と考えられていた．

史織　昔の人は数と量 (数直線上の長さ) が一体だったのだ．

南海　その通り．等式は，長さと長さ，面積と面積，体積と体積など次元が同じものどうしが等しいことを表わすべきであるから，各項の次数が等しい同次式でなければならないとされていた．

フェルマー (Pierre de Fermat,1601-1655) はデカルトと同時代の数学者で，確率論など多くのこととともに，座標，図形の方程式，方程式の表わす図形などを考えはじめた人だが，そのフェルマーでも「図形の等式は同次式でなければならない」という立場自体はギリシア時代と同じままで何かと不便だった．

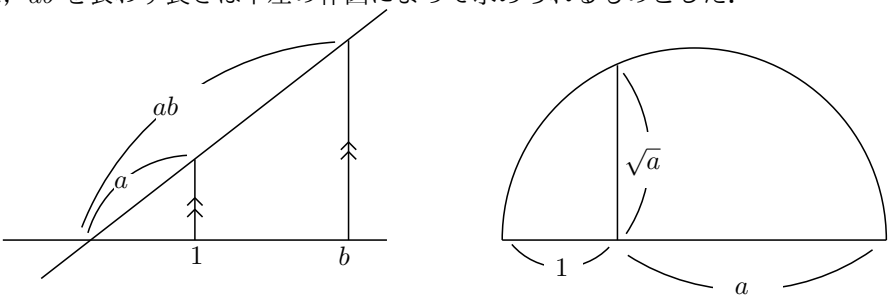
一方，方程式の研究などをすすめる代数学においては,「鶴と亀が合計 5 匹で，足は合計 14 本ある．それぞれ何匹いるか」なんかを考え $\begin{cases} 2x+4y=14 \\ x+y=5 \end{cases}$ 等を使う．だからもちろん $ax+by=c$ という式も意味をもっていた．同じ式が幾何学では面積の和が長さになるので意味がないとしたのでは，代数学の演算と幾何学の演算が別のものになってしまう．

ここで飛躍したのが，デカルトだった．デカルトがその研究の対象にしたのは，長さ，面積，体積ではなく，量の抽象としての数そのものであった．彼にとっては，長さ，面積，体積などの区別はなく，これらはいずれも 1 つの数で表現されるものだった．

ギリシャ人やフェルマーにとっては，a, b はいずれも線分の長さを表わしていたので，ab はこの a と b を 2 辺とする長方形の面積を意味したわけだが，デカルトはすべて同じ数として考え，ab に別の図形的解釈をおこなった．1 を定めておいて，a, b はそれで測った数を表わすとしたうえで， ab を比例式

$$1 : a = b : ab$$

における第 4 項としてとらえた．だから 1 を表わす長さと a, b を表わす長さとが与えられていれば，ab を表わす長さは下左の作図によって求められるものとした．



さらにまた，同じ理由からデカルト以前の人にとっては， a が線分の長さを表わすと考える限り，$\sqrt{a}$ は意味をもち得なかったのだが，デカルトは，1 を表す長さと a で表わす長さが与えられた場合，$\sqrt{a}$ を表わす長さを上右の図によって作図している．

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = a$$

なので，確かに求まる．このように，デカルトにとっては，線分の長さに代数的な演算を施した結果はまた線分の長さだった．図形の演算をそれまでの量から独立させて数の幾何として考えはじめたのだ．こうして代数学的演算と幾何学的演算の間には完全な 1 対 1 の対応がつき，代数学におけるすべての方法がそのまま幾何学の研究に使えることになった．このようなデカルトの飛躍を経て**点の座標**と線分などのあらわす量が数学の対象となった．

三つの点 (1, 2), (2, 3), (4, 5) が一直線上にある，ということは相似形の辺の長さの比を考えれば

$$\frac{3-2}{2-1} = \frac{5-2}{4-1}$$

という式で表される．ここから文字の考えを用いれば二つの点 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$ を結ぶ直線を

$$\frac{3-2}{2-1} = \frac{y-2}{x-1}$$

と表そうとすることは，すぐだった．

図形が**座標の間の関係式**によって表されるという発見は，考えればたいへん大きな発見である．こうしてデカルトによって今日皆さんが数学 II で習っている直線や円の幾何が始まった．これらを当然のように使っているが，しかしここに至るには長い歴史と，幾人かの人による考え方の飛躍があったことを思い起こしてほしい．

1.8.3 関数のグラフ

南海　もうひとつの大きな飛躍はグラフの方法の発見だ．グラフとは何かな．

史織　関数 $y = f(x)$ に対して，次のような平面の点の集合を関数 $y = f(x)$ のグラフという．

$$\{(a,\ b) \mid b = f(a),\ a,\ b \text{ は実数 }\}$$

ではどうでしょうか．

南海　その通り．ところでそうすると写像そのもののグラフも定義される．

集合 A と集合 B に対して，A と B の要素の組の集合

$$\{\ (a,\ b) \mid a \in \mathsf{A},\ b \in \mathsf{B}\ \}$$

を二つの集合 A と B の「直積」といい $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ と表す．

史織　そうか．平面というのは実数の集合と実数の集合の直積なんだ．

南海　なかなかわかりがいい．集合 A から集合 B への写像 f のグラフはどのように定義されるか．

史織

$$\{(a,\ b) \mid b = f(a),\ (a,\ b) \in \mathsf{A} \times \mathsf{B}\}$$

ですね．

南海　そうだ．

史織　でもこれはなんか定義のための定義という気がします．

南海　ところがそうでもない．「数列は自然数 (あるいは非負整数) を定義域とする関数だ」という立場に立つと，数列をグラフで考えることができる．

1.8.4 ベクトルと座標

史織　平面座標や空間座標とベクトルの成分表示との関係がはっきりしないのです．平面の場合どちらも二つの数の組ですが，同じようでもあり違うようでもあります．

南海　なかなか鋭い疑問だ．では，ベクトルとは何か．

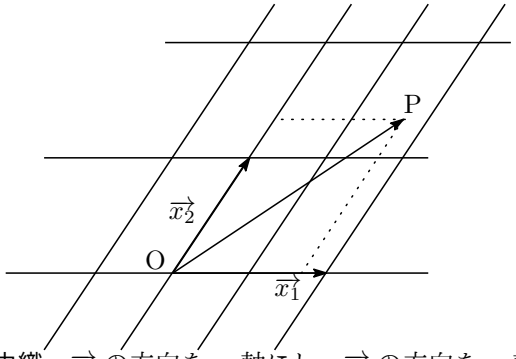
史織　ベクトルとは，平面，または空間におかれた，**方向**と**大きさ**という二つの量によって定まる…, 何かです．

南海　つまり数学の対象ということだ．ベクトルの集合とは，おかれた位置は違っても方向と長さの等しい矢線は同じものと見なすようにしたときの矢線の集合となる．ベクトルの定義に座標は関係しているか．

史織　えーっと，平面上の矢線ですから，どんな座標になっているかは関係ありません．
南海　一方，どこにおかれているかは関係ないのだから，ベクトルの始点を定まった点 O にとると，終点が平面上の点として定まる．逆に平面上の点 P を一つ取るとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が定まる．このように平面ベクトルと平面上の点は一対一に対応している．
史織　だから，このとき固定された始点を原点とするような直交座標を一つ入れれば，終点の座標としてベクトルを表すことができる，それがベクトルの成分表示ですね．
南海　しかしここからさらに座標というものをもう一度考えることができる．平面で考えよう．たがいに平行でなく 0 ベクトルでもない二つのベクトル $\overrightarrow{x_1}$ と $\overrightarrow{x_2}$ を定める．また任意の平面上の点 P をとる．任意の平面ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2}$$

と実数 $a_1,\ a_2$ によって一意に表される．するとこれによって平面上の点 P と実数の組 $(a_1,\ a_2)$ が一対一に対応する．



史織　これはまさに座標ですね．
南海　これも座標なのだ．図のように平行でない二つのベクトルが定まれば，それによって平面の点を二つの数の組で表すことができる．
史織　確かに，平面上の点を数の組で指示することができています．
南海　$\overrightarrow{x_1}$ と $\overrightarrow{x_2}$ が大きさが 1 で互いに直交しているときがいわゆる直交座標なのだ．
史織　$\overrightarrow{x_1}$ の方向を x 軸にし，$\overrightarrow{x_2}$ の方向を y 軸にする．そしてそれらのベクトルの終点をそれぞれの数直線の 1 の点にする．その結果座標が入りその xy 座標から逆に $\overrightarrow{x_1}$ と $\overrightarrow{x_2}$ を表すと

$$\overrightarrow{x_1} = (1,\ 0), \quad \overrightarrow{x_2} = (0,\ 1)$$

となるのですね．
南海　そうだ．

座標と内積
史織　座標とベクトルの間にこのような関係があるとすると，内積はどのように考えたらいいのでしょうか．
南海　まず内積の定義は?
史織　教科書では次のようになっています．
　二つのベクトル $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ がある．二つのベクトルのなす角を θ とする．このとき

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

と定める．$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ をベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積という．
南海　そうするとベクトルを直交座標の成分で表すとき内積はどのようになるのか．
史織　ベクトルの成分を $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2)$ とします．このとき内積は

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

です．証明は二点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ ， $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ をとり，$\triangle\mathrm{OAB}$ で余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\mathrm{OB}\cos\theta$$

で， $\mathrm{OA}\mathrm{OB}\cos\theta = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ なので

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2 = a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$$

となります．これから内積の成分表示が得られます．

南海　そういうことだ．ところで，逆に

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1+a_2b_2$$

を内積の定義とすれば，上の余弦定理の式を逆にたどって

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

が得られる．つまり**二つの定義は同値**ということだ．

史織　二つの定義のうち一方は座標に関係なく，一方は座標の成分で表されます．一方は座標の入れ方に関係するのに，一方は関係しません．なんかおかしいです．

南海　このおかしさに気づくのは高校範囲を超えているのだが，質問が出たので答えておこう．実は

$$a_1b_1+a_2b_2$$

は，座標を入れればこのようにかけるというだけで，その本質は座標とは関係ないのだ．

史織　では何でしょうか．

南海　それはベクトルの大きさだけを用いて定義されるのだ．ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさを絶対値の記号を使って $|\overrightarrow{a}|$ と表そう．すると内積は，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \frac{1}{2}\left\{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2\right\}$$

と表される．

史織　確かにこれは，ベクトルの大きさしか使っていないし座標とは無関係ですね．直交座標を入れて，その成分を用いれば確かに

$$\frac{1}{2}\left\{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2\right\} = a_1b_1+a_2b_2$$

になります．

南海　ま，このあたりは大学生になって線形代数を学び，二次形式と線形代数辺りを学んだときに思い出してくれればよい．さてこのように座標とベクトルは一体のものなので，図形関連の問題では両者をいったりきたりして考えるとよい．これについては『等積四面体と等面四面体』『ベクトルと平面で定まる図形』を見てほしい．

1.9　計量ということ

2009.8.25/2006.5.29

1.9.1　三平方の定理

美樹　数学 I で「図形と計量」という単元があります．三角比の定義を習い，三角比を用いて長さや面積，体積を求めます．要するに三角比なのですが，三角比と計量の関係がよくわかりません．
南海　これまでは「三角比」としてやってきたことが「図形と計量」と変わった．その意図は教科書からはあまり伝わってこない．中学課程では以前から「図形と計量」という単元があったようだが，その一部を高校に移すにあたって，単元の名称も「三角比」から「図形と計量」になったようだ．

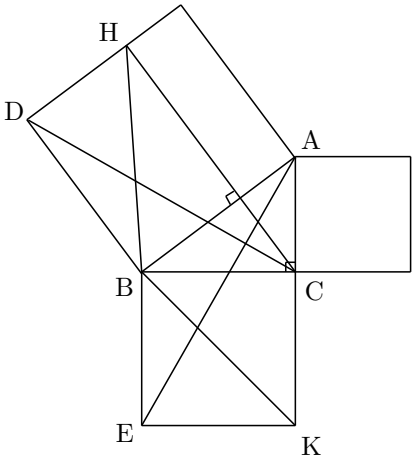
それはともかく，せっかく「計量」ということを高校でやるのだから，計量ということについてもう少し深めて考えなければ意味がない．

計量は三角比と一緒に考えるよりも，三角関数として加法定理とあわせて考えることでその意味がよくわかる。

計量の入り口は三平方の定理．これはどのような定理か．また証明は出来るか．
美樹　ピタゴラスの定理ともいわれている定理です．

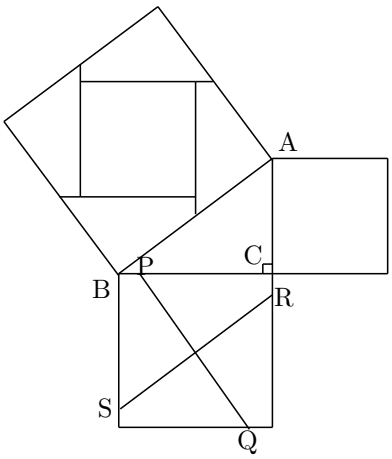
定理 8 直角三角形の各辺に，その辺を一辺とする正方形を作ると，斜辺上の正方形の面積は，他の 2 つの辺上の正方形の面積の和に等しい．

証明



図のように点に名前をつけます．△BEA と △BCD は 2 辺と挟角が等しく合同です．
一方 △BEA と △BEK は底辺が共通で高さが等しいので，面積が等しいです．
同様に △BCD と △BHD も底辺が共通で高さが等しいので，面積が等しいです．
よって，斜辺上の正方形を CH によって 2 つに分けると，そのうちの一つの半分が，辺 BC 上の正方形の半分に等しいことが示せました．辺 AC 上の正方形についても同様です．
これで直角三角形の各辺に，その辺を一辺とする正方形を作ると，斜辺上の正方形の面積は，他の 2 つの辺上の正方形の面積の和に等しい，ことが示せました．　□

南海　この定理から，次のようなこともわかる．
辺 BC 上の正方形の各辺上に 4 点 P, Q, R, S を，PQ と RS をたがいに直交し，かつ長さは斜辺 AB に等しくなるようにとる．
PQ と RS で四つに分けられた断片を，斜辺上の正方形の直角にあわせて置く．
するとその真ん中にできる正方形が，辺 AC を 1 辺とする正方形と同じ大きさになる．



美樹　なぜ計量の基本が三平方の定理なのですか。
南海　三平方の定理は何を主張しているのか．
美樹　2 つの正方形の面積の和が斜辺上の正方形の面積の和に等しい? これは定理そのものですね．
南海　三平方の定理は面積の関係でいわれるのだが，長さの関係でいうとどのようになるのか．
美樹　線分 AB の長さが

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2}$$

となる．
南海　そう．われわれの平面で普通に距離といっているものは，2 点 A, B の間の距離 AB が，その 2 点を結ぶ線分を斜辺とするような直角三角形 ABC の，直角を挟む 2 辺 CA, CB の長さを用いて上のように表される．三平方の定理はこれを主張している．
美樹　長さが面積や体積の基本なので，三平方の定理は計量の基本性質を定めているのですね．xy 平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ の間の距離が

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

で与えられるというのも，三平方の定理を根拠にしているのですね．
南海　ところでこのことがわかったら，もう一息考えておこう．
原点を O とする．次の同値が成り立つ．

(i) 2 直線 OA と OB が直交している．

(ii) $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2$ が成り立つ．

(iii) これを成分で書くと

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2$$

(iv)

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

南海　最後の式は，ベクトルでいうと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積が 0．というだ．
美樹　高校では，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の内積を，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| \cos\theta$$

で定め，そのうえで余弦定理によって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = x_1x_2 + y_1y_2$$

を示します.

南海　そうだ．そのように教科書の理論構成の仕組みを考えておくことは大変いいことだ.

xy 座標平面をベクトルの集合としてとらえることや，ベクトルの集合に内積を定めることと距離を定めることの同値性など，については,『数学対話』の中の『線型代数の考え方』の「内積と直交変換」をみてほしい.

ここでは，三平方の定理が長さを測ることの基礎である，ことを確認して，もう少し高校数学の仕組みをみていこう.

三平方の定理が成り立つような距離のことを「ユークリッドの距離」(より正確には「ユークリッド計量」) という.「ユークリッドの距離」が定まった平面をユークリッド平面という.

美樹　ということは，他にも距離はあるのですか.

あっ，そういえば入試問題で，2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ に対して

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

とする，というのをみたことがあります.

これも距離ですか.

南海　平面上の 2 点に対して負でない実数が定まるので，距離のようである.

これを距離と判断するためには，どんな性質を満たすものを距離というのか考えなければならない．つまり，距離といえるためには，どのような条件が要請されるのか，考えていこう.

そのために，ユークリッドの距離ではどのような性質が成り立っているのか，それを調べよう.

1.9.2　三角形の成立条件と距離の公理

南海　われわれの xy 平面は普通のユークリッドの距離が定まっているとする.

距離という以上，それは負でない実数値が定まり，また点 A と点 B の距離が点 B と点 A の距離に等しく，さらに $\mathrm{AB} = 0$ であることは $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ と同値でなければならないだろう.

しかしこれだけで距離とすると，実はいろいろな距離ができすぎる．つまり余りに広い定義は，数学の定義としては意味がないのだ．もう少し，これこそ距離だ，といえるように距離を特徴づけなければならない.

そのために，われわれの日頃使っている距離について調べておかねばならない.

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ と原点 O に対して，△OAB が成立しているとする．つまりどの 3 点も同一直線上にないとする.

$$\begin{aligned} \mathrm{OA} &= \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \\ \mathrm{OB} &= \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} \\ \mathrm{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

である．これらの間にどのような関係が成り立っているか.

美樹　これらの間の関係って，三角形の成立条件ですか.

南海　そうだ．そこでまず三角形の成立条件とは何か.

美樹　次の定理だと習いました.

定理 9 3 つの正数 $a,\ b,\ c$ を 3 辺の長さとする三角形が存在するための必要十分条件は，不等式

$$a < b + c,\ b < c + a,\ c < a + b \quad \cdots ①$$

が成り立つことである．

南海　不等式は c に注目すれば

$$|b - a| < c < b + a$$

ともかける．どの文字についても同じである．そこで，定理 9 を証明してほしい．

美樹　はい．まず必要条件を示します．平面に △OAB があり，$\mathrm{OB} = a,\ \mathrm{OA} = b,\ \mathrm{AB} = c,$ とする．O が原点になるように平行移動し，他の 2 点の座標が $\mathrm{A}(x_1,\ y_1),\ \mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ であるとする．このとき

$$|\mathrm{OA} - \mathrm{OB}| < \mathrm{AB} < \mathrm{OA} + \mathrm{OB} \quad \cdots ②$$

が成立することを示せばよい．

OA + OB と AB の大小は，その 2 乗である $(\mathrm{OA} + \mathrm{OB})^2$ と AB^2 の大小と一致します．また |OA − OB| と AB の大小は，その 2 乗である $(\mathrm{OA} - \mathrm{OB})^2$ と AB^2 の大小と一致します．そこで ② の両辺を 2 乗して差をとる．

$$\begin{aligned} & (\mathrm{OA} + \mathrm{OB})^2 - \mathrm{AB}^2 \\ = \ & (\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} + \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2})^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 \\ = \ & 2\sqrt{({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2)} + 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} & \mathrm{AB}^2 - (\mathrm{OA} - \mathrm{OB})^2 \\ = \ & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} - \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2})^2 \\ = \ & -2(x_1 x_2 + y_1 y_2) + 2\sqrt{({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2)} \end{aligned}$$

です．これがともに正であることは

$$-\sqrt{({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2)} < x_1 x_2 + y_1 y_2 < \sqrt{({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2)}$$

と同値，つまり

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 < ({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2)$$

と同値です．これってコーシー・シュワルツの不等式ですね．そこで右辺から左辺を引くと

$$({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

となる．ところが △OAB が三角形になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行でないので，平行条件が成立せず

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$$

です．よって

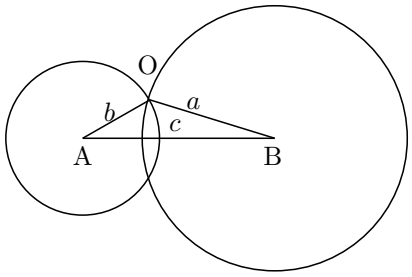
$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 > 0$$

となる．これで三角形の成立条件の不等式が示された．

十分条件を示す．

① を満たす 3 正数 $a,\ b,\ c$ がある．$a,\ b,\ c$ を 3 辺とする三角形が存在することは，次のように図形的に示される．

つまり，長さ c の線分 AB をとる．点 A を中心に半径 b の円と，点 B を中心に半径 a の円をかく．



① は，この 2 円の中心間の距離 c が，半径の和 $b+a$ よりも小さく，半径の差の絶対値 $|b-a|$ よりも大きいことを意味している．

よってこの 2 円は交わる．交点を O とすれば，$\mathrm{OA}=b,\ \mathrm{OB}=a$ となり，3 辺が $a,\ b,\ c$ の $\triangle\mathrm{OAB}$ が存在した．これで定理 9 が示された． □

南海　十分条件の証明は図形に頼った．それも証明にはなっているのだが，円が交わる条件を無前提に使っている．

美樹　使わずにできるのですか．

南海　図形に頼らない十分条件の証明も試みてみよう．三角関数を念頭においたものだが，三角関数は使わない．　① を満たす 3 正数 $a,\ b,\ c$ がある．このとき，O を原点とし，$\mathrm{A}(b,\ 0)$ とする．点 $\mathrm{B}(X,\ Y)$ を

$$X=a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\ Y=a\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$$

で定める．条件 ① は各辺が負でないので

$$(b-a)^2<c^2<(b+a)^2$$

と同値である．これから

$$b^2+a^2-c^2<2ab,\ -2ab<b^2+a^2-c^2$$

と同値なので

$$-1<\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<1$$

つまり

$$\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right|<1$$

である．したがって

$$1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2>0$$

であるから，これは確かに x 軸上にない xy 平面上の点を定めている．

美樹　あとは

$$\mathrm{OB}=a,\ \mathrm{AB}=c$$

を確認すればよい．やってみます．作り方から $\mathrm{OB}^2=a^2$ は明らかです．

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (X-b)^2+Y^2\\ &= \left(a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-b\right)^2+a^2\cdot\left\{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2b}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2 \\
&= \frac{\{a^2-b^2-c^2+(a^2+b^2-c^2)\}\{a^2-b^2-c^2-(a^2+b^2-c^2)\}}{4b^2} + a^2 \\
&= \frac{(2a^2-2c^2)\cdot(-2b^2)}{4b^2} + a^2 = -a^2+c^2+a^2 = c^2
\end{aligned}
$$

確かに成りたちます．よって $a,\ b,\ c$ を 3 辺とする三角形が存在した． □

美樹　なるほど．条件を満たす点を実際に構成するのですね．

南海　もちろんこのように $X,\ Y$ を定めたのは，$\angle \mathrm{BOA} = \theta$ としたとき，$a\cos\theta,\ a\sin\theta$ が念頭にあり，それをヒントにしているが，見つかってしまえば，三角関数とは独立に，定理が示せている．三角性の成立条件の不等式のことを**三角不等式**ともいう．

美樹　三角不等式は，三平方の定理で特徴づけられる距離から導かれる結果なのですね．

南海　そう．ただし，今度は距離という概念を定義しようとすると，三角不等式を距離が満たすべき性質の一つとしなければ，意味のある定義にはならない．3 点が同一直線上にある場合を含めると，2 点 A, B の間の距離 AB というものは，次の性質をもっている．平面上の任意の 3 点 A, B, C に関して

$$\mathrm{AB} \leqq \mathrm{CA} + \mathrm{CB}$$

ここでこれをふまえて集合 X の「距離」という概念を定義しよう．

定義 6 距離の公理集合 X の上に 2 変数実数値の写像 $d(x,\ y)$ が定義されていて、X の任意の要素 $x,\ y,\ z$ に対して，d が**距離の公理**とよばれる次の性質を全て満たすなら，d は X 上の距離であるという．

(i) 非負性 (半正定値性): $d(x,\ y) \geqq 0$,

(ii) 同一性 (非退化性): $d(x,\ y) = 0 \iff x = y$,

(iii) 対称性: $d(x,\ y) = d(y,\ x)$,

(iv) 三角不等式: $d(x,\ y) + d(y,\ z) \geqq d(x,\ z)$

美樹　すると 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1),\ \mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ に対して

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

と定めるとき，d は距離でしょうか．確認してみます．

(i) $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geqq 0$ は成立．

(ii)

$$
\begin{aligned}
&|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0 \\
&|x_1 - x_2| = 0,\ |y_1 - y_2| = 0 \\
&\mathrm{P} = \mathrm{Q}
\end{aligned}
$$

も成立．

(iii) $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ より，対称性も成立．

(iv) $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$ とします.

$$\begin{aligned} & d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ = \ & |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ \leqq \ & |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ = \ & d(\mathrm{R},\ \mathrm{P}) + d(\mathrm{R},\ \mathrm{Q}) \end{aligned}$$

三角不等式も成立します.

この d も距離なのですね．でもこの距離は，AB を斜辺とする直角三角形 △ABC において

$$d(\mathrm{A},\ \mathrm{B}) = d(\mathrm{C},\ \mathrm{B}) + d(\mathrm{C},\ \mathrm{B})$$

なので，三平方の定理は成立しません.

南海　そうなんだ．だから逆にいうと，三平方の定理は，普通の距離，ユークリッドの距離を特徴づけるものなのだ.

1.9.3　曲線の計量

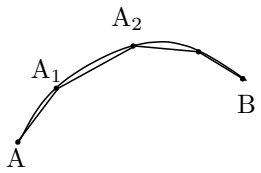
美樹　2 点間の距離, つまり直線の長さについてはわかってきました．でも曲線の長さはどのように決めるのですか.

南海　一気に難しいところだ.

点 A から点 B までの連続でなめらかな曲線 C の長さ L は,
次のように考える．曲線 C 上に点列

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A},\ \mathrm{A}_1,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n = \mathrm{B}$$

をとる．この点列を P としよう.



美樹　いろんな点列を考えるのですか.

南海　そう．一つの点列 P に対して折れ線 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 \cdots \mathrm{A}_n$ の長さを

$$L_P = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$$

とおく.

美樹　n も増やし P をどんどん細かくしていった極限が曲線の長さなのですね.

南海　連続曲線に関していえばそのように考えてよい．あらゆる折れ線 P を考え，すべての P に関して

$$L_P \leqq l$$

となるような l の最小値が存在するとき，その最小値を曲線の長さ L と定める.

美樹　2 点を結ぶ最小値が直線の長さなのだから，分割を細かくすれば，和 L_P は増大していく．曲線がはじめから折れ線でないかぎり，折れ線での近似は近似であって L とは一致しない．つねに L よりは小さい．だからこんな言い方をするのですか.

南海　そういうことだ．詳しくは大学の解析で習ってもらいたい.

1.9.3.1　微分可能曲線の長さ

南海　そこで，t を媒介変数とし，微分可能な関数 $f(t),\ g(t)$ を用いて $x = f(t)$，$y = g(t)$ と表される曲線の長さを考えておこう．最近，これが数学 III で必修でなくなった.「計量」ということを高校数学に取り入れながら，曲線の長さを外すというのは困ったことだ.

xy 平面上の曲線 C が，$x = f(t),\ y = g(t)$ と媒介変数 t によって表されているとする．$f(t),\ g(t)$ はそれぞれ t で微分可能とする．このとき，曲線 C の $t = a$ に対応する C 上の点 $(f(a),\ g(b))$ から $t = b$ に対応する C 上の点 $(f(b),\ g(b))$ までの長さ L は

$$L = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt$$

で求まる．証明の概略を示そう.

t の区間 $[a,\ b]$ を n 等分し

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

とする．また $\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$ とおく.

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\{f(t_{k+1}) - f(t_k)\}^2 + \{g(t_{k+1}) - g(t_k)\}^2}$$

平均値の定理によって

$$\begin{aligned} f'(c_k) &= \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta t} \\ g'(d_k) &= \frac{g(t_{k+1}) - g(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{g(t_{k+1}) - g(t_k)}{\Delta t} \end{aligned}$$

となる $c_k,\ d_k$ が区間 $[t_k,\ t_{k+1}]$ にとれる．これから

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\{f'(c_k)\Delta t\}^2 + \{g'(d_k)\Delta t\}^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{f'(c_k)^2 + g'(d_k)^2}\Delta t \end{aligned}$$

美樹　区分求積の形です.

南海　詳しくは『数学対話』－「定積分の定義」を見てほしい．c_k と d_k と出てくるのでもう少し詳しく考えなければならないのだが，$n \to \infty$ の極限が存在し，

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

となることが示される.

美樹　この値を L とするのですね.

南海　高校の教科書では，曲線の長さをすでに知っているものとして，次のように示す.

$t = a$ に対応する C 上の点 $(f(a),\ g(b))$ から t に対応する C 上の点 $(f(t),\ g(t))$ までの長さを $L(t)$ とおく．図のように t を $t + \Delta t$ まで変化させる．Δt が小さいときは曲線の長さの増加分 $L(t + \Delta t) - L(t)$ は，

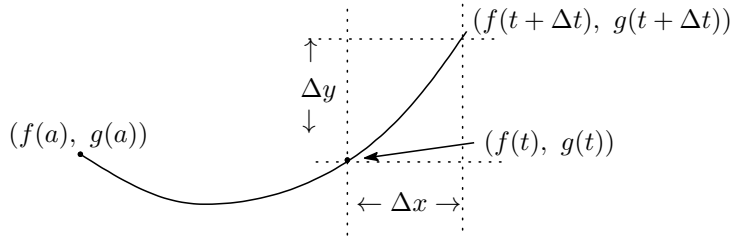
$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

にほぼ等しい.「ほぼ等しい」というのは，誤差が Δx や Δy よりさらに一段小さく，割って極限をとるときには無視できる，ということなのだ．証明を厳格にする方法はもちろんあるが,「ほぼ等しい」というつかみ方も大切だ．よって

$$\frac{L(t+\Delta t)-L(t)}{\Delta t} \fallingdotseq \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$\Delta t \to 0$ の極限でこれは一致する．

$$\frac{dL(t)}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$



これから原始関数を求める計算をし，$L(a)=0$ を用いれば

$$L(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

となる．$t=b$ を代入すればよい．

また曲線が $y=f(x)$ で表されるときは，$x=t,\ y=f(t)$ となるので，t を x に置きかえることで，$x=a$ の点から $x=b$ の点までの長さ L は

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

となる．

1.9.4　角という量

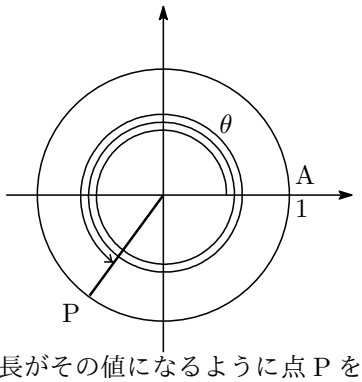
南海　角もまた量である．この量をどのように量るか．

美樹　度で表す度数法と，ラジアンを単位とする弧度法があります．

南海　三角関数は歴史的には三角比からはじまった．三角形の内角を考えるかぎりは，0° から 180° の範囲で考えていればよかった．一方，角を円周上を動点がどれだけ動いたかを表すことに使おうとすると，何周でも回れるのだから 180° では足りず，いくらでも大きい値がいるし，逆回りも考えれば負の値もいる．こうして角は，すべての実数で定義されねばならなくなった．このように任意の実数値で考えた角を**一般角**という．

ところで，度数法は，1 周の角を 360° とするように，人間の歴史や習慣から決められたもので数学的な必然性はない．円弧の長さをもって角度の値とする新しい方法を用いる．それが**弧度法**というもので，合理的で自然な定義である．弧度法とは次のようにして角度という量の値を，円弧の

長さでもって表す方法である．



xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円をとる．A$(1,\ 0)$ とする． はじめ点 A の位置にあった動点 P が，円周上を反時計回り (左回り) にまわったとき，P が動いた長さをもって，対応する角 θ の値とする．

動点 P が，円周上を時計回り (右回り) にまわったとき，P が動いた長さに対し，その符号を負にした値をもって，対応する角 θ の値とする．

逆に，任意の実数値に対し，それが正なら，反時計回りに弧長がその値になるように点 P を動かしたときに定まる左回りの角をとり，それが負なら，時計回りに弧長がその値となるように点 P を動かしたときに定まる右回りの角をとる．このようにすることで，任意の実数値に対して角が定まる．

弧度法の単位はラジアンである．1 ラジアンは，半径 1 の円の円弧の長さが 1 となる角で，度数法では約 57.28° に相当する．普通は何もつけず $\theta = \dfrac{3\pi}{5}$ のように用いる．

美樹　∠AOB のように用いる記号「∠」は方向を考えていないように思います

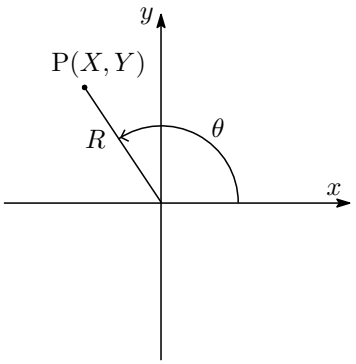
南海　そうなのだ．∠ は角の絶対値を表す．だから負の値はとらない．それに対し，角は向きがあるので，同じ ∠AOB $= \theta$ であっても，反時計回りにとるときは $+\theta$，時計回りにとるときは $-\theta$ とするのである．

1.9.5　三角関数

南海　そこで三角関数を定義し，その基本性質がこれまで考えたこととどのように結びつくかみてみよう．三角関数の定義を述べよ．

美樹　一般角 θ に対して，その角の $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ を次のように定める．

xy 平面上の動点 P をとる．原点 O との長さ OP を R とする．また x 軸の正の方から半直線 OP への角が θ である．



点 P の xy 座標が $(X,\ Y)$ であるとき，角 θ の三角関数 $\cos\theta,\ \sin\theta,\ \tan\theta$ を

$$\cos\theta = \frac{X}{R},\ \sin\theta = \frac{Y}{R},\ \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

で定める．これらの関数を θ を変数とする三角関数という．

ただし，$R = 0$ のとき三角関数の値は定めない．また，$X = 0$ であるとき，つまり動点 P が y 軸上にあるとき，$\tan\theta$ は定義されないものとする．

南海　その通り．この定義にもとづいて三角関数の基本性質を導いておこう．

1.9.5.1　余弦定理

美樹　余弦定理は三角比で習いました．

南海　余弦定理は，三角形の辺と内角の間に成り立つ関係と考えられている．またそれに違いはないのだが，距離と三角関数の基本関係とも見なすことができる．

点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(b\cos\beta,\ b\sin\beta)$ をとる．このとき三平方の定理によって

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (b\cos\beta - a)^2 + (b\sin\beta - 0)^2\\ &= a^2 + b^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) - 2ab\cos\beta\\ &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\beta\end{aligned}$$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$ なので，角 β は OA から OB にはかっても，逆にはかってもよく，$\angle$AOB で定まる．

美樹　余弦定理って要するに三平方の定理ですか．

南海　$\beta = \dfrac{\pi}{2}$ なら三平方の定理だ．もちろんこれは三平方の定理を特別な場合に含む一般的な証明というわけではなく，三平方の定理をもとに，なす角が直角でない場合に一般化したものだ．長さや角は量であり，これらの量は合同な変換によって不変である．

角と角を挟む 2 つの線分の長さの関係は合同に動かしても変わらない．したがって平面上の任意の 2 本の線分 CA と CB と $\theta = \angle$ACB に対して

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}\cos\theta \quad \cdots ②$$

が成り立つ．角 θ が $0 < \theta < \pi$ にあれば，これは $\triangle$CAB における $\angle$ACB についての余弦定理に他ならない．

1.9.5.2　加法定理

南海　このことから，ただちに加法定理が導かれる．平面上の 2 点 A, B を

$$\mathrm{A}(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha),\ \mathrm{B}(b\cos\beta,\ b\sin\beta)$$

と表す．このとき $\angle\mathrm{AOB} = |\alpha - \beta|$ である．この 2 点に関して，三平方の定理から

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (b\cos\beta - a\cos\alpha)^2 + (b\sin\beta - a\sin\alpha)^2\\ &= b^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta + a^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha - 2ab(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\\ &= a^2 + b^2 - 2ab(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

一方余弦定理から

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos|\alpha - \beta|\\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta)\end{aligned}$$

2 つを比較して

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

これから，いわゆる余角の公式によって

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\}\\ &= \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right\}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

β を $-\beta$ に変えたものを含め

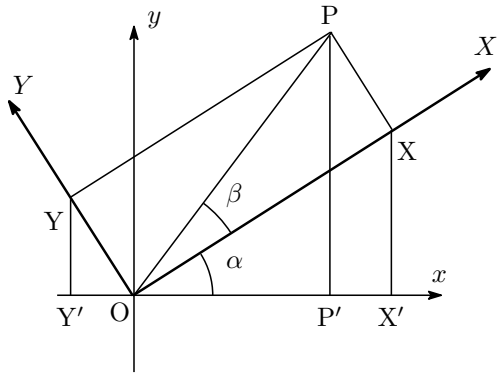
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

を cos と sin の加法定理という．

美樹　点 A を x 軸上にとって，三平方の定理で余弦定理を導き，動かしても変わらないことを確認して余弦定理を導いておく．こんどは 2 点を一般の位置にとって，AB の長さを，余弦定理と三平方の定理の 2 通りの方法で書き出す．それと等値すると加法定理になりました．

南海　そう．だから加法定理は，三角関数の定義と三平方の定理からただちに導かれる基本定理である，といえる．加法定理の証明は次のように余弦定理を使わない方法もある．

図のように xy 座標系と XY 座標系をとる．



$$\begin{aligned}
&\mathrm{OP}\cos(\alpha+\beta)\\
=\ &\mathrm{OP'}\\
=\ &\mathrm{OX'} - \mathrm{P'X'}\\
=\ &\mathrm{OX'} - \mathrm{Y'O'}\\
=\ &\mathrm{OX}\cos\alpha - \mathrm{OY}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\
=\ &(\mathrm{OP}\cos\beta)\cos\alpha - (\mathrm{OP}\sin\beta)\sin\alpha
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

美樹　でも角の向きや点 P が他の象限にあるときも同様かどうかは，調べなければならない．

南海　線分にも方向をつけて正負をもたせれば，一般的に成り立つことがわかるのだが，少し準備がいる．またこれは，余弦定理を用いてはいないのだが，直角という概念は基本的なもので，直角は，結局三平方の定理で特徴づけられるので，背景に三平方の定理，ユークリッドの距離があることは，変わらない．

1.9.6　余弦定理と正弦定理

美樹　こうしてみると，余弦定理と加法定理が基礎なのですね．正弦定理はどのような位置にあるのでしょうか．

南海　正弦定理は余弦定理から導くことができる．

美樹　余弦定理と正弦定理は別々の定理のように習います．

南海　△ABC があり，各頂点の対辺の長さを a, b, c とする．

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

が成り立つ．正弦定理とは，外接円の半径を R とするとき，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つことをいうものだ．ところで三角形の内角なので，sin はすべて正だから

美樹　平方したものを比べればよい．

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \\
\iff\quad & \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} \\
\iff\quad & a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A \\
\iff\quad & a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right)^2 \right\} = b^2 \left\{ 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \right\} \\
\iff\quad & 4c^2a^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\
\iff\quad & \{b^2 - (c-a)^2\}\{(c+a)^2 - b^2\} = \{a^2 - (b-c)^2\}\{(b+c)^2 - a^2\} \\
\iff\quad & (a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c) \\
& = (a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(-a+b+c)
\end{aligned}$$

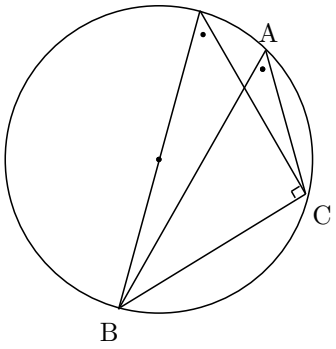
これは成立する．これで同様にして

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

まで示せました．この式の値が外接円の直径であることを示せば，正弦定理が示せます．

南海　3 つの角のうちどれかは鋭角だ．A が鋭角であるとして，2 点 B, C を固定したまま，点 A を外接円周上を動かす．

美樹　わかりました．このように点 A を動かしても，$\dfrac{a}{\sin A}$ の値は不変です．ですから，BA が直径になるときを考えると，



$$2R \sin A = a$$

がわかります．

南海　今日は，長さと角を中心に計量ということの仕組みをすかし考えた．

面積や体積などの基本についてもいずれまた考えてみよう．

1.9.7　弧長と三角関数

美樹　角を円弧の長さで定義しました．一方 $y = f(x)$ の曲線の長さもわかりました．すると次の関係が成りたつはずです．円の方程式は $y = \sqrt{1 - x^2}$ です．

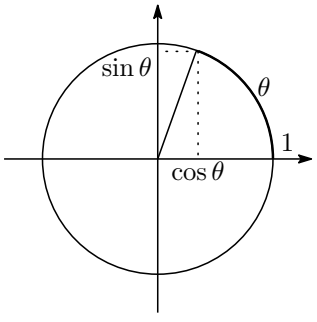
$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

より

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

ですから角 θ に対応する弧長が θ になるので

$$\theta = \int_{\cos\theta}^{1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{\cos\theta}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$



y 方向に積分するのも同じなので

$$\theta = \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

も成りたつはずです.

南海　その通りである．積分変数を t にそろえ，$\cos\theta = x$ とおくと，$\theta = \cos^{-1} x$ と逆関数で表される．sin も同様である．つまり

$$\begin{aligned} \sin^{-1} x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\ \cos^{-1} x &= \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \end{aligned}$$

これは積分による三角関数の逆関数の定義である．弧長による三角関数の定義という考え方は，現代数学に通じる新しい数学が 18 世紀から 19 世紀にはじまる一つの入り口だった.

美樹　三角関数の定義は一つではないのですね．そうか.『数学対話』「関数の展開とオイラーの公式」に三角関数を級数で定義することが書かれていました.

南海　そこでは三角関数を

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

として，つまり e^{ix} の実数部分と虚数部分として定めることもできる．そこでは加法定理の別の証明を与えている．例 1.2.1 を見てほしい．この先は新しい世界だ.

1.10　定積分の定義

2013.6.28/2000.10.15

1.10.1　なぜ「微積分の基本定理」?

史織　図書館で参考書を見ていたら

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \cdots ①$$

が，微分積分の基本定理と書いてありました．でも高校の教科書では，

> $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を
>
> $$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$
>
> で定める．

となっています．$f(x)$ の原始関数とは微分すれば $f(x)$ となる関数のことですから，① が成り立つのは当然で,「基本定理」というようなことではないはずです．

南海　なるほど．最近はこれを基本定理と書くことはまずない．しかし昔の参考書などには，基本定理と書かれていることも多い．教科書の記述が，1970 年代に大きくかわったのだ．教科書にどのように書かれているのかということと，事実として，微分や積分の基本事項は何なのかということを，考えて見よう．

現在の教科書にはどのように書いてあるのか見てみよう．手元にあるのは「数研出版」の 1997 年版の教科書だが，現在のものと大きくはかわっていない．次のような流れになっている．

(1) 函数 $f(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の不定積分，または原始関数という．

(2) 区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，区間 $[a, x]$ で x 軸と $y = f(x)$ のグラフ，および x 軸の点 $(a,\ 0)$, $(x,\ 0)$ を通る 2 直線で囲まれた図形の面積を $S(x)$ とする．このとき

$$S'(x) = f(x)$$

が成り立つ．

(3) このことは $S(x)$ が $f(x)$ の原始関数の一つであることを意味するので，$S(x)$ は $f(x)$ の任意の原始関数 $F(x)$ を用いて $S(x) = F(x) - F(a)$ と表される．

そこで，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

で定義する．(以上数学 II)

(4) 区間 $[a,\ b]$ を n 等分して

$$a = x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n = b$$

とし，$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ とおくとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

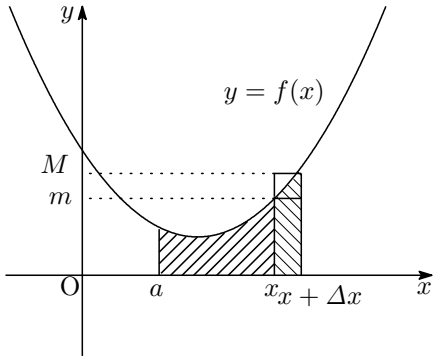
が成り立つ (数学 III).

このようになっている．一番重要なところは，(2) である．その証明は教科書によって書かれていたりいなかったりする．それをここで書いておこう．

(2) の証明　$y = f(x)$ と x 軸および $(a,\ 0),\ (x,\ 0)$ を通る y 軸に平行な 2 直線で囲まれる図形の面積を $S(x)$ とおく．

x に対して増分 Δx をとり小区間 $[x,\ x+\Delta x]$ での最小値を m，最大値を M とする．

$$m\cdot\Delta x \leqq S(x+\Delta x) - S(x) \leqq M\cdot\Delta x$$



$\Delta x \to 0$ のとき $m,\ M \to f(x)$ である．よって

$$m \leqq \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \leqq M$$

より

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

したがって

$$S'(x) = f(x)$$

である．

(証明終わり)

あわせて (3) のはじめのところは次のように示される．ここで $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする．$S'(x) - F'(x) = 0$ なので，

$$S(x) = F(x) + C$$

とおける．$S(a) = 0$ なので $C = -F(a)$

$$\therefore\quad S(x) = F(x) - F(a)\quad \text{つまり}\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

が成り立つ.

高校数学としては，ここが一番重要なところだ.

史織　すると「$y = f(x)$ と x 軸に囲まれた図形の面積は，$f(x)$ の原始関数で求めることができる」ということになります．これが「微積分の基本定理」なのですか.

南海　この面積とその導関数の関係は重要で，これを発見するまで，面積を求めるのに人間はずいぶんと苦労した.

これは大切なことではあるのだが，教科書では，この面積とその導関数の関係を根拠に，定積分を (3) で，つまり原始関数の値の差として定義する.

史織　しかしそうしてしまうと ① が成り立つのは当然で，① を基本定理というほどのことはなくなります.

どういうことでしょうか.

南海　このように学校では原始関数の値の差として定積分を定義するのだが，実際にそれですべて計算されているかというと，そうではない．最近，掲示板の nayuta さんの投稿で教えられた例を示そう.

例題 1.10.1　定積分

$$\int_{-1}^{3} |x(x-1)|\, dx$$

を計算せよ.

史織

$$|x(x-1)| = \begin{cases} x(x-1) & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ -x(x-1) & (0 < x < 1) \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} |x(x-1)|\, dx &= \int_{-1}^{0} x(x-1)\, dx + \int_{0}^{1} -x(x-1)\, dx + \int_{1}^{3} x(x-1)\, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3} \\ &= \left(-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right) = \frac{17}{3} \end{aligned}$$

南海　関数 $|x(x-1)|$ の原始関数 $F(x)$ は？

史織

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} & (0 < x < 1) \end{cases}$$

ではないのですか.

南海　それで $F(3) - F(-1)$ を計算すると？

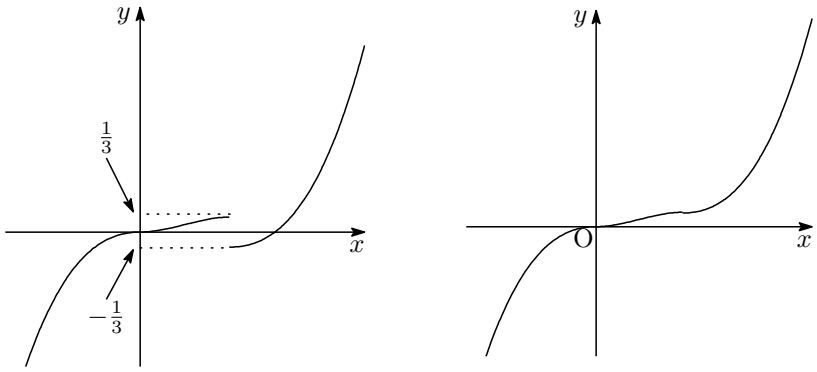
史織

$$\left(\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{16}{3}$$

あれっ，あわない.

南海　グラフはどうなる.

史織



あっ，$x=1$ で連続ではない．連続でなければ微分可能でないから，原始関数ではない．連続にするためには

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2} & (x\leqq 0)\\ -\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2} & (0<x<1)\\ \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{3} & (1\leqq x)\end{cases}$$

としなければならない．こうすると微分可能になる．そのグラフが右です．

これを $F(x)$ に取り直して $F(3)-F(-1)$ を計算すると，

$$\left(\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{3}$$

となり，確かに定積分が原始関数の値の差になっています．しかし，この問題の計算ではいちいち原始関数は求めません．

南海　そうなのだ．この場合は面積の方から考えている．だから高校微積の定義と方法は一貫していない．このように，定積分の定義やその意味については，もうすこし深く考えなければならない．

そのために，まず，歴史的に面積を求める方法を振り返ろう．

1.10.2　アルキメデスの方法

南海　求積法のはじまりであるアルキメデスによる放物線の面積を求める方法を紹介しよう．

放物線の面積の問題を初めて始めて解決したのは，アルキメデスだ．アルキメデス (Archimedes, 紀元前 287〜212) はギリシャ時代後期の人だ．イタリア半島の先の島シシリー島のシラクサに生まれ，エジプトのアレキサンドリアに長く留学し，のち故郷に帰ってそこで一生を過ごした．彼は理論ばかりでなく，その応用にも気を配った．たとえば，時の王ヒーロンが建造した軍艦があまりに大きく，進水させるのに困っていたときに，滑車を利用してその軍艦を進水させ，また反射鏡を利用して，おしよせる敵の軍艦を焼き放ったこともある．シラクサがローマ軍の侵攻を受けたときには，石を飛ばす機械などの武器を発明して敵軍をおおいに悩ませた．

しかし，シラクサもついに落城の日を迎えてしまった．シシリー島にせめこんだローマの軍隊はこの天才を殺してしまった．プルタークの『英雄伝』は次のようにその最期を記す.「アルキメデスは自分の家で図形を見ながら何か考えていた．心も顔もその研究に注いでいたので，ローマ軍が侵入したことも町が陥落したことも気づかずにいた．突然一人の兵隊がそこに来てアルキメデスへついて来いと命令した．だがアルキメデスはその問題を解いて証明を得ないうちは行こうとしな

かった．兵隊は腹を立てて剣を抜いて刺し殺してしまった」．また「兵士の 1 人が彼の研究中の円をふんだので，思わず『その円をふむな』と叫んだところ，槍で刺されてしまった.」ともいわれている．

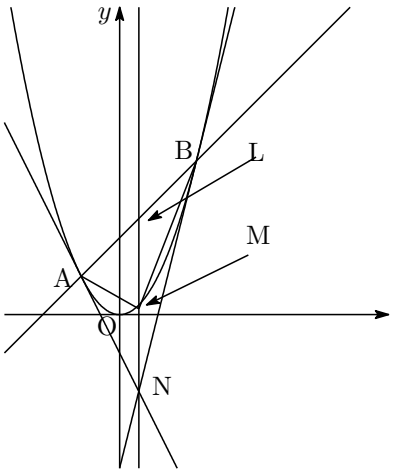
アルキメデスの逸話のなかで最も有名なのは，ヒーロン王の王冠の話である．ヒーロン王はあるとき，鍛冶屋に純金をわたして，それで王冠を作るように命じた．王冠はみごとにできあがったが，しかしこの鍛冶屋は，渡された純金を全部使わないで，それに混ぜ物をして王冠を作ったのではないかという噂が流れた．そこでヒーロン王は，アルキメデスに命じて，この王冠が果して純金だけでできているか，それとも混ぜ物がしてあるかを調べさせた．

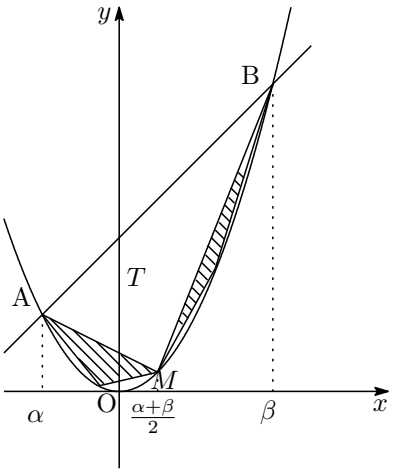
大切な王冠をあずかったアルキメデスは，それを傷つけることなく，純金だけでできているか，混ぜ物がしてあるかの判定法を見出すのに日夜苦心した．ある日浴場で，湯のなかでは，自分の身体が少し軽くなることに気づいた．これから彼は「物体は，水中では，それと同体積の水の目方だけ軽くなる」という，いわゆるアルキメデスの原理を思いついたといわれる．これを利用すれば，王冠の鑑別ができることに気づいたアルキメデスは,「私は発見した」と叫びながら，裸で家まで走って帰ったという．

この原理から，王冠の空中での重さ W と水中での重さ w の差として王冠の体積 V がわかる．比重がわかり，純金の比重と比べれば混ぜ物が入っているかどうかわかるのだ．

アルキメデスの求積法　このアルキメデスの数学に関する仕事のなかで最も有名なのは，いろんなものの面積や体積を求めたことだ．球の表面積 $S = 4\pi r^2$ を求めたのもアルキメデスである．その方法は，面積を小さな部分に分け加えるという，言葉の本来の意味での区分求積法であった．

この時代は，もちろん座標の方法もないし，関数を式に表すことも知られていない．彼は放物線で囲まれた図形の面積を次のように求めた．一応座標に入れて説明するが，アルキメデスはもっと図形的にやったのである．放物線の方程式を $y = x^2$ とする．





x 座標が A と B の x 座標の中点と一致する点を M，A と B での接線の交点を N とする．このとき一般に

$$\triangle \mathrm{ABM} = \frac{1}{2} \triangle \mathrm{ABN}$$

になる．こういう放物線の性質を彼はよく知っていた．そこで A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ 4)$，求める面積を S とし，△ABM の面積を T とすると，

$$S = \frac{4}{3}T$$

となるというのである．

彼は次のように示した．右側の図の斜線部分の面積はちょうど $\dfrac{1}{4}T$ である (なぜか？)．ここで斜線部分に対して同じ操作を行うとさらに $\dfrac{1}{4^2}T$ 面積が増える．このようにして次々に加えていくとこの面積の和は S に近づく．つまり

$$S = T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \cdots = \frac{1}{1-\dfrac{1}{4}}T = \frac{4}{3}T$$

T はいくらになるか

史織　M の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \left(\frac{3}{2},\ \frac{15}{4}\right)$$

ですから

$$T = \frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{15}{4}\right| = \frac{27}{8}$$

です．

南海　だから

$$S = \frac{4}{3}\cdot\frac{27}{8} = \frac{9}{2}$$

というわけだ．昔の人はいろんな面積をこのような区分求積法で求めた．日本の和算家も求めている．

史織　わー，たいへんですね．

放物線と，2 点 A，B から x 軸への垂線と，x 軸で囲まれた図形の面積を，ここでは U とします．B の方を動点にして，面積を $U(x)$ とする．

面積を求めるときに $U'(x) = f(x) = x^2$ がいかに大切なのか，その意味がわかります．これを知ってれば $U(x)$ は $\dfrac{1}{3}x^3 + C$ なので

$$U(2) = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 3$$

です．一方，AB と 2 点 A，B から x 軸への垂線と，x 軸で囲まれた台形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(1+4) = \frac{15}{2}$$

ですから，求める面積 S は

$$S = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$$

と出ます．アルキメデスの方法よりはるかに簡単な計算です．

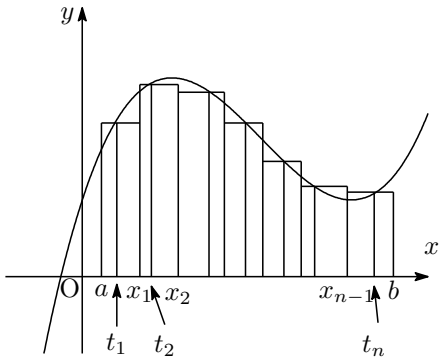
南海　そうだ．

1.10.3　定積分の定義

南海　かつて定積分は異なる道筋で定義されていた．原始関数の差で定積分を定義するのは日本の高校教科書くらいなものだ．1990 年代の高校課程の改訂でこうなった．かつてどのようになされていたのか，ふりかえろう．

手元に 1969 年の日本書院の教科書がある．数学 IIB と数学 III では区間の分割が等分か任意の分割かが違うのだが，本質的に同じなので，ここでは数学 III の定義を紹介しよう．次のように書かれている．

関数 $y = f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続とする．



この区間を図のように $(n-1)$ 個の点

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

で n 個の小区間

$$[a,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1},\ b]$$

に分ける．それら小区間内にそれぞれ任意の点

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n \quad \cdots ②$$

をとって，和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

を作る．

すべての小区間の長さが，いずれも 0 に近づくように n を限りなく大きくするとき，② の点のとり方にかかわらず，和 S_n は一定の極限値に近づくことが知られている．

この極限値を，関数 $f(x)$ の区間 $[a,\ b]$ における**定積分**といい

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

で表す．

史織　区分求積法に出てくる和の極限値が定積分の定義なのですね．つまり，現在の教科書で区分求積法といわれる (3) は，じつは定積分の定義なのですね．

南海　そうなのだ，1969 年にはこのように書かれていた．連続なら収束することは，証明はないが正しく指摘されている．さらに，1984 年に初版が出た『問題新集　微分・積分基本 500 選』（科学新興社）では，まとめに次のように書かれている．

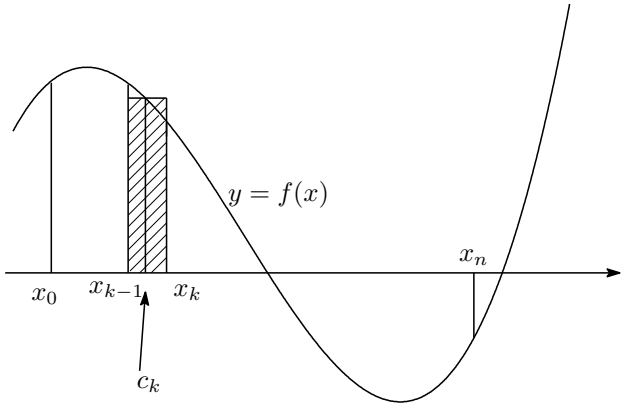
$a < b$ とする．$f(x)$ を区間 $[a,\ b]$ で定義された関数とする．分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

により，$[a,\ b]$ を n 個の小区間

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1},\ x_n]$$

に分ける． 各小区間に属する任意の点 c_k $(k = 1,\ 2,\ ,\cdots, n)$ をとる．また,$k = 1,\ 2,\ ,\cdots, n$ に対する小区間の幅 $x_k - x_{k-1}$ の最大値を $|\Delta|$ で表す.



極限値

$$S = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \cdots ③$$

が存在するとき, $f(x)$ は $[a,\ b]$ で積分可能であるといい,

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

と定める．

南海　これが正確な定積分の定義だ．この和

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

を「リーマン和」という．リーマン (Riemann，1826〜1866) は 19 世紀ドイツの数学者である．現代にいたってますますその偉大さが際立ってくる人だ..

この定義では「S が存在するとき」と書かれているがそれは

$$|\Delta| \to 0 \text{ となるどのような分割についても同一の値に収束するとき}$$

ということだ．だから値が存在するときは，分割を区間 $[a,\ b]$ を n 等分するものにとって値を計算してよく，それが区分求積法の計算式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)$$

だ．その上で，**微積分の基本定理**である．

関数 $f(x)$ が区間 I で連続ならば，I の点 $a,\ x$ に関して，x の関数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad は \quad F'(x)=f(x) \quad を満たす$$

つまり，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

である．その結果として，関数 $f(x)$ が区間 I で連続で，$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば，

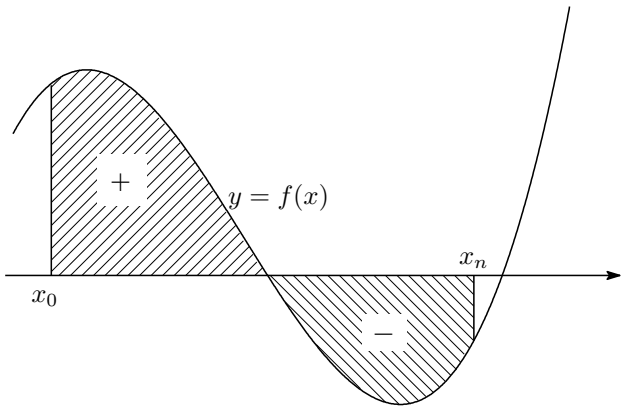
$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

が成り立つ．

史織　③ の極限が $f(x)$ が連続なら存在するのですか．

南海　そうだ．理論的にはそこが肝心なところなのだ．その証明自体は高校範囲を超える．大切なことは，積分は ③ の和の極限として定まり，$f(x)\geqq 0$ の所では $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積だ，ということだ．

史織　そうすると，この定積分の定義と面積の関係は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の x 軸の上にある部分の面積を $+$ で，下にある部分の面積を $-$ でとり加えたものになるのですね．



南海　その通りだといいたいのだが，しかしここには一つの問題が潜んである．それは何かというと，そもそも面積とは何か，という問題だ．

史織　当然のように面積を全体に考えてきましたが，複雑な関数で面積とは何か．たしかに，この面積という数値をどのように求めるのか．これ自体が定義されていない，ということですね．

南海　実は，$f(x)\geqq 0$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値をもって，$f(x)$ と x 軸と $x=a,\ x=b$ で囲まれた図形の面積と定義する．

史織　そうすると，いま言った，定積分と面積の関係は定義そのもになる．

南海　この観点で最初から書いたのが,『解析基礎』だ．高校生が読むのも不可能ではない．

1.10.4　微分と積分

南海　ここで大切なことがある．積分を微分の逆演算として定義する現行教科書の方法では，積分は微分あってはじめて定義されると思い込む．

青空学園でも，そのように考えていたが,『解析基礎』を読んでそうでないことに気づいたいう，投稿をもらったことがある．

> 僕は、理学部物理学科の 3 回生です。青空学園数学科の様々な記事を読ませていただき、心から感動しました。本当にありがとうございます。中でも特に感激したのが、「解析基礎」の記事です。僕は物理学科ですが、数学に非常に興味があり、数学科の授業をいろいろと履修しています。昨年、「ルベーグ積分」の授業を受講しました。しかし、単位はとれたものの、理解したとは全く言えない状態でした。具体的には次のような疑問が残りました。
>
> - 測度のもつ性質がいろいろあって煩雑すぎる。本質はどれか。
> - リーマン積分で成り立たないことがルベーグ積分で成り立つのはなぜか。
> - 原始関数と定積分はどのように結び付くのか。
>
> などなどです。
>
> いろいろなルベーグ積分の本を読みましたがすっきりすることはありませんでした。しかしあきらめずに勉強を続けていると結局、
>
> - 面積（測度）はどのように定義されるのか
> - 微分の逆演算がなぜ、定積分と関連するのか
>
> ここがわかっていないのだと気付きました。そんなとき、インターネットで青空学園の記事を見つけたのです。そこで、「定積分は微分とは独立に定義されるもの」という、僕にとって革命的な記事に出会いました。感動と悔しさで涙が出ました (笑)。
>
> 確かに、高校数学では、定積分を原始関数の差で定義しています。だから、原始関数が存在するかどうかなんて考えもせずに、定積分を計算します。僕もその一人でした。このことが、ルベーグ積分がわからなかった根本の原因だったのです。計算方法の習得だけで根拠がわからなければ、やはりどこかで弊害が出てくるのですね。
>
> 「解析基礎」は全て読ませていただき、自分なりにノートにまとめています。まだ拝見できていない記事もありますが、今後もずっと、参考にさせていただくことになると思います。新しい記事も楽しみにしていますので、これからもよろしくお願いします。

史織　微分と積分は，歴史的にも，数学的にも，別々に定義される．独立して定義されたものが，結びつくからこそ,「基本定理」なのですね．

南海　そうなのだ．関数 $f(x)$ に対して定積分

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

をとる．これを x の関数とみるとき，不定積分という．これは微分を用いずに定義される．これを $F(x)$ とおこう．

そして一方，$F(x)$ の微分もまた積分とは独立に定義される．すなわち，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

である．ところが，この二つが，

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

と結びつく．これがが「微積分の基本定理」なのだ．

史織　すると，不定積分と原始関数はまったく別の概念なのですね．

南海　そうなのだ．そしてそれが実は一致する，これを主張するのが微分積分の基本定理をいうことでもある．

史織　ところが日本の教科書は「$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分，または原始関数という.」と書かれている．

南海　これではいちばん大切な発見が，次代に伝わらない．この発見は人間の歴史にとっても大変重要なことなのだが，高校での定義ではこのことが伝わらない．しかし前にも言ったが，かつては違っていたのだ．

もとより証明をつけながら，微分積分の世界を拓いてゆくことは簡単なことではない．これについては『解析基礎』を見て欲しい．

最後に，リーマン和に関する入試問題を紹介しておこう．

演習 15　［03 京大後期理系 5 番］解答 15 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^{100}$ を求めよ．

1.11　確率論の基礎

2004.7.9/2001.6.3

1.11.1　確率論の始まり

1.11.1.1　同様に確からしい

南海　2004 年になって特に思うのだが，確率の授業のときの生徒諸君の表情が生きていない．他の分野では,「うん，うん」とうなずいたり，方針がわかれば自分で計算をはじめたりと，いろいろ反応があるのだが，確率のときはおしなべて皆，無表情だ．
史織　確率は，あっているのか間違っているのかよくわからないままに解いています．また，すべての確率の和が 1 ということ以外には，解答を検算する方法もなくて，答えに確信が持てません．
南海　確率は，高校数学の中では現実との接点をもつ数少ない分野だ，問題文を読んでそれが事実どのような現実 (試行) を問題にしているのかを読み取る力が必要だ．つまり確率問題は文章の読解力を含む総合的な力が必要なのだ．高校生諸君の，そんな現実把握力が急速に落ち込んでいるようにも思われる．同時に，教える側の力がどんどん低下している．悪循環だ．

学校では確率の問題が，順列組合せの場合の数の応用問題のように扱われ，計算練習が中心である．が，それではいつまでたっても「確率が苦手」を克服することができない．せめて青空学園に縁があった人は，確率とは何かを理解し，確率問題が解ける総合的な力をつけてもらいたい．
史織　現実との接点とは，どういうことですか．
南海　確率論的にいえば,「何が同様に確からしいのか」を考えなければならないということだ．次の例題はよく出てくる．解答は正しいだろうか．

例題 1.11.1 区別のつかない硬貨を 2 つ同時に投げる．2 つの表裏が一致する確率を求めよ．

解答:区別がつかないので出方は (表，表)，(表，裏)，(裏，裏) の 3 通り．2 つの表裏が一致する場合は 2 通り．よって求める確率は $\frac{2}{3}$ ．　□
史織　(表，表)，(表，裏)，(裏，裏) の 3 通り出方は同様に確からしいわけではありません．ところが，確率の計算では，該当する出方の総数を，すべての出方の場合の数で割っています．これができるのは，すべての出方が同様に確からしいときだけです．

つまり,「区別がないのだから (表，表)，(表，裏)，(裏，裏) の 3 通りは同様に確からしい」と勝手にしていることです．実際問題としてこれは同様に確からしくありません．
南海　数多くの試行を繰りかえせば (表，表) に対して (表，裏) の組はおよそ 2 倍出やすいことがわかる．だが，これで終わりにせずにここでいろんなことを考えなければならない．数学としては何を根拠にそのように断定できるのか．
史織　1 枚の硬貨を投げたときに，表がでるか裏がでるかが同様に確からしい，つまり表が出る確率，裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$．これが根拠だと思います．すると 2 枚の硬貨を投げるのだから，それぞれの硬貨の表裏の組合せ,「(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)」の 4 つが同様に確からしい．そしてこの 4 つの事象が根元事象である．事象の総数が 4 であるから，各確率はそれぞれ $\frac{1}{4}$ である．

サイコロを区別するかしないかは人間の側の問題で，1 枚の硬貨の裏と表が同様に確からしいとするかぎり，それぞれの硬貨の裏表を考えざるを得ないし，2 枚の硬貨は区別しなければならないと思います．

南海　その通りだ．さらに 2 枚の硬貨それぞれの裏表が互いの他方の裏表に関係しないことが大切だ．硬貨に細工をして「(表，表)，(表，裏)，(裏，裏)」が同様に確からしくすることもできるかもしれない．例えば 2 枚を次々に投げることにして，1 枚目の硬貨は表と裏が出る確率が等しいが，2 枚目の硬貨は，1 枚目と同じ面が出る確率が $\frac{2}{3}$ で，1 枚目と異なる面が出る確率が $\frac{1}{3}$ であるとする．その場合は,「(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)」の確率が $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ であるようになり,「(表，表)，(表，裏)，(裏，裏)」がいずれも確率 $\frac{1}{3}$ になる．

しかし，この場合，2 つの硬貨の一方が表か裏が出るかにしたがって，他方の硬貨の表裏が出る確率が変化しなければならない．つまり，2 枚目の硬貨の表裏の出る確率が 1 枚目の確率から独立していない．逆に 2 枚の硬貨の表裏の確率は互いに独立で，相手の表裏には影響されないとするならば，これは不可能である．

通常，このように硬貨 2 枚の試行では

(i) 1 枚の硬貨を投げたときに，表がでるか裏がでるかが同様に確からしい．

(ii) 2 枚の硬貨を投げる試行で，各々の硬貨の結果は互いに独立である．

としている．2 枚としたところは「2 回」として同じ試行を繰りかえすことにしても同様で，これがいわゆる独立試行の確率になる．

史織　ずいぶん難しいですね．

南海　というより，これが現実だ，ということ．

1.11.1.2　確率は賭け事の理論

南海　このように「同様に確からしい」ということを考えたのは，もともとは賭け事にはじまる．

まえに少し『数学対話』「何が同様に確からしいのか」で紹介したが，人間は昔から賭け事が大好きだ．サイコロは，紀元前 3500 年頃，エジプトの第一王朝の時代の遺跡から発掘されている．そのころは動物のかかとの骨で作ったもので，1，3，4，6 のものが使われていた．壁画にも残っている．もともと賭は占いと一体で，このサイコロは賭け事にも占いにも使われていたらしい．

長い間，賭は勘と経験で行われてきた．最初に「確率」を考えたのはイタリアのカルダノ（Hieronimo Cardano,1501〜1576）だ．この人はルネサンス期の人で，3 次方程式，4 次方程式の解の公式を最初に発見したことで知られているが，本職は賭博師ではなかったかといわれている.『サイコロ遊びについて』などいくつかの書物があるが，ようするにサイコロ賭博の手引き書だった．彼は「確からしさ (favourable)」という考え方をつかんでいた．

サイコロを 2 つ投げて，その目の和に賭けるとすれば，いくつに賭けるのがいちばん有利か，と

いった問題に解答を出している．彼は

目の和が 2 であるのは	$(1,1)$	の 1 通り
目の和が 3 であるのは	$(1,2)$ $(2,1)$	の 2 通り
目の和が 4 であるのは	$(1,3)$ $(2,2)$ $(3,1)$	の 3 通り
目の和が 5 であるのは	$(1,4)$ $(2,3)$ $(3,2)$ $(4,1)$	の 4 通り
目の和が 6 であるのは	$(1,5)$ $(2,4)$ $(3,3)$ $(4,2)$ $(5,1)$	の 5 通り
目の和が 7 であるのは	$(1,6)$ $(2,5)$ $(3,4)$ $(4,3)$ $(5,2)$ $(6,1)$	の 6 通り
目の和が 8 であるのは	$(2,6)$ $(3,5)$ $(4,4)$ $(5,3)$ $(6,2)$	の 5 通り
目の和が 9 であるのは	$(3,6)$ $(4,5)$ $(5,4)$ $(6,3)$	の 4 通り
目の和が 10 であるのは	$(4,6)$ $(5,5)$ $(6,4)$	の 3 通り
目の和が 11 であるのは	$(5,6)$ $(6,5)$	の 2 通り
目の和が 12 であるのは	$(6,6)$	の 1 通り

とすべての場合を書きあげ，7 に賭けるのがいちばん有利だと結論を出してる．

次に登場するのはあのガリレオ（Galileo Galelei,1564〜1642）だ．彼はあるとき親しい賭博師から相談を受けた．科学者とか数学者は賭博の相談役だったのだ．

3 つのサイコロを同時に投げ，その目の和に賭けるとき，目の和が 9 になるのは

$$(1,2,6)\ (1,3,5)\ (1,4,4)\ (2,2,5)\ (2,3,4)\ (3,3,3)$$

の 6 通りだ．目の和が 10 になるのも

$$(1,3,6)\ (1,4,5)\ (2,2,6)\ (2,3,5)\ (2,4,4)\ (3,3,4)$$

の 6 通りだ．しかし多くの勝負をしてきた経験からするとどうも 10 に賭けるほうが，ほんの少しだが有利なようだ．これはなぜなのか．

南海　ちゃんと説明できるだろうか．

史織　硬貨の場合と同様に，

(i) 一つ一つのサイコロでどの目が出るかは同様に確からしい．

(ii) また，3 つのサイコロは互いに影響されない．

とします．すると硬貨の場合と同様に，3 つのサイコロを区別して考えなければならず，すべての目の出方は $6^3 = 216$ 通りとなり，この一つ一つが同様に確からしい．このとき，3 つの目が $(1,3,6)$ となるのは，この並べ方だけあり，6 通り．3 つの目が $(2,2,5)$ となるのは，この並べ方だけあり，3 通り．だからそれぞれの目の組合せが起きる確率は $\dfrac{6}{216}$ と $\dfrac{3}{216}$ なる．つまり，これらは同様に確からしくはありません．目の和が 9 になる確率は

$$\frac{6+6+3+3+6+1}{216} = \frac{25}{216}$$

です．それに対して目の和が 10 になる確率は

$$\frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216}$$

です．

南海　その通り．組合せも順列もない時代，やはりガリレオはあらゆる場合を書き出してこのことを説明している．これを経験から見抜いた賭博師も偉い！　しかしこれを説明したガリレオはもっと偉い．

確率論はさらに，パスカル（Blaise Pascal,1623〜1662）とフェルマ（Pierre de Fermat,1601〜1665）で発展する．この 2 人の往復書簡には，今皆さんが勉強している確率のほとんどすべてが出てくる．

> 今，A と B が互いに 32 円ずつ出して勝負している．互いの実力は同じである．1 回勝つと 1 点もらえて，先に 3 点獲得した方が優勝し賭金 64 円をもらう．A が 2 点獲得し B が 1 点獲得しているときに，やむを得ない事情で勝負を中止しなければならなくなった．64 円をどのように分配すべきか．

「期待値」の考え方がここでふくらんでいる．後でこの解答も考えよう．

1.11.2　確率の定義

1.11.2.1　言葉の再定義

南海　教科書の「確率」の章は，いろんな言葉 (「試行」,「事象」,「根元事象」等々) の定義からはじまっている．それは中学での確率を整理しなおすことが趣旨であるが，多くの人はここをしっかりとは読んでいないか，読み飛ばしている．しかしここで書かれていることは，賭け事の仕組みなどを長い時間をかけて考えることで得られた，**確率的な現象を捉えるための考え方の枠組み**だ．いちどじっくりと読んでみて，わからなければ先生に質問することを勧めたい．さてこれらの言葉をここでも改めて定義しよう．数学 A と C にある内容である．

試行　同じ条件で繰りかえすことができ，結果が定まるような行為．

例えば 100 円硬貨と 10 円硬貨を同時に投げるような行為のこと．その結果とは「100 円硬貨が表・10 円硬貨が表」のように記述される．サイコロを 1 個投げる行為では，結果として 1 から 6 のうちのいずれかの目が定まるからこれも試行である．

何度も硬貨を投げる試行を繰りかえすと，統計的に，縁を下に硬貨が立って止まることはないことや，それぞれの硬貨の表がでる回数と裏がでる回数とは，だんだん等しくなっていくこと，等がわかる．このことから逆に，試行の結果は表か裏のいずれかになり，しかも表が上になるか裏が上になるかは同様に確からしいものとする，と確率を考える前提にする．サイコロでは均質に作ってあればどの目が出るのもほぼ同じ割合になる．どの目が出るのも同様に確からしいとする．

それではじめて数学の問題になる．数学の問題としては，その試行で何が同様に確からしいのかが明記されなければ解けない．ただこの部分が常識に任されるときもあるので，その場合は現実にどうなるかを自分で考えなければならない．

標本空間　試行によって確定する結果全体の集合．

これは数学 C に出てくる概念であるが，数 A でも知っておく方が以下の定義が分かりやすい．例えば上の 100 円硬貨と 10 円硬貨を投げる試行では,「100 円硬貨表・10 円硬貨表」を簡単のために (表，表) のように表すことにすると，集合 {(表，表), (表，裏), (裏，表), (裏，裏)} が標本空間である．

事象　試行から生じる結果によって定まる事柄．

事象は標本空間の部分集合として表される．例えば 100 円硬貨と 10 円硬貨を投げる試行で，100 円硬貨が表であるという事象は，(表，表) という結果と (表，裏) という結果の集合である．つまり，100 円硬貨が表であるという事象は集合 {(表，表), (表，裏)} と表される．

事象は標本空間の部分集合，これをしっかりとおさえること．

根元事象　試行で確定する結果の 1 つだけによって表される事象．

つまりその事象に該当する結果の集合がただ 1 つの要素からなるもの．{(表，表)} のようなもの．それは言いかえると，その試行ではより小さい集合の和集合に分割できないような事象である．試行の個々の結果と本質的に同じものであるが，試行の結果と事象とは異なる概念なので，試行の結果を事象という観点から集合としてとらえたものが根元事象である．

2 枚の硬貨を投げる試行で，硬貨の裏表に注目した結果は，それぞれの硬貨が裏か表かということである．これはこれ以上分けることができない．よって 2 枚の硬貨を投げて起こりうる結果は (表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏) の 4 つあり，それらを要素とする 4 つの集合 {(表，表)}, {(表，裏)}, {(裏，表)}, {(裏，裏)} が根元事象である．

それに対して 100 円硬貨が表であるという事象は，{(表，表)} ∪ {(表，裏)} と 2 つの集合の和集合で表されたので，根元事象ではない．

全事象　試行によって確定する結果全体の集合，つまり標本空間自体によって定まる事象．

根元事象全体にわたる和集合なので全事象と言う．全事象は「全ての結果」として定まる事象であって,「全ての事象」という意味ではない.「全ての事象」は標本空間の全ての部分集合である．

空事象　空集合によって定まる事象．

何も起こらない，という事象である．

史織　根元事象はいずれも同様に確からしいのですか．

南海　そうではない．例えば将棋の王将の駒を考えよう．将棋の駒は 7 つの面をもっている．駒を一つ将棋盤に投げたとき，いずれの面を将棋盤に付けているかで，7 通りの結果がある.「表がでる」,「裏がでる」,「横に立つ」2 通り,「縦に立つ」,「逆さに立つ」2 通り，である．これらがこの試行の結果である．この結果で定まる根元事象の確率は等しくない．

史織　なるほど．しかしそうすると，試行の結果にどのような確率が対応するかは，数学の問題ではなくそれ以前の現実の問題だということになります．

南海　その通りなのだ．だから確率が難しいのだ．

1.11.2.2　標本空間と確率

南海　次のように標本空間の各部分集合にその部分集合の確率値が与えられてはじめて確率が定義され，数学の問題になる．

定義 7 (確率の定義) U を試行の結果の集合，つまり標本空間とする．U の部分集合全体の集合を $\mathcal{B}$ とする．$\mathcal{B}$ の要素 (つまり U の部分集合 A) に対して実数値を対応させる関数 p が次の性質を持つとき関数 p を「確率」と呼ぶ．$A,\ B \in \mathcal{B}$ とする．

(1) $p(A) \geqq 0$

(2) $p(U) = 1$

(3) $A \cap B = \emptyset$ のとき $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

このとき標本空間 U に確率 p が定義されているという．標本空間と確率 p の組 $(U,\ p)$ を**確率空間**という．

$\mathcal{B}$ は U の部分集合全体である必要はなく，

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$.

(2) $A \in \mathcal{B}$ なら $\overline{A} \in \mathcal{B}$.

(3) $A,\ B \in \mathcal{B}$ なら $A \cup B \in \mathcal{B}$.

をみたすものであればよい，このような性質を持つ U の部分集合の集合を有限加法集合族という．確率空間はこれを指示して $U(\mathcal{B},\ p)$ と書く．

離散的な有限個の結果からなる確率を考えるかぎり，$B = U$ である先の定義でよい．

南海　例で考えてみてほしい．

史織　サイコロで考えます．サイコロを振った結果は 1 の目から 6 の目ですから

$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

です．これらの部分集合の全体が $\mathcal{B}$ なので，

$$\mathcal{B} = \{\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\ \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\},\ \cdots,\ \{6\},\ \emptyset\}$$

となります．

南海　全部でいくつあるか．

史織　6 つの結果を選ぶか選ばないかなので 2^6 個です．確率の定義の (2) と (3) より

$$1 = p(\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}) = p(\{1\}) + \cdots + p(\{6\})$$

だから根元事象の確率が全て等しければ

$$p(\{1\}) = \cdots = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

となります．だから，目が奇数になる確率は

$$p(\{1,\ 3,\ 5\}) = p(\{1\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

等です．U の部分集合，つまり $\mathcal{B}$ の要素が事象なのですね．

南海　サイコロに細工がしてあって，1 の目が出る確率が $\dfrac{1}{2}$ で他の目が出る確率が各々 $\dfrac{1}{10}$ ということもあり得る．この場合は標本空間は同じだが確率が違う．この場合の確率を q とすると

$$q(\{1,\ 3,\ 5\}) = q(\{1\}) + q(\{3\}) + q(\{5\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

となる．

史織　$(U,\ p)$ となるか $(U,\ q)$ となるかは現実の問題．入試問題などでは問題文の中で与えられることなのですね．

南海　$p(\{1\})$ などは $p(1)$ と書いてもまちがいは起こらない．このように，以下では，根元事象の確率 $p(\{x\})$ 等を集合の記号をはずして $p(x)$ のように書く．あくまで略号であることを忘れないでほしい．

1.11.2.3　余事象，和事象

南海　確率の定義から次の余事象の確率，和事象の確率の公式も出てくる．標本空間 U の事象 A に対して，A の補集合で定まる事象を $\overline{A}$ と書き，余事象という．

　また 2 つの事象 A と B に対してその和集合と積集合によって定まる事象を和事象，積事象といい，$A \cup B$，$A \cap B$ と書く．このとき

$$\begin{aligned} p(\overline{A}) &= p(U) - p(A) = 1 - p(A) \\ p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \end{aligned}$$

が成り立つ．

史織　証明してみます．$A \cup \overline{A} = U$ で $A \cap \overline{A} = \emptyset$ なので確率の定義 (3) から

$$p(U) = p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

$$\therefore \quad p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

次に

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= \{A \cap (B \cup \overline{B})\} \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \\ A &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \\ B &= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \end{aligned}$$

とそれぞれ共通部分のない事象の和に分割できる．ゆえに

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap B) + p(A \cap B) \\ p(A) &= p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) \\ p(B) &= p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) \end{aligned}$$

これから

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

南海　これでよい．教科書は，個数の公式

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

から導いているが，これは根元事象が同様に確かなときしか当てはまらない．

　$A \cap B = \emptyset$ のとき，事象 A と事象 B は互いに**排反**であるという．

$$\text{事象 } A \text{ と事象 } B \text{ が互いに排反のとき } p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

これは定理というよりは，確率というものがみたすべき公理である．

史織　質問です．確率を全ての事象に確率値を対応させる関数として定義しましたが，事象はすべて根元事象の和集合になるので，根元事象の確率が定まっていれば，一般の事象の確率はそれを構成する根元事象の確率の和になるのではないでしょうか．なぜ先のような定義をする必要があるのでしょうか．

南海　根元事象が有限個の場合はその通りなのだ．無限個あっても 1, 2, 3, $\cdots$ と数えられるような離散的な場合も含めて，事象 A の確率 $p(A)$ は

$$p(A) = \sum_{u \in A} p(u)$$

でよいのだ．

ところが連続的な確率の場合にはこれでは定義にならない．例えば，ある人が 6 時から 7 時のいずれかの時刻に駅に着く．6 時から 7 時のいずれかの時刻に着く確率も等しい．この場合，試行の結果は，着く時刻の全体である．6 時 5 分から 10 分の間に着く確率は何か．これは $\dfrac{5}{60} = \dfrac{1}{12}$ である．しかし根元事象の確率，ちょうど 6 時 3 分に着く確率は 0．厳密には測度というものが 0 なのだが，いずれにしても根源事情の和にはならない．

史織　わかりました．

1.11.2.4　根元事象が同様に確からしいとき

南海　標本空間 U が N 個の要素からなり，根元事象の確率がすべて等しいとする．またその確率を p とし，

$$U = \{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_N\}$$

とする．

$$\begin{aligned} 1 &= p(U) = p(\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_N\}) \\ &= p(u_1) + p(u_2) + \cdots + p(u_N) \end{aligned}$$

そして $p(u_1) = p(u_2) = \cdots = p(u_N)$ であるから結局

$$p(u_1) = p(u_2) = \cdots = p(u_N) = \frac{1}{N}$$

となる．$A = \{u'_1,\ u'_2,\ \cdots,\ u'_r\}$ をある事象とすると

$$\begin{aligned} p(A) &= p(\{u'_1,\ u'_2,\ \cdots,\ u'_r\}) \\ &= p(u'_1) + p(u'_2) + \cdots + p(u'_r) \\ &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N} = \frac{r}{N} \end{aligned}$$

つまり，根元事象の確率がすべて等しいときは

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

で与えられる．ただし $n(\quad)$ は集合の要素の個数を表す．

1.11.3　確率分布と期待値

以下は標本空間 U の要素の個数が有限である場合で考える．

1.11.3.1　確率変数

史織　「確率変数」はどのように考えればいいのでしょうか.
南海　確率空間 $(U,\ p)$ があるとする．U の要素である試行の結果に対して実数値が定まるとき，その実数を定める規則を**確率変数**という.
史織　U の要素 u に対して実数 $X(u)$ が定まると言うことですか．つまり U から実数への写像ですね.

そうか．すると数 a に対し $X = a$ である確率とは，数の値が a となるような結果の集合で定まる事象の確率だ.

$$A = \{u \mid X(u) = a,\ u \in U\}$$

とすると

$$P(X = a) = p(A)$$

です．これはまた

$$P(X = a) = \sum_{u:X(u)=a} p(u)$$

とも表せます.
南海　そうだ．このように特に断らなければ $P(X = a)$ で確率変数 X が値 a をとる確率を表すことにしよう.

確率変数 X のとる値の全体が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ であるとすると，X は値 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ に対して確率 $p_1 = P(X = x_1),\ p_2 = P(X = x_2),\ \cdots,\ p_n = P(X = x_n)$ を対応させる．この対応を X の**確率分布**と言う.

1.11.3.2　期待値の定義

南海　確率変数 X が n 個の値 $x_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を取り，その確率がそれぞれ $q_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとする．このとき

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i$$

を確率変数 X の期待値という．次のように考えても同じである．$u_1,\ u_2,\ ,\ u_N$ を U の全ての要素，つまりあらゆる試行の結果とする．ここで確率変数 X があるとき，期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = p(u_1)X(u_1) + p(u_2)X(u_2) + \cdots + p(u_N)X(u_N)$$

である．注意として，この場合 $X(u_j)\ (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のなかに同じ値が何度あっても良い．つまり $(U,\ p)$ を確率空間とすれば U 上で定まっている確率変数 X に対しその期待値 $E(X)$ とは

$$E(X) = \sum_{u_j \in U} p(u_j)X(u_j)$$

である.
史織

$$q_i = \sum_{l:X(u_l)=x_i} p(u_l)$$

なので

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{l:X(u_l)=x_i} p(u_l) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{l:X(u_l)=x_i} x_i p(u_l) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{l:X(u_l)=x_i} X(u_l) p(u_l) \\ &= \sum_{u \in U} X(u) p(u) \end{aligned}$$

となります．同じ値をとるものをまとめて考えるか，まとめないで U 全体にわたって和をとるかは同じことです．

1.11.3.3　パスカルとフェルマの往復書簡

南海　はじめに紹介したパスカルとフェルマの往復書簡中で議論されている問題を考えよう．2 人は，ド・メレという人から出された「分配問題」を議論し，いろんな方法で考えている．一般的な解法はパスカルが出している．

問題を一般化しよう．

> 今，A と B が互いに c 円ずつ出して勝負している．A が勝つ確率は p で B が勝つ確率は q であるとする．$p+q=1$ である．1 回勝つと 1 点もらえて，先に N 点獲得した方が優勝し賭金 $2c$ 円をもらう．A が a 点獲得し B が b 点獲得しているときに，やむを得ない事情で勝負を中止しなければならなくなった．$2c$ 円をどのように分配すべきか．

史織　A が勝つためにはあと $N-a$ 点，B が勝つためにはあと $N-b$ 点必要です．これをもとに，この後引き続いて勝負をしたとして，A の勝つ確率，B の勝つ確率を計算し，その比に応じて分配するしかないと思います．

南海　そうだ．つまり，この時点で A のもらえる期待値，B のもらえる期待値を計算すると言うことだ．$r=N-a,\ s=N-b$ とおいて計算式を作ってほしい．

史織　最大 $r+s-1$ 回勝負すればいずれかの勝ちが決まります．そこで $n=r+s-1$ とします．A が r 回勝つまでに B が k 回勝つとすると，その事象は，$r-1+k$ 回中 k 回 B が勝ち，$r+k$ 回目に A が勝つ事象なので，その確率は

$$_{r-1+k}\mathrm{C}_k p^{r-1} q^k p$$

です．よって A が勝つ確率は

$$p^r \left(\sum_{k=0}^{s-1} {}_{r-1+k}\mathrm{C}_k q^k \right)$$

です．

最初の問題では $r=1,\ s=2,\ p=q=\dfrac{1}{2}$ なので，A が勝つ確率は

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

です．ゆえに 64 円のうち A と B には

$$64 \times \frac{3}{4} = 48 \text{ (円)}, \ 64 \times \frac{1}{4} = 16 \text{ (円)}$$

ずつ分配すればいいです．

南海　パスカルはこの計算をするのにいわゆる「パスカルの三角形」を使っている．

史織　パスカルの三角形は確率の計算で使われたのですか．

南海　パスカルはこれらの研究を完全な論文にまとめようとする意図をもっていたらしい．後にパリ科学アカデミーとなる機関にあてた 1654 年の書簡の中で，パスカルはつぎのように述べている．

> 正当に競い合っている演技者双方に，不確定な未来がつねに正確に配当されるようにするための，理にかなった計算は，うまくできませんでした．確かに，偶然の推理を探究すればするほど，調べてわかることはほんのちょっぴりしかありません．あいまいさ，例えばくじ引きという事象は，必然性よりむしろ全く偶然性に左右されることが自然なのでして，それによって報酬が分配されるのであります．それゆえ，いままではそのような事柄は不確かなものだとしてきました．しかし，いま経験にさからってまでも偶然を支配している論拠をはっきりとさせたいと存じます．もち論，そのようなことを幾何学的方法によって学問的な保証をとりつけ，確実性がこの種の偶然性にも関係している事実を大胆に打ち出そうと思っています．そして，数学が不確実な事象をひき起こすサイコロと結びついていることを示し，加えて偶然と確実の相矛盾したものを統一的にとらえ，統一されたものは偶然とも確実とも指名できないものでありますから，“ サイコロの幾何学”という表題の本を手にとった人はきっとびっくりするに違いないと思います．

この計画は実現せず，パスカルは 1662 年に 39 歳の若さで亡くなる．だが，この確信に満ちた文章は確率論の宣言といってよいほどのものである．ここに確率論は誕生した．

1.11.3.4　和の期待値

南海　確率変数 X は $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の値を取り，その確率が $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ であるとする．つまり $P(X = x_i) = p_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとする．確率変数 Y は $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m$ の値を取り，その確率が $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_m$ であるとする．つまり $P(Y = y_i) = q_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ であるとする．

値 $x_i + y_j$ を確率 $P(X = x_i,\ Y = y_j)$ でとる確率変数を，**確率変数 X と Y の和**といい，$X + Y$ と書く．

値 $x_i y_j$ を確率 $P(X = x_i,\ Y = y_j)$ でとる確率変数を，**確率変数 X と Y の積**といい，XY と書く．

確率変数 $X + Y$ の期待値 $E(X + Y)$ は $E(X) + E(Y)$ と一致する．

史織

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i,\ Y = y_j) &= P(Y = y_j) = q_j \\
\sum_{j=1}^{m} P(X = x_i,\ Y = y_j) &= P(X = x_i) = p_i
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)P(X=x_i,\ Y=y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iP(X=x_i,\ Y=y_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_jP(X=x_i,\ Y=y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}x_ip_i+\sum_{j=1}^{m}y_jq_j \\ &= E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

南海　これは要するに，英語と数学の合計の平均を求めるのに，先にそれぞれの合計を出しその平均をとろうと，各教科の平均を出してから加えようと，同じ結果になるということである．$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ は何かと便利な公式であるので，使ってみよう．

3 個の変量 $X,\ Y,\ Z$ のときも

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

が成り立つ．

史織　期待値は結局根元事象の全体にわたる和であるという観点から $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ を示せませんか．

南海　できる．やってみてほしい．

史織　X の値が x_i であり，Y の値が y_j であるような事象を $A_{i,j}$ とおく．すると標本空間 U は互いに排反な事象 $A_{i,j}$ の和になる．そして

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p(A_{ij})=\sum_{u\in A_{i,j}}p(u)$$

である．$u\in A_{ij}$ に対して

$$x_i+y_j=X(u)+Y(u)$$

なので

$$\begin{aligned} (x_i+y_j)P(X=x_i,\ Y=y_j) &= (x_i+y_j)\left\{\sum_{u\in A_{i,j}}p(u)\right\} \\ &= \sum_{u\in A_{i,j}}\left(X(u)+Y(u)\right)p(u) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)P(X=x_i,\ Y=y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{u\in A_{i,j}}\left(X(u)+Y(u)\right)p(u) \\ &= \sum_{u\in U}\left(X(u)+Y(u)\right)p(u) \\ &= \sum_{u\in U}X(u)p(u)+\sum_{u\in U}Y(u)p(u)=E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

です.

南海　ここで期待値の和を問う過去問題を紹介しよう.

演習 16　［04 北大前期理系］解答 16

ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A，B を移動する. サイコロの目の数が 1，3 のときに限り部屋を移る. また各試行の結果，部屋 A に居る場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B に居る場合は 1 点を減らす. 持ち点は負になることもあるとする. 第 n 試行の結果，部屋 A，B に居る確率をそれぞれ $P_A(n),\ P_B(n)$ と表す. 最初にその人は部屋 A に居るものとし (つまり，$P_A(0)=1,\ P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする.

(1) $P_A(1),\ P_A(2),\ P_A(3)$ および $P_B(1),\ P_B(2),\ P_B(3)$ を求めよ. また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ.

(2) $P_A(n+1),\ P_B(n+1)$ を $P_A(n),\ P_B(n)$ を用いて表せ.

(3) $P_A(n),\ P_B(n)$ を n を用いて表せ.

(4) 第 n 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ.

1.11.3.5　確率変数の独立と積の期待値

南海　確率変数 $X,\ Y$ が互いに独立であるとは，X のとる任意の値 a と Y のとる任意の値 b について

$$P(X=a,\ Y=b)=P(X=a)P(Y=b)$$

が成り立つことを言う. 確率変数 X と Y が互いに独立であるときは，確率変数 XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

が成り立つ.

史織

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_iy_j)P(X=x_i,\ Y=y_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_iy_j)P(X=x_i)P(Y=y_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)\left\{\sum_{j=1}^{m}y_jP(Y=y_j)\right\}\\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)\right\}\left\{\sum_{j=1}^{m}y_jP(Y=y_j)\right\}\\
&= E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

積についても，期待値は根元事象の全体にわたる和であるという観点から $E(XY)=E(X)E(Y)$ を示せませんか.

南海　それは無理だ. どうしてかというと，事象の独立性が基本なのだが，根元事象は互いに独立ではないので，根元事象に帰着させることは出来ない.

ここで確率変数の独立性を問う過去問題を紹介しよう.

演習 17　［90 京大前期理系］解答 17

正 N 角形の頂点に $0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$ と時計回りに番号がつけてある．頂点 0 を出発点とし，サイコロを投げて出た目の数だけ頂点を時計まわりに移動し，着いた頂点の番号を X とする．次にもう一度サイコロを投げて出た目の数だけ，頂点 X から時計まわりに移動し，着いた頂点の番号を Y とする．このようにして定めた確率変数 $X,\ Y$ について

(1) $N=5,\ 6$ のそれぞれの場合について，X と Y は互いに独立か．

(2) X と Y が互いに独立となる N $(N \geqq 3)$ をすべて求めよ．

ただし，確率変数 $X,\ Y$ が互いに独立であるとは，$X=i$ となる確率 $P(X=i)$ と，$X=i,\ Y=j$ となる確率 $P(X=i,\ Y=j)$ との間に，次の等式が任意の $i,\ j$ $(0 \leqq i,\ j \leqq N-1)$ について成り立つことである．

$$(*)\quad P(X=i,\ Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$$

1.11.3.6　二項分布

南海　1 回の試行であることが起こる確率が p であるとき，$q=1-p$ とおけば n 回の試行中 k 回そのことが起こる確率は ${}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$ である．

ここで確率変数 X を n 回の試行中そのことが起こる回数とする．

$$P(X=k)={}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$$

この確率分布を**二項分布**という．

史織　これって独立試行の確率そのものではありませんか．この確率は標本空間は何ですか．

南海　n 回の試行でそのことが起これば○，起こらなければ×，とすると，

$$\begin{array}{l}(\times\ ,\ \times\ ,\ \cdots,\ \times\ )\\ (\bigcirc,\ \times\ ,\ \cdots,\ \times\ ),\ (\times\ ,\ \bigcirc,\ \cdots,\ \times\ ),\ \cdots\\ \cdots\\ (\bigcirc,\ \bigcirc,\ \cdots,\ \bigcirc)\end{array}$$

と，何回目に起こるかを指示したもの全体が標本空間である．

史織　そうか．k 回起こる各々の確率が $p^k q^{n-k}$ でそれが ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りあるから，確率が ${}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$ なのだ．

南海　この確率分布は，二項定理

$$(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$$

の p について k 次の項が k 回起こる場合の確率を与えるので二項分布というのだ．このとき，起こる回数の期待値 E は

$$E=\sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}=np$$

となる．これを示すために二項定理は p と q の恒等式なので，これを p で微分して

$$n(p+q)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k p^{k-1}q^{n-k}$$

この係数比較から

$$k_n\mathrm{C}_k = n_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

を得る．これを用いる．

$$\begin{aligned}\therefore\quad E &= \sum_{k=1}^{n} k_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} p^k(1-p)^{n-k}\\ &= np\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}\\ &= np\{p+(1-p)\}^{n-1} = np\end{aligned}$$

二項分布に係わる最近の問題を紹介しよう．

演習 18　［04 九大前期文理系］解答 18

n を 3 以上の自然数とする．スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる．これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れたあと，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる．

(1) 赤青…青，赤赤青…青，……のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ．

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ．

(3) 色の変化がちょうど m 回 $(0 \leqq m \leqq n-1)$ 起きる確率を求めよ．

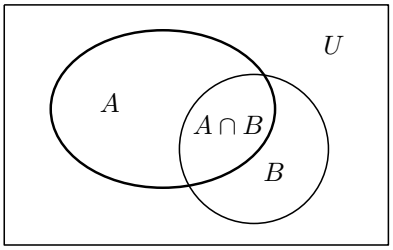
(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ．

1.11.4　条件付確率

1.11.4.1　条件付確率

南海　この節の後半は数学 C で習う範囲なのだが，数 A の確率の理解のためにもぜひ押さえておきたい．

確率空間 $(U,\ p)$ と 2 つの事象 A と B があるとする．確率 p に対して，事象 A が起こったという前提のもとで B が起こる確率 $p_A(B)$ を考える．



史織　事象 A が起こったことが前提なので，$p_A(A) = 1$ でなければならない．事象 A が起こったという前提のもとで B が起こるので，U の部分集合として事象は $A \cap B$ です．この事象 $A \cap B$ が事象 A の確率を 1 としたとき，どのような確率で起こるかが $p_A(B)$ だから，$p_A(A) = 1$ とあわせて次の等式になります．

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

南海　そういうことだ．A が起こるという条件の下での確率なので**条件付き確率**という．

条件付き確率 p_A は，集合 A を標本空間とする確率になっている．つまり，標本空間 U を狭めて，集合 A を新たな標本空間とし，A に含まれる B の要素 $A \cap B$ の確率 p_A を $p_A(A) = 1$ となるように $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ で定義する．このとき $(A,\ p_A)$ が新たな確率空間となる．

史織　確認してみます．確率の定義の条件をみたせばよいのですね．$B \subset A$ に対しては $A \cap B = B$ で

(1) $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} \geqq 0$

(2) $p_A(A) = \dfrac{p(A \cap A)}{p(A)} = \dfrac{p(A)}{p(A)} = 1$

(3) $B,\ C \subset A$ で $B \cap C = \emptyset$ のとき

$$p_A(B \cup C) = \frac{p(B \cup C)}{p(A)} = \frac{p(B) + p(C)}{p(A)} = p_A(B) + p_A(C)$$

B や C が A の部分集合でなくても $(A \cap B) \cap (A \cap C) = \emptyset$ なら $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ なので

$$\begin{aligned} p_A(B \cup C) &= \frac{p(A \cap (B \cup C))}{p(A)} \\ &= \frac{p(A \cap B) \cup (A \cap C)}{p(A)} \\ &= \frac{p(A \cap B) + p(A \cap C) - p((A \cap B) \cap (A \cap C))}{p(A)} \\ &= \frac{p(A \cap B) + p(A \cap C)}{p(A)} \\ &= p_A(B) + p_A(C) \end{aligned}$$

です．

南海　それは $B,\ C \subset A$ で $B \cap C = \emptyset$ のときの証明の中で済んでいる．しかしいろいろやってみることは大切だ．

なお，根元事象が同様に確からしく，集合の要素の個数で確率が決まるときは，

$$\begin{aligned} p_A(B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\dfrac{n(A)}{n(U)}} \\ &= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \end{aligned}$$

これを見れば A 自身を標本空間とする確率であることは明らかだ．

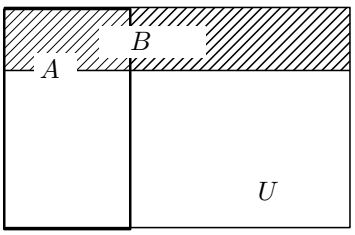
そこで大切なこと．

1.11.4.2　事象の独立

南海　確率空間 $(U,\ p)$ の 2 つの事象 A と B に対して

$$p_A(B) = p(B)$$

が成り立つとき，事象 A と B は**互いに独立**という．
根元事象が同様に確からしく，集合の要素の個数で確率が決まるときは，図のように



$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{n(B)}{n(U)}$$

となると言うことだ．

史織　まったく互いに影響しあわない 2 つの試行は独立で，それぞれのある結果が同時に起こる確率はそれぞれが起こる確率の積である，と数 A の教科書には書かれています．これは条件付き確率を用いてどのように表されるのでしょうか．

南海　2 つの確率空間 $(U_1,\ p_1)$ と $(U_2,\ p_2)$ があるとしよう．p_1 は U_1 だけで，p_2 は U_2 だけで定まっているとする．

今の質問を一般的に説明するのはなかなか難しいのだ．具体的には結果の総数が有限である場合は簡明なので，この場合について説明していこう．

$$\begin{aligned} U_1 &= \{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_s\} \\ U_2 &= \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_t\} \end{aligned}$$

があって，$u=u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_s$ と $v=v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_t$ に対して確率 $p_1(u)$ と $p_2(v)$ が定まっているとする．p_1 と p_2 はそれぞれ U_1 と U_2 の事象だけで定まり，たがいに U_2 と U_1 の事象とは無関係であることに注意しよう．

新たな標本空間 U を

$$U=\{(u,\ v)\mid u\in U_1,\ v\in U_2\}$$

で定め，この標本空間に確率 q を

$$q\{(u,\ v)\}=p_1(u)\cdot p_2(v)$$

で定める．集合 U を $(U_1,\ U_2)$ のように書こう．

同様に $U_1,\ U_2$ のそれぞれの部分集合 $A,\ B$ に対して，$U=(U_1,\ U_2)$ の部分集合

$$\{(u,\ v)\mid u\in A,\ v\in B\}$$

を $(A,\ B)$ のように書こう．同時に 2 つの試行を行うときに，U_1 の事象 A が起こるとは，U_2 の方は何が起こってもよいのだから，U の事象 A を

$$(A,\ U_2)=\{(u,\ v)\mid u\in A,\ v\in U_2\}$$

で定めれば，これは A と同一視できる．A の U への埋め込みと言おう．同様に U_2 の事象 B に対して $(U_1,\ B)$ で，B を U に埋め込む．

任意の U_1 の事象 A と U_2 の事象 B に対して，このようにして埋め込まれた U の事象 $(A,\ U_2)$ と $(U_1,\ B)$ は互いに独立である．

史織　証明してみます．

$$(A,\ U_2)\cap(U_1,\ B)=(A,\ B)$$

なので

$$\begin{aligned} q\{(A,\ U_2)\} &= \sum_{u\in A,\ v\in U_2} p_1(u)p_2(v) \\ &= \sum_{u\in A} p_1(u)\left\{\sum_{v\in U_2} p_2(v)\right\} = p_1(A) \\ q\{(A,\ U_2)\cap(U_1,\ B)\} &= q\{(A,\ B)\} = \sum_{u\in A,\ v\in B} p_1(u)p_2(v) \\ &= \sum_{u\in A} p_1(u)\left\{\sum_{v\in B} p_2(v)\right\} = \sum_{u\in A} p_1(u)p_2(B) = p_1(A)p_2(B) \end{aligned}$$

より

$$q_{(A,\ U_2)}\{(A,\ U_2)\cap(U_1,\ B)\} = \frac{p_1(A)p_2(B)}{p_1(A)} = p_2(B)$$

一方

$$\begin{aligned} q\{(U_1,\ B)\} &= \sum_{u\in U_1,\ v\in B} p_1(u)p_2(v) \\ &= \left\{\sum_{u\in U_1} p_1(u)\right\}\left\{\sum_{v\in B} p_2(v)\right\} = p_2(B) \end{aligned}$$

なので，確かに

$$q_{(A,\ U_2)}\{(A,\ U_2)\cap(U_1,\ B)\} = q\{(U_1,\ B)\}$$

が任意の A と B について成立する．

南海　そういうことだ．

1.12　命題と条件

2002.12.13

1.12.1　命題と命題関数

1.12.1.1　教科書は何といっているか

例題 1.12.1

(1) 6 人の人がいる．どの 2 人も，互いに知り合いであるかまたは見ず知らずであるか，いずれかとする．すると，お互いに知り合いである 3 人がいるか，お互いに見ず知らずである 3 人がいるか，いずれかが成り立っていることを示せ．

(2) 平面に 17 個の点がある．各 2 点は赤，青，黒のいずれかの線分で結ばれている．このとき 3 辺が同じ色の三角形が存在することを示せ．

南海　今日は,「命題と条件」について考えよう.「命題」を土台にして「条件」とは何かを明確にすることが目的だ.

史織　さっそくですが．私の教科書では論証に関する記述が「必要条件と十分条件」で初めて出てきます．その最初に次のように書かれています．

> 二つの事柄 $p,\ q$ に対して，$p \Rightarrow q$ がなりたつとき
>
> q は p であるための **必要条件**である
> p は q であるための **十分条件**である
>
> という．

と書かれています．この「事柄」って何なんでしょうか.「条件」ではないのですか.

南海　うーん．確かにこれは難しい問題だ．数学的「事柄」であるにはちがいないが.「事柄」では少し漠然としている.「必要『条件』」などと用いられる以上，p は「条件」であるはずだ，というのはもっともだ.

　具体的に考えてみよう．簡単なものでいいから例を作ってほしい.

史織　p を「16 は 4 の倍数である」，q を「16 は 2 の倍数である」とすると，これは $p \Rightarrow q$ の例になっているのでしょうか.

南海　「事柄」というからには今あげてくれた p や q も事柄には違いない.「$16 = 4 \times 4$ より 16 は 4 の倍数 $\Rightarrow$ 4 は 2 の倍数 $\Rightarrow$ 16 は 2 の倍数」は推論としてはあり得る．だから例には違いないのだが，p も q もそれ自身で真であることが確定する命題である.

　事柄といえばこのようなものも入る．しかし必要条件や十分条件を考える例としては p や q は成立するときもしないときもあって p が成立する「ならば」 q が成立する，あるいはその逆に q が成立する「ならば」 p が成立する，というものでないと，実質的な数学上の意味がない.

　そういう例をあげてほしい.

史織　では，p を「x は 4 の倍数である」，q を「x は 2 の倍数である」とすると，これは $p \Rightarrow q$ の例になっているのでしょうか.

南海　そうだ．このばあい $p \Rightarrow q$ は「x が 4 の倍数である，ならば，x は 2 の倍数である」という命題になり．教科書が言いたかった例になっている.

史織　この「x は 4 の倍数である」はやはり「事柄」というよりは「条件」ですね．でも，自分でいっておきながら何ですが,「条件」とは何ですか．

南海　それを考えるために，まず「命題」や「真」の意味を明確にしなければならない．なぜなら，上の教科書の記述の中に，表には出されていないが,「命題」と「真」という概念が使われている．どこに隠されているかな．

史織　そうか．$p \Rightarrow q$ が命題ですね.「なりたつとき」とうのは「真であるとき」ですね．そうか，必要条件や十分条件とは何かを明確に述べるには，先に「命題」とか「真」とかがはっきりしていないといけないのですね．

南海　それで，これらについて教科書はどのようにいっているか．

史織　「命題と証明」に次のように定義されています．

> 式や文章で表された事柄で，正しいか正しくないかが，明確に決まるものを**命題**という．命題が正しいことを**真**であるといい，正しくないことを偽であるという．

南海　なるほど.「事柄」は定義されていないが，数学的現象について何らかの事実や推論を述べたもの，と言いかえてもいいだろう．

「命題」はいくらでも複雑なものがあり得るが，いちばん単純なのは,「何々について述べる」という主題の部分 (主部) と,「何々である」とそのものの内容を述べる述語の部分 (述部) から成り立っている，断定型である.「3 は奇数である」とかのたぐいだ．

これに対して $p \Rightarrow q$ という形をした推論型も命題である．

もちろん「3 は奇数である」は「ある数が 3 なら，その数は奇数である」と状況を複雑に設定すればわかるように，断定型も掘りさげれば推論を含んでいる．

一応ここでは，命題には事実を述べた断定型と，推論を述べた推論型がある，と考えよう．のちに述べるが，推論型命題を普通は「含意命題」という．

史織　推論型について，教科書では続いて次のように書かれています．

$$n \text{ が奇数ならば} \quad n^2 - 1 \text{ は } 8 \text{ の倍数である}$$

> のように二つの条件 p, q を用いて
>
> $$p \text{ ならば } q \quad \text{すなわち} \quad p \Rightarrow q$$
>
> の形に表される命題を考えよう．
>
> このとき，p をこの命題の**仮定**，q を**結論**という．

と書いてあります．

するとやはり最初の私の質問にある「事柄」は「条件」ですね．しかし肝心の「条件」とは何か，よくわかりません．

1.12.1.2　命題と命題関数

南海　確かに．教科書では「条件」とは何かについて，明確には述べられていない．

教科書では，命題よりも先に必要条件や十分条件，つまりは「条件」が出てくる構成になっている．そのため「条件」とは何かが明確にならないのだ．

「命題」ははっきりとわかったものとし，これを基本にして，順次考えていこう．

史織　条件を組み合わせて「命題」ができるので,「条件」を先に定義しないといけないと思うのですが，命題が先なのですか.
南海　そうだ．いくつか「命題」をあげてほしい.
史織　真か偽が明確に定まる文章や式，だから…

(i) 6 は偶数である.

(ii) 6 は奇数である.

(iii) $2+3=5$

(iv) $5>9$

(v) $\sqrt{2}$ は無理数である.

(vi) $\sqrt{2}$ は有理数である.

(vii) $\sqrt{2}$ は複素数である.

(viii) 16 は 4 の倍数である

(ix) x が 4 の倍数であるならば x は 2 の倍数である.

最初の八つは断定型，最後のが推論型です.
南海　するとちょっと質問だが，最後の例の前後を逆にした,「x が 2 の倍数であるならば x は 4 の倍数である.」は命題か.
史織　x が 8 ならいいが，6 のときは成り立たない．ということは「反例」があったということ．つまり「x が 2 の倍数であるならば x は 4 の倍数である.」は偽です．つまり偽と判断できるのでこれも命題です.
南海　その通り．これはもとの命題の「逆」というのだ．これについては後に詳しく考えよう.
　さて「16 は 4 の倍数である」は命題であるが，この 16 を変数 x に変えた「 x は 4 の倍数である」は，x に何が入るのかによって真になったり偽になったりする.
　先に言ったように，命題の基本型である断定型は，一般に命題は主部 (何について述べるか) と述部 (述べた内容) よりなるが，その主部を適当な変数，例えば x などに置きかえたものを**命題関数**という．そしてこれを p や，変数を明確にしたいときは $p(x)$ のように書く.
　例えば，$p(x)$:「x は偶数である.」のようなものだ．命題関数 $p(x)$ はそれ自体真偽が定まらないから命題ではない．x に値を代入することによって命題になる.

(1) $p(3)$，つまり「3 は偶数である.」は偽.

(2) $p(4)$，つまり「4 は偶数である.」は真.

というわけだ.
史織　関数というからには何かの値をとるのですね．この場合の値は何ですか.
南海　「真」と「偽」だ．この二つの値をとる．だから上の例では $p(3)=$ 偽, $p(4)=$ 真 というわけだ.
　さてそこで「条件」だが，命題関数 $p(x)$ のことを「 x に関する条件」ともいうのだ.
史織　命題の定義にたちかえっていうと，文字を x とすれば，条件とは「x に代入することによって真偽が定まる式や文章」のことですね.

南海　そのように考えてよい．何となく使ってきた「条件」もこのようにして明確に定義される．
史織

$$2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ は実根をもつ}$$

は，文字 a と b に関する条件，と理解してきました．上の書き方では命題関数 p を

$$p(a,\ b):\text{「}x^2+ax+b=0 \text{ は実根をもつ」}$$

となり， $a^2-4b\geqq 0$ を満たす a と b なら真，そうでなければ偽の値をとるのです．
南海　これからは必要に応じて「命題関数」といったり「条件」といったりするが，同じことだと考えてよい．「条件」がはっきりした．これをもとにいろいろ考えよう．

1.12.1.3　命題関数と真理集合

史織　命題関数の値域は真か偽の二つであるということはわかりました．関数というかぎり定義域もあるのですね．
南海　定義域というのは，普通の関数と同じく命題関数 $p(x)$ によっても規定されるし，またそのうちのどこを定義域とするかを定めることもできる．
　例えば

$$p(x):\text{「}x>4\text{」}$$

なら必然的に定義域は実数範囲だが，さらにそのうち整数だけを定義域とすることもできる．
　さて，U を定義域とする命題関数 $p(x)$ に対して， U の部分集合 T を

$$T=\{\ x\mid p(x)=\text{真},\ x\in U\ \}$$

で定め，これを命題関数 $p(x)$ の**真理集合**という． T は T_p のように p を明記して書くこともある．
史織　上の $p(x)\ :\ x>4$ を定義域を実数として考えると，まず $p(x)$ は「実数 x に関する条件 $x>4$ 」のことで， $p(x)$ の真理集合とは，実数 x で条件 $x>4$ を満たすものの集合のことです．
　すると方程式や不等式の解も真理集合ですね．
南海　するどい．2 次方程式

$$x^2-3x+2=0$$

は x に関する条件とも考えられる．定義域は複素数全体 C だ．

$$p(x)\ :\ x^2-3x+2=0$$

　このとき

$$T=\{\ x\mid p(x)=\text{真},\ x\in C\ \}=\{\ 1,\ 2\ \}$$

となり，まさに解の集合だ．
　このように，命題関数，つまり「条件」を考えるときはその真理集合を同時に考えるとよい．

1.12.2　命題の否定，論理和，論理積

1.12.2.1　でない，または，かつ

南海　いくつかの命題を考えよう．命題にも記号を付けて $A,\ B,\ C,\ \cdots$ としよう．

(i) A ： 16 は 4 の倍数である．

(ii) B ： 16 は平方数である．

(iii) C ： 16 は奇数である．

(iv) D ： 7 は奇数である．

(v) E ： 7 は平方数である．

これらに対して，いろんな命題を作ることができる．

(1) 16 は 4 の倍数でない．

(2) 16 は 4 の倍数または奇数である．

(3) 16 は 4 の倍数かつ奇数である．

(4) 16 は 4 の倍数または平方数である．

(5) 16 は 4 の倍数かつ平方数である．

(6) 16 は 4 の倍数または 7 は奇数である．

(7) 16 は 4 の倍数かつ 7 は奇数である．

(8) 16 は 4 の倍数または 7 は平方数である．

(9) 16 は 4 の倍数かつ 7 は平方数である．

一つの「A ： 何々は何々である」という命題に対して「何々は何々でない」という命題をもとの命題の**否定**とい，$\overline{A}$ と表す．A の真偽と $\overline{A}$ の真偽が逆になる．

二つの命題 A と B の少なくとも一方が成り立つことを主張する命題，つまり「または」で結びついた命題を二つの命題の論理和といい，$A \vee B$ と表す．A か B か少なくとも一方が真なら，$A \vee B$ は真である．

二つの命題 A と B の両方が成り立つことを主張する命題，つまり「かつ」で結びついた命題を二つの命題の論理積といい，$A \wedge B$ と表す．A かつ B が真なら，$A \wedge B$ は真である．

上の例のように二つの命題の主題が同じこともあれば，違うこともある．上の例は記号で書くと

(1) $\overline{A}$

(2) $A \vee C$

(3) $A \wedge C$

(4) $A \vee B$

(5) $A \wedge B$

(6) $A \vee D$

(7) $A \wedge D$

(8) $A \vee E$

(9) $A \wedge E$

となる.

史織　否定の記号は教科書にも出てきます.

南海　ついでにこれらの真偽はどうなるかな.

史織　順に

(1) 偽, (2) 真, (3) 偽, (4) 真, (5) 真, (6) 真, (7) 真, (8) 真, (9) 偽

です.

1.12.2.2　条件の否定，論理和，論理積

史織　命題にこのように否定，論理和，論理積があるのなら，それに対して命題関数，つまり条件にも否定，論理和，論理積があるのですね.

南海　その通り．上の命題の主題部分を変数に変えればよい.

(i) $p(x)$: x は 4 の倍数である.

(ii) $q(x)$: x は平方数である.

(iii) $r(x)$: x は奇数である.

(iv) $s(y)$: y は奇数である.

(v) $t(y)$: y は平方数である.

これらに対して

(1) x は 4 の倍数でない.

(2) x は 4 の倍数または奇数である.

(3) x は 4 の倍数かつ奇数である.

(4) x は 4 の倍数または平方数である.

(5) x は 4 の倍数かつ平方数である.

(6) x は 4 の倍数または y は奇数である.

(7) x は 4 の倍数かつ y は奇数である.

(8) x は 4 の倍数または y は平方数である.

(9) x は 4 の倍数かつ y は平方数である.

が作れる．記号で書くと

(1) $\overline{p(x)}$

(2) $p(x) \vee r(x)$

(3) $p(x) \wedge r(x)$

(4) $p(x) \vee q(x)$

(5) $p(x) \wedge q(x)$

(6) $p(x) \vee s(y)$

(7) $p(x) \wedge s(y)$

(8) $p(x) \vee t(y)$

(9) $p(x) \wedge t(y)$

となる.

史織　条件から新たな条件を作る操作も，もとは命題の変形から来ているのですね.

南海　この順に考えるのがはっきりすると思う.

史織　変数が x と y のときの定義域はどうなるのですか.

南海　これは例えば xy 平面上の点全体を定義域とすればよい．すると「x は 4 の倍数」という条件は，x 座標が 4 の倍数ということであり，「y は平方数である」という条件は，y 座標が平方数ということになる.

史織　そうすると「かつ」や「または」の意味もわかりました.

南海　さて，ここで条件の否定，論理和，論理積に対してその真理集合がどうなるかを確認しておこう.

ただし集合 A, B に対して $\overline{A}$ は補集合，$A \cup B$ は和集合，$A \cap B$ は共通部分 (積集合ともいう) を表すことは，知っているとする.

史織　条件 p の否定の真理集合は

$$T_{\overline{p}} = \{\ x \mid p(x) \text{ が真でない } \}$$

ですから，$\overline{T_p}$ です．つまり

$$T_{\overline{p}} = \overline{T_p}$$

です.

また，条件 p と q の論理和 $p \vee q$ の真理集合は

$$T_{p \vee q} = \{\ x \mid p(x) \text{ が真または } q(x) \text{ が真 } \}$$

ですから，$T_p \cup T_q$ です．つまり

$$T_{p \vee q} = T_p \cup T_q$$

です.

同様に，条件 p と q の論理積 $p \wedge q$ の真理集合は

$$T_{p \wedge q} = \{\ x \mid p(x) \text{ が真かつ } q(x) \text{ が真 } \}$$

ですから，$T_p \cap T_q$ です．つまり

$$T_{p \wedge q} = T_p \cap T_q$$

です.

南海　条件の「否定」「論理和」「論理積」のそれぞれの操作に対して，それぞれ真理集合の「補集合」「和集合」「積集合」が対応する．
史織　集合では．ド・モルガンの法則というのを習いました．二つの集合 $A,\ B$ に対して

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

を習いました．これに対応して二つの命題 $p,\ q$ に対して

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q},\ \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$$

が成り立つのですね．
　これは例えば第一式は

$$\text{条件「}p\text{ かつ }q\text{」の否定条件} \ = \ \overline{p}\text{または }\overline{q}$$

ということで，これまでにも使ったことがあります．

1.12.3　命題の構成

1.12.3.1　条件から命題を作る

南海　さてここで，推論型の命題など，条件から構成される命題についていろいろ考えよう．
　$p(x)$ および $q(x)$ を集合 U を定義域とする命題関数，つまりは U の要素 x に関する条件とする．
　このとき次のものはすべて命題となる．

(1) U のすべての要素 x に対して $p(x)$ は真である．

(2) $p(x)$ を真とする U の要素 x_0 が存在する．

(3) U の要素 x_0 について，$p(x_0)$ が真なら $q(x_0)$ は真である．

　これらを順に

$$p(x)\text{ の全称命題},\quad p(x)\text{ の存在命題},\quad p(x),\ q(x)\text{ の含意命題}$$

等という．
　なお，(3) は「$p(x_0)$ が真となる**すべての** x_0 に関して $q(x_0)$ は真である」ということだ．
　また上の三つは記号的には次のように書く．ただし．条件 $p(x)$ に対して 「$p(x)$.」 とピリオドを打って文章にしたときは「$p(x)$ が成立する.」あるいは「$p(x)$ は真である.」を意味するものとする．

(1) $\forall x \in U,\ p(x).$

(2) $\exists x \in U,\ p(x).$

(3) $x \in U,\ p(x). \Rightarrow q(x).$

それぞれが命題で真偽が判断される．
　それぞれの命題の否定はどうなるかな．
史織　順に次のようになるのではないでしょうか．

(1) $p(x)$ が偽となる U の要素 x_0 が存在する.

(2) U のすべての要素に対し $p(x)$ が偽となる.

(3) $p(x_0)$ が真で $q(x_0)$ が偽となる U の要素が存在する.

南海　その通りだ.「$p(x)$ が偽となる」ということと「$\overline{p(x)}$ が真となる」は同じことなので，記号で書くと順に

(1) $\exists x \in U,\ \overline{p(x)}$.

(2) $\forall x \in U,\ \overline{p(x)}$.

(3) $\exists x \in U,\ p(x) \wedge \overline{q(x)}$.

となる.

含意命題は「U の**任意の**要素 x_0 について，$p(x_0)$ が真なら $q(x_0)$ は真である.」とすればわかるように，一種の全称命題だ．全称命題が偽であることを示そうとすれば，成立しない要素が存在することを示せばよい.

史織　それが「反例」ですね.

南海　ここで息抜きに練習問題.

演習 19　［02 東北学院大改題］　解答 19

次の命題について，真偽を判断せよ．ただし，x と y は実数とする.

(1) $x < \sqrt{2}$ ならば $x^2 \leqq 2$ である.

(2) $xy = 0$ ならば $x = y = 0$ である.

(3) $x + y$ と xy が有理数ならば x と y は有理数である.

(4) $x + y > 1$ ならば $x > 1$ または $y > 0$ である.

(5) $x + y \geqq 2$ かつ $xy \geqq 1$ ならば $x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ である.

南海　大切なことは，例えば (1) は「$x < \sqrt{2}$ となるような x に対して，$x^2 \leqq 2$ が成り立つ」という命題だということである.

このように考えていけば難しいことは何もない.

1.12.3.2　必要条件と十分条件

史織　最初の教科書による必要条件・十分条件もはっきりしました.

二つの条件 $p(x),\ q(x)$ に対して，その含意命題 $p(x) \Rightarrow q(x)$ が真のとき

$q(x)$ は $p(x)$ であるための **必要条件**である
$p(x)$ は $q(x)$ であるための **十分条件**である

という.

ということです.

南海　真理集合との関係で必要条件，十分条件を特徴づければどうなるのか.

史織　$p(x) \Rightarrow q(x)$ が真ということは，$p(x)$ を真とする x はすべて $q(x)$ を真とする，ということですから，これまでと同じく条件 $p(x)$ の真理集合を T_p と表すと

$$p(x) \Rightarrow q(x) \text{ が真}$$

であることと

$$T_{p(x)} \subset T_{q(x)}$$

は，同じことになります.

ですから

$$T_{p(x)} \subset T_{q(x)}$$

なら，

$q(x)$ は $p(x)$ であるための必要条件である
$p(x)$ は $q(x)$ であるための十分条件である

ということです.

そして $p(x) \Rightarrow q(x)$ と $q(x) \Rightarrow p(x)$ がともに真のとき，つまり $p(x)$ は $q(x)$ であるための **必要十分条件**であるとき，2 つの条件 $p(x)$ と $q(x)$ は**同値**であるといいます.

南海　その通り．一点注意．同値性は定義域 U をどのようにとるかで変わるということだ.

U を実数にとれば，条件 $x < 1$ と $x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は同値ではない．しかし U を整数にとれば，条件 $x < 1$ と $x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は同値である.

同値であることは，それぞれの真理集合が一致することだ.

演習 20　［00 上智大法］　解答 20

あ から え には下の選択肢 (a)，(b)，(c)，(d) から正しいものを選んで入れよ.

(1) n を整数とする．n が 6 または 15 で割り切れることは，n が 30 で割り切れるための あ .
$1 \leqq n \leqq 300$ をみたし，6 または 15 で割り切れる n は全部で ハ 個ある.

(2) $m,\ n$ を整数とする．$m+n,\ mn$ がともに 12 で割り切れることは，$m,\ n$ がともに 6 で割り切れるための い .
$1 \leqq m \leqq n \leqq 100$ をみたし，$m+n,\ mn$ がともに 12 で割り切れる $m,\ n$ の組は全部で ヒ 個ある.

(3) $l,\ m,\ n$ を整数とする．$l+m+n,\ lm+mn+nl,\ lmn$ がすべて 5 で割り切れることは，$l,\ m,\ n$ がすべて 5 で割り切れるための う .

(4) $l,\ m,\ n$ を整数とする．$l+m+n,\ lm+mn+nl,\ lmn$ がすべて 30 で割り切れることは，$l,\ m,\ n$ がすべて 30 で割り切れるための え .
$1 \leqq l \leqq m \leqq n \leqq 100$ をみたし，$l+m+n,\ lm+mn+nl,\ lmn$ がすべて 30 で割り切れる $l,\ m,\ n$ の組は全部で フ 個ある.

選択肢:
(a) 必要十分条件である.
(b) 必要条件であるが十分条件ではない.
(c) 十分条件であるが必要条件ではない.
(d) 必要条件でも十分条件でもない.

1.12.4 数学の論証

1.12.4.1 証明とは

南海 証明とは何か．これに対するもっとも端的な記述を見つけたので紹介しよう.

> 『数学と新しい論理』(本橋信義著，遊星社)
> 仮定と結論という二つの命題を眺め，適当な視点と主題を探し，その主題の下で仮定と結論を解釈して，両者を結びつける根拠法則を見つけ出すことが，推論という行為の本質なのです.

これにつけ加えることはない.『高校数学の方法』はこれに対する実践的な方法論だ.
史織 「仮定」と「結論」は条件のこととして先に出てきましたが，本来は命題のことなのですね.
南海 命題のことだ．数学の論述は，命題から命題関数，つまり条件がつくられ，条件を組み合わせて命題が構成され，またそこから条件がつくられ…，と何重もの階層構造をもっている.
これは教科書にのっていることだが， P と Q を命題または条件として，一つの命題

$$P \Rightarrow Q$$

から，新たに三つの命題ができる.

(1) $Q \Rightarrow P$:逆命題

(2) $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$:裏命題

(3) $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$:対偶命題

1.12.4.2 背理法

南海 元の命題の真偽と対偶命題の真偽は一致する．なぜか.
史織 これも教科書に載っています.
条件 P, Q に対して「$P \Rightarrow Q$ が真」は $T_P \subset T_Q$ を意味します．一方「$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ が真」は $\overline{T_Q} \subset \overline{T_P}$ を意味します．ところが一般に集合 A に対して $\overline{A} = U - A$ です．ここで $U - A$ は全体集合から集合 A の要素を取り除いたものです.
したがって

$$T_P \subset T_Q \quad \Longleftrightarrow \quad U - T_Q \subset U - T_P \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{T_Q} \subset \overline{T_P}$$

となり，真理集合の包含関係の同値性から，元の命題と対偶命題の同値性が示されます.
南海 なかなかよく勉強している．P や Q が自体が命題のときは P や Q を命題関数にして，同様に示せばよい.
南海 さて証明における推論の方法なのだが，ここで直接証明と間接証明について触れておこう.
典型的な直接証明 は次のように行われる.

(i) 命題 P は真である．

(ii) 命題 $P \Rightarrow Q$ は真である．

(iii) ゆえに，命題 Q は真である．

それに対して間接証明とは何か．命題 P を証明したいときに，自明であったりその証明の前提となっている適当な命題 Q を用いて $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$ を示す．これから $Q \Rightarrow P$ が成り立つことが示され，Q を前提として P が成立することを示すことができる．

これが**背理法**だ．これについては『高校数学の方法』「背理法」で具体的に詳しく述べたので見てほしい．

最後にもう一題演習問題を．

演習 21　［02 慶応改題］　解答 21

次の二つの命題 $[P]$，$[Q]$ を考える．ただし $a,\ b$ は実数とする．

$[P]$　未知数を $x,\ y$ とする連立方程式 $\begin{cases} ax+y=0 \\ x+by=0 \end{cases}$ において，$x=y=0$ 以外の解で，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たすものがある．

$[Q]$　ベクトル $\overrightarrow{k}=(a,\ 1)$，$\overrightarrow{h}=(1,\ b)$ について $\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{q}>0$ かつ $\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{q}>0$ となるベクトル $\overrightarrow{q}=(x,\ y)$ がある．

(1) 命題 $[P]$ が真となる点 $(a,\ b)$ の集合を求めよ．ただし，理由も示せ．

(2) 命題 $[\overline{Q}]$ が真となる点 $(a,\ b)$ の集合を求めよ．ただし，理由も示せ．なお，$[\overline{Q}]$ は命題 $[Q]$ の否定である．

(3) 命題 $[P]$ と $[Q]$ の関係を述べよ．

1.13　対角線論法と不完全性定理

2013.6.15/2006.12.11/2006.2.9

taikaku 2006.12 に最初にこれをまとめて以降，幾人かの人に貴重な意見をいただいた．ありがとうございました．心からの感謝を述べさせてもらいます．

1.13.1　対角線論法

1.13.1.1　太郎が「太郎は嘘つき」と言う

拓生　「クレタ人が『クレタ人は嘘つきだ』と言う.」という文の矛盾を知りました．

もし,『クレタ人は嘘つきだ』が真ならば，クレタ人が発した『クレタ人は嘘つきだ』自体が嘘で，クレタ人は嘘をつかないことになり,『クレタ人は嘘つきだ』が真という仮定と矛盾する．

もし,『クレタ人は嘘つきだ』が偽ならば，この言葉を発したクレタ人は嘘をついたことになる．その結果,『クレタ人は嘘つきだ』が真となってしまい,『クレタ人は嘘つきだ』が偽という仮定と矛盾する．

『クレタ人は嘘つきだ』の真偽がいずれであると仮定しても，矛盾が起こる．

南海　これは昔からよく知られた逆理 (パラドックス) だ．もちろんこれが矛盾であるためには,「嘘つき」とはつねに嘘をいう人のことであり，その否定は「正直者」，つまりつねに嘘をつかない人，という前提が必要だ．

参考書にあげておくが,『ふしぎな数学』という本によれば，紀元前 6 世紀，クレタの有名な詩人で予言者であったエピメニデスが「すべてのクレタ人は嘘つきである」との見解を述べたのだそうだ．

これは，新約聖書のパウロ書簡で「テトスへの手紙」の最初の部分にもたとえとしてもちだされている．もっとも，手元にある新約聖書では，

> クレタ人のうちのある預言者が
> 「クレタ人は，いつもうそをつき，
> たちの悪いけもの、
> なまけ者の食いしんぼう」
> と言っているが，この非難はあたっている．

とあって，エピメニデスの名は出ていない．パウロが，クレタでのキリスト教の布教がなかなか困難であることから，クレタの人々を非難する例えにエピメニデスの言い伝えをもちだしたのだ．新約聖書にもちだされたために，この話は有名になり，クレタ人はとんだ迷惑である．

パウロの時代には，すでにこのエピメニデスの話がよく知られた伝説になっていた．

エピメニデスはいなくなった羊を探しに山に入り，57 年間昼寝をして帰ってきたという伝説があるくらいなので，話そのものは本当のところどういうことなのかはわからない．

パウロが「クレタ人」の一般的性質として，例え話にもちだしたものだから,『すべてのクレタ人は嘘ばかりいう』か『すべてのクレタ人は真ばかりいう』のいずれかのみが成立する，という話として広く流布し，この前提のもとで，これは確かに逆理，つまりいずれにしても矛盾を引き起こす命題となる．

拓生　確かに，高校で習う論証からいえば『すべてのクレタ人は嘘つきだ』の否定は『嘘をつかないクレタ人が存在する』ですね．

南海　『すべてのクレタ人は嘘つきだ』の否定として『すべてのクレタ人はつねに嘘をつくわけでない』でもよい.「すべて」の否定は「成立しないものの存在」だから,「すべてのクレタ人」「つねに (すべて) 嘘をいう」のいずれの「すべて」を否定しても否定命題が作れる.

この意味では「クレタ人の逆理」は本当のところ逆理とは言えない.

「クレタ人」というところを，個別の人間にし，嘘つきか正直者かは，これまで通りつねにいずれかであることにすればよい.

拓生　本質的には「太郎は『太郎は嘘つきだ』と言う」でいいのですね．太郎が嘘つきだとしても，正直者だとしても矛盾です.

南海　そうだ．重要なことは，この逆理は一種の対角線論法だ，ということだ.

拓生　『数学対話』－「実数とは何か」にあるカントールの対角線論法ですか.

南海　それとまったく同じということではないが，一種の対角線論法だ．クレタ人の逆理を考えたので，これを発展させて，対角線論法の問題を通して，数学の基礎にある問題をいろいろと考えてみたい.

さて，対角線論法で一番簡単なのは星取り表だ.

拓生　星取り表って，次のようなものですね.

	A	B	C
A	／	●	○
B	○	／	○
C	●	●	／

南海　対角線上には「／」を入れてくれた.

拓生　実際 A と A が闘うようなそんな対戦はありません.

南海　そうだ．しかしまた別の観点から見ると対角線上には○を入れても●を入れても矛盾が起こるともいえる.

拓生　確かに．A が A に勝つのも，A が A に負けるのも，矛盾といえる.

南海　そこで，クレタ人の逆理を先の注意を考えながら定式化しよう.

A, B, C, $\cdots$ といろんな人がいるとする．それぞれの個人は嘘をつきか正直者かであって，嘘をつきはつねに嘘をつき，嘘つきの否定である正直者はつねに嘘をつかないものとする.

「A が『B は嘘つきである』と言った」を「A が B と勝負する」といいかえればこれは基本的には星取り表と同じだ.

拓生

A が『B は嘘つきである』と言ったのだから,『B は嘘つきである』が真かまたは偽であることと，A が正直者かまたは嘘つきかであることは，同値です.

○で正直者，●で嘘つきを表すと，A が○なら B は●．A が●なら B は○です.

拓生　A と B が異なれば，事実 B が嘘つきなら A は正直者であり，B が正直者なら A は嘘つきである．A が嘘つきか正直者かは確定します.

しかし対角線上にある「A が『A は嘘つきである』と言った」では，A が嘘つきであるとしても，正直者であるとしても矛盾が生じる，ということですね.

南海　そう．もちろんこれは対角線上の言明「A が『A は嘘つきである』と言った」がそれぞれ単独で矛盾になるので，カントールの対角線論法のように，対角線上の「すべて」を考えるものではない.

しかし，単独の言明「A が『A は嘘つきである』と言った」の背後に対角線があることは大切なことだ.

拓生　違いというか，星取り表は単純ですが，A によって言われた『A は嘘つきである』が，A 自身が本当のことを「言った」のか否かににまで影響を及ぼしているというか，決定しています．

その意味で複雑です．

南海　さて先の星取り表と見比べて複雑だと言うことだが，それは結局次のことだ．

対戦では自分同士の試合は不可能だが，人間に関する言明は「私は正直です」のように自分自身について言及することが可能だ．

拓生　言及という行為は，自分自身についても可能ですね．

南海　このように自分自身に言い及ぶことを「自己言及」というのだが，この対角線論法は，対角線上で自己言及を起こすことで，矛盾を作ったり，さまざまの数学的論証をおこなったりする，論法だ．

拓生　いつも矛盾が出るとはかぎらないのですか．

南海　カントールの対角線論法では，背理法のなかで用いられる．背理法の仮定と矛盾する数を対角線論法を用いて構成する．後で詳しく考えよう．

拓生　クレタ人の逆理は分かりやすいですが，同じような逆理は他にもあるのですか．

南海　クレタ人の逆理では，対角線論法によってそれ自身で矛盾が生じた．このような自己言及の矛盾は他にもある，有名なものは次の例だ．

例 1.13.1　村の理髪店主が「自分でひげを剃るものは勝手に剃れ．私は自分で自分のひげを剃らない者のひげを剃ってやろう.」と言った．さて，村の理髪店主は自分のひげを剃るのか剃らないのか．

拓生　村の理髪店主が自分のひげを剃るとしても，剃らないとしても矛盾が起こります．

南海　$P(A,\ B)$ を「A は，B が自分のひげを剃らないなら，B のひげを剃ってやる」とする．すると，$P(A,\ A)$ は自己矛盾した文章になる．

この種の例は他にもある．自分でも考えて見て欲しい．

1.13.1.2　リシャールの逆理

南海　ここで，もう一つ「リシャールの逆理」を紹介しよう．これを考えたのはフランスの数学者 J. リシャール (J.Richard，1905 年発表) だ．彼はフランスのリセ (高等中学校) で数学教師をしていた．

例えば，

(1) 1 とそれ自身以外には約数をもたない自然数．

(2) 1 と異なり互いに異なる 2 つの数の積として表される自然数．

(3) 2 個の異なる平方数の和で表される自然数．

このように有限の長さの文章で書かれ，各自然数が定義にあてはまるかあてはまらないかを，自然数の加法，乗法，およびこれらから派生した有限回の手続きで定まる諸関係をもとに判断できるような，自然数の部分集合を定める定義をすべて考える．ただし,「判断できる」とは，各自然数について有限回の手続きで判断できることを意味する．

拓生　9 が 2 個の異なる平方数の和で表される自然数かどうかは，$x^2 + y^2 = 9$ となる x と y が存在するかどうかを，$1 \leqq x,\ y \leqq 3$ の範囲で調べればよい．これは 9 通りしかない．有限回の手続きとはこのようなことですね．

南海　今は問題をはっきりさせるために，有限回の手続きで判断できるということを明確にした．
拓生　有限回でなければ，実際に属するかどうかは判断できません．
　しかし，このような定義文は無数にあります．上の「2 個の異なる」の 2 を「3，4，5，…」としたものはすべて含まれます．
南海　にもかかわらず，定義文の長さが有限であるかぎり番号をつけていくことはできる．
　数字とアルファベットとひらがなと当用漢字は全部あわせても有限個だ．この個数を N とする．n 文字の文章は N^n 個ある．つまり同じ長さの定義文は有限個だ．これらの文字列で，自然数の加法，乗法，およびこれらから派生する有限回の手続きで判断できる定義文になっているものを選ぶ．それを

(1) 文字数が少ないものを先にする．

(2) 同じ文字数の定義文は辞書式に並べる．

という原則で一列に並べる．そして順に番号を付ける．
　f_n を n 番目の定義文とし，f_n で定義される算術的な性質をもつ自然数の集合を S_n とする．
　ここで

　　数 n がリシャール数であるとは

$$n \notin S_n$$

　　であることとする．

　そこで,「リシャール数となる自然数」という文 f を考える．これ自体，自然数の部分集合を定める定義文だから，並べられた定義文の列のどこかに現れる．
　$f = f_m$ であるとする．
　このとき，自然数 m はリシャール数であるか．
拓生　あっ，対角線論法．
南海　そうなのだ，
拓生　定義文の番号 m が，その定義文が定める集合 S_m に属するかどうか，ということなので，これは確かに自己言及です．
　m がリシャール数であるということは

$$m \notin S_m$$

ですが，S_m は「リシャール数となる自然数」の集合だから，m はリシャール数でないことになる．
　m がリシャール数でないということは

$$m \in S_m$$

ということですが，S_m は「リシャール数となる自然数」の集合だから，m はリシャール数であることになる．
　いずれにしても矛盾である．
南海　これがリシャールの逆理だ．
拓生　でも，なんか変ですね．
　m がリシャール数であるかどうかを「自然数の加法，乗法，およびこれらから派生し有限回の手続きで定まる諸関係」で判断できるのでしょうか．もし集合 S_m を確定しようとすれば，集合 S_m

を定めるためにはすべての自然数を点検しなければならず，有限回の手続きではできない．その他に方法がありません．

矛盾が起こることは確かですが，しかし m がリシャール数であるかどうかを自然数のなかの論証で判断することができません．

南海　そうなのだ．集合 S_m は自然数内部では確定できないのだ．だから「m がリシャール数である」であるという言明は，もはや自然数を含む数学内の言明とはいえない．

この意味で，リシャールの逆理は，確かに厳密なものではない．それで多くの数学者はこれを無視した．あるいは価値のないものと見なした．

拓生　当然です．

南海　ところが，後半で考えるように，ゲーデルは「クレタ人の逆理」や「リシャールの逆理」を数学的に厳格化することはできないのか，と考えた (と思われる)．そこから，あの偉大な「不完全性定理」に至った．

拓生　そういう道筋があるのですか．

南海　もし S_m が何らかの方法で自然数内部の命題に変換されうるなら，これは厳密なものになる．

拓生　そのときは本当に逆理になります．

南海　ということは「リシャールの逆理」を自然数内の命題に変換することはできないということなのだ．

ゲーデルは自然数を含む形式化された数学内の命題から自然数への写像を構成し，「証明可能である」とか「無矛盾である」とかいう超数学的な言明を，写された自然数内の命題に変換する．それをもう一度，形式化された数学内で考えるという道筋をたどった．それも後に考えよう．

1.13.1.3　カントールの対角線論法

南海　ゲーデルの仕事の意味を知るためには，もう少し 19 世紀末の数学に現れた，数学の基礎に関する諸問題を知らねばならない．これを対角線論法という視点で見ていこう．

集合論におけるカントールの対角線論法と，そのひろがりを見てみよう．

『数学対話』－「高校数学の土台」－「実数とは何か」で，有理数の集合は自然数の集合と一対一の対応を作ることができるが，実数の集合には自然数との一対一対応が存在しないことを示した．これは偉大な発見だった．無限といっても同じではなく，段階があることをはじめて見いだした．

ここで「実数の集合には自然数との一対一対応が存在しない」を改めて考えよう．二つの集合 A と B の間に一対一対応が存在するとき，二つの集合の**濃度**が等しいといい，$|A| = |B|$ と書く．有限集合の場合は $|A|$ は集合 A の要素の個数そのものとする．

集合 A が集合 B のなかに埋め込める，つまり B の部分集合との間に一対一対応が存在するとき，濃度の関係は $|A| \leqq |B|$ であると書く．$|A| \leqq |B|$ ではあるが，A と B の間の一対一対応は存在しないときは $|A| < |B|$ と書く．

これで濃度の大小，相等は定義された．

拓生　まってください．「濃度の大小」は確かに定義されましたが，「濃度」そのものは定義されていません．

南海　確かに．濃度そのものを定義してはいない．濃度を定義するためには，公理的な集合論の準備や，選択公理などに関する理解が必要である．ここでは，一対一対応がつく集合は，何かが同じであると考え，その同じことにつけられた名前が「濃度」であるとした．

拓生　問題はあるが，いまそれを解決することはできない，ということですね．また勉強してみます．

南海　そういうことにしよう．さて，自然数の集合と一対一の対応が存在する集合の濃度は，自然数の集合の濃度と等しいわけであるが，この濃度を $\aleph_0$ と書き「アレフ 0」と読む．

$\aleph$ は，英語の A に相当するヘブライ語の文字である．濃度が $\aleph_0$ である集合は**可付番**である，あるいは**可算無限**であるという．それに対して実数の集合の濃度を $\aleph$ と書く．

カントールが最初に発見した集合論の定理が，次の定理である．この定理は，実数の集合の濃度は自然数の濃度より大きい，つまり実数の集合は**可付番**ではないことを意味する．カントールは 1874 年にはこれを発見していたが，1891 年に次の証明のような対角線論法でこれを証明した．

定理 10　自然数の濃度 $\aleph_0$ と実数の濃度 $\aleph$ に関して不等式

$$\aleph_0 < \aleph$$

が成り立つ．■

証明　区間 $(0,\ 1]$，つまり $0 < x \leqq 1$ を満たす実数の集合を考える．

自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n} \in (0,\ 1]$ であるから，自然数から $(0,\ 1]$ への埋め込みが存在する．よって

$$\aleph_0 \leqq |(0,\ 1]|$$

である．

等号が成立しないことを背理法で証明する．

等号が成立するとする．つまり $0 < x \leqq 1$ を満たす実数の集合が可付番であると仮定する．いいかえると，$0 < x \leqq 1$ を満たす実数全体に番号を付けて次のようにできるとする．

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots \alpha_n,\ \cdots$$

このような実数 α はすべて十進小数で

$$\alpha = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

と表される．

ここで，$0.25 = 0.2500000\cdots$ のように途中から後はすべて 0 が並ぶものを有限小数ということにし，円周率 $-3 = 0.14159265358979\cdots$ のように途中から 0 になることはないものを無限小数ということにする．

すると有限小数は

$$0.25 = 0.2499999\cdots$$

と無限小数に書き換えることができる．このように有限小数を無限小数で書くことに統一すれば，区間 $(0,\ 1]$ の各実数は無限小数にただ一通りに書き表される．

$0 < x \leqq 1$ を満たす実数の集合が自然数と一対一に対応すると仮定したので，対応する自然数の順に，$0 < x \leqq 1$ にある実数を並べる．それを

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1 & = & 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\cdots a_n^{(1)}\cdots \\
\alpha_2 & = & 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots a_n^{(2)}\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_n & = & 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\cdots a_n^{(n)}\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

とする．ここに $a_i^{(n)}$ は n 番目の小数の，小数第 i 位の数を表している．

この対角線に並んでいる数 $a_n^{(n)}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を次のように定める．

$$b_n = \begin{cases} 1 & (a_n^{(n)} \neq 1) \\ 2 & (a_n^{(n)} = 1) \end{cases}$$

数列 $\{b_n\}$ から小数 β を次のように定める．

$$\beta = 0.b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$$

すると $0 < \beta \leqq 1$ である．

しかし β はどの α_n とも一致しない．なぜなら α_n と β は第 n 位が必ず異なるからである．これは α_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ が $0 < x \leqq 1$ を満たす実数の全体という仮定と矛盾した．

この矛盾は，集合 $(0,\ 1]$ と自然数の集合との間に一対一対応が存在するかぎり起こる．

よって $0 < x \leqq 1$ を満たす実数の集合は可付番でないことが示された．したがって

$$\aleph_0 < |(0,\ 1]| \leqq \aleph$$

が示された． □

南海　この背理法を「カントールの対角線論法」という．

さらに次のことが成り立つ．

$$|(0,\ 1)| = \aleph$$

$|(0,\ 1)| \leqq |(0,\ 1]|$ なので

$$|(0,\ 1)| = |(0,\ 1]| = \aleph$$

も成り立つ．

拓生　つまり，区間 $(0,\ 1)$ と実数全体とのあいだに一対一対応が存在するということですね．

南海　次のように一対一対応を構成すればよい．

定理 11　開区間 $(0,\ 1)$ の濃度は，実数の濃度に等しい．つまり $|(0,\ 1)| = \aleph$ である．

■

証明　区間 $(0,\ 1)$ を区間の列

$$\left(0,\ \frac{1}{2}\right],\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2^2}\right],\ \left(\frac{3}{2^2},\ \frac{7}{2^3}\right],\ \cdots \left(\frac{2^n-1}{2^n},\ \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right],\ \cdots$$

に分ける．

区間 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$ は区間 $(0,\ 1]$ と一対一対応をつけ，

$n \geqq 1$ に対しては，

$n = 2m$ なら区間 $\left(\frac{2^n-1}{2^n},\ \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right]$ と区間 $(m,\ m+1]$ に一対一対応をつけ，

$n = 2m+1$ なら区間 $\left(\frac{2^n-1}{2^n},\ \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right]$ と区間 $(-m-1,\ -m]$ に一対一対応をつけることができる．

こうして区間 $(0,\ 1)$ と実数の間の一対一対応ができる． □

拓生　0 と 1 の間に，すべての有理数より多くの実数があるのは不思議でもあります．

南海　よくたいへん多いことを,「ガンジス川の砂より多い」等というが，それでも，ガンジス川の砂の数は有限だ.

人類が地球上に現れ，言葉を覚えて以来，これまでに生きてきたすべての人間が発した単語の総数，といっても有限だ.

拓生　確かに．地上のすべての人間の細胞の総数，も有限です．それより 0 と 1 の間の実数の濃度の方が大きい！

南海　対角線論法は次のように書くこともできる.

定理 10 の証明の別表現

区間 $(0,\ 1]$ の実数 α を一つとる．α は十進小数で

$$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

のように無限小数でただ一通りに表される.

このとき a_n を $f(n)$ のように関数形で書くと，$f(n)$ は自然数の集合 N から，N と 0 の集合 $N\cup\{0\}$ への写像になっている．α によって，自然数 n に対し α の小数第 n 位の数を対応させる関数が得られる.

区間 $(0,\ 1]$ の実数をひとつとれば，N から $N\cup\{0\}$ への写像 f で恒等的に 0 ではないものがひとつ定まる．逆に，N から $N\cup\{0\}$ への恒等的に 0 ではない写像 f があると，それによって区間 $(0,\ 1]$ の実数 α がひとつ定まる．つまり

$$\alpha=\sum_{1}^{\infty}\frac{f(n)}{10^n}$$

である.

この対応によって，集合 $(0,\ 1]$ と自然数から自然数への写像の集合の間に一対一対応ができる．この対応で二つの集合を同じものとみる.

$$(0,\ 1]=\{\ f\mid f:N\to N\cup\{0\},\ f\neq 0\ \}$$

恒等的に 0 な写像を数 0 に対応させて

$$[0,\ 1]=\{\ f\mid f:N\to N\cup\{0\}\ \}$$

としてもよい.

さて，集合 $\{\ f\mid f:N\to N\cup\{0\}\}$ と自然数の間に一対一対応が存在すると仮定する.

この一対一対応で自然数 k に対応する写像を f_k とおく．これを用いて N から $N\cup\{0\}$ への写像 $g(n)$ を次のように定める.

$$g(n)=\begin{cases}1 & (f_n(n)\neq 1)\\ 2 & (f_n(n)=1)\end{cases}$$

$g(n)$ もまた N から $N\cup\{0\}$ への写像であるから，ある自然数と対応している．それを m とする．つまり

$$g(n)=f_m(n)$$

である．しかしこのとき値 $g(m)$ に関して

$$g(m)=f_m(m)=\begin{cases}1 & (f_m(m)\neq 1)\\ 2 & (f_m(m)=1)\end{cases}$$

と，矛盾である．

ゆえに集合 $\{ f \mid f : N \to N \cup \{0\}\}$ と自然数の間に一対一対応は存在しない． □

拓生　n 番目の関数に n を代入して，その値を否定した値で新たな関数を作る，自己言及関数から新たな関数を作るのですね．

南海　そういうことだ．これは，先の証明を関数形でいいかえただけだが，関数の形で表すことで，次のように発展していく．

1.13.1.4　べき集合の濃度

南海　ここで二つの集合 A と B に対し，集合 A から集合 B への写像の集合を**べき集合**といい

$$B^A$$

と書く．

これは次の例で考えれば，自然な記号だ．$A = \{0,\ 1\}$ で $B = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\ \}$ なら，A から B への写像は 0 と 1 の行き先を決めれば決まるので，その組合せだけあり，個数は n^2 個ある．

有限集合の場合，A から B への写像の集合は，集合 B を集合 A の分だけ組合わせただけあり，その個数は $|B|^{|A|}$ 個ある．

これをもとに，べき集合を上のように定義した．

したがって，実数の実数べき集合 R^R とは，実数から実数への写像の集合である．

定理 12　実数の集合 R とそのべき集合 R^R の濃度について，不等式

$$|R| = \aleph < |R^R|$$

が成立する． ■

証明　実数 c と定数写像 $f(x) = c$ を対応させることで R は R^R の部分集合と一対一の対応がつけられる．したがって

$$|R| = \aleph \leqq |R^R|$$

である．

次に R と R^R の間に一対一写像は存在しないことを示す．

集合 R と R^R の間に一対一対応が存在すると仮定する．

この一対一対応で実数 r に対応する写像を f_r とおく．ここで R から R への写像，つまり R^R の要素 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x) = f_x(x) + 1$$

$g(x)$ もまた R^R の要素であるから，ある実数と対応している．それを s とする．つまり

$$g(x) = f_s(x)$$

である．しかしこのとき，値 $g(s)$ に関して，一方で $g(s) = f_s(s)$ であるが，一方 $g(s)$ の定義から $g(s) = f_s(s) + 1$ となり矛盾である．

ゆえに集合 R と R^R の間に一対一対応は存在しない． □

拓生　実数なので対角線に並べるということはできないが，しかし，実数と一対一対応があるとして，自己言及するところで矛盾した写像を作るということは，定理 10 の証明の別表現と同じです．

南海　その通りである．

集合 A に対し，その部分集合の集合 (空集合と A 自身を含む) を 2^A と書こう．これは A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像の集合の記号 $\{0,\ 1\}^A$ から来ている．

集合 A に対し，その部分集合の集合と，A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像の集合との間に一対一の対応が存在する．

つまり，集合 A の部分集合 S が一つ与えられると，A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像 f_S が

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & x \in S \\ 1 & x \notin S \end{cases}$$

で定まる．逆に A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像 f に対し，A の部分集合 S を

$$S = \{\ x \mid f(x) = 0,\ x \in A\ \}$$

とすればよい．このとき，$x \notin S$ なら $f(x) = 1$ である．

A が n 個の要素からなる有限集合の場合，部分集合は各要素を含むか含まないかで決まるので，部分集合の個数は 2^n 個ある．つまり有限集合の場合は

$$|2^A| = 2^{|A|}$$

が成り立っている．

だから，A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像の集合を，A のべき集合といい，2^A と記すことにする．

定理 13

$$|A| < |2^A|$$

である．■

証明　A の要素 a に対して，A から集合 $\{0,\ 1\}$ への写像 f_a を

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & x = a \\ 1 & x \neq a \end{cases}$$

で定めることで，A は 2^A の部分集合と一対一に対応する．ゆえに

$$|A| \leqq |2^A|$$

である．次に A と 2^A の間に一対一写像は存在しないことを示す．

集合 A と 2^A の間に一対一対応が存在すると仮定する．

この一対一対応で集合 A の要素 a に対応する A の部分集合を S_a とする．A の部分集合 T を次のように定める．

$$T = \{\ t \mid t \notin S_t\ \}$$

T もまた A の部分集合なので，A のある要素 u と対応している．つまり

$$T = S_u$$

である．

しかしこのとき，もし $u \in T$ なら T の定義から $u \notin S_u = T$ なので矛盾，もし $u \notin T$，つまり u が T の補集合の要素なら T の定義から $u \in S_u = T$ なので矛盾，

いずれも矛盾となる．ゆえに集合 A と 2^A の間に一対一対応は存在しない．つまり

$$|A| < |2^A|$$

である． □

南海　A が N つまり自然数の集合のとき

$$\aleph_0 = |N| < |2^N|$$

となる．

拓生　定理 10 から $\aleph_0 < \aleph$ ですが，$\aleph$ と $|2^N|$ はどちらが大きいのだろう．

南海

$$|2^N| = \aleph$$

だ．

拓生　2^N とは自然数から $\{\ 0,\ 1\ \}$ への写像の集合です．これはつまり $f(n)$ が 0 か 1 の値をとるような写像なので，一つの写像 f に対して

$$f(1) = 1,\ f(2) = 0,\ \cdots$$

のような 0 と 1 の列ができる．

あっ．これを

$$0.10\cdots$$

のような，2 進小数と考えれば，区間 $(0,\ 1]$ の小数を 2 進数で表したものと一対一に対応する．

これで 2^N と区間 $(0,\ 1]$ の間の一対一対応ができる．

南海　その通りである．

カントールは，数直線 R と平面 R^2 の間に一対一対応があるかという問題にも取り組んだ．おそらくないだろうと見込みを付け，それを証明しようと 3 年にわたって研究を続ける．その結果，彼が得た結論は一対一対応が存在するというものであった．彼はその証明を伝えたデーデキントへのドイツ語で書かれた書簡の中で、有名な

”Je le vois, mais je ne le crois pas”「私は見る、しかし信じられない」

という言葉をそこだけフランス語で書き残している．

数直線全体と，平面全体の一対一対応は演習とする．ここでは次のことを示そう．

定理 14　平面の領域 D を

$$0 < x \leqq 1,\ 0 < y \leqq 1$$

とする．このとき区間 $(0,\ 1]$ と領域 D の間に一対一対応が存在する． ■

証明　区間 $(0,\ 1]$ の数を無限小数で表し

$$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

とする．

これを偶数番目と奇数番目に分けて領域 D の点

$$(0.a_1a_3a_5\cdots a_{2m-1}\cdots,\ 0.a_2a_4a_6\cdots a_{2m}\cdots)$$

を対応させる．逆に領域 D の点

$$(0.a_1a_2a_3\cdots,\ 0.b_1b_2b_3\cdots)$$

に対して，区間 $(0,\ 1]$ の数

$$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$$

を対応させる．

これは明らかに区間 $(0,\ 1]$ と領域 D のあいだの一対一対応である． □

南海　ここで大問題が生まれる．

> 濃度 $\aleph_0$ と濃度 $\aleph$ に対し，
>
> $$\aleph_0 < \alpha < \aleph$$
>
> となる濃度 α は存在するか．

拓生　これまで出てきた，$\aleph_0$ より大きい濃度は，すべて $\aleph$ かまたはそれより大きいものばかりでした．あいだの濃度があるか，ということですね．

南海　カントールは，$\aleph_0$ の次の濃度は $\aleph$ であって，あいだの濃度はないと予想した．これを**連続体仮説**という．

さらにこれを一般化する．

> 無限集合 A に対して，
>
> $$|A| < |B| < \left|2^A\right|$$
>
> となる集合 B は存在しない．

これは**一般連続体仮説**と呼ばれている．集合論の深化はこのような大問題を提起した．

それだけではない．次にもう一つの問題が生まれた．「クレタ人の逆理」のような逆理が生じることが発見されたのだ．それがラッセルの逆理といわれる集合論の逆理だ．集合論を土台に数学を考えていくことが 20 世紀初頭には一般的になっていた．集合論はそれ自体数学的対象であるが，同時にあらゆる分野で，集合論的に考え，集合を用いて定義し，また証明するようになってきていた．

そこに逆理が発見された．これは数学の危機である！

後半はここから入り，さまざまの対角線論法がゲーデルの対角線論法に流れ込み，そこから新しい世界が開かれていくことを学ぼう．

1.13.2　数学の基礎

1.13.2.1　集合論の逆理

南海　集合論はカントールによってはじめられた．無限に段階があるというカントールの発見，これがはじまりだった．

カントールは，参考文献にあげたカントール自身の論文の英訳本で「集合」を次のように定義している．

> 「集合」によって，はっきりと限定されかつ分離された直感または思考の対象 m を集めたその全体 M を意味する．
>
> これらの対象 m を「要素」という．記号としては次のように記す．
>
> $$M = \{\ m\ \}$$

この定義からはじめて，基数、順序数、整列集合等の概念を得，こうしてカントールは集合論を建設していった．19 世紀末のことだ．

カントールの定義からいえば，あらゆる集合の集合もまた集合になる.「集合」は「はっきりと限定されかつ分離された直感または思考の対象」であることには違いない．

しかし，このような集合を考えるといろんな矛盾が生まれることが知られてきた．

例 1.13.2　あらゆる集合の集合を A とする．A の部分集合の集合 2^A は，それ自身も集合であるから A の要素である．つまり

$$2^A \subset A$$

したがって

$$|2^A| \leqq |A|$$

ところが，定理 13 より

$$|A| < |2^A|$$

これは矛盾である．

拓生　確かに．自然数の集合の部分集合の全体でも，濃度は実数と同じ $\aleph$ になるのだから，まして，集合の集合といえば，世界のすべてを要素とするあらゆる集合のそのまた部分集合の全体ですから，ちょっと考え及びません．

南海　今度はうんと身近な例を示そう．

例 1.13.3　都市の市長がその街に住んでいるとはかぎらない．ある国で，市長を務める市に属さない市長をすべて集めて，特別市とすることになった．さてこの特別市の市長は，この市に属するか．

拓生　特別市に属するとする．特別市は市に属さない市長よりなるので，この市長は特別市に属さない．特別市に属さないとする．特別市は市に属さない市長をすべて集めたのだから，特別市に属さないということは，その市に属することになる．

いずれにしても矛盾が起こる．

南海　この矛盾の本質的なところを取りだせば，次のラッセル (Bartland Russell 1872〜1970) の逆理になる．

例 1.13.4　X を，それ自身を要素に含まない集合 x の集合とする．つまり

$$X = \{\, x \mid x \notin x \,\}$$

このとき，

$$X \in X \quad \Longleftrightarrow \quad X \notin X$$

となり矛盾である．

拓生　先の市長の矛盾と同じです．

南海　おそらくカントールは 例 1.13.2 のことに気づいていたに違いない．このような集合論の矛盾は，19 世紀末の数学世界に大論争を巻き起こした．数学に危機が叫ばれ，やがて数学の基礎への反省から，数学の基礎そのものが，考える対象となっていった．

次節で述べるように，ユークリッド幾何に対する非ユークリッド幾何が見いだされて以来，数学体系自体を考えることの重要性が認識された．

こうして，19 世紀末から 20 世紀初頭，数学者たちは数学の厳密な基礎づけを試みる．フレーゲ（Friedrich Ludwig Gottlob Frege, 1848〜1925）は，著作『算術の基本法則』のなかで，数学を，カントールの集合論を中心にすえて，論理学によって基礎づけようと構想していた．

このフレーゲの構想は，1902 年 6 月 16 日，ラッセルがフレーゲに当てた手紙によって破綻する．フレーゲ自身は,『算術の基本法則』第 2 巻の補遺（1903）の中でこう述べている．

> 学問的著作に携わるものにとって，みずからの仕事を完遂した後に，それが土台から揺るがされる事態に逢着することほど望ましからぬことはない．この巻の印刷が終わろうとしていたそのときに，バートランド・ラッセル氏から送られてきた手紙によって私が立たされることになったのが，まさにそうした状況であった

ラッセルから送られてきた手紙に書かれていたのは，例 1.13.4 だったのである．

このような数学の危機は放置できない，これが多くの数学者の，そして知性一般の認識となっていった．物理学ではアインシュタインの相対性理論と，プランクやボーアの量子力学が登場し，ニュートン以来の世界認識の枠組みが大きく揺らぎ，そして新たな枠組みへと飛躍しつつある 20 世紀初頭のことであった．

ときに世界は，第一次世界大戦と向かい，その一方でロシア社会主義革命へと大きく転換しつつあった．危機の時代に，数学の危機，である．数学者がどれだけそれを認識していたかは別の問題であるが，数学の危機は西洋近代文明の危機そのものだった．

カントール自身は晩年，多くの論敵やクロネッカーのような大御所達の非難におしつぶされ，精神的にも苦しみ，精神病院で最期をむかえねばならなかった．1918 年 1 月 6 日，享年 72 才であった．

集合論に対する非難のなかで，カントールは，

> 数学の本質はその自由性にある．

といった．これはまさに悲痛な，しかし確信に満ちた言葉である．

拓生　何かいい言葉ですね．

南海　いろんな苦しみをかかえている高校生の皆さん．この言葉から生きる勇気や力を受けとることができるのではないか．

1.13.2.2　数学体系の対象化

南海　高校の数学に図形が必修になった．これはいいことだ．が，幾何を勉強する以上，ユークリッド幾何学の体系についても知っておきたい．この体系は，19 世紀にいたって，体系自体が数学の対象となる．

そこにいたる道筋をふり返ろう．古代ギリシャ文化は，アジアとアフリカとそしてヨーロッパのさまざまな人種，文明と文化が混交したところに花開いた．ギリシャ数学がわれわれに残した最大のものは，公理的幾何学である．

そこでユークリッドの幾何学をふり返りつつ，数学の体系ということについて考えよう．

エウクレイデス

南海　「エウクレイデス」のことを英語では「ユークリッド」という．最近は「マホメット」も「ムハンマド」というように，本来の読みで書くのが習わしだ．ただ,「ユークリッド」はあまりにも定着しているので，幾何学をさすときは「ユークリッド幾何学」のようにもいうことにする．

公理を立て，公理からはじめて論証を進め，新たに発見された事実を揺るぎないものとして示す，という幾何の論証はエウクレイデスにはじまる．

それをまとめたものが『(幾何学) 原論』である．これは複数人の共著であり，その一人がエウクレイデスであるといわれている．

エウクレイデス（Eukleides，紀元前 365 年?〜紀元前 275 年?，英語表記 Euclid）は古代ギリシアの数学者，天文学者とされる人で，アテナイで学びプトレマイオス 1 世治下のアレクサンドリアで教えた．

ちなみにプトレマイオス 1 世とは，アレクサンドロス 3 世（アレキサンダー大王）の部下であったマケドニア地方出身のギリシア人で，大王の死後，エジプトの支配を継ぎ，プトレマイオス朝を創始した．

『原論』はラテン語圏，アラビア語圏にもたらされ，その後各地で二千数百年にわたって幾何学，いや数学そのものの基本となる書物であった．この書は 13 巻から成り，1〜6 巻は平面幾何，7〜9 巻は数論，10 巻は無理量，11〜13 巻は立体幾何を取り扱っている．

図形以外では，最大公約数を求める方法であるユークリッドの互除法，素数の個数は無限であることの背理法による証明，などが書かれている．

『原論』では，概念の定義から始まり，公準（要請）・公理・命題とその作図・証明・結論という形式で書かれている． 公準とは公理のように自明ではないが，公理と同様，証明不可能な命題を意味する．近代ではこれを含めて公理とすることが一般的である.「公準」と訳されるものもここでは公理に統一する．

『原論』はこのような形式で数学を論述する．自明なことをまず明らかにし，そこからはじめて厳格な論証によって数学的現象を論述していく，この学問記述の方法は，二千年以上にわたって，数学のみならず学問一般の模範であった．いまもその精神は受け継がれるべきものである．

『原論』の原典としては例えば『ユークリッド　原論 (試案)』http://mis.edu.yamaguchi-u.ac.jp/kyoukan/watanabe/ele
等にある．

定義・公理・証明

南海　そこで，定義，公理，定理，証明などの言葉を再確認しておこう．もちろんこれは，高校数学の範囲での用語である．

◇**定義**　用語や記号の意味を定めたものを定義という．このとき，ある用語を定義するためには，他の用語を必要とし，次々にさかのぼることになる．そこで，定義なしに認めることにする用語を無定義用語として用いる．普通，点・直線・平面などは無定義用語として扱われる．

ユークリッドの幾何学では次のような定義が続く．

1) 点とは，部分をもたないものである．
2) 線とは，幅のない長さである．
3) 線の端は点である．
4) 直線とは，その上にある点について，一様に横たわる線である．
5) 面とは，長さと幅のみをもつものである．
6) 面の端は線である．
7) 平面とは，その上にある直線について，一様に横たわる面である．
8) 平面角とは，平面上にあって互いに交わり，かつ 1 直線をなすことのない 2 つの線相互の傾きである．
9) 角を挟（はさ）む線が直線であるとき，その角は直線角と呼ばれる．

10) 直線が直線の上にたてられて接角を互いに等しくするとき，等しい角の双方は直角であり，上にたつ直線は，その下の直線に対して垂線と呼ばれる．
(続)

◇**公理**　数学では証明によって推論を進めていくが，証明するときに用いた根拠となる命題も，また，他の命題に基づいて証明しなければならない．さらに，その根拠とした命題の証明も必要となり，このようにして，順次たどっていくと，どこまでさかのぼってもきりがない．そこで，あらかじめ，いくつかの基本となる命題が成り立つものと定めておくと，それらを出発点にして，あとの命題が順々に証明される．このような推論の出発点となる基本的な命題を公理という．

これに対して，公理に基づいて証明された命題のうち，重要なものや応用の広いものを**定理**という．

例えば，ユークリッドの幾何学では次のような公理を出発にしている．

平面幾何の公理

公理 1) 相異なる 2 点を通る直線は 1 つあり，しかもただ 1 つに限る．

公理 2) 有限直線 (線分) は連続して一直線に延長することができる．

公理 3) 任意の点と任意の距離で円をかくことができる．

公理 4) すべての直角は等しい．

公理 5) 1 つの直線が 2 本の直線と交わり，同じ側の内角の和が 2 直角より小さいならば，この 2 直線を限りなく延長すると，2 直角より小さな角のある側で交わる．

◇**証明**　数学では，ある命題が真であると断定するためには証明が必要である．すなわち，すでに真であると認められている他の命題を根拠にして，正しい推論によってその命題が導きだされることを示すわけである．その推論の過程が証明である．

拓生　ずいぶん当たり前のことを，くどく言っているようにも感じます．

南海　違うのだ．図形の性質を「論証する」ことそのことが大切で，論証しようとすると，図形の性質をこれ以上もとに戻れないというところまで分解しなければならない．そのようにして分解されたものが，定義であり，公理なのだ．

拓生　そうか．当たり前になるまで分解した結果なのですね．このようにして，幾何学の体系を作るのですね．

南海　そう．直感的に正しい少数の公理の集合をもとに，その分野のあらゆる現象を証明する．あるいは命題の真偽を判断する．これは，現象の探求という点からいえば，体系によって現象を明確に把握し，次の探求につないでいくということである．これは「体系という方法」としてとらえることができる．

ユークリッドの方法は，2000 年にわたり，学問の方法そのものだった．

1.13.2.3　非ユークリッド幾何学

南海　ユークリッドの幾何学においては，方法の対象としての点，直線，角などの図形は，つねにそこにあるものと考えられてきた．つまり，幾何学は直接に知覚できる図形のことを研究する学問だった．面積を求め，体積を計算し，1 点で交わることを示す，等すべて，事実そこに存在するものの性質であった．

だがこのユークリッド幾何が示す方法と世界観に，さまざまの飛躍が起こった．幾何学の対象が直接知覚できないものに広がったのは十九世紀だ．その最初の飛躍は，三角法を平面でない場合に研究し，そこから，平行線の公理の成立しない幾何を発見したロバチェフスキーらにはじまる．

拓生　それが非ユークリッド幾何ですね．非ユークリッド幾何とは，平行線の公理の成り立たない幾何です．どこかで読んだことがあります．

南海　平行線の公理はユークリッドの公理では 5 番目にあるので第五公理という．

ユークリッド幾何学が広まるにつれ，多くの人が他の公理から平行線の公理を証明しようと試みた．5 番目は他と比べてずっと複雑だから，簡単な他の公理から導けるのではないか．多くの人がそのように考えたのだ．第五公理を否定して矛盾を導くという研究も容易に実を結ばなかった．

19 世紀になると，第五公理を否定しても，矛盾のない論理体系としての幾何学が構成できるのではないか，と考えられるようになった．

そしてついに 1830 年頃，ロバチェフスキー (ロシアの数学者，1793〜1856) とヤノス・ボーヤイ (現・ルーマニアの数学者，1802〜1860) によって独立にそのような幾何学が発見された．これらの幾何学はユークリッドのはじめの 4 つの公理はそのままとして，公理 5) の代わりにその否定

5') 直線とその上にない点に対し，その点を通りその直線に平行な直線が 2 つ以上存在する．

5") 直線とその上にない点に対し，その点を通りその直線に平行な直線が存在しない．

を公理として採用するというものであった．これはガウスにより非ユークリッド幾何学と名づけられた． 19 世紀初頭から中期にかけてのことであった．その後 19 世紀末になって，非ユークリッド幾何の存在が，第五公理は他の公理から導くことはできないことを意味することが認識されていった．

拓生　なぜそのようなことがいえるのですか．

南海　公理 1) から公理 4) までは成立するが，公理 5) が成立しないような**モデル**を構成すればよい．そのようなモデルが存在するということは，公理 1) から公理 4) を用いて公理 5) を証明することはできないはずだ．

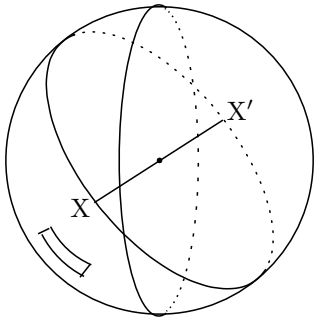
このような考え方は，はじめからあったのではない．

ロバチェフスキーやボーヤイは非ユークリッド幾何学の体系そのものを考察の対象としたとはいえない．このような体系における第五公理の独立性などの問題意識は，集合論の矛盾などが発見され数学の基礎づけが大きな問題となったなかで，形成された．

このモデルを用いる論証は，クライン (F.Klein,1849〜1925) が，25 才のときにはじめて指摘した．ロバチェフスキーの幾何学から 30 年目のことで，ちなみに後で紹介するヒルベルトの『幾何学基礎論』がはじめて世に出るのはここからさらに 30 年後のことだ．

公理 1)〜公理 4) は満たすが，平行線が 1 本もない例を示そう．

例 1.13.5



球面の表面上の点 X に対し，X と球の中心に関して対称な位置にある点を X′ とする．X と X′ を同一視し，(X, X′) の組を「点」とする．球面上の円で，円が乗っている平面が球の中心を通るものを大円と呼ぶが，大円を**直線**とする．2 つの大円が交わる点での接線のなす角を 2 直線の角とする．2 点間の距離は，2 点を結ぶ大円弧長とする．大円の周の $\frac{1}{2}$ を法として定まる．

このときこのモデルは公理 1)〜公理 4) を満たす．しかしすべての直線は 1 点で交わるので，公理 5) は満たさない．これを示してほしい．

拓生

1) 点として X を用いようと X′ を用いようと，いずれかを通る大円は他方も通る．2 点を通る大円は，2 点と球の中心を通る平面と球面の交わりの大円で，これはただ一つに定まる．

2) 同様に有限直線（線分）は，それが乗っている大円をただ一つ定める．

3) 任意の距離に対し大円の周の半分を法として，大円の周の半分までの長さをとり，与えられた点との距離がこの値となる点の集合をとればよい．

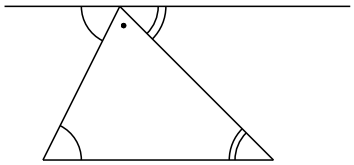
4) 任意の 2 点とそこを通る直線について，一方の点を移動して他方の点にあわせ，さらに必要なら点の周りに直線を回転し，他方の直線とあわせることができる．このとき，その点を通り二つのなす角が等しい直線は 1 本しかないので，すべての直角は相等しい．

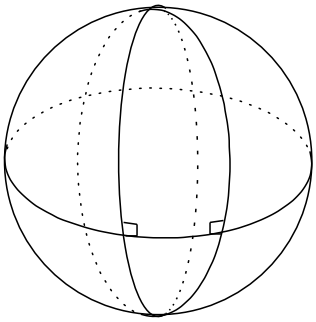
最後のは少し苦しいし，実際にやってみると，ユークリッドの定義も直感的な表現で使いにくいときもあります．

南海　そうかもしれない．

拓生　とこれで，このモデルでは，三角形の内角の和は 180° より大きいです．

南海　いいところに気づいた．ユークリッド幾何で，三角形の内角の和が 180° であることは，左図のように，平行線を引いて錯角の性質を用いて，3 頂点の角を集めるとちょうど直線になることで示すのだった．





拓生　ところが右図のように，直交 2 直線が交わるのだから，三角形の内角の和は 180° より大きいです．

南海　いずれにせよ，平面幾何で必要なことはこのモデルでもそろっている．しかし，平行線公理は成立しない．

拓生　だから，第五公理は他の公理からは導けないのですね．導けるのなら，他の公理はすべて満たすこちらのモデルでも成立しなければならない．もし，公理 1)〜公理 4) から公理 5) を導くことができるのなら，このようなモデルが存在することと矛盾する，ということですね．

例 1.13.5 もまた，平行線が一つもない何らかの幾何学なわけですね．では，平行線が無数に存在する幾何学もできるのですか．

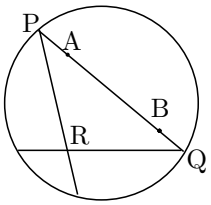
南海　少し難しいが，いくつか紹介しよう．

例 1.13.6

定円の内部を空間とし，弦 (両端は含まない) を直線とする．この弦 AB の円周上の端点を P, Q とするとき，2 点 AB の距離を

$$\log \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} \cdot \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}}$$

で定める．



角の定義は難しい．2 点を通る直線がただ一つ存在することなどはすぐにわかる．このモデルは公理 1〜公理 4 を満たす．

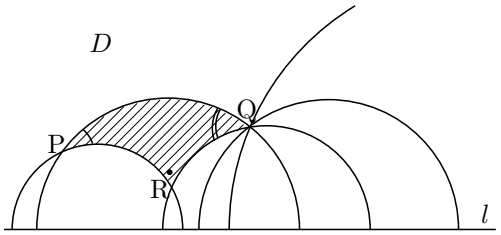
互いに交わらない平行線が無数に存在することもわかる．

次のようなモデルもある．

例 1.13.7

定直線 l の片側 D を考える．ただし l は含まない．D の点を「点」とし，l 上に中心をもつ円と D の共通部分を「直線」という．2 点の距離と角の定義が難しい．ここでは述べないが，2 点を通る直線がただ一つ存在することなどはすぐにわかる．モデルも公理 1〜公理 4 を満たす．

また，互いに交わらない平行線が無数に存在することもわかる．



拓生　でも，これらの例はすべて，ユークリッド幾何の平面の中に作られていますね．

南海　そうだ．これは次のところで言うべきことなのだが，それによって，ユークリッド幾何が矛盾ない体系であるならば，これらの非ユークリッド幾何もまた矛盾がないことが示されるのだ．

拓生　ユークリッドの幾何は，普通の，われわれが住んでいる平面がモデルとなる幾何ですね．

南海　そうともいえる．もっとも，同じ頃，物理学の分野でアインシュタインによって相対性理論が発見され，展開された．相対性理論によって時間と空間を統一的に把握すると，それは最早ユークリッドの世界ではない．

ニュートン力学－ユークリッドの幾何学

相対性理論－非ユークリッド幾何学

なのだ．

拓生　相対性理論は非ユークリッド幾何学のモデルを提供するのですか．

南海　そう．相対性理論は，リーマンが提唱し基礎を築いたリーマン幾何学でもって叙述することができる．

拓生　なんだかよくわからないですが，純粋に数学の世界で発見された平行線の公理を満たさない幾何学が，相対性理論によって現実の世界を叙述するのに用いられるというのは，不思議です．

南海　そのようなことは他にもある．最近では，楕円曲線論が暗号理論と結びついた．

一見数学者が頭の中だけで考え出したように見えることが，現実世界を記述し解明する言葉と方法になる．数学というものの深い実在を識ることができる．

1.13.2.4　ヒルベルトの計画

南海　十九世紀の半ばまで，どのような数学の分野も，有限個の公理から出発し，有限個の推論規則を用いて論証する体系として表現されると考えられてきた．

ペアノ (G.Peano,1858〜1932) は 5 つの公理で算術の基礎体系を作った．これはまさにユークリッドの方法であり，その忠実な実践である．

拓生　有限個の推論規則とは,「ならば」とか「でない」とかですか.

南海　もう少し定式化されたものだが，大切なことは，数学で用いられる推論の規則は有限個のものから作られ，推論の列が有限個のものから作られているかどうか判断できるということだ.

その上で，数学の体系の本質に関して次のことが問題として浮かびあがってきた.

ある理論体系が**完全**であるというのは，その体系のすべての命題 P に対して，P またはその否定 $\sim P$ のどちらか一方の成立が証明されることを意味する.

ある理論体系が矛盾がない (**無矛盾**) であるというのは，命題 P とその否定 $\sim P$ が同時に成立するような命題はその体系のなかに存在しない，ことを意味する.

19 世紀の数学の流れのなかで，2 つのことが明確になった．一つは先に見たように，公理の集合に互いに矛盾ないかどうかは自明ではない，ということである．集合論に矛盾が見いだされる以上，自然で直感的な公理系には矛盾が内包されている可能性があるのだ.

第二は，公理は絶対的な真理なのではなく，一つの仮説，あるいは一つの選ばれた体系である，という認識である．幾何学が一つではないことが自覚されたのは，時間的には集合論の発展よりは早く，19 世紀中期である．そしてそれは，数学的存在とは何かという問題意識になって，集合論の危機という問題と結びついていく.

拓生　時代的な背景もあるのでしょうか.

南海　それは明確にはわからない．ただ，当時，ベル・エポック (よき時代) と呼ばれた繁栄の 19 世紀も末にいたり，経済的には不況が西欧を覆い，西洋文明の行き詰まりと，そこからの活路を求める時代の支配的な思潮があったことはまちがいない．数学者も世の変転と無縁ではない.

まさにそのとき，1900 年，パリ数学者会議でヒルベルトは「ヒルベルト 23 の問題」を発表するのである．その第 1 の問題と第 2 の問題が今考えていることに関するものだった.

歴史的文献なので，ここに紹介しよう.

Cantor の連続体の濃度に関する問題

> 実数 (あるいは直線上の点) の任意の二つの集合が Cantor の意味で同値，あるいは同じ濃度をもつというのは，一方の集合の任意の数に対して，他の集合の一つしかもただ一つの定まった数が対応するように，一対一の関係が互いにつけられることである．このような点集合の Cantor の研究は，もっともらしい．しかしその証明には多くの熱心な努力にもかかわらず，だれも成功していない命題を生んだ．その命題とは次のとおりである:
>
> 無限に多くの実数からなる系，すなわち実数，あるいは直線上の点の無限集合は，自然数 1, 2, 3, ⋯ の集合と同値であるか，または，実数全体のなす連続体，すなわち線分上の点全体の集合と同値である．いいかえれば，**同値の意味では**,〔実数の部分集合には〕**可付番集合と連続体とただ二種類の実数の集合しかない.**
>
> この命題が正しければ，連続体の濃度は，可付番集合の濃度のすぐ次の濃度ということになる ;
>
> この命題が証明できれば，可付番集合と連続体との間に新しい橋をかけることになる.
>
> この問題と密接に関連していて，おそらくこの問題を証明する鍵になるだろうと思われる Cantor の注目すべき他の主張がある．実数のある部分集合が**順序づけられる**と

いうのは，その集合の任意の二つの数に対して，どちらが前でどちらが後であるか，という関係が定まっていて，しかももし数 a が数 b より前にあり，数 b が数 c よりも前にあるならば，a は c よりも前にあるという条件〔推移律〕を満たすときである．実数の間に，小さいほうを前，大きいほうを後というように順序づけたとき，自然な順序づけという．しかしすぐにわかるが，集合の数の間に，このほかに無限に多くの他の方法で順序づけができる．

もしも数全体にある定まった順序づけをし，同じ順序をその部分集合にもつけるならば，部分集合もまた同じく順序づけられている．Cantor は，**整列集合**と彼が名づけた特別の順序づけられた集合を考えた；

それはその集合全体はもちろん，すべての部分集合に必ず最初の数が存在するようなものである．自然数 1, 2, 3, ⋯ の集合は，自然な順序で明らかに整列集合をなす．これに反して実数全体の集合，すなわち連続体は自然な順序では，明らかに整列集合ではない．というのは，もし有限な線分の最初の点を除いた集合を考えれば，この部分集合は確かに最初の要素をもたないからである．

ところで Cantor は正しいと信じているようだが，実数全体の集合に他の方法で順序を入れて，どの部分集合もその順序で最初の要素をもつように，すなわち連続体もまた整列集合にできるかという問題が起こる．実数にそのような順序を入れて，任意の部分集合が最初の要素をもつようにできるというこの **Cantor の注目すべき主張〔整列可能定理〕に直接の証明を与えること**は，私にとって最も望ましいことと思われる．

算術の公理の無矛盾性

ある科学の基礎を研究しようというときには，その科学の基礎になる基本的概念の間の関係を正確にかつ完全に記述する公理系をうちたてる必要がある．設定された公理は，また基本的概念の定義でもある．そして基礎を研究している科学の領域での命題が正しいのは，基礎として設定された公理から，有限個の論理的推論によってそれが導かれるときに限る．さらに詳しく考察すると，**おのおのの公理が，完全に他とは独立であるような公理系をたてようとすれば，ある命題が個々の公理とどう関連しているか，また公理が共通の不可分の構成要素** (もしあれば，取り除かなければならない) **を含まないかどうか**，という問題が生ずる．

しかし公理系を設定しようとするときの多くの問題中，なによりも最も重大な問題は，**それらが互いに「無矛盾」であること，すなわちその公理系から有限回の論理的推論によって，互いに矛盾するような結果が導かれることはけっしてないことを証明することである．**

幾何学においては，公理の無矛盾性は，適当な数の領域をとり，幾何学の公理と同様の関係をその領域の数の間に対応づけ，幾何学の公理から推論で矛盾が生ずれば，それは数の領域の算術の公理からの矛盾になる，という方法で証明された．すなわちこの方法では，幾何学の公理の無矛盾性は，算術の公理の無矛盾性の問題に還元されたわけである．

しかし算術の公理の無矛盾性の証明は直接にしなければならない．

算術の公理とは，本質的には連続の公理を除いた計算の規則にほかならない．私〔Hi1bert〕は最近連続の公理は二つのもっと簡単な公理，すなわちよく知られた Archimedes の公理と内容に関する新しい公理とからなることを注意した．

後者は，その数の体系のすべての公理を保ってそれ以上拡張することはできないという完全性の公理である．私は確信するのだが，算術の公理の無矛盾性を直接に証明しようとするならば，無理数論での周知の方法を，当面の目的に向くように適当に修正するのがよいと思う．

この問題の意義を他の方面からも特徴づけるために，もう少し注意をつけ加えよう．もしもある概念が矛盾を含むならば，その概念は数学的には存在しないといってよい．たとえば，二乗が－1になるような実数は存在しない．逆にその概念から有限回の推論を行なっても，けっして矛盾を生じなげれば，その概念の数学的存在は証明されたといってよい．たとえばある条件を満たす数や関数である．いまの場合，実数の公理は，算術的に扱えるのだから，算術の公理の無矛盾性の証明は，同時に実数や連続体の概念の数学的存在をも結論する．実際，公理の無矛盾性の証明が完全にできれば，これまでときおりなされたような，実数の概念の存在に対する反論はなくなり，すべてが正当化される．

確かに実数，すなわち連続体の概念は，これまで特徴づげられていたような，すべての可能な十進小数の全体とか，基本列の要素からつくられるすべての可能な規則の全体ではなく，設定された公理を満たすような対象の集合であり，その公理から有限回の論理的推論で導かれるような結果の全体，そしてそれだけが正しいものである．このような意味においてのみ，私のいう連続体の概念は，論理的に厳密につかみうる．

事実上そうしてこそ，われわれに最もよく経験と直観を与えてくれると私は思う．連続体の概念やすべての関数の集合の概念もまた，有理整数や高級なCantorの〔超限〕数や濃度の集合とまさしく同じ意味で存在する．なぜなら後者の存在もまた，連続体と同じく，ここで私が述べた意味で証明されるからである．－－これに対してすべての濃度の集合とか，すべてのCantorのℵ数〔超限数〕の集合といったものは，私の述べた意味で無矛盾の体系ではないことが示されるので，私の意味では，数学的に存在しない概念なのである．

何ともよくわかる言葉ではないか．

ヒルベルト（David Hilbert, 1862～1943）は19世紀後半から20世紀にわたる時代の最大の数学者であった．彼は，カントールを深く理解し，集合論を土台にして数学の基礎を確固としたものにしようとした．その要の問題として連続体仮説と算術の無矛盾性を問うたのである．

ヒルベルトはさらに，「逆にその概念から有限回の推論を行なっても，けっして矛盾を生じなげれば，その概念の数学的存在は証明されたといってよい」と述べ，数学的存在についての考え方を示している．

ヒルベルトの考えがもっともよく現れているもので，今日手に入りやすいものは，参考書にあげた『幾何学基礎論』である．これは先のパリ数学者会議の前年に出版されたものであり，最近日本語訳が文庫本になって入手しやすくなった．

ヒルベルトの『幾何学基礎論』は，公理にもとずく数学の叙述がもつべき規範を示した．ヒルベルトはユークリッド幾何学の完全な公理系を与えて，平行線公理が他の公理と独立であることを示し，非ユークリッド幾何学が成立する論理的根拠を明らかにした．

『幾何学基礎論』の「序」でヒルベルトは次のように言った．

幾何学は－算術と同様に－その矛盾なき建設のために極めて少数の，かつ簡単な基本命題を必要とする．この基本命題を公理という．幾何学の公理を設定し，かつその相互関係を研究することはユークリッド以来あまたのすぐれたる数学の文献において

論ぜられた問題であるが，これはわれわれの空問的直観を論理的に分析することにほかならない．

本研究は幾何学に対して，一つの完全なまたできるだけ簡単な公理の体系を設定し，かつこれらの公理から最も重要な幾何学の定理を導き，同時にそれぞれの公理群の意味と，個々の公理から導きうる結論の範囲を明らかにせんとする一つの新しい試みである．

拓生　読んでみました．後半は難しいですが前半はわかります．

南海　数学的対象を，形式的・構文論的公理系に再構成し，その無矛盾性と完全性が証明できれば，その対象は存在すると考える．全数学の土台として，述語論理・集合論・自然数論における完全性と無矛盾性を全数学者が一致協力して証明しようという試みが,「ヒルベルトの計画」であった．

この後，四半世紀，多くの数学者がヒルベルトの計画のもとに，無矛盾性と完全性の証明ができると信じて努力した．

1.13.3　不完全性定理

1.13.3.1　形式化された数学

南海　ところがここでゲーデルが現れる．かれは次のことを証明した．

1) 述語論理は完全である．つまりすべての恒真な命題は証明される．

2) 算術を含む形式化された体系が無矛盾であれば，完全ではない．つまり，証明も反証もできない命題が存在する．

3) 算術を含む形式化された体系が無矛盾であれば，体系内部で体系の無矛盾性を証明することはできない．

拓生　1) はヒルベルトの期待したとおりの結果ですが，2)，3) はまったく逆の結果です．

まずここでいう「形式化された体系」についてもう少し詳しく聞かせてください．

南海　そのためにはラッセルらの仕事を話さなければならない．ヒルベルトとは少し離れた英国で，集合論の背理法を乗りこえようとする努力が，ラッセルらによって続けられた．

バートランド・アーサー・ウィリアム・ラッセル（Bertrand Arthur William Russell, 1872 年 5 月 18 日〜1970 年 2 月 2 日）は，自らが定式化したあの集合論の矛盾を回避し，数学の基礎を確固とするために集合に階型を導入した．集合の集合はもとの集合とは階型が異なる．異なる階型の集合を同一の場であつかわないという原則の下に，この階型理論に基づく高階論理上で全数学を展開するという一大事業を押し進めた．

その努力は，アルフレッド・ノース・ホワイトヘッド （Alfred North Whitehead, 1861 年 2 月 15 日〜1947 年 12 月 30 日）との共著『数学原理』(Principia Mathematica)（1911〜1913 年）として結実した．これは記念碑的な 3 巻の大著であった．

ここにそれを見ることができる．

http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/AAT3201.0001.001/

拓生　これを見ると記号の列です．

南海　これがヒルベルトの提唱した形式化された数学の実践だった．論理規則と述語論理を記号化する．そしていくつかの公理を立てる．そこからその述語論理に則って論証を進める．こうしてプ

リンキピアは，集合論，基数，序数および実数論を展開した．ここまでで 3 巻を要した．こうして，知られていた数学の多くが，この方法で原理的には展開できることが明確になった．

しかし，プリンキピアの公理から矛盾が導かれるかどうかという無矛盾性の問題，証明も反証もされない数学の言明が体系内に存在するかどうかという完全性の問題，これは未解決であった．

拓生　述語論理ですか．

南海　ここは内容的な所に入り難しいのだが，述語論理とは，命題関数とその論理規則にさらに「存在する」「すべての」を付け加えた論理である．論理規則や述語論理は，いわゆる論理学の問題で，数学の問題の前提ではあるが，数学そのものではない．

論理規則の完全性はすでに知られていた．

述語論理について，その完全性を最初に証明したのがゲーデルだった．それは次のような内容だった．

> 述語論理において，すべての恒真式は証明可能である．

恒真式とは，任意の対象において真となる論理式である．これが実はゲーデルの最初の論文だった．これは論理学の分野の問題だった．

これを土台に，数学の内容を含む体系についても，無矛盾性や完全性が示せるのではないか．当時はそのように考えられていた．

プリンキピアから 20 年後の 1931 年，ゲーデルによる「『プリンキピア・マティマティカ』やその関連体系での形式的に決定不可能な命題について」という論文によって，いわゆる「不完全性定理」が証明され，ヒルベルトの計画は挫折に終わる．

「ある体系が無矛盾で，かつ自然数の体系を含むならば，その体系は完全ではない」ことを示し，また「数学は自己の無矛盾性を証明できない」ことを示した．この不完全性定理の証明は，ヒルベルトの主張した有限の立場にたつ形式化を忠実に用い，超数学の命題を自然数体系の中に写像して，実現された．

ヒルベルトの計画が有限の立場に立つかぎり本質的に不可能であることを示した．数学は，ヒルベルトが考えたよりももっと大きく，形式化でとらえることはでききらない，ということをそこから読みとることができる．

クルト・ゲーデル（Kurt Gödel, 1906 年 4 月 28 日〜1978 年 1 月 14 日）は，オーストリア・ハンガリー二重帝国（現チェコ）のブルノ生まれの数学者・論理学者である．

2006 年はゲーデル生誕 100 年であった．

1924 年にウィーン大学に入学したゲーデルは，まず物理学，のちに数学を学び，1930 年には最初の重要な業績である「第一階述語論理の完全性定理」を発表し，学位を得た．

翌 1931 年，20 世紀の数学基礎論，論理学にとって最も重要な発見とされる「不完全性定理」を発表した．

1940 年には，ヒルベルトの第一問題（連続体仮説）について，集合論の ZF 公理系 (ツェルメロ・フランケルによる公理的集合論の体系) が無矛盾ならば，そこに選択公理と一般連続体仮説を加えても無矛盾であることを証明した．この後ゲーデルは連続体仮説に関する研究からは離れてしまった．

1963 年，ポール・コーエンは ZF 公理系に選択公理と一般連続体仮説の否定を加えても無矛盾であることを証明し，ゲーデルの結果と合わせて一般連続体仮説が ZFC 公理系とは独立である（証明も否定の証明も出来ない）ことを示した．

ゲーデルはウィーン大学の講師を勤めたが，1940 年頃にはナチス・ドイツを逃れて妻アデルともどもアメリカ合衆国に移住した．彼は米国の市民権を取得し，プリンストン高等研究所の教授と

なった．ゲーデルの人となりは，いろんな書物にも書かれているので，ここでは省略したい．
拓生　ヒルベルトが計画を発表して 30 年後，ですか．

1.13.3.2　ゲーデルの対角線論法

不完全性定理
南海　先にあげた不完全性定理を，再掲しよう．

定理 15 (第一不完全性定理) 自然数論を含む帰納的に記述できる体系が，無矛盾であればその体系は完全ではない．つまり，真ではあるが，証明も反証もできない命題が存在する．

定理 16 (第二不完全性定理) 算術を含む形式化された体系が無矛盾であれば，体系内部で体系の無矛盾性を証明することはできない．

その証明の実行はここではできないが，その骨子を話してゆきたい．

さて，ゲーデルの著『「プリンキピア・マティマティカ」やその関連体系での形式的に決定不可能な命題について』は次のようにはじまる．

序論

> よく知られているように，数学はいっそうの厳密化をめざして進み，広い範囲の数学を形式化している．その結果，証明はいくつかの機械的な規則の運用によって遂行できるようになった．これまでのところもっとも包括的な体系は,「プリンキマテマティカ, Principia Mathematica (PM)」の体系と，ツェルメローフランケル (Zermelo-Frankel) による集合論の公理体系 (近年ノイマンによって拡張された) である．
>
> これら二つの体系は，大変包括的なもので，今日数学で用いられる証明の方法のすべてがそのなかで定式化されている．つまり，いくつかの公理と推論の規則に還元されている．したがって，これらの公理と推論規則は，関連した体系のなかでとにかく何らかの方法で形式的に表現されたすべての数学の問題の真偽を決定するのに十分であろうと考えられる．
>
> 以下に示すように，これは真実ではない．いずれの体系においても，比較的単純な自然数の問題で，それらの公理からは決定することができないものが存在する．このことは，構成された体系のいくつかの個別の性質によるものではなく，非常に一般的な形式体系において成り立つ．特に，先の体系に有限個の公理をつけ加えることで構成されるすべての体系でも，それによって偽な命題が証明されることにならないかぎり，成り立つ．(以下略)

拓生　完全ではない，ということは，体系が矛盾ないものであれば，そこには，真ではあるが証明できない命題が存在する，ということですね．
いったいどのようにしてそんなことを示すのですか．
南海　それが本質的に対角線論法なのだ．
ただそこに至るまでには，いくつかの準備が必要なのだ．それはいろんな書物に書かれている．ここでは，参考書『ゲーデルは何を証明したか』によって，ゲーデルの原論文をより簡明化した，ロッサーによる展開の骨子だけを話そう．

ゲーデル数

南海　まず，自然数を含むある数学の体系を形式化 (記号化) する．

そこで，次のように体系の対象式または関係式である記号の列 A と整数の部分集合 G に対して，整数 $g(A)$ を一対一に対応させる．整数 $g(A)$ を A の**ゲーデル数**という．

つぎのように構成する．まず論理記号に次の数を対応させる．

論理的記号	g の値	意味
$\sim$	1	何々でない
$\vee$	2	または
$\supset$	3	…なら…
$\exists$	4	存在する
$=$	5	等しい
0	6	ゼロ
s	7	直後に続くもの
(	8	左かっこ
)	9	右かっこ
,	10	コンマ

さらに変数として，数値的な変数 $x,\ y,\ \cdots$ には 10 より大きい素数を，文書をまとめる文書的な変数 $p,\ q,\ \cdots$ には 10 より大きい素数の平方を，述語的な変数 $P,\ Q,\ \cdots$ には 10 より大きい素数の立方を，ゲーデル数の値とする．

これだけで，命題も論証も書くことができる．

これに対して，体系でのあらゆる論証について，それを記号列で表したうえで，構成要素に対応するゲーデル数をまずとり，その個数だけの素数を小さい方から順に並べ，構成要素のゲーデル数を，素数のべきにつけてすべてかけあわせるのだ．

この方法で，体系での命題 $(\exists x)(x = \mathrm{s}y)$ は何が対応するか．

拓生　意味は,「y の次の数 x が存在する」ですね．

南海　これを記号で表すと

$$(\exists x)(x = \mathrm{s}y)$$

となる．

拓生　それぞれのゲーデル数は

$$8,\ 4,\ 11,\ 9,\ 8,\ 11,\ 5,\ 7,\ 13,\ 9$$

ですから

$$g((\exists x)(x = \mathrm{s}y)) = 2^8 3^4 5^{11} 7^9 11^8 13^{11} 17^5 19^7 23^{13} 29^9$$

ですか．

南海　ある自然数 n がゲーデル数であるかどうかは，その数を因数分解したときに，まず素数が順にすべて入っていることが必要で，それが満たされれば，指数が再びゲーデル数であるかを見ていけば，有限回の操作で，判断できる．

拓生　実際は大変です．数 3 のゲーデル数 $g(3)$ は，…．$3 = s(s(s(0)))$ ですから構成要素のゲーデル数は 7, 8, 7, 8, 7, 8, 6, 9, 9, 9 なので，これから作ればいいのか．

証明不能命題

南海　そうだ．重要なことは，次のことが成り立つということだ．

$x = g(A)$ と $y = g(B)$ に対して，

$$A \text{ は } B \text{ の証明である}$$

が成立するとき，そしてそのときにかぎって成立するような，2 つの整数 x と y に関する算術的関係式が存在する．

これをゲーデルは，40 以上の関係式を定義しながら，その上に構成できることを示した．それ自身が数学の作業であるが，その内容をここで展開することはできない．

いずれにせよ「A は B の証明である」のような言明を超数学的言明といおう，また「証明である」ということは，はじめの公理から結論にいたる論証の列が存在することだ．

拓生　記号列 A の末尾に B があるということですか．でも，どんな問題も証明できるけれども実際に解けるとはかぎらない．

南海　ここでいったのは，証明の可能性であって，その論証過程を実際に見いだすことではない．5 次方程式に根はつねに存在するが，解けるとはかぎらない．今，問題にしているのは，証明の可能性であって，証明が見いだせるかどうかではない．

拓生　論証過程 A もゲーデル数が対応するのですね．

南海　実際の論証ははるかに複雑であるから，割れる割れないのような単純な算術関係ではない．ゲーデルは，先のような算術的関係式を構成する方法があり，それを実行することでえられることを示したのだ．それを $\mathrm{Dem}(x,\ y)$ とする．

	g	
記号列	$\rightarrow$	ゲーデル数
超数学的言明	$\rightarrow$	ゲーデル数の算術的関係
「A は B の証明」	$\rightarrow$	$\mathrm{Dem}(x,\ y)$

次に道具として，記号 $\mathrm{sub}(m,\ p,\ a)$ を導入する．

m を変数とし，数 m が表す体系の記号列 M，つまり $m = g(M)$ をゲーデル数にもつ記号列 M に対し,M の中の記号 p が表す数変数に a を代入して得られる新しい記号列を N とする．

この記号列 N のゲーデル数 $g(N)$ を $\mathrm{sub}(m,\ p,\ a)$ と書き表す．用いるのは $\mathrm{sub}(y,\ 13,\ y)$ だ．

拓生　$13 = g(y)$ なので，ゲーデル数が y であるような記号列のなかの文字 y に，値 y を代入して得られる記号列のゲーデル数．

南海　そう．y は変数で，この y は次に用いるように x の次の変数として用いている

そこで，新しい言明

$$(x)\sim\mathrm{Dem}(x,\ z)$$

を考える．これ自身は，体系内の算術的な関係 $\mathrm{Dem}(x,\ z)$ が，すべての数 x で成立しないということを言明している．

もとの体系内の超数学的言明の方でいえば

すべての数 x について，$x = g(A)$ である各 A は，$y = g(B)$ である B の証明でない．

を意味する．

それに対応する自然数体系内の命題である．

以上の準備の後，

$$(x)\sim\mathrm{Dem}(x,\ \mathrm{sub}(y,\ 13,\ y))$$

という言明を考える．

そこでこの言明のゲーデル数を n として，命題

$$(x)\sim\mathrm{Dem}(x,\ \mathrm{sub}(n,\ 13,\ n))$$

を G とする．

拓生　ここが対角線論法なのですね．

南海　そうだ．このとき

$$g(G)=\mathrm{sub}(n,\ 13,\ n)$$

である．

なぜなら n と対応する命題は

$$(x)\sim\mathrm{Dem}(x,\ \mathrm{sub}(y,\ 13,\ y))$$

であり，この式の 13 に対応する文字 y に n が表す関係詞を代入したものが

$$(x)\sim\mathrm{Dem}(x,\ \mathrm{sub}(n,\ 13,\ n))$$

で，この関係式と対応するゲーデル数が $\mathrm{sub}(n,\ 13,\ n)$ に他ならないからである．

一方，式 G は，ゲーデル数 $\mathrm{sub}(n,\ 13,\ n)$ をもつ式は証明不能であるという超数学的言明を，体系内の算術的な命題で表したものである．実際，算術関係式 G が証明可能であるとする．するとそれは，ゲーデル数 $\mathrm{sub}(n,\ 13,\ n)$ をもつ式は証明不能である，つまり G が証明不可能であることを意味する．

逆に，G の否定が証明可能なら，ゲーデル数 $\mathrm{sub}(n,\ 13,\ n)$ をもつ式は証明不能ではない，つまり G は証明可能になる．

G はその否定が証明可能なとき，そしてそのときにかぎり証明可能である．体系が無矛盾であるなら，これはあり得ない．つまり G もその否定も，証明可能ではない．

つまり

命題 1　算術が無矛盾なら，式

$$G:(x)\sim Dem(x,\ \mathrm{sub}(n,\ 13,\ n))$$

は証明可能でない．

が証明された．つまりこの命題は真である．

ところがこの命題自身を，算術の式に写像した式が G そのものであるから，G 自身が真な式である．つまり，真ではあるが，証明も反証もできない命題の存在が示された．

これが第一不完全性定理 15 の証明の骨子である．

無矛盾性

南海　体系が無矛盾ではない，ということは S もその否定 $\sim S$ も共に証明されるような命題 S が存在するということである．

一方，命題 S が真であるとき，$\sim S$ は偽であり，その結果任意の命題 T に対して

$\sim S$ ならば T である．

は真な命題となる．したがってもし体系が無矛盾でなければ，任意の命題 T が証明可能となる．よって，公理から導けない命題が一つでも存在すれば，その体系は無矛盾である．

逆に，体系が無矛盾であるとする．このとき，命題

二つの命題 A と B に対して，$A \vee B$ は真である．

は明らかに証明可能ではない．

以上から，体系が無矛盾であることと，証明できない命題が存在することは同値である．

「証明できない命題が存在する」は，ゲーデル数とその間の関係式としては

$$(\exists y)(x) \sim Dem(x,\ y)$$

と表される．この関係式を A としよう．

定理 15 によって，

A ならば G である．

が成り立つ．ところが G は証明も反証もできない．したがって A もまた証明も反証もできない．つまり，第二不完全性定理 16 が証明された．

Bourbaki『数学史』から　南海　以上が，ゲーデルの論文の骨子である．もとより数学としては，自然数の体系の中で超数学的命題を表すために，形式化された体系から自然数の体系への写像が存在し，さらに超数学的命題が自然数の中での命題に変換される，そのことを保障するために多くの関数を定義してゆかねばならない．

この問題を，ブルバキの『数学史』では，次のように定式化している．

> 体系の対象式または関係式である記号の列 A に対して整数 $g(A)$ を一対一に対応させる．体系の各証明 D もまた記号列であるからこれに整数 $h(D)$ を対応させる．
>
> 体系内のある算術関係式 $P(x,\ y,\ z)$ で次の性質を持つものを構成する．$x,\ y,\ z$ は整数である．かつ
>
> (i) D が $A(\lambda)$ の証明ならば，$P(\lambda,\ g(A),\ h(D))$ は体系で証明される．ただし，$A(x)$ は体系の任意の関係式であり，λ は任意の具体的な整数である．
>
> (ii) 整数 μ が $h(D)$ という形でないか，または $\mu = h(D)$ かつ D は $A(\lambda)$ の証明でないときは，$\sim P(\lambda,\ g(A),\ h(D))$ が体系で証明される．
>
> この構成が，超数学の算術化と対角線論法でおこなわれる．
>
> $S(x)$ を $\sim(\exists z)P(x,\ x,\ z)$ で定め，$\gamma = g(S(x))$ とする．体系が無矛盾なら $S(x)$ もその否定 $\sim S(x)$ も証明されない．
>
> …
>
> もちろんこの関係はそうなるように都合よく組み立てられたもので，どんな数学の問題とも自然に関連をもつようなものではない．
>
> これと比べたらさらに一段と興味深いのは，連続体仮説もその否定もともに証明不可能という事実である．

ここにも書かれているように，その後ゲーデルや多くの人の努力によって，連続体仮説もその否定もともに証明不可能という事実もまた証明される．

拓生　幾何の公理で平行線の公理が，他の四つの公理からは証明も否定の証明もされないというのと似ています．

南海　そうだ．しかし，連続体仮説を公理として組み入れても，あるいはそれとは両立しない仮説を公理として組み入れても，これまでの所，新しい数学が出てきたわけではない．しかしそれはまだこれからの課題なのかも知れない．

また，ゲーデルの理論はその後，計算理論にも発展した．そのことはここでは展開できないが，指摘しておきたい．

いずれにせよ，数学的体系というのは絶対のものではなく，数学的現象，数学的真理を記述する方法なのであり，数学そのものはそれより広く，その体系内で完結することは出来ない．したがって，また体系は絶対のものではなく，数学の発展とともに変化し発展するものではないか．

ゲーデルの定理以降に数学の新たな枠組みを作ったフランスを中心とする数学者集団ブルバキは，このことを端的に次のように述べる．

> もし，未来にそれ (現在の数学の枠組みとなっている公理的集合論) が破綻しても数学は必ずや新しい基礎を見つけるだろう

集合論の背理の発見から，ヒルベルトの計画，そしてゲーデルの，これら一連の歴史の結果，数学は，数学そのものとそれを今日の段階の力で記述する方法としての体系の分離と統一を見いだしたのだ．体系とは完結したものではなく，それ自体が開かれた発展する方法なのである．

1.13.4　参考書

(1) J.W.R. デーデキント『数について』(河野伊三郎訳)，岩波文庫，1961.

(2) D. ヒルベルト『幾何学基礎論』(中村幸四郎訳)，ちくま学芸文庫，2005.

(3) D. ヒルベルト『数学の問題』，一松信訳・解説，共立出版，1969.

(4) Georg Cantor『Contributions to the founding of the theory of Transfinite Numbers』(P.E.B.Jourdain 英訳)，Dover Publications，1955.

(5) Kurt Gödel『On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems』(B.Meltzer 英訳)，Dover Publications，1992.

(6) K. ゲーデル『不完全性定理』（林晋，八杉満利子訳・解説），岩波文庫，2006.

(7) 田中一之『ゲーデルに挑む』，東京大学出版会，2012.

(8) R.M. スマリヤン『ゲーデルの不完全性定理』(高橋昌一郎訳)，丸善，1996.

(9) E. ナーゲル，J.R. ニューマン『ゲーデルは何を証明したか』(林一訳)，白揚社，1999.

(10) 廣瀬健，横田正一,『ゲーデルの世界』，海鳴社，1985.

(11) 野崎昭弘,『不完全性定理』，日本評論社，1996.

(12) T. フランセーン『ゲーデルの定理－利用と誤用の不完全ガイド』(田中一之訳)，みすず書房，2011.

(13) 『ゲーデル』，雑誌「現代思想」臨時増刊号，青土社，2007.

(14) N. ブルバキ『数学史』(村田全，清水達雄訳)，東京図書，1970.

(15) 前原昭二,『数学基礎論入門』，朝倉書店，1977.

(16) 吉田洋一，赤攝也,『数学序説』培風館，1961.

(17) 赤攝也,『集合論入門』，培風館，1957.

(18) 竹内外史,『集合とは何か』，講談社ブルーバックス，2001.

(19) 佐々木力,『二十世紀数学思想』，みすず書房，2001.

(20) 難波完爾,『数学と論理』，朝倉書店，2003

(21) E.P. ノースロップ,『ふしぎな数学－数学のパラドックス－』(松井政太郎訳)，みすず書房，1963.

(22) 『数学の思考』，雑誌「現代思想」臨時増刊号，青土社，2000.

(23) 田中一之編『ゲーデルと 20 世紀の論理学』(全 4 巻)，東京大学出版会，2006～2007.

1.14　ラムゼー型定理

2015.3.4

1.14.1　ある問題と一般化

太郎　次のような問題に出会いました．鳩の巣原理を使う練習問題でした．

例題 1.14.1

(1) 6 人の人がいる．どの 2 人も，互いに知り合いであるかまたは見ず知らずであるか，いずれかとする．すると，お互いに知り合いである 3 人がいるか，お互いに見ず知らずである 3 人がいるか，いずれかが成り立っていることを示せ．

(2) 平面に 17 個の点がある．各 2 点は赤，青，黒のいずれかの線分で結ばれている．このとき 3 辺が同じ色の三角形が存在することを示せ．

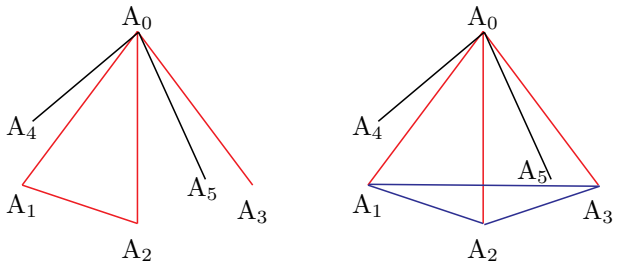
解答

(1) 6 人を平面上の 6 点 A_0, A_1, $\cdots$ A_5 に対応させる．知り合いの場合は赤の線分で結び，見ず知らずの場合は青の線分で結ぶ．

点 A_0 からは 5 本の線分が出ている．$5 = 2\cdot 2 + 1$ なので赤か青かのいずれかは 3 本以上である．赤が 3 本以上出ているとし，A_0 とそれらの線分で結ばれた点のうちの 3 点を A_1, A_2, A_3 とする．この 3 点を結ぶ 3 本の線分のなかに赤があるとする．それを A_1A_2 とすると，3 点 A_0, A_1, A_2 に対応する 3 人は互いに知り合いである．

A_1, A_2, A_3 を結ぶ 3 本の線分がすべて青とする．この場合，この 3 点に対応する 3 人は互いに見ず知らずである．

赤青逆の場合も同様に示される．



(2) 17 個の点を A_0, A_1, $\cdots$, A_{16} で表す．これらの点が互いに青色，赤色，黒色の線分で結ばれている．

点 A_0 から出ている 16 本の線分を考える．$16 = 5\cdot 3 + 1$ なので，少なくともひとつの色については 6 本の線分が出ている．その色を青とし，それらの端点を A_1, A_2, $\cdots$, A_6 とする．

これら 6 個の点を結ぶ線分の中に青色があればその線分の両端の点と A_0 でできる三角形が題意を満たす．

もしこれらの線分が赤色と黒色のみであったとする．

この 6 点のうちには (1) により，赤か黒の三角形が少なくとも一つは存在する．

したがって 3 辺が同じ色の三角形が存在することが示された．

太郎　これを

> 有限個の点がある．各 2 点を定まった色で塗り分ける場合，点がいくつあれば，3 辺が同色の三角形がつねに存在すると言えるのか．

という問題に一般化してみました．色の数を n とし，次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考えました．色が一色の場合，3 点あればよいので，$a_1 = 3$ とします．

定理 17　次の漸化式で数列 $\{a_n\}$ を定める．

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} - 1 = (n+1)(a_n - 1) + 1$$

平面上に a_n 個の点がある．各 2 点をどのように n 色で塗り分けても，つねに同色の三角形が存在する． ■

証明　n に関する数学的帰納法で示す．$n = 1$ のときは成立するので，n のとき a_n 点あれば同色の 3 辺の三角形が存在するとする．

a_{n+1} 個の点を $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{a_{n+1}}$ で表す．これらの点が互いに色 1，色 2，…色 n の線分で結ばれている．

点 A_0 から出ている $a_{n+1} - 1$ 本の線分を考える．$a_{n+1} - 1 = (n+1)(a_n - 1) + 1$ なので，少なくともひとつの色については a_n 本の線分が出ている．その色を色 1 とし，それらの端点を $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{a_n}$ とする．

これら a_n 個の点を結ぶ線分の中に色 1 があればその線分の両端の点と A_0 でできる三角形が題意を満たす．

もしこれらの線分が色 2〜色 n であったとする．この a_n 点のうちには帰納法の仮定によって，3 辺が色 2〜色 n のいずれかの三角形が少なくとも一つは存在する．

したがって 3 辺が同じ色の三角形が存在することが示された． □

太郎　この一般項は求まるのでしょうか．

南海　このように問題を一般化してとらえようとすることは，大切なことだ．

次のようにすれば，a_n を書くことができる．

$$\frac{a_{n+1} - 1}{(n+1)!} = \frac{a_n - 1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

と変形する．よって

$$\frac{a_n - 1}{n!} = a_1 - 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

である．一方，e を自然対数の底とすると

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

であるが，ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a_n-1}{n!}<e<\frac{a_n-1}{n!}+\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}$$

つまり

$$a_n-1<en!<a_n-1+\frac{n+2}{(n+1)(n+1)}<a_n$$

この結果

$$en!<a_n<en!+1$$

a_n は正整数なので,

$$a_n=[en!+1]$$

と表される．ただし，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す． □

太郎　確かに

$$a_1=[e+1]=3,\ a_2=[2e+1]=6,$$
$$a_3=[6e+1]=17\ (17.2=6\cdot 2.7+1<6e+1<6\cdot 2.72+1=17.32)$$

です．

太郎　色の数を一般化しましたが，さらに一般化はできるのでしょうか．

南海

> 2 点ずつ結んだ線分を n 色で塗り分ける．
> 3 点を選ぶとその 3 つの辺の色が同じである．

を

> r 個の点を結んだ多辺形を n 色で塗り分ける．
> q 個の点を選ぶとそのうちの r 個の点を結んだ多辺形はいずれも色が同じである．

とする．また集合 X の各元を n 色で塗り分けるとは，X から，$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ への写像を定めることに他ならない．さらに「q 個の点」と言うところを，色によってその個数の指定を変えてもよい．つまり $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して「q_i 個の点」としたほうがより一般的になる．

その上で，先の問題を一般化すれば次のようになる．

集合 U の u 個の元からなるすべての部分集合の集合を $P(u\ ;\ U)$ と表す．

定理 18

$$q_k\geqq r\geqq 1\quad ,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

をみたす整数の組 $r,\ q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n$ を任意に定める．このとき，次の命題が成立する整数 R が存在する．

命題：N を $N\ \geqq\ R$ をみたす自然数とする．N 個の元からなる集合 S および $P(r\ ;\ S)$ から $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ への任意の写像 χ に対し

$$V\in P(q_k\ ;\ S)\text{ かつ }\chi(P(r\ ;\ V))=k$$

となる組 $(V,\ k)$ が存在する．

■

今後は，色の塗り分けで考えたり，写像 χ で考えたりするが，それは同じことである．

1.14.2　ラムゼー数

南海　しかし，この R は存在するための十分条件でしかない．
太郎　私が色の数を a_n とおいたあの a_n も，点の個数が a_n であればつねに同色の三角形が存在する，ということでした．それより小さい数でも，つねに存在することが言えるのか，あるいは言えない反例があるのかは，何もいっていません．
　ですから，

> n を自然数とし，平面に $m(n)$ 個の点がある．各 2 点を結ぶ線分を n 色のうちのいずれかの色でぬる．このとき 3 辺が同じ色の三角形が存在するような $m(n)$ の最小値を求めよ．

という問題が生じます．

$$m(n) \leqq a_n$$

ですが，等号が成立するのか否かはわかりません．
南海　実は

$$m(2) = 6,\ m(3) = 17$$

であることが知られている．しかし $m(4)$ 以上についてはわかっていない．$m(2) = 6$ の方は，5 なら 3 辺が同色でない三角形が存在することはすぐわかるが，$m(3) = 17$ は難しい．これについては『めざせ，数学オリンピック』[49] を見てほしい．こうして次の数が定義される．

定義 8 (ラムゼー数)　定理 18 によって存在する R のうちの最小値を

$$R(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n\ ;\ r)$$

と表し，ラムゼー数という．

例 1.14.1　先の命題

> 色が n 色ある．各 2 点を結ぶ線分を n 色のうちのいずれかの色でぬる．このとき 3 辺が同じ色の三角形が存在する．

では，$r = 2$，$q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 3$ である．従ってこのとき，

$$R(3,\ 3,\ \cdots,\ 3\ ;\ 2) \leqq [en! + 1]$$

が成り立つ．

　このようにラムゼー問題といわれる一連の問題群がある．いずれも，

> ある集合が指定された規則正しい部分構造を含む．

この命題が成立するか否かが問題になる．

第 1 集合の位数に関する十分条件が存在する．

第 2 その上限を確定する．

第 3 その下限を確定する．

　もちろん上限が確定すれば，それは十分条件の存在も示しているのであるが，具体的に上限が表せなくても，十分条件の存在は示されることがある．
　それでこれを分けた．

1.14.3　存在定理

南海　抽象的な論証になるが，十分条件は存在する．まずラムゼーの定理の無限型を示そう．無限とはいっても，可算無限であることが重要である．

定理 19 (無限ラムゼー定理)　r を正整数とし，S を可算無限集合とする．写像

$$\chi \ : \ P(r \ ; \ S) \to \{1, \ 2, \ \cdots, \ n\}$$

に対し，S の無限部分集合 V で

$$\chi(P(r \ ; \ V)) = k$$

となる組 $(V, \ k)$ が存在する．

証明　r に関する数学的帰納法でおこなう．

$r = 1$ のとき，$P(1 \ ; \ S) = \{\{x\} \mid x \in S\}$ なので $P(1 \ ; \ S)$ は S と同一視でき，無限集合である．$1 \leqq k \leqq n$ に対し，$\chi^{-1}(k)$ は $P(1 \ ; \ S)$ の部分集合である．有限集合の有限個の和集合は有限集合なので，背理法から $\chi^{-1}(k)$ $(1 \leqq k \leqq n)$ のうち少なくとも一つは無限集合である．それを C_k とする．C_k は S の部分集合と見なせる．このとき，$(C_k, \ k)$ が条件をみたす．

定理が $r = m$ で成立するとする．$r = m + 1$ のときの成立を示す．$P(m + 1 \ ; \ S)$ の写像を

$$\chi \ : \ P(m + 1 \ ; \ S) \to \{1, \ 2, \ \cdots, \ n\}$$

とする．

S は可算無限集合であるから順序を定義し，最小の元をもつように整列することができる．その順序を $<$ で表す．S のこの順序に関する最小の元を θ とする．

S から θ を除いた集合 S/θ をとる．$P(m \ ; \ S/\theta)$ からの写像 χ_0

$$\chi_0 \ : \ P(m \ ; \ S/\theta) \to \{1, \ 2, \ \cdots, \ n\}$$

を，$U \in P(m \ ; \ S/\theta)$ に対し，

$$\chi_0(U) = k \quad \Longleftrightarrow \quad \chi(U \cup \{\theta\}) = k$$

で定める．このとき帰納法の仮定からこのとき S/θ の無限部分集合 S_0 で

$$\chi_0(P(r \ ; \ S_0)) = k_0$$

となる組 $(S_0, \ k_0)$ が存在する．

S_0 には最小の元が存在する．それを x_1 とする．

S_0 から x_1 を除いた集合 S_0/x_1 をとる．$P(m \ ; \ S_0/x_1)$ からの写像 χ_1

$$\chi_1 \ : \ P(m \ ; \ S/x_1) \to \{1, \ 2, \ \cdots, \ n\}$$

を，$U \in P(m \ ; \ S_0/x_1)$ に対し，

$$\chi_1(U) = k \quad \Longleftrightarrow \quad \chi(U \cup x_1) = k$$

で定める．このとき帰納法の仮定からこのとき S/x_1 の無限部分集合 S_1 で

$$\chi_1(P(r \ ; \ S_1)) = k_1$$

となる組 $(S_1,\ k_1)$ が存在する．S_1 には最小の元が存在する．それを x_2 とする．

これを繰りかえすことによって，S の元の無限列

$$\theta < x_1 < x_2 < \cdots$$

と分割番号の無限列

$$k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$$

が得られる．集合 X を

$$X = \{x_1,\ x_2,\ \cdots\}$$

とし，その写像 χ_∞

$$\chi_\infty\ :\ X \to \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

を

$$\chi_\infty(x_j) = k_j$$

によって定める．x_j は $\{x_{j+1},\ x_{j+2},\ \cdots\}$ の任意の m 個の元からなる部分集合に x_j を付け加えると，その $m+1$ 個の元からなる部分集合の写像 χ の像は k_j である．

$r=1$ の論証と同様にして，${\chi_\infty}^{-1}(k)$ $(1 \leqq k \leqq n)$ の少なくとも一つは無限集合である．それを V とする．

$$\chi(P(m+1\ ;\ V)) = k$$

となり，$(V,\ k)$ は $r = m+1$ のときの条件をみたす組である． □

有限ラムゼー定理 18 の証明の試み　背理法で示す．すなわち定理 18 の R が存在しないとする．

これをいいかえると次の命題となる．

ある整数の組

$$q_k \geqq r \geqq 1 \quad ,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

で，次の命題をみたすものが存在する．

命題：十分大きい任意の N に対し，N 個の元からなる集合 S に対し，$P(r\ ;\ S)$ から $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ への写像 χ で，

$$V \in P(q_k\ ;\ S) \text{ かつ } \chi(P(r\ ;\ V)) = k$$

となる組 $(V,\ k)$ が存在しないものが，存在する．

太郎　十分大きい任意の N に対して，組 $(V,\ k)$ が存在しない写像 χ とれるということは，可算無限集合ではつねに組 $(V,\ k)$ が存在するということと矛盾する．

ということでしょうか．

南海　基本的にはそういうことだ．もちろん，無限集合からの写像を帰納的に確定しなければならない．それは今は宿題としておこう．

1.14.4　漸化不等式

南海　$N \geqq R$ ならその中に一定の構造が存在する，これが成り立つ R の存在は示せた．次の問題は R の上限と下限を求めるということだ．しかし一般にこれはたいへん難しい．とくに下限はほとんどの場合わからない．

太郎　そうなのですね．色の数を n にした場合，三角形ができるための上限公式は先に導けました．

南海　ここで，$r=2$ つまり 2 点を結ぶ線分を n 色で塗り分ける場合に一般化しよう．

定理 20　漸化不等式

$$q_i = 2\ (i \neq k) \Rightarrow R(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n\ ;\ 2) = q_k$$
$$R(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n\ ;\ 2) \leqq 2 - n + \sum_{i=1}^{n} R(q_1,\ \cdots,\ q_i - 1,\ \cdots,\ q_n\ ;\ 2)$$

が成り立つ．■

$n = 2$ のときは

$$R(p,\ 2\ ;\ 2) = p,\ R(2,\ q\ ;\ 2) = q$$
$$R(p,\ q\ ;\ 2) \leqq R(p-1,\ q\ ;\ 2) + R(p,\ q-1\ ;\ 2)$$

が成立する．まずこれを考えてみよう．

太郎　$R(p,\ q\ ;\ 2)$ は何を意味していたか再確認します．

自然数 $N \geqq R(p,\ q\ ;\ 2)$ をとる．N 個の点の集合を S とする．S の 2 点を結ぶ線分を赤色と青色で塗り分ける．S の p 個からなる部分集合 V_p でその線分がすべて赤色か，q 個からなる部分集合 V_q でその線分がすべて青色であるものが存在する．

$R(p,\ 2\ ;\ 2) = p$ を示します．p 個以上の点の集合を S とする．S の 2 点を結ぶ線分を赤色と青色で塗り分ける．すべてが赤色で塗られていれば $V_p = S$ とする．青色の線分が存在すれば，その 2 点を V_2 とする．

この部分はこれでいいでしょうか．

南海　いや，$p-1$ 以下ではできない反例を示すことが必要だ．

太郎　$p-1$ 以下の場合，すべてを赤でぬれば，S の p 個からなる部分集合 V_p でその線分がすべて赤色のものも，2 個からなる部分集合 V_q でその線分がすべて青色であるものも存在しません．

南海　そう．これ自体は難しくないが，このように下の限界を示すことが大切なのだ．

太郎　つぎに不等式を示すためには，$N \geqq R(p-1,\ q\ ;\ 2) + R(p,\ q-1\ ;\ 2)$ であれば，先の命題が成り立つことを示せばよい．

不等式

$$R(p,\ q\ ;\ 2) \leqq R(p-1,\ q\ ;\ 2) + R(p,\ q-1\ ;\ 2)$$

は

$$R(p,\ q\ ;\ 2) - 1 \leqq R(p-1,\ q\ ;\ 2) - 1 + R(p,\ q-1\ ;\ 2) - 1 + 1$$

を意味します．

右辺は，N 個の集合の各 2 点を結ぶ線分を 2 色で着色すれば，赤の線分が $R(p-1,\ q\ ;\ 2)$ あるか，青の線分が $R(p,\ q-1\ ;\ 2)$ あるかを意味します．

いずれもがなければ，その合計は $R(p-1,\ q\ ;\ 2) - 1 + R(p,\ q-1\ ;\ 2) -$ より小さいはずだからです．

N 個の点の一つを固定し，そこから残る $N-1$ 個の点を赤か青の線分で結ぶ．このとき，赤の線分の端点が $R(p-1,\ q\ ;\ 2)$ 以上あるか，青の線分の端点が $R(p,\ q-1\ ;\ 2)$ 以上あるか，その少なくとも一方は成り立つ．

赤の線分の端点が $R(p-1,\ q\ ;\ 2)$ 以上あるとする．それらの端点の q 個からなる部分集合 V_q でその線分がすべて青色であるものが存在するなら，それでよい．それらの端点の $p-1$ 個からなる部分集合 V_{p-1} でその線分がすべて赤色であるものが存在するなら，それにはじめの 1 点を加えた p 個からなる部分集合 V_p はその線分がすべて赤色である．

青の線分の端点が $R(p,\ q-1\ ;\ 2)$ 以上ある場合も同様である．

したがって，N が $R(p-1,\ q\ ;\ 2)+R(p,\ q-1\ ;\ 2)$ 以上であることは，S の p 個からなる部分集合 V_p でその線分がすべて赤色か，q 個からなる部分集合 V_q でその線分がすべて青色であるものが存在するための十分条件である．

よってその最小値 $R(p,\ q\ ;\ 2)$ は

$$R(p,\ q\ ;\ 2) \leqq R(p-1,\ q\ ;\ 2)+R(p,\ q-1\ ;\ 2)$$

をみたす．

太郎　この考え方なら色の数 n がの場合も同じことですね．ここで書いてみます．

定理 20 の証明　$q_i=2\ (i\neq k)$ のとき．$R(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n\ ;\ 2)=q_k$ を示す．

q_k 個以上の点の集合を S とする．S の 2 点を結ぶ線分を n 色で塗り分ける．すべてが k 色で塗られていれば $V_{q_k}=S$ とする．k 色以外の線分が存在すれば，その色を q_i とするとき，その 2 点を V_{q_i} とする．

q_{k-1} 以下の場合，すべてを k 色でぬれば，S の q_k 個からなる部分集合 V_{q_k} でその線分がすべて k 色のものも，2 個からなる部分集合 V_{q_i} でその線分がすべて i 色であるものも存在しない．

次に不等式は

$$R(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n\ ;\ 2)-1 \leqq \sum_{i=1^n}\{R(q_1,\ \cdots,\ q_i-1,\ \cdots,\ q_n\ ;\ 2)-1\}+1$$

と変形できる．

$$N \geqq \sum_{i=1^n}\{R(q_1,\ \cdots,\ q_i-1,\ \cdots,\ q_n\ ;\ 2)-1\}+2$$

を満たす N をとり，N 個の点の一つを固定する．

そこから残る $N-1$ 個の点を n 色で塗り分ける．このとき，$N-1 \geqq \sum_{i=1^n}\{R(q_1,\ \cdots,\ q_i-1,\ \cdots,\ q_n\ ;\ 2)-1\}+1$ なので，k 色の線分の端点が $R(q_1,\ \cdots,\ q_k-1,\ \cdots,\ q_n\ ;\ 2)$ 以上あるような k が存在する．

$i\neq k$ に対し端点の q_i 個からなる部分集合 V_{q_i} でその線分がすべて i 色であるものが存在するなら，それでよい．それらの端点の q_k-1 個からなる部分集合 V_{q_k-1} でその線分がすべて k 色であるものが存在するなら，それにはじめの 1 点を加えた q_k 個からなる部分集合 V_{q_k} はその線分がすべて k 色である．したがって，この N に対して S の q_i 個からなる部分集合 V_{q_i} でその線分がすべて i 色であるものが存在した．　□

太郎　上限に関する漸化不等式ができたので，これから具体的に上限を表したいです．

南海　定理 20 は $n=2$ のときはきれいな形である．この場合は可能だ．

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}=\frac{(p-1+q)!}{(p-1)!q!}+\frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!}$$

が成り立つ．これを用いると

$$R(p,\ q\ ;\ 2) \leqq \frac{(p-1+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!}$$

が成り立つ．

太郎　$q=2$ のときは $R(p,\ 2\ ;\ 2)=p$ でした．

$$\frac{(p-1+2-1)!}{(p-1)!(2-1)!}=p$$

なのでこの場合は成り立ちます．p か q のところが $p-1$ か $q-1$ までなら成立するとすると

$$\begin{aligned} R(p,\ q\ ;\ 2) &\leqq R(p-1,\ q\ ;\ 2)+R(p,\ q-1\ ;\ 2) \\ &\leqq \frac{(p-2+q-1)!}{(p-2)!(q-1)!}+\frac{(p-1+q-2)!}{(p-1)!(q-2)!} \\ &= \frac{(p-1)(p-2+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!}+\frac{(q-1)(p-1+q-2)!}{(p-1)!(q-1)!} \\ &= \frac{(p-1+q-1)(p-2+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!}=\frac{(p-1+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!} \end{aligned}$$

より p と q のときも成立する． □

一般の場合は難しそうです．

南海　さらに下限を確定することは難しい．

1.14.5　エルディシュ問題

太郎　下限の確定が難しいということですが，2014 年の次の問題では，上限と下限が一致しました．次のは青空学園の解答です．

例題 1.14.2 [2014 早稲田教育 4 番]

2 個以上の正の整数を要素とする有限集合を A とする．

A のどの 2 数も一方が他方を割り切るとき A は良い集合であるといい，A のどの 2 数も互いに他を割り切らないとき A は悪い集合であるという．

また，A の良い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち，

$$\max\{n(B)\mid B\subset A,\ n(B)\geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は良い集合}\}$$

を A の最良数と定義し，A の悪い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち，

$$\max\{n(B)\mid B\subset A,\ n(B)\geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は悪い集合}\}$$

を A の最悪数と定義する．

たとえば，$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 14,\ 15,\ 77,\ 154,\ 225,\ 231,\ 308\}$ のとき，A の良い部分集合は $\{7,\ 77,\ 231\}$，$\{7,\ 14,\ 154,\ 308\}$，$\{11,\ 77,\ 154,\ 308\}$ などであり，A の最良数は 4 である．また，A の悪い部分集合は $\{231,\ 308\}$，$\{14,\ 15,\ 77\}$，$\{2,\ 7,\ 11,\ 15\}$，$\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ などであり，A の最悪数は 5 である．

k を 2 以上の整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $n(A)=k^2$ で，かつ最良数も最悪数も k である集合 A が存在することを証明せよ．

(2) $n(A)=k^2+1$ ならば，A の最良数または A の最悪数のどちらかは $k+1$ 以上であることを証明せよ．

(3) 要素数が 2014 で，かつ最良数と最悪数が等しいような集合，すなわち，

$$n(A)=2014 \text{ かつ（}A\text{ の最良数）}=\text{（}A\text{ の最悪数）}$$

を満たす集合 A を考える．このような集合たちの中で最良数が最小となる集合の例を挙げよ．

解答

(1) 奇数の素数は無限個ある．相異なる奇数の素数を k 個選びそれを $p_l,\ p_2,\ \cdots,\ p_k$ とする．このとき A を

$$A = \{2^i p_j \mid 0 \leqq i \leqq k-1,\ 1 \leqq l \leqq k\}$$

で定める．$n(A) = k^2$ である．$2^{i_1}p_{j_1}$ と $2^{i_2}p_{j_2}$ は，$j_1 = j_2$ なら一方が他方を割り切り，$j_1 \neq j_2$ なら互いに他方を割り切らない．j_1 や i_1 を固定し

$$B = \{2^i p_{j_1} \mid 0 \leqq i \leqq k-1\}$$
$$C = \{2^{i_1} p_j \mid 1 \leqq j \leqq k\}$$

とおく．それぞれ要素の個数は k である．

このとき，B は良い集合である．また $k+1$ 個以上の要素からなる部分集合には，素数部分が相異なる 2 数が含まれる．その 2 数は互いに他方を割り切らない．よつて $k+1$ 個以上の要素からなる良い部分集合は存在しない．

このとき，C は悪い集合である．また $k+1$ 個以上の要素からなる部分集合には，素数部分が等しい 2 数が含まれる．その 2 数は一方が他方を割り切る．よって $k+1$ 個以上の要素からなる悪い部分集合は存在しない．

これから A は最良数も最悪数も k となる集合である．

(2) A の要素 a に対し，$l(a)$ を，a を最小の要素として含む良い集合のなかで，要素の個数が最大のもののその個数とする．つまり

$$l(a) = \max\{n(B) \mid a \in B,\ b \in B \Rightarrow a \leqq b\ ,\ B \text{ は良い集合 }\}$$

そして $S(k) = \{a \mid l(a) = k\}$ とおく．

$S(k)$ は悪い集合である．なぜなら，もし $S(k)$ の 2 要素 a と b で a が b を割るものがあれば $l(a) > l(b)$ となるからである．

A の部分集合

$$S(1) \cup S(2) \cup \cdots \cup S(k)$$

を考える．A の要素でこの部分集合に入らないものがあれば，それを最小の要素として含む良い集合は $k+1$ 以上の要素からなり，最良数は $k+1$ 以上である．

A のすべての要素がこのうちのいずれかに入れば，$n(A) = k^2+1$ なので，どれかは $k+1$ 以上の要素からなる．つまり $k+1$ 個以上からなる悪い集合が存在し，最悪数が $k+1$ 以上となる．

(3)

$$44^2 = 1936 < 2014 < 45^2 = 2025$$

である．

最良数と最悪数が等しいとき，その個数を m と置くと，(2) の議論から

$$N(A) \leqq m^2$$

この結果

$$44 < m$$

が必要である．

$m = 45$ で $n(A) = 2014$ となるものを構成すれば，それが例になる．

(1) で $k = 45$ として構成した集合を A' とする．A' の部分集合 B を

$$B = \{p_l,\ p_2,\ \cdots,\ p_{45},\ 2p_1,\ \cdots,\ 2^4 4p_1\}$$

とする．これは 89 個の要素からなる．この部分集合

$$\begin{aligned} B_1 &= \{p_l,\ p_2,\ \cdots,\ p_{45}\} \\ B_2 &= \{p_l,\ 2p_1,\ \cdots,\ 2^4 4p_1\} \end{aligned}$$

がそれぞれ最悪数と最良数 45 を与える．

集合 $A' - B$ から任意に，要素の個数が $2014 - 89 = 1925$ の部分集合 C を選ぶ．C の良い集合や悪い集合の要素の個数は 45 を超えず，また C のどの要素を B_1 や B_2 に加えても，それぞれ最悪数や最良数を増やすことはない．

よって $A = B \cup C$ とすると，

$$n(A) = 2014,\ \text{かつ最悪数} = \text{最良数} = 45$$

である集合 A が構成された．

□

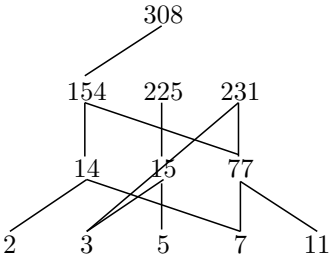
(2) の別解　A のすべての要素を次の原則を満たすように，上下に並ぶ平行な直線上に配置する．

(i) 倍数を上段に置き，割る数と割られる数を結ぶ．

(ii) 割る数と割られる数が隣りあう平行線上に置けるときは置く．

(iii) 結びあう数がないものは最下段に置く．

たとえば本問の A は次のようになる．



原則 (ii) によって，最下段から最上段の数まで一段ずつ数のある折れ線が存在する．よって段数が最良数である．

また同じ段にある数は，互いに他方を割り切らず，その集合は悪い部分集合である．その要素の個数は最悪数を超えない．

$n(A)$ は各段の要素の個数を加えたものであるから

$$n(A) \leqq (\text{最悪数}) \times (\text{最良数})$$

である．

$n(A)=k^2+1$ のとき，

$$\text{最悪数} \leqq k \text{ かつ } \text{最良数} \leqq k$$

と仮定すると，$k^2+1 \leqq k^2$ となり，矛盾する．

よって A の最悪数と最良数の少なくとも一方は $k+1$ 以上である．□**太郎**　そういえば，上限が同様な数となる例題を見たことがあります．

例題 1.14.3　1 から 50 までのカードが 1 枚ずつある．これらのカードを 1 列に並べ，それを

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{50}$$

とする．ここから 8 枚のカードを抜き出し順序を変えずに

$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_8$$

とする．このとき 50 枚のカードをどのように並べても，かならず

$$b_1<b_2<\cdots<b_8 \quad \text{または} \quad b_1>b_2>\cdots>b_8$$

となるものが選び出せることを示せ．

解答　並べられた 50 枚のカード

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{50}$$

の各々に次のように数の組 $(i,\ j)$ を対応させる．

a_k からはじまって右方に伸びる増加列の最大長を i，減少列の最大長を j とする．このときカード a_k に $(i,\ j)$ を対応させる．

$k \neq l$ のとき，a_k に対応する $(i,\ j)$ と，a_l に対応する $(s,\ t)$ は異なる．なぜなら，$a_k<a_l$ なら $i>s$ であるし，$a_k>a_l$ なら $j>t$ であるからである．

そこで，このとき 50 枚のカードのどのような並べ方に対しても，

$$b_1<b_2<\cdots<b_8 \quad \text{または} \quad b_1>b_2>\cdots>b_8$$

となるものが選び出せなかったとする．この場合，最大長が 7 以下なので 50 枚のカードに対応させた数の組 $(i,\ j)$ に現れる i も j もすべて 7 以下であるということを意味する．

ところがこのような数の組は $7\cdot 7=49$ 組しかない．したがって 50 枚のカードに対応させた数の組には少なくとも 1 組同じものがなければならない．

これは $k \neq l$ のとき，a_k に対応する $(i,\ j)$ と，a_l に対応する $(s,\ t)$ は異なる，という結果と矛盾する．

したがって背理法によって題意が示された．　□

太郎　この 50 と 8 の関係が $(81)^2+1=50$ で 8 の代わりに n にして，50 を $(n-1)^2+1$ にしても，まったく同様に示せます．

2014 年の早稲田の問題を参考に知ると，次の別解ができました．一般の場合でやってみます．

別解　カード a_i に対し，l_i を，a_i から始まる増加列で最長のものの長さとする．そして $S(k)=\{a_i \mid l_i=k\}$ とおく．

$S(k)$ は減少列である．なぜなら，もし $S(k)$ の 2 要素 a_s と a_t で $a_s<a_t$ となるものがあれば $l_s>l_t$ となるからである．

集合

$$S(1) \cup S(2) \cup \cdots \cup S(n-1)$$

を考える．$\{a_i\}$ でこの集合に入らないものがあれば，それから始まる増加列は n 以上である．

$\{a_i\}$ がすべてこの集合に入れば，$S(1),\ S(2),\ \cdots,\ S(n-1)$ のどれかは n 以上の要素からなる．もしすべて $n-1$ 以下なら総数が高々 $(n-1)^2$ だからである．よって総数が $(n-1)^2+1$ なら，n 個以上からなる減少列が存在する． □

南海　これはよく考えている．

太郎　この 2 つは同じ問題でしょうか．

南海　まず，例題 1.14.3 は **Erdös-Szekeres(エルディシュ-ゼッカーズ) の定理**といわれる美しい定理である．この語で検索してみると，さまざまの証明法などもある．また，これは**離散幾何**といわれる分野に関わる．これについてもここでは宿題にしておこう．

その上で，例題 1.14.2 と例題 1.14.3 は異なる．例題 1.14.3 では，集合の中に 2 つの関係が入っている．$a<b$ か $a>b$ である．そして一方の否定が他方になる．この 2 つの関係は，いずれも順序の関係を満たす．

$$a<b,\ b<c\ \Rightarrow a<c \quad ,\ a>b,\ b>c\ \Rightarrow a>c$$

が成り立つ．

太郎　そうか．例題 1.14.2 では,「a は b の倍数である」という関係は順序の関係を満たすがその否定「a は b の倍数でない」は順序の関係は満たさない．だから例題 1.14.2 を，数の組 $(i,\ j)$ を考えることで示すことはできないのです．

南海　そういうことだ．さらに，一般の n について Erdös-Szekeres の定理でいう増加列や減少列が存在するための必要条件は確定していないはずだ．最近の結果までは確認できないが，たいへん難しい問題であることまちがいない．

太郎　例題 1.14.2 は，論理的に導いた上限が下限でもあるという，その意味ではまれな場合なのですね．

南海　こういう離散数学は，日本の高校ではあまり重視されない分野であるのだが，2014 年の入試問題もあり，その背後に広がる分野について対話できたことは，意味があった．

1.14.6　参考書

- J. マトウシェク：離散幾何学講義，岡本吉央訳，丸善出版，2012
- Martin Gould : Ramsey Theory，University of Oxford，2007 以降
- J. コフマン：めざせ，数学オリンピック，山下純一訳，現代数学社，1995

第2章　代数分野

2.1　三次方程式

2001.1.22/2000.9.10

2.1.1　ある三次式の因数分解

耕一　最近面白い因数分解に出会いました．それは

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z) \end{aligned}$$

です．ただし，ω は 1 の 3 乗根で

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\overline{\omega}$$

を表します．$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ の因数分解は次のようにしました．

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=x^2-(y+z)x+y^2+z^2-yz=0$$

と，x の二次方程式とみて解の公式を使うと

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+z\pm\sqrt{(y+z)^2-4(y^2+z^2-yz)}}{2} \\ &= \frac{y+z\pm\sqrt{-3(y^2-2yz+z^2)}}{2} \\ &= \frac{y+z\pm\sqrt{3}i(y-z)}{2} \\ &= \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}y+\frac{1\mp\sqrt{3}i}{2}z \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \\ = & \left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}z\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}y-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z\right) \\ = & \left(x+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}y+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}z\right)\left(x+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}y+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}z\right) \\ = & (x+\omega^2 y+\omega z)(x+\omega y+\omega^2 z) \end{aligned}$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

は大変きれいな因数分解です．これは何か役に立つのでしょうか．

南海　右辺は見かけは $x,\ y,\ z$ の対称式ではないが，それは大丈夫かな．

耕一　$\omega^3=1$ なので

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)\\ =\ &(x+y+z)\cdot\omega(x+\omega y+\omega^2 z)\cdot\omega^2(x+\omega^2 y+\omega z)\\ =\ &(x+y+z)(\omega x+\omega^2 y+z)(\omega^2 x+\omega y+z)\end{aligned}$$

と変形できます．$x,\ y,\ z$ に関して対称です．

南海　この因数分解の左辺は三次式だがそれが右辺では一次式三つに分解されている．これを使うと，三次方程式を一般的に解くことができる．この機会に方程式について順に考えていこう．

2.1.2　根と解

南海　方程式の問題を考えるので，まず「方程式の解」についてまとめておく．教科書にはどのように書かれているかな．

耕一　数学 I では，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「解」とは，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸の共有点の x 座標の値と定義されています．そしてそれは

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

で与えられる,「これを解の公式という」と書かれています．

南海　するとここでいわゆる重解の場合，いくつあるのかに関して混乱が生じる．x 軸との共有点という立場に立てば一つだし,「解の公式」からいえば $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の二つあってそれらが同じ値になる，ということになる．一つしかないのか，同じものが二つあるのか．

同じものが二つなら一つではないか，というのはすでに共有点の個数という考え方にとらわれているからで,「白球二つ」といえば「白球一つ」と明確に異なるように，同じものが二つあることは，一つあることとは明確に別である．

ところが二次方程式 $x^2-2x+1=0$ の解は一つなのか，二つなのかが，教科書の定義では答えられないのだ．

耕一　確かにはっきりしません．それに方程式の虚数解のことを考えると，軸との共有点という定義は意味がなくなります．

南海　そうだ．同じ高校数学で，虚数を習うと通用しなくなるような定義を数 I でして，どうするのかということだ．虚数解まで考えれば，$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を「解」としなければならない．そうしておいて重解の場合に戻ると重解とは「二つが同じになっている場合」になり，x 軸との共有点という定義にそぐわない．

はっきりさせるためには「解」と「根」を使い分けなければならない．結論的にいえば，二次方程式の重解の場合,「一つしかない」のが「解」であり,「同じものが二つある」のが「根」である．異なる概念を混同しているのが今の高校教科書である．

「根」は root から来ている言葉だ.「根」という言葉は今の高校数学では「根号」とか「平方根」というところに残っているだけだ．しかし $\sqrt{\ }$ という記号はもともと root の r から来ているのだから，毎日「根」は使っている．

「根」は「根っこ」であり「大地」である．こんなすばらしい言葉を高校数学から追放した現在の教科書の罪は深い．また，大学に入って習う数学では「根」という．そのときとまどわないようにするためにもここではっきりとさせておこう．

n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

の**根**とは

$$a_n x^n + \cdots = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

と n 個の 1 次式の積に因数分解したときの， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ のことを言う．n 次方程式はつねに n 個の根をもつ．またこれらの中には同じものがあることもある．

それに対して**解**とは何か.「方程式を満たすもの」で，実質は集合

$$\{\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\ \}$$

の要素のことであり，同じものは一つと見なす．だから n 次方程式は n 個以下の解をもつ，あるいは解集合の要素の個数は n 以下である，といえる．

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ では

$$ax^2+bx+c = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

と因数分解される．だから根は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

の二つである.「根の公式」といわねばならない.

今は教科書では「二次方程式の解の公式」というが，われわれの高校時代は「二次方程式の根の公式」といった．また「解と係数の関係」というが，二次の場合，二次式の因数分解

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

から $\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ を導くのだから，これは定義からして「根と係数の関係」だ．また，重なっているのは「根」なのだから「重根」というのが正しい．ここまでは教科書にあわせて「重解」と使ってきたが，今後は「重根」といおう．

$$x^2-2x+1 = (x-1)^2 = 0$$

の根は 1, 1 であるが，解は集合として書けば $\{1\}$ となる.「根は 1, 1」であることを「1(重根)」とも書く．以下ここではこのように「根」と「解」を使い分ける．

耕一　学校でも使い分けるべきでしょうか．

南海　こういう言葉はもっと大切にしてもらいたい．教科書自身が間違っているところなので，使い分けなければならない，とまで高校生諸君には言えない．青空学園で学んだ人はそれをおさえたうえで，実際の入試問題などでは出題者の使い方にあわせておいてよい．入試問題を解くというのは，出題者の問いに答えるということだから，出題者以上に厳格である必要はない．ただ大学生になって代数学を習えばそこでは「解」と「根」が使い分けられているのでその点は心得ておいてもらいたい．

2.1.3　根の公式とは

南海　まず二次方程式の根の公式を思い起こそう.「根の公式」とは？

耕一　二次方程式を

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

とする．この方程式の根は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

である．これが「解の公式」，いや「根の公式」です.

南海　この「根の公式」はどのように導くのかな.

耕一　方程式の左辺を平方完成します.

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

より

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となります．これで根の公式がでます.

南海　根の公式というのは，平方完成して移項し，平方根をとって，さらに移項して未知数 x を求める方法を，一つの式にまとめたものだ.

耕一　はい.

南海　大切なことは，文字係数の四則演算と平方根をとるという操作で，二次方程式の根が求まる，ということだ．だから，二次方程式の根が，係数の和差積商と根号で表される．これが根の公式だ.

n 次方程式について，文字係数の四則演算とべき根をとるという操作で根が求まる一般的な方法があれば,「解ける」といい，それをまとめたものが根の公式なのだ.

2.1.4　三次方程式を解く（その 1）

南海　たとえば

$$x^3+3x+1=0$$

を考えよう．もし

$$x^3+3x+1=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

となる y と z が求まれば，それで x は

$$x=-y-z,\ -\omega y-\omega^2 z,\ -\omega^2 y-\omega z$$

と求まる．そのためには

$$\begin{cases} -3yz=3 \\ y^3+z^3=1 \end{cases}$$

となる y と z が見つかればよい.

耕一　やってみます. $z=-\dfrac{1}{y}$ なので

$$y^3+\left(-\frac{1}{y}\right)^3=1 \quad \Rightarrow \quad (y^3)^2-y^3-1=0$$

これから

$$y^3=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

このとき

$$z^3=\left(-\frac{1}{y}\right)^3=-\frac{2}{1\pm\sqrt{5}}=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$$

南海　y として $\sqrt[3]{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$ とその ω 倍，ω^2 倍がとれるが，$-y-z$, $-\omega y-\omega^2 z$, $-\omega^2 y-\omega z$ の三つは同じになる．それで

$$y=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad , \; z=\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

よって，

$$\begin{aligned} x \;=\; & -\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\,, \\ & -\omega\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\omega^2\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\,, \\ & -\omega^2\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\omega\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\,. \end{aligned}$$

耕一　なるほど，できました．解の公式もできそうです．ところで一般の三次方程式は

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

です. a は 0 でないので割れるのですが b は消せるのでしょうか.

南海　x のところに $x=t-\dfrac{b}{3a}$ を代入すると t^2 の係数が消えるはずだ.

耕一　（計算をする）

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d \;&=\; a\left(t-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(t-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(t-\frac{b}{3a}\right)+d \\ &=\; at^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)t+\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d \end{aligned}$$

なりました.

南海　これは，関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフを，対称の中心である変曲点が y 軸上に来るように平行移動したことになる.

耕一　これで一般的な三次方程式の解の公式ができます.

三次方程式

$$x^3+px+q=0$$

の解の公式

$$\begin{cases} -3yz = p \\ y^3 + z^3 = q \end{cases}$$

を解いて

$$\begin{cases} y^3 = \dfrac{q \pm \sqrt{q^2 + \dfrac{4}{27}p^3}}{2} \\ z^3 = \dfrac{q \mp \sqrt{q^2 + \dfrac{4}{27}p^3}}{2} \end{cases}$$

よって,

$$x = \begin{cases} -\sqrt[3]{\dfrac{q + \sqrt{q^2 + \dfrac{4}{27}p^3}}{2}} - \sqrt[3]{\dfrac{q - \sqrt{q^2 + \dfrac{4}{27}p^3}}{2}}, \\ -\omega\sqrt[3]{\dfrac{q + \sqrt{q^2 + \dfrac{4}{27}p^3}}{2}} - \omega^2\sqrt[3]{\dfrac{q - \sqrt{q^2 + \dfrac{4}{27}p^3}}{2}}, \\ -\omega^2\sqrt[3]{\dfrac{q + \sqrt{q^2 + \dfrac{4}{27}p^3}}{2}} - \omega\sqrt[3]{\dfrac{q - \sqrt{q^2 + \dfrac{4}{27}p^3}}{2}} \end{cases}$$

となる.

南海　大切なことは

どんな三次方程式も，二次方程式を解くことと，３乗根をとることで，解ける.

ということだ.

2.1.5　三次方程式を解く（その 2）

南海　上の例は二次方程式を解く部分で実数解をもったが，そこで虚数解をもつ場合もやってみよう．三次方程式として

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

を上と同様にやってみよう.

耕一　はい.

$$\begin{cases} -3yz = -3 \\ y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

となる y と z が見つかればよい. $z = \dfrac{1}{y}$ なので

$$y^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad (y^3)^2 - y^3 + 1 = 0$$

これから

$$y^3 = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$z^3 = \dfrac{1}{y^3}$ なので $z^3 = \bar{y^3}$

$$y^3 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \quad , \; z^3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

とする. 極形式では

$$y^3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \quad , \; z^3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$$

である. よって，同様の考察から $yz = 1$ となるように y と z の 3 乗根を一つずつ選ぶ．いずれを選んでも同じ 3 根が得られることに注意しよう.

$$y = \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9} \quad , \; z = \cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}$$

としてよい. したがって

$$\begin{aligned}
x &= -\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right) - \left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right) \\
&= \left(\cos\frac{10\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right) + i\left(\sin\frac{10\pi}{9} + \sin\frac{8\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{8\pi}{9} \\
x &= -\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\omega - \left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right)\omega^2 \\
&= -\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right) - \left(\cos\frac{29\pi}{9} + i\sin\frac{29\pi}{9}\right) \\
&= \left(\cos\frac{16\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9}\right) + i\left(\sin\frac{16\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{9} \\
x &= -\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\omega^2 - \left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right)\omega \\
&= -\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right) - \left(\cos\frac{23\pi}{9} + i\sin\frac{23\pi}{9}\right) \\
&= \left(\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{14\pi}{9}\right) + i\left(\sin\frac{4\pi}{9} + \sin\frac{14\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{4\pi}{9}
\end{aligned}$$

できました．今は具体的に考えたので作れましたが一般に，三次方程式が重解をもつのか，虚数解をもつのか判別することはどうするのですか.

2.1.6 三次方程式の判別式

南海 次のように考える.

a, b を実数とし，三次方程式 $t^3 + at + b = 0$ の三つの解を α, β, γ とする．このとき

$$D = (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

をこの三次方程式の**判別式**という. D を a と b で表そう.

$$\alpha+\beta+\gamma = 0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = a, \quad \alpha\beta\gamma = -b$$

より

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma) &= -\{\beta^2-\beta(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma\}\\ &= -\{\beta^2+\beta^2+a-\beta(\alpha+\gamma)\}\\ &= -(\beta^2+\beta^2+a+\beta^2)=-(3\beta^2+a)\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) &= -(3\gamma^2+a)\\ (\alpha-\beta)(\gamma-\alpha) &= -(3\alpha^2+a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad D &= -(3\alpha^2+a)(3\beta^2+a)(3\gamma^2+a)\\ &= -\{a^3+3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)a^2\\ &\qquad +9(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)a+27\alpha^2\beta^2\gamma^2\}\\ &= -[a^3+3\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}a^2\\ &\qquad +9\{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\}a+27b^2]\\ &= -\{a^3+3\cdot(-2a)a^2+9\cdot(a^2)a+27b^2\}\\ &= -(4a^3+27b^2)\end{aligned}$$

もし三次方程式が虚数解をもてば $D<0$，重解をもてば $D=0$，異なる 3 実数解をもてば $D>0$ となる．

耕一　この式の形は見たことがあります．

南海　次の形では入試問題などにもよく出される．つまり，相異なる三つの実数解をもつための必要十分条件を関数のグラフからも導く．求めてみてほしい．

耕一　$f(t)=t^3+at+b$ とおきます．$f'(t)=3t^2+a$ なので，$a<0$ が必要で，このとき

$$t=\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}$$

で極．したがって求める条件は

$$f\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)\cdot f\left(-\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)<0$$

です．これから

$$\frac{4}{27}a^3+b^2<0$$

です．

南海　$f'(t)=0$ が相異なる実数をもち $f(t)$ が極値をもつときは二つの方法を比較することで，判別式 D の意味がよくわかる．

積 $f(\alpha)f(\beta)$ が負のときは $D>0$ で，極大値と極小値が異符号であり，もとの三次方程式 $f(t)=0$ は 3 実数解をもつ．この積が 0 なら，$D=0$ であり，$y=f(x)$ は x 軸に接するので，$f(x)=0$ は重解をもつ．積 $f(\alpha)f(\beta)$ が正のときは $D<0$ で実数根は一つしかない．ついでに，二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の判別式も解を α, β として

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2 &= (\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right) \\ &= \frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{D}{a^2}\end{aligned}$$

となることに注意しよう．これが二次方程式のときの判別式の正体だ．

耕一　判別式とは，**異なる根の差の平方の積**に，最高次数の係数の平方がかかったものなのですね．

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

の根を

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$$

とすると，Π で積を表すと，

$$D={a_n}^2\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

平方しているのでどの二つを入れ替えても変わらず，根 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ の対称式なので，根と係数の関係からもとの方程式の係数で書けるのですね．

2.1.7　虚数の意義

南海　ところがここで不思議なことが起こった．たとえば次の三次方程式を解いてみよう．

$$x^3-6x+4=0$$

これは，暗算すると $x=2$ が見つかり因数定理から $(x-2)(x^2+2x-2)=0$ となって解ける．つまり三つの実数解 $2,\ -1\pm\sqrt{3}$ をもつ．これが上の一般的な方法ではどのようになるかやってみてほしい．

耕一　やってみます．

$$x^3-6x+4=x^3-3xyz+y^3+z^3$$

より

$$\begin{cases} yz=2 \\ y^3+z^3=4 \end{cases}$$

これから

$$y^3+\frac{8}{y^3}=4 \quad\Rightarrow\quad (y^3)^2-4y^3+8=0$$

$$\therefore\quad y^3=2\pm 2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

y として $y=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ を使います．すると，$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{12}+i\sin\dfrac{-\pi}{12}\right)$ です．したがって

$$x \;=\; -y-z$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)-\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi}{12}\right)\\
&= -2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=-1-\sqrt{3}\\
x &= -y\omega-z\omega^2\\
&= -\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right)-\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}\right)\\
&= -\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\\
x &= -y\omega^2-z\omega\\
&= -\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\\
&= -2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=-2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=-1+\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

南海　すると一般的にやろうとすると，最後は三つの実数解が得られるのにもかかわらず，途中の計算では虚数が登場する．実数解になる場合は，y と z が共役な複素数になるわけだ．だからもし虚数を認めないと，この一般論で実数の解が得られないことになる．イタリアでは虚数を用いることについての論争があったのだが，このようにして，虚数の存在が人々に認識されるようになっていったのだ．

2.1.8　カルダノの解法によるまとめ

南海　このように三次方程式が解けるようになったのは 16 世紀，イタリアのカルダノ（Girolamo Cardano 1501.9.24 - 1576.9.21）からである．カルダノの方法はもう少し技巧的だ．それを背景にした入試問題が 2000 年信州大学で出されている．「カルダノの方法」を話そう．カルダノは

$$x=u+v$$

と分解して，u, v「二次方程式と三乗根」だけで求められるようにできないか，ということだった．
耕一　この x を代入するのですね．

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$$

だからもし

$$\begin{cases} u^3+v^3+q=0\\ 3uv+p=0 \end{cases}$$

となる u, v がとれればよい．…あっ．これは解の公式のなかで，y, z で作った式と同じです．
南海　だから当然同じ結果が得られるのだよ．ここで，三次方程式の解法をまとめておこう．

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad \cdots①$$

の解公式を作る．
［第 1 段階］

$x = t - \dfrac{b}{3a}$ とおく．

$$\begin{aligned} & a\left(t-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(t-\frac{b}{3a}\right)^2 \quad + c\left(t-\frac{b}{3a}\right) + d \\ = \quad & at^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)t + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) \end{aligned}$$

ここで

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a},\ q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

とおく．方程式① は

$$t^3 + pt + q = 0 \quad \cdots ②$$

となる．

［第 2 段階］

$t = u + v$ とおき② に代入する．

$$\begin{aligned} t^3 + pt + q &= (u+v)^3 + p(u+v) + q \\ &= u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases} \quad \cdots ③$$

となるように $u,\ v$ を定めれば，そのときの $u + v$ は② をみたし，解が得られる．

［第 3 段階］

③ を満たす $u,\ v$ を求める．$v = -\dfrac{p}{3u}$ より

$$u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 + q = 0$$

$$\therefore \quad u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

これから

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$v^3 = -q - u^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

u と v は対称なので符号は一方のみをとればよい．

ここで ω を 1 の 3 乗根，つまり $\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする．

$$\begin{aligned} \therefore \quad u &= \omega^k \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ v &= -\frac{p}{3u} \\ &= \bar{\omega}^k \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2) \end{aligned}$$

［第 4 段階］

ゆえに② の解は

$$t=\begin{cases}\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}},\\ \omega\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}},\\ \omega^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}+\omega\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}\end{cases}$$

の三つである．ここで $D=-(4p^3+27q^2)$ とおくと

$$t=\omega^k\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{-\frac{D}{3}}}+\bar{\omega}^k\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{-\frac{D}{3}}},\quad (k=0,\ 1,\ 2)$$

ともかく，重解を持つ場合以外はこれが三つの解であり， $D=0$ のときこれらのなかに同じものが出来ることがわかる．

［第 5 段階］

① の解は

$$p=-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a},\ q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$$

を代入し，$x=t-\dfrac{b}{3a}$ としたものである．

$$D=-\left\{4\left(-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}\right)^3+27\left(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)^2\right\}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}x\ &=\ -\frac{b}{3a}+\omega^k\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}+\frac{1}{6}\sqrt{-\frac{D}{3}}}\\ &\quad+\bar{\omega}^k\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}-\frac{1}{6}\sqrt{-\frac{D}{3}}},\quad (k=0,\ 1,\ 2)\end{aligned}$$

2.2　四次方程式

＞ 2000.8

2.2.1　入試問題から

耕一　四次方程式の解法になる入試問題を見つけました.

例 2.2.1［99 富山大］　次の問いに答えよ.

(1) 等式

$$x^4+x^2-4x-3=(x^2+a)^2-b(x+c)^2$$

が x についての恒等式であるように実数 $a,\ b,\ c$ を定めよ.

(2) 方程式

$$x^4+x^2-4x-3=0$$

の解を求めよ.

南海　よく見つけた．この解法は？
耕一　次のようにしました.

(1) 与えられた等式の右辺は

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= (x^4+2ax^2+a^2)-b(x^2+2cx+c^2)\\ &= x^4+(2a-b)x^2-2bcx+a^2-bc^2\end{aligned}$$

したがって, 恒等式になるために係数を比較して,

$$\begin{cases}1=2a-b\\ 2=bc\\ -3=a^2-bc^2\end{cases}$$

これから a と c を消去すると

$$b^3+2b^2+13b-16=0 \quad\Rightarrow\quad (b-1)(b^2+3b+16)=0 \quad \cdots ①$$

$a,\ b,\ c$ は実数であるから $b=1$ となり

$$a=1,\ b=1,\ c=2$$

となる.

(2) (1) から

$$\begin{aligned}x^4+x^2-4x-3 &= (x^2+1)^2-(x+2)^2\\ &= \{(x^2+1+(x+2)\}\{(x^2+1-(x+2)\}\\ &= (x^2+x+3)(x^2-x-1)\end{aligned}$$

これから

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

となる.

2.2.2　別の b の値なら？

耕一　b は，この問題では実数と指定していますが，三つある三次方程式の根のどれをとっても四次方程式の解は同じになるはずです．四次方程式で四つの根（重根は二つと数える）が定まるからです．それを確かめてみました.

南海　ほう, その計算をしたのか.

耕一　b として

$$b = \frac{-3+\sqrt{9-64}}{2} = \frac{-3+\sqrt{55}i}{2}$$

をとります．このとき

$$a = \frac{1+b}{2} = \frac{-1+\sqrt{55}i}{4}\,,\; c = \frac{2}{b} = \frac{-3-\sqrt{55}i}{16}$$

です．さらに

$$b^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}i}{2}$$

と二重根号がはずれます．したがって一方の二次方程式は

$$\begin{aligned} & x^2 - b^{\frac{1}{2}}(x+c) + a \\ = \;& x^2 - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}i}{2}x + \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{11}(1+\sqrt{5})i}{4} \\ = \;& \left\{x - \frac{-1+\sqrt{11}i}{2}\right\}\left\{x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \end{aligned}$$

となります．したがって，二次方程式からでる解の組み合わせがちがうだけで，四つの解は同じになります.

2.2.3　四次方程式の一般的解法 (1)

耕一　この方法はそのまま文字にしてもできます．一般の四次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

は $x = X - \dfrac{a}{4}$ とすると X の三次の項が消える.

$$X^4 + \left(-\frac{3}{8}a^2 + b\right)X^2 + \left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c\right)X - \frac{3}{4^4}a^4 + \frac{1}{16}a^2b - \frac{1}{4}ac + d = 0$$

したがって，はじめから

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

としてよい．このとき

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2+a)^2 - b(x+c)^2$$

となるようにする.

$$\begin{cases} p = 2a - b \\ q = -2bc \\ r = a^2 - bc^2 \end{cases}$$

これから b の三次方程式

$$b^3 + 2pb^2 + (p^2 - 4r)b - q^2 = 0$$

を得る．この b の値を三次方程式の解を求める方法によって定める．それによって定める二つの二次方程式

$$x^2 + a - b^{\frac{1}{2}}(x + c) = 0,\ x^2 + a + b^{\frac{1}{2}}(x + c) = 0$$

から，四次方程式の四つの根が求まる．
ただし $b^{\frac{1}{2}}$ は 2 乗すれば b となる二つの複素数の一方を表す．
南海　よくまとまっている．これが「フェラーリ (Lodovico Ferrari 1552〜1565) の方法」よ呼ばれるものである．

2.2.4　四次方程式の一般的解法 (2)

耕一　三次方程式のときのように，一次式の積に分解される四次式を使う解法はないのでしょうか．
南海　それがあるのだ．次の式を展開してほしい．

$$(w + x + y + z)(w + x - y - z)(w - x + y - z)(w - x - y + z)$$

耕一　やってみます．

$$\begin{aligned}
& (w + x + y + z)(w + x - y - z)(w - x + y - z)(w - x - y + z) \\
= \ & \{(w + x)^2 - (y + z)^2\}\{(w - x)^2 - (y - z)^2\} \\
= \ & (w^2 + x^2 - y^2 - z^2)^2 - 4(wx - yz)^2 \\
= \ & w^4 + x^4 + y^4 + z^4 - 2(w^2x^2 + w^2y^2 + w^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + 8wxyz
\end{aligned}$$

これを w で整理すると

$$w^4 - 2(x^2 + y^2 + z^2)w^2 + 8xyzw + x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

これが w の 4 次式として，x の 4 次式

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

と一致するように決められれば，解が得られる　つまり

$$\begin{aligned}
p &= -2(x^2 + y^2 + z^2) \\
q &= 8xyz \\
r &= x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)
\end{aligned}$$

これから

$$y^2 + z^2 = -\frac{p}{2} - x^2\,,\ yz = \frac{q}{8x}$$

これを第 3 式に代入すると

$$\begin{aligned}
r &= x^4 + (y^2 + z^2)^2 - 4y^2z^2 - 2x^2(y^2 + z^2) \\
&= x^4 + \left(-\frac{p}{2} - x^2\right)^2 - 4\left(\frac{q}{8x}\right)^2 - 2x^2\left(-\frac{p}{2} - x^2\right) \\
&= 4x^4 + 2px^2 + \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{16x^2}
\end{aligned}$$

これから x^2 の三次方程式

$$64x^6 + 32px^4 + (4p^2 - 16r)x^2 - q^2 = 0$$

が得られる．つまり三次方程式と平方根で x が得られ，y と z は二次方程式で得られて，もとの四次方程式が解ける！

南海　というわけだ．このように四次方程式も係数に関する「根号」演算と四則演算で解ける．

2.2.5　ガロアの生涯

耕一　では五次以上の方程式ではどうなのでしょうか．

南海　その問題を解決し，わずか 21 歳のとき決闘で死んだフランスの天才数学者エバリスト・ガロアの話をしよう．

ガロア（Évariste Galois（1811.10.25〜1832.5.31））は，フランス革命から 20 年の後，ナポレオン 1 世がフランス皇帝の時代にパリ郊外に生まれた．

15 歳の頃，学校で数学の勉強をして強い興味を感じたけれど，間もなく教科書での方法に不満を感じて，数学の専門書を自分で読んで勉強した．17 歳の時にはすでに方程式論において重要な発見をしていたらしい．

工科大学の受験に 2 回失敗した．失敗したのは面接官の質問が余りに簡単で，ガロアには幼稚に見え，まともに答えなかったためだといわれている．ようやく 1829 年に高等師範学校（エコール・ノルマル:フランスの最難関大学）にはいった．

1829 年の春頃から数学の論文を書いて発表するようになったが，提出した原稿が紛失してしまったり，審査する学者に理解できない内容であったために掲載を拒否されたりし，生前に印刷公表された論文はほとんどない．

ガロアが研究していたのはどんなことだったのだろう．当時の多くの数学者は

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

にも解の公式があるに違いない．きっとややこしいだろうけれどないわけない，と考えていた．多くの数学者が，解の公式を作ろうと努力してきた．三次方程式の解の公式はできた，16 世紀から知られていた．四次方程式の解の公式もできた．上に見たとおりだ．ところがどうしても五次方程式の解の公式ができない．そんな時代が続いていた．

この問題を根本から考え解いたのは 2 人の若い数学者だった．そして 2 人とも若くして死んだ．一人がガロア，もう一人が，ノルウェーの数学者アーベル（Niels Henrik Abel ニールス＝ヘンリク―，1802〜29）．アーベルが最初に五次以上の代数方程式が代数的に（つまり，加減乗除と根号で）解き得ないことを証明した．その内容は当時誰にも理解されず，貧しく病弱だった．ようやくある大学の講師の職を得たとき病気で死んだ．

ガロアはアーベルのことを知らずに独力で同じ結論とさらに深い代数学の理論に到達していた．ガロアがアーベルのことを知ったとき，アーベルはもうこの世にいなかった．

その理論は余りにも当時の水準からかけ離れていた．だから誰にも理解されなかった．日本の大学では数学科に進めばやっと 3 年生で習う．

当時のヨーロッパは日本の幕末から明治維新の時代のように激しい時代だった．フランスは，ナポレオンのあとウイーン会議を経てフランス革命の成果をなしにしようとする反動の時代にあっ

た．ガロアの純粋な精神は反動政治を許そうとせず，エコール・ノルマル在学中から共和派として革命運動に参加，せっかく入った大学を 1 年で退学処分にされている．その後ガロアは政治活動に熱中，投獄され数ヶ月を Pélage の獄舎で過ごした．仮出獄中，反動派によって決闘をする羽目に陥れられ，殺されたのだ．決闘した殺し屋は，相手のガロアがどんなすばらしい数学者であるかまったく知らない．決闘は 1832 年 5 月 30 日に行われることになった．自分の中にすばらしい数学の発見があるのに，それは自分にはわかっているのに，それを誰にも知らせずに死ぬかもしれない．そんなことはできない．彼は徹夜でそれまでに得た数学の結果をまとめて，友人シュバリエ宛に手紙として 29 日付で発送した．それが遺言だった．そして，30 日の決闘で傷つき 31 日に死んだ．享年 21 だった．

ガロアの手紙はそれから 15 年たってようやく 1846 年に数学者リウビルによって整理して公表された．とにかく遺言は無駄にはならなかった．それ以降いろいろな形で出版されて数学者の目に触れるようになった．しかしその内容が本当に理解されるようになったのはさらに 1870 年頃より後のことである．

わたしはかつてこのリウビルによって出版された本を大学の図書館で借りて読んだことがある．

> 私は二，三の新しいことを成し遂げた．一つは方程式論，もう一つは積分に関するものだ．これらのものを三つの論文にまとめることができる．第一のものは 1 年前に学士院に提出したが，理解されなかった．……

胸うたれるものだ．このような時代を経て今日がある．高校で習う数学の一つ一つにも，最初の発見のときがある．受験数学も正しく勉強すれば，いろいろ考えることができるし，そうすることが君たちを鍛え力をつける．

2.3　ラグランジュの試み

2020.8/2020.5/2017.4

2.3.1　根の公式とは

耕一　三次方程式と四次方程式は，二次方程式と同様に根の公式ができます．それは,『数学対話』の「三次方程式」と「四次方程式」で学びました．その「四次方程式」の最後に，五次以上の解の公式はできないこと，それをアーベルとガロアが証明したことが書かれています．

南海　まず，代数方程式の根の公式とは何か．根の公式が存在するとはいったいどういうことを意味するのか．

耕一　二次方程式と三次方程式は根の公式を書き出すことができました．三次方程式では途中で二次方程式の根が必要でしたが，それを根の公式で表して用いました．

四次方程式では，途中で，ある三次方程式や二次方程式を解く必要があり，それも根の公式で表して用いることもできるのですが，余りに煩雑になり，それらの根を別の文字で表し用いました．だから，四次方程式の場合，もとの方程式の係数で 4 つの根を表すことはしていません．

ですから大切なことは，いつでもこの手順でやってゆけばすべての根が求まる，という一般的な方法が存在することが大切ではないでしょうか．

南海　一般的な方法のことをアルゴリズムというが，根を求めるアルゴリズムが存在するのかどうか，これが問題である．このように，四次方程式までは幾つかの解法が得られていた．

新たな視点から方程式を解くという問題を考えたのが，ラグランジュである．

2.3.2　ラグランジュの飛躍

南海　ラグランジュ(Joseph-Louis Lagrange, 1736 年 1 月 25 日〜1813 年 4 月 10 日) は，フランス革命の時代を生きた数学者である．

彼は，もとの方程式を変形するという段階から次の段階へ到った．方程式の係数から根を組み立てるところから飛躍して，方程式の根の集合と 1 のべき根を考え，それらの積の和とそれを置きかえたものとの組で考えることで，根を見出してゆこうとする．

あの時代の人は実に膨大な計算をした．それをここで追認するとはできないが，彼もやったであろう試行錯誤として，次のことをやってみよう．

根の集合を考え，1 のべき乗根と解を用いた式を考え，その式の根を互いに入れ替えた式と組みあわせて考えることで，段階的に根そのものを取り出してゆけないか考えよう．

n 次方程式の根 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ と，1 の n 乗根 $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n$ に対して，$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ を並べ替えた $\alpha_{r(1)},\ \alpha_{r(2)},\ \cdots,\ \alpha_{r(n)}$ の間の積

$$n_k = \alpha_{r(1)}\zeta_1 + \alpha_{r(2)}\zeta_2 + \cdots + \alpha_{r(n)}\zeta_n$$

を作る．

耕一　$n!$ 個あります．

南海　それらの n 乗を ${n_k}^n$ とする．これらは 1 の n 乗根倍違うものは同一になるので，$(n-1)!$ 個ある．

これらを解とする方程式をまず構成する．対称性があるので，その方程式は解けないかと考える．${n_k}^n$ が求まれば，それから n_k を求めることで，根を求めてゆくことを考えたのだ．

2.3.3　二次方程式

耕一

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解を α と β とします．2 次方程式なので，1 の 2 乗根は 1 と-1 です．

$$u_1 = \alpha + (-1)\beta$$
$$u_2 = \beta + (-1)\alpha$$

とするのですね．そして，

$${u_1}^2 = (\alpha - \beta)^2$$
$${u_2}^2 = (\beta - \alpha)^2$$

を作る．この場合，2 つは一致します．

$${u_1}^2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

これは係数で表せます．

$${u_1}^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

この結果

$$u_1,\ u_2 = \pm(\alpha - \beta) = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

根と係数の関係式 $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ と連立して解くと，

$$\alpha,\ \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となります．

南海　そういうことだ．

耕一　二次方程式の根の公式は平方完成から作るものと思っていましたが，この方法だと，その式変形はいらないですね．

南海　二次なので，特に意識せず用いているが，対称式は基本対称式で表せること，根の対称式はもとの方程式の係数で表されることを用いている．

それについては『数学対話』にある「終結式と不変式」のなかの「対称式と基本対称式」を見てほしい．

ではこの方法でどこまで三次方程式が解けるか，やってみてほしい．

2.3.4　三次方程式

耕一

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

で考えます.

1 の 3 乗根の一つを ω とします．もう一つは ω^2 です．3 つの根を α，β，γ とします．この場合，$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$ の様式を考えることになるのですね．このような組合せは $3! = 6$ 個あります．それらの 3 乗をとるのですね.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 \\
u_2 &= \gamma + \alpha\omega + \beta\omega^2 = \omega u_1 \\
u_3 &= \beta + \gamma\omega + \alpha\omega^2 = \omega^2 u_1 \\
v_1 &= \alpha + \gamma\omega + \beta\omega^2 \\
v_2 &= \beta + \alpha\omega + \gamma\omega^2 = \omega v_1 \\
v_3 &= \gamma + \beta\omega + \alpha\omega^2 = \omega^2 v_1
\end{aligned}$$

と置くと，この場合，2 次のときのようにすべて一致するのではなく，

$$u_1{}^3 = u_2{}^3 = u_3{}^3, \quad v_1{}^3 = v_2{}^3 = v_3{}^3$$

です．一般には $u_1{}^3 \neq v_1{}^3$ です．しかし，さらに

$$U = u_1{}^3, \quad V = v_1{}^3$$

とおくと，$U + V$，UV は根のあらゆる置きかえで不変なので，根の対称式である．したがってこれらは方程式の係数で書ける．その根の立方根をとれば，u_1, u_2, u_3，v_1, v_2, v_3 が求まる.

ここで質問です．u_1, u_2, u_3，v_1, v_2, v_3 はそれぞれ 1 つを ω, ω^2 倍したものですが，この順はどうのように決めるのでしょうか.

南海　そこが難しいところで，2 次の場合のように根の公式を作るところまでいかないのだ.

三次方程式の係数が実数で 1 つの根が実数のときは，u_1 と v_1 を実数にとる．係数が一般の場合，これは決められない.

耕一　「三次方程式」の解法にも同様の問題がありますが，この場合は yz が一定なので，y のとり方を決めれば z も決まります.

南海　このあたりは課題としておいて，係数が実数としてやろう.

耕一　すると，u_1 と v_1 を実数にとります．$\alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{b}{a}$ なので，

$$\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 2\alpha + (\omega + \omega^2)(\beta + \gamma) \\
&= 2\alpha - (\beta + \gamma) = 3\alpha + \frac{b}{a} \\
\omega^2 u_1 + \omega v_1 &= 3\beta + \frac{b}{a} \\
\omega u_1 + \omega^2 v_1 &= 3\gamma + \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

と 3 根が求まります.

南海　昔の人はこういうことを実にいろいろやってみたのだ.

演習 22 「三次方程式」の例題

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

をこの方法で解け.

解　3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする．$\alpha + \beta + \gamma = 0$ である．

$$u = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$$
$$v = \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma$$

とおく.

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= (u+v)(u+\omega v)(u+\omega^2 v) \\ &= (2\alpha - \beta - \gamma)(-\omega^2\alpha - \omega^2\beta + 2\omega\gamma)(-\omega\alpha + 2\omega\beta - \omega\gamma) \\ &= (2\alpha - \beta - \gamma)(-\alpha - \beta + 2\gamma)(-\alpha + 2\beta - \gamma) = 27\alpha\beta\gamma = -27 \\ u^3v^3 &= (uv)^3 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)^3 \\ &= \{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 3(\alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)\}^3 = (-9)^3 \end{aligned}$$

これから

$$\left(\frac{u}{3}\right)^3 + \left(\frac{v}{3}\right)^3 = -1, \quad \left(\frac{u}{3}\right)^3 \left(\frac{v}{3}\right)^3 = -1$$

となり，2 次方程式 $t^2 + t - 1 = 0$ を解いて

$$\left(\frac{u}{3}\right)^3,\ \left(\frac{v}{3}\right)^3 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$u_1,\ v_1$ を実数にとるので,

$$\frac{u_1}{3},\ \frac{v_1}{3} = \sqrt[3]{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

である．これより,

$$\begin{aligned} \alpha,\ \beta,\ \gamma &= \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\ , \\ &\quad \omega\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \omega^2\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\ , \\ &\quad \omega^2\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \omega\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\ . \end{aligned}$$

となる.

2.3.5　四次方程式

耕一

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

で考えます．1 の 4 乗根は $1,\ i,\ -1,\ -i$ です．4 つの根を α，β，γ，δ とします.

$$u_1 = \alpha + i\beta - \gamma - i\delta$$

ここから根の置きかえをすると，全部で 24 個できます．1 の 4 乗根 $1,\ i,\ -1,\ -i$ をかけたものを一組に考えると，6 個作ればよい．

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \alpha + i\beta - \gamma - i\delta \\
u_2 &= \alpha - \beta - i\gamma + i\delta \\
u_3 &= \alpha - i\beta + i\gamma - \delta \\
u_4 &= \alpha + i\beta - i\gamma - \delta \\
u_5 &= \alpha - i\beta - \gamma + i\delta \\
u_6 &= \alpha - \beta + i\gamma - i\delta
\end{aligned}
$$

ところが，これらを 4 乗すると 6 個出てきて，三次方程式の根になりません．

南海　三次方程式でいちどに根が求まることはないので，この 6 個を組みあわせて，ある二次方程式と三次方程式，そして四乗根の組合せで求まることはできるはずだ．しかしここからはじめてうまくいくとはかぎらない．

そこでラグランジュは，置き方を変えて，次のようにした．

$$
\begin{aligned}
u &= (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) \\
v &= (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) \\
w &= (\alpha + \delta)(\beta + \gamma)
\end{aligned}
$$

耕一　どの二根を置きかえても，動かないか入れ替わるかだけです．やってみると，他の置換でもそうなるようです．

南海　実はどのような置換も，2 つの要素入れ替え，これを互換というが，互換のくりかえしで得られる．

耕一　ということは，$u,\ v,\ w$ の対称式は，24 個の置きかえで不変であり，その結果，係数で書かれるある三次方程式の三根となる．

三次方程式は解けるので，$u,\ v,\ w$ は確定する．一方，

$$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = -\frac{b}{a}$$

であるから，$\alpha + \beta$ と $\gamma + \delta$ は，二次方程式

$$X^2 + \frac{b}{a}X + u = 0$$

の二根である．これら二根の和がすべて求まれば，それから $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ を求めるのは連立 1 次方程式である．結局，四次方程式は，三次方程式と二次方程式を解くことで，解ける．

演習 23　「四次方程式」の例題

$$x^4 + x^2 - 4x - 3 = 0$$

をこの方法で解け．

解答　今の場合，根と係数の関係から

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\
&\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 1 \\
&\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 4 \\
&\alpha\beta\gamma\delta = -3
\end{aligned}
$$

である．そして

$$u=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=-(\alpha+\beta)^2=1-(\alpha\beta+\gamma\delta)$$
$$v=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)=-(\beta+\delta)^2=1-(\alpha\gamma+\beta\delta)$$
$$w=(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)=-(\alpha+\delta)^2=1-(\alpha\delta+\beta\gamma)$$

である．よって

$$\begin{aligned}
u+v+w &= -2\left(\alpha^2+\beta^2+\delta^2+\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha\right)=-2\left\{\left(\alpha+\beta+\delta\right)^2-\alpha\beta-\beta\delta-\delta\alpha\right)\right\}\\
&= -2\left\{-\gamma\left(\alpha+\beta+\delta\right)-\alpha\beta-\beta\delta-\delta\alpha)\right\}=-2\cdot(-1)=2\\
uv+vw+wu &= \{1-(\alpha\beta+\gamma\delta)\}\{1-(\alpha\gamma+\beta\delta)\}\\
&\quad +\{1-(\alpha\gamma+\beta\delta)\}\{1-(\alpha\delta+\beta\gamma)\}\\
&\quad +\{1-(\alpha\delta+\beta\gamma)\}\{1-(\alpha\beta+\gamma\delta)\}\\
&= 3-2\cdot1+(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)+(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\beta+\gamma\delta)\\
&= 1+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\gamma\delta(\alpha+\gamma+\delta)+\alpha\beta\delta(\alpha+\beta+\delta)+\beta\gamma\delta(\beta+\gamma+\delta)\\
&= 1-4\alpha\beta\gamma\delta=13\\
uvw &= \{1-(\alpha\beta+\gamma\delta)\}\{1-(\alpha\gamma+\beta\delta)\}\{1-(\alpha\delta+\beta\gamma)\}\\
&= 1-1+12-(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)\\
&= 12-\alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)-(\alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2\delta^2+\alpha^2\gamma^2\delta^2+\beta^2\gamma^2\delta^2)\\
&= 12-\alpha\beta\gamma\delta\{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)\}\\
&\quad -(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2+2\alpha\beta\gamma\delta(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)\\
&= 12-(-3)(0-2\cdot1)-4^2+2(-3)\cdot1=-16
\end{aligned}$$

よって $u,\ v,\ w$ は三次方程式

$$t^3+2t^2+13t+16=(t+1)(t^2+3t+16)=0$$

の 3 解であり，

$$u,\ v,\ w=-1,\ \frac{-3\pm\sqrt{55}i}{2}$$

この結果，$\alpha+\beta$，$\gamma+\delta$ など 6 個の値は

$$X^2-1=0,\ X^2-\frac{-3\pm\sqrt{55}i}{2}=0$$

で定まる 6 個であり，これは

$$\pm1,\ \pm\sqrt{\frac{-3\pm\sqrt{55}i}{2}}=\pm\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{11}i}{2}$$

となる．つまり，

$$\alpha+\beta=1,\ \gamma+\delta=-1$$
$$\alpha+\gamma=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}i}{2},\ \beta+\delta=-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}i}{2}$$
$$\alpha+\delta=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{11}i}{2},\ \beta+\gamma=-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{11}i}{2}$$

である．これから

$$\alpha-\beta=\sqrt{5},\ \gamma-\delta=-\sqrt{11}i$$
$$\alpha-\gamma=1+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{11}i}{2},\ \beta-\delta=1-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{11}i}{2}$$
$$\alpha-\delta=1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}i}{2},\ \beta-\gamma=1-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}i}{2}$$

よって，4 つの解は

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$$

となる．

耕一　$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ をもちいて途中の計算を簡略化しようとしましたが，なかなか大変でした．これを用いず基本対称式で表せるまで変形するのは，もっと難しいと思います．やってみて，「四次方程式」にある解法の方が簡明ですね．

また，$\alpha+\beta$ などの値が，あの解法で求めた b の値であることも不思議です．

南海　b との一致を計算で示すのは簡単ではない．

計算過程そのものはあの解法の方が簡単であるが，あちらは式変形であった．こちらは根から作った式とその根の置きかえという考えであり，それで作った方法であるということだ．

耕一　その式の作り方ですが，ある作り方をするとうまくできなくて，こちらの作り方をするとできました．

南海　ラグランジュはいろいろ試行錯誤したのだと思う．もっとも彼は，根の置換の集合がいわゆる群をなすこと，そして群の基本的な性質も見いだしていたので，それも生かしたかも知れない．

その上で，ガロアが見いだした体の拡大と部分群の系列の対応を知れば，どのような式を使えばよいのかも，実は分かるのだ．

根の存在

南海　大切なことを指摘しておかなければならない．「三次方程式」や「四次方程式」では，実際に根を構成している．つまり，根の存在も証明している．

耕一　そうか．ラグランジュの方法では根を文字に置くところからはじめるので，根の存在を仮定して論述をはじめているのですね．

南海　根の存在を仮定して計算を進め，最後には構成しているので，存在も示し得ている．根を求めるアルゴリズムの存在は，根の存在の間接証明である．

一般の代数方程式の根の存在の証明は『数学対話』の「代数学の基本定理の証明」にある．大切なことであるのでここで指摘しておく．

2.3.6　五次方程式へ

耕一　五次方程式は，できなかったのですね．

南海　ここでもまた，ラグランジュはいろいろ試行錯誤したのだと思う．しかし得ることはできなかった．そして，このラグランジュの仕事を引きつぎ，五次方程式の根を求めるアルゴリズムは存在しえないことを最初に証明したのがアーベル (Niels Henrik Abel、1802 年 8 月 5 日〜1829 年 4 月 6 日) であった．

そこには新たな飛躍があった．係数の属する体に根を加えた体を考えるのだ．ある意味ではそこから現代に続く数学がはじまった．このアーベルの方法は『代数学講義』（高木貞治，1930 年初版，1948 年改訂版）に詳しく載っている．そして次のように書かれている．

> 上記は Abel の原証明に些細の変改を加えたものである．有理区域（体のこと）の思想はこの証明法を発端として成育されたものである．
>
> 現今流布本においては Abel の証明はほとんど跡を絶とうとしている．五次以上の一般的方程式が冪根によって解かれないことを，現今の体の論では，一層広汎な定理の特別の場合として，きわめて手軽に出してしまう．飛行機から登山の路を見させるようなものである．ここでは大掛りの準備をしないで，最初の踏破者の足跡を追って見たのである．それは無用ではあるまいと思われる．

いずれこれもまた紹介したい．

2.4　1の17乗根

2000.11.2

2.4.1　1の7乗根

耕一　次の問題をしました.

例 2.4.1　［98 小樽商大］

$$\theta = \frac{2\pi}{7},\ \alpha = \cos\theta + i\sin\theta,\ \beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$$

のとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\overline{\alpha} = \alpha^6$ を示せ.

(2) $\beta + \overline{\beta},\ \beta\overline{\beta}$ を求めよ.

(3) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ を求めよ.

耕一　解いてみます.

(1) $\alpha^7 = 1$ より $\alpha^6 = \dfrac{1}{\alpha}$ ．一方，$|\alpha| = 1$ より $\overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ ．

$$\therefore \quad \overline{\alpha} = \alpha^6$$

(2)

$$\alpha^7 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \cdots + \alpha + 1) = 0$$

$\alpha \neq 1$ なので

$$\alpha^6 + \alpha^5 + \cdots + \alpha + 1 = 0$$

また

$$\begin{aligned} \overline{\beta} &= \overline{\alpha} + \overline{\alpha}^2 + \overline{\alpha}^4 \\ &= \alpha^6 + \alpha^{12} + \alpha^{24} \\ &= \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \beta + \overline{\beta} &= -1 \\ \beta\overline{\beta} &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3) \\ &= (\alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^4) + (\alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^5) + (\alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^7) \\ &= 2 + (\alpha^6 + \alpha^5 + \cdots + \alpha + 1) = 2 \end{aligned}$$

(3) β と $\overline{\beta}$ は二次方程式

$$t^2+t+2=0$$

の二つの解である．

$$\therefore\quad \beta,\ \overline{\beta}=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha+\alpha^2+\alpha^4\\ &= (\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta)+i(\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta)\end{aligned}$$

であるから

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

ところが

$$\sin\theta+\sin 4\theta=2\sin\frac{5}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta>0$$

なので

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

耕一　この問題で $\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ と置いたのですが，なぜこのようにとるとうまくいくのかわかりません．$\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^3$ では $\beta\overline{\beta}$ が実数になりません．

南海　なるほど．出題者はなぜこのような和を作ったのかということだ．

耕一　同じことを 1 の 11 乗根でやってみました．

$\theta=\dfrac{2\pi}{11}$, $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ として，上の場合 α ，α^2，α^4 ときたのでまねをして，

$$\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^{16}=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^5$$

としました．そして $\beta\overline{\beta}$ を計算してみたのです．でも簡単な数にならないのです．

$$\begin{aligned}&\beta\overline{\beta}\\ =\ &(\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^5)(\alpha^{10}+\alpha^9+\alpha^7+\alpha^3+\alpha^6)\\ =\ &\alpha+\alpha^2+\alpha^5+\alpha^6+3(\alpha^3+\alpha^4+\alpha^7+\alpha^8)+2(\alpha^9+\alpha^{10})\end{aligned}$$

なぜなのでしょう．

南海　このからくりを知るためには，β を構成する α のべきを途中で切らずに最後まで書いてみればよい．

$$\begin{aligned}p=7\quad &:\quad \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8(=\alpha)\}\\ p=11\quad &:\quad \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8,\ \alpha^{2^4},\ \alpha^{2^5},\ \alpha^{2^6},\ \alpha^{2^7},\ \alpha^{2^8},\ \alpha^{2^9},\ \alpha^{2^{10}}\}\\ &=\quad \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8,\ \alpha^5,\ \alpha^{10},\ \alpha^9,\ \alpha^7,\ \alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12}(=\alpha)\}\end{aligned}$$

となるから，$p=11$ のときに作った β は尻切れトンボだったのだ．

$p=11$ のとき，2^n-1 が p の倍数になるのは $n=10=p-1$ が最初だけれど，$p=7$ のとき，2^n-1 が p の倍数になるのは $n=6=p-1$ が最初ではなく $n=3$ ですでになってしまう．だからちょうど β と $\overline{\beta}$ の積がきれいになった．$p=11$ のときはすべて加えないときれいにならない．

「2 は 11 を法とする原始根であるが，7 を法としたときは原始根でない」という事実がある．詳しくは整数論の入門書を読んでみるといいだろう．そこでせっかく 1 のべき根に関する質問が出されたので，1 の 17 乗根を求める方法を紹介しよう．

2.4.2 1 の 5 乗根の計算

南海 さて $p=7$ の場合，β を求めることはできた．$p=11$ の場合はこのようなことはできない．逆にある種の p では，β を求めることができてさらにそこからさかのぼってもとの α を求めることができる．

耕一 p 乗根 α 自体が求まる，ということですね．5 乗根はやったことがあります．

南海 では，まず 1 の 5 乗根の計算を復習しよう．$p=5$ は上のどちらの型かな．

耕一 $\theta=\dfrac{2\pi}{5}$, $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ とします．

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8(=\alpha^3),\ \alpha^{16}(=\alpha)$$

なので途中では α に戻りません．

α を求めます．$\alpha^4=\overline{\alpha}$ です．両辺 2 乗してから $\alpha^8(=\alpha^3)=\overline{\alpha^2}$ です．

また $\alpha\overline{\alpha}=1$ です．

$$\begin{aligned}\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 &= \overline{\alpha}+\overline{\alpha^2}+\alpha^2+\alpha+1\\ &= (\alpha+\overline{\alpha})^2+(\alpha+\overline{\alpha})-1=0\\ \therefore\quad \alpha+\overline{\alpha} &= \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

したがって α と $\overline{\alpha}$ は二次方程式

$$t^2-\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)t+1=0$$

の解である．これを解いて

$$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}i\quad\text{(第 1 と第 3 の複号同順)}$$

α は実部，虚部ともに正なので，

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$$

2.4.3 1 の 17 乗根

南海 実は $p=2^k+1$ 型の素数ではこのようにしてもとの p 乗根を求めることができる．5 の次は 17 だ．1 の 17 乗根を求めよう．そこでまず $p=17$ はどちらの型かな．

耕一　$\theta = \dfrac{2\pi}{17}$, $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ とします.

$$
\begin{aligned}
&\alpha \\
&\alpha^2 \\
\alpha^{2^2} &= \alpha^4 \\
\alpha^{2^3} &= \alpha^8 \\
\alpha^{2^4} &= \alpha^{16} = \overline{\alpha} \\
\alpha^{2^5} &= \alpha^{32} = \alpha^{15} = \overline{\alpha}^2 \\
\alpha^{2^6} &= \alpha^{30} = \alpha^{13} = \overline{\alpha}^4 \\
\alpha^{2^7} &= \alpha^{26} = \alpha^9 = \overline{\alpha}^8 \\
(\alpha^{2^8} &= \alpha^{18} = \alpha)
\end{aligned}
$$

ですから，$p = 7$ と同じく半分で終わりです.

南海　しかも, $p = 7$ と違ってこの 8 個の中にすでに共役なものが組になって入っている.

耕一　本当だ.

南海　この 8 個の和を γ_1 ，残り 8 個の和を γ_2 としよう．$p = 7$ のときと同様にこの和と積は求まる.

耕一　でも計算はたいへんです.

南海　確かに．少し見通しよくすることを考えよう．今は α を順次 2^k $(k = 0,\ 1,\ \ldots)$ 乗していったわけだが，順次 4^k $(k = 0,\ 1,\ \ldots)$ 乗するとどうなるかな.

耕一

$$
\begin{aligned}
&\alpha \\
&\alpha^4 \\
\alpha^{4^2} &= \alpha^{16} = \overline{\alpha} \\
\alpha^{4^3} &= \alpha^{64} = \alpha^{13} = \overline{\alpha}^4 \\
(\alpha^{4^4} &= \alpha^{52} = \alpha)
\end{aligned}
$$

となって 4 回で終わりです.

南海　そこでこの 4 個の和を β_1 ，γ_1 のなかの残りの和を β_2 とする.

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha + \alpha^4 + \overline{\alpha} + \overline{\alpha}^4 \\
\beta_2 &= \alpha^2 + \alpha^8 + \overline{\alpha}^2 + \overline{\alpha}^8
\end{aligned}
$$

γ_2 をどのように二つに分けるかが難しいのだ．これまでのことをたどると分かるのだが．規則性をもって β_1 と β_2 の各項の指数を 3 倍することにしよう.

$$
\begin{aligned}
\beta_3 &= \alpha^3 + \alpha^{12} + \overline{\alpha}^3 + \overline{\alpha}^{12} = \alpha^3 + \alpha^5 + \overline{\alpha}^3 + \overline{\alpha}^5 \\
\beta_4 &= \alpha^6 + \alpha^{24} + \overline{\alpha}^6 + \overline{\alpha}^{24} = \alpha^6 + \alpha^7 + \overline{\alpha}^6 + \overline{\alpha}^7
\end{aligned}
$$

これまでと同様に

$$\gamma_1 + \gamma_2 = (\beta_1 + \beta_2) + (\beta_3 + \beta_4) = -1$$

つぎに $\gamma_1\gamma_2 = (\beta_1 + \beta_2)(\beta_3 + \beta_4)$ を求め，$\beta_1 + \beta_2$，$\beta_3 + \beta_4$ を決定しよう.

耕一　計算します.

$$\begin{aligned}
\beta_1\beta_3 &= \alpha^4+\alpha^6+\overline{\alpha}^2+\overline{\alpha}^4+\alpha^7+\alpha^9+\alpha+\overline{\alpha} \\
&\quad +\overline{(\alpha^4+\alpha^6+\overline{\alpha}^2+\overline{\alpha}^4+\alpha^7+\alpha^9+\alpha+\overline{\alpha})} \\
&= 2\alpha+\alpha^2+2\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^8+\overline{2\alpha+\alpha^2+2\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^8}
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\beta_1\beta_4 &= \alpha^2+\alpha^3+\alpha^5+2\alpha^6+2\alpha^7+\alpha^8+\overline{\alpha^2+\alpha^3+\alpha^5+2\alpha^6+2\alpha^7+\alpha^8} \\
\beta_2\beta_3 &= \alpha+2\alpha^3+\alpha^4+2\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7+\overline{\alpha+2\alpha^3+\alpha^4+2\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7} \\
\beta_2\beta_4 &= \alpha+2\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+2\alpha^8+\overline{\alpha+2\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+2\alpha^8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \qquad & \gamma_1\gamma_2=(\beta_1+\beta_2)(\beta_3+\beta_4) \\
= \quad & 4\{\alpha+\cdots+\alpha^8+\overline{(\alpha+\cdots+\alpha^8)}\}=-4
\end{aligned}$$

符号は $p=7$ と同様に決まるので,

$$\begin{aligned}
\gamma_1=\beta_1+\beta_2 &= \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\
\gamma_2=\beta_3+\beta_4 &= \frac{-1-\sqrt{17}}{2}
\end{aligned}$$

です.

南海　するとだな, $\beta_1\beta_2$, $\beta_3\beta_4$ が分かれば次の段階に進める.

耕一　計算は上と同じですね. 結果は

$$\begin{aligned}
\beta_1\beta_2 &= \alpha^3+\alpha^9+\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^7+\alpha^6+\overline{\alpha}^5+\alpha^2+\overline{\alpha}^4 \\
&\quad +\overline{\alpha^3+\alpha^9+\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^7+\alpha^6+\overline{\alpha}^5+\alpha^2+\overline{\alpha}^4}=-1 \\
\beta_3\beta_4 &= \overline{\alpha}^8+\overline{\alpha}^7+\overline{\alpha}^3+\overline{\alpha}^4+\overline{\alpha}^6+\overline{\alpha}^5+\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2 \\
&\quad +\overline{\overline{\alpha}^8+\overline{\alpha}^7+\overline{\alpha}^3+\overline{\alpha}^4+\overline{\alpha}^6+\overline{\alpha}^5+\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2}=-1
\end{aligned}$$

ですから β_1, β_2 は

$$t^2-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}t-1=0$$

の 2 解，符号を同様に見て

$$\beta_1=\frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}+\sqrt{\frac{18-2\sqrt{17}}{4}+4}\right)=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

同様にして求めると

$$\beta_3=\frac{1}{2}\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}+\sqrt{\frac{18+2\sqrt{17}}{4}+4}\right)=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}+\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

南海　いよいよ大詰め. このように γ_1, γ_2 から β_1, β_2, β_3, β_4 が求まっていく. この β たちから α を求めるのだ.

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\overline{\alpha})+(\alpha^4+\overline{\alpha^4}) &= \beta_1 \\
(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha^4+\overline{\alpha^4}) &= \alpha^5+\overline{\alpha}^3+\alpha^3+\overline{\alpha}^5=\beta_3
\end{aligned}
$$

したがって $\alpha+\overline{\alpha}=2\cos\dfrac{2\pi}{17}$ は

$$
t^2-\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right)t+\frac{-1-\sqrt{17}}{4}+\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}=0
$$

の解のうち正のものである．これを計算し整理すると

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{17} &= -\frac{1}{16}+\frac{\sqrt{17}}{16}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16} \\
&\quad +\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}
$$

となる．

α の実部が求まった．虚部は $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ ででる．かくして 1 の 17 乗根が求まったのだ．

以上の方法は，1796 年 3 月 30 日，19 歳の青年ガウス (C.F.Gauss) が目覚めて起きようとしたときに発見したものである．そのことが「ガウス日記」に出ている．

2.4.4 追加の考察

南海　ここは『整数論入門』9 節「原始根と指数」の知識がいるのだが，β_3, β_4 の分け方の「なぜ」をさらに考えてみよう．

耕一　確かに，あそこでは先生のいわれるようにすればうまくいきましたが,「なぜ」その用に分ければいいのかはわかりませんでした．

南海　2 は $p=17$ に関して原始根ではなかった．つまり

$$
\alpha=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}
$$

とするとき，集合

$$
\{\ (\alpha^2)^i \mid i:\text{自然数}\ \}
$$

は 16 個の要素からなるのではなく，ちょうどその半分の 8 個からできているのだった．では α^2 の代わりに α^3 をとるとどうなるだろう．それを調べて，その下に α^2 ではどうなるかを書いてみてほしい．

耕一　はい．3^i を 17 で割った余りの表を作ります．

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3^i	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

南海　これを四つずつで区切り縦に書くと

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 9 & 10 \\ \hline 13 & 5 & 15 & 11 \\ \hline 16 & 14 & 8 & 7 \\ \hline 4 & 12 & 2 & 6 \\ \hline \end{array}$$

一方

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha + \alpha^{13} + \alpha^{16} + \alpha^4 \\ \beta_2 = \alpha^9 + \alpha^{15} + \alpha^8 + \alpha^2 \\ \beta_3 = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^{14} + \alpha^{12} \\ \beta_4 = \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^7 + \alpha^6 \end{cases}$$

となっているだろう．

耕一　するとはじめから 3 で考えた方が自然だったのですか．

南海　そうなのだ．縦にとった意味は群論の理解がいる．

17 の余りから 0 を除いた集合

$$(Z/17Z)^{\times} = \{\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 16\ \}$$

が積に関して巡回群になり，3 が生成元である．

$(Z/17Z)^{\times}$ の部分集合 $H = \{\ 1,\ 4,\ 13,\ 16\ \}$ は部分群になる．

$a,\ b \in (Z/17Z)^{\times}$ に対して $ab^{-1} \in H$ のとき $a \sim b$ と書くことにすると，互いに〜で結ばれるのが縦にとった四つだ．部分群 H による類別というのだ．

ではなぜこのようにとるとうまくいったのか．それを解明する理論が「ガロア理論」である．いまは，この背景に前に述べたあのガロアによる理論があることだけ知っておいてほしい．

2.5　スツルムの定理

2002.5.10

2.5.1　入試問題から

耕一　2002 年の阪大の問題に，方程式の係数から解の存在する範囲を判断させるものがありました．

例 2.5.1［02 阪大前期理系］
　実数を係数とする 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が異なる 3 つの実数解をもつとする．このとき $a > 0,\ b > 0$ ならば，少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ．

南海　うん，これは次のような解を作っておいた．
　$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく．$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ であるから，$a > 0,\ b > 0$ のとき $x \geqq 0$ で $f'(x) > 0$．つまり $f(x)$ は $x \geqq 0$ で単調増加である．したがって $f(0) > 0$ なら $x \geqq 0$ で $f(x) = 0$ となる x はなく，$f(0) \leqq 0$ なら $x \geqq 0$ で $f(x) = 0$ となる x は 1 つだけある．$f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつので，重解もない．ゆえに，$x \geqq 0$ となる解は多くても 1 つ，つまり，負の実数解は少なくとも 2 つある．　□
耕一　この問題の基本は $x \geqq 0$ の解が多くても一つしかない，ということです．それを方程式を実際に解くことなく判断しています，この種の入試問題はいろいろあります．そこで一般的に考えて，$f(x)$ を実数を係数とする n 次の整式として，n 次方程式

$$f(x) = 0$$

を考えます．この方程式の解が区間 $[a,\ b]$ にいくつあるかを係数だけから判断することはできるのでしょうか．
南海　阪大の問題からこのような一般的な問題を引き出すことはすばらしい．係数が決まれば方程式も決まっているわけだから，当然方程式を満たす x の値が何かも決まっている．しかし決まっていることとそれを実際に求めることは別の問題だ．実際，5 次方程式以上になれば求めるための一般的な方法はない．
　結論から言えばできる．例えば

$$x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 12x + 17 = 0$$

が $[-5,\ 5]$ にいくつの解をもつか，係数に関する計算で求めることができる．しかし何次であれ，任意の実数の区間にいくつ解をもつか，係数に関する計算で求めることができる．それが「スツルムの定理」といわれるものだ．阪大の問題はスツルムの定理の一番簡単なときにあたる．
耕一　また係数と解の存在する範囲の問題では先日の掲示板に次のような質問がありました．

例 2.5.2［AO さんの投稿］　1 と異なる実数 a が

$$na^n = a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1$$

をみたすとき，$|a| < 1$ となることを証明せよ．ただし，$n = 2,\ 3,\ \cdots$ である．

耕一　これは南海先生がこたえておられたように，実数である必要はなく，1 と異なる解 (複素数の範囲で考えて) a はすべて $|a|<1$ を満たします.
南海　そうだ．その一般的な証明も掲示板に書いておいた．後で考えよう.
耕一　そこで考えたのですが，このように，n 次方程式の虚数解を含めたすべての解のなかで $|a|<r$ を満たすものが何個あるかを係数から求めることはできるのでしょうか.
南海　それもできる．**虚根に関するスツルムの問題**というわけだ．ただそれは少し難しい．だいたいこの種の問題は 19 世紀の中頃までに解けている．日本の明治維新の前後だ．それらはいずれも大切な問題なのでぜひ高校生諸君も受けついでほしいものだ．それで，今日はいろいろ考えながら実根の場合のスツルムの定理までを話そう.

2.5.2　重根の判定

南海　後の準備のために n 次方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

が重根をもつか否かを判断する方法はあるか考えよう.

例 2.5.3

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

とおく.

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$$

なら，$f(x)=0$ は $x=\alpha$ を重根にもつ.

証明 $f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割った商を $Q(x)$ ，余りを $ax+b$ とする.

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+ax+b \tag{2.1}$$

ここで a と b を $f(\alpha)$ と $f'(\alpha)$ で表す．まず $f(\alpha)=a\alpha+b$ ．次に等式 2.1 の両辺を x で微分する.

$$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$$

ゆえに $f'(\alpha)=a$ ．よって $b=f(\alpha)-a\alpha=f(\alpha)-f'(\alpha)\alpha$ ．したがって $(x-\alpha)^2$ で割った余りは

$$f'(\alpha)x+f(\alpha)-f'(\alpha)\alpha=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$$

である．条件

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$$

と， $f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割った余りが 0 となり $f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$ と因数分解され $x=\alpha$ が重根になることが，同値である. □
耕一　$f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割った余りは 1 次式で，それはちょうど $y=f(x)$ の $x=\alpha$ での接線の式になるのだ.

$$f(x)-[x=\alpha\text{での接線の式}]=0$$

は $x=\alpha$ を重解にもち $(x-\alpha)^2$ で割りきれるはずだからそれは当然ですね.
南海　当然ではあるが，出てきた結果を解釈し感心するというのは数学にとっては大切なことだ.

耕一　でも最初に戻って，この例題では，与えられた $x=\alpha$ が重根かどうかを判断することはできても，$f(x)=0$ が重根をもつかどうかは，わかりません．

南海　その通りだ．しかし，この例題から $f(x)=0$ が重根 α をもつならそれは $f'(x)=0$ の根でもある．だから，$f(x)=0$ の重根 α は $f(x)$ と $f'(x)$ の共通因数を $g(x)$ とするとき，$g(x)=0$ の根であることがわかる．$f(x)$ と $f'(x)$ が定数でない共通因数 $g(x)$ をもつかどうかは判断できるではないか．

$f(x)$ と $f'(x)$ の共通因数，つまり $f(x)$ と $f'(x)$ の公約数を見つける一般的な方法が**ユークリッドの互除法**である．

耕一　そうか．$f(x)$ と $f'(x)$ が互いに素なら $f(x)=0$ に重根はなく，あるとすればそれは $f(x)$ と $f'(x)$ の公約数を $g(x)$ とするとき，$g(x)=0$ の根だ．そして公約数 $g(x)$ はユークリッドの互除法で求まる．それで重根をもつかどうかが判断できる．

南海　ちなみに

$$x^4+6x^3+11x^2+12x+18=0$$

に重根はあるかこの方法で判断してみよう．

耕一　$f(x)=x^4+6x^3+11x^2+12x+18$ とします．

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3+18x^2+22x+12\\
f(x) &= f'(x)\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}\right)-\frac{1}{4}(5x^2-3x-54)\\
f'(x) &= (5x^2-3x-54)\left(\frac{4}{5}x+\frac{102}{25}\right)+\frac{1936}{25}(x+3)\\
5x^2-3x-54 &= (x+3)(5x-18)
\end{aligned}$$

したがって $f(x)$ と $f'(x)$ は公約数 $(x+3)$ をもちます．実際

$$f(x)=(x+3)^2(x^2+2)$$

南海　もちろん $f(-3)=0$ を見つければ因数分解はできるのだが，このような計算を一度やっておくことは大切だ．上の互除法で $-\frac{1}{4}(5x^2-3x-54)$ で割らずに，$5x^2-3x-54$ で割ったところが重要だ．ユークリッドの互除法で式の公約数を求める場合，定数倍だけ違うどれを余りとして用いても同じことになる．

耕一　式の因数分解は

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)(2x-2)=\cdots$$

のように，定数倍の違いだけの自由さがあり，定数倍の違いを除いて始めて一意に決まります．だから，$-\frac{1}{4}(5x^2-3x-54)$ で割っても，$5x^2-3x-54$ で割っても，公約数の有無は変わりません．

2.5.3　根の限界

南海　ここでは虚根を含めた根全体を考える．根の絶対値はどんな範囲を超えないといえるか，方程式の係数からその限界を定めたい．それがあれば，実根の個数を調べるのに，一定の範囲内だけを調べればよいことになる．すべての根の絶対値がある範囲を超えないとき，その範囲を根の限界と呼ぶ．一つの限界の定め方として次のものがある．

例 2.5.4　$a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_0$ を実数とし，

$$M = max\{\ 1,\ |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|\ \}$$

とおく．このとき方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

の実数根はすべて区間 $[-M,\ M]$ にある．

耕一　証明は背理法ですね．$|\alpha| > M$ とする．(いろいろやってみるが) しかし難しいです．
南海　2 つの複素数 α と β に関して

$$|\alpha| - |\beta| \leqq |\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$$

が成り立つ．左辺の等号は $\arg\alpha + \pi = \arg\beta$ のとき，右辺の等号は $\arg\alpha = \arg\beta$ のときにかぎり成立する．これを使う．さらに $|\alpha| > M \geqq 1$ なので

$$\begin{aligned}
& |\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0| \\
\geqq\ & |\alpha^n| - |a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_0| \\
\geqq\ & |\alpha^n| - (|a_{n-1}||\alpha^{n-1}| + |a_{n-2}||\alpha^{n-2}| + \cdots + |a_0|) \\
\geqq\ & |\alpha^n| - (|a_{n-1}||\alpha^{n-1}| + |a_{n-2}||\alpha^{n-1}| + \cdots + |a_0||\alpha^{n-1}|) \\
=\ & |\alpha|^{n-1}\{|\alpha| - (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|)\} \\
>\ & |\alpha|^{n-1}\{M - (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|)\} \geqq 0
\end{aligned}$$

だから，$|\alpha| > M$ である α は根ではあり得ない．　□

しかし，この M は係数の絶対値の和なので結構大きい．もう少し小さい限界がとれる．同様の論証で次の定理が成り立つ．

定理 21

(1) 正の実数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ に対して

$$a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0 = 0 \tag{2.2}$$

は正の解をただ一つもつ．

(2) (2.2) の正の解を r とする．このとき (2.2) の他の解 α はすべて $|\alpha| \leqq r$ を満たす．

証明

(1) 次数 n のとき，任意の正の実数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ に対して (2.2) が正の解をただ一つもつことを数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のとき．(2.2) は

$$a_1 x - a_0 = 0$$

であるから，$x = \dfrac{a_0}{a_1} > 0$ は確かにただ一つの正の解である．

$n = k - 1\ (k \geqq 2)$ のとき成立するとする．$n = k$ のとき．

$$f(x) = a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

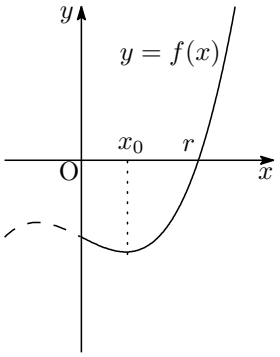
と置く．

$$f'(x) = na_n x^{n-1} - (n-1)a_{n-1}x^{n-2} - \cdots - a_1$$

ここで係数

$$na_n,\ (n-1)a_{n-1},\ \cdots,\ a_1$$

はすべて正なので，帰納法の仮定によって $f'(x) = 0$ は正の解をただ一つもつ．
それを x_0 とする．$f'(0) = -a_1 < 0$ なので $f'(x)$ は $x = x_0$ で負から正に変わる．つまり $f(x)$ は $x = x_0$ で極小である．
$f(0) = -a_0 < 0$ なので $f(x) = 0$ はただ一つ正の解 r をもつ．



(2) $|\alpha| > r$ なる複素数 α に対して

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |a_n\alpha^n - a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\alpha - a_0| \\ &\geqq |a_n\alpha^n| - |a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0| \\ &\geqq |a_n\alpha^n| - |a_{n-1}\alpha^{n-1}| - \cdots - |a_1\alpha| - |a_0| \\ &= f(|\alpha|) \end{aligned}$$

したがって $|\alpha| > r$ である複素数 α に対しては (1) から $f(|\alpha|) > 0$ なので $f(\alpha) = 0$ となることはあり得ない．よって (2.2) の他の解 α はすべて $|\alpha| \leqq r$ をみたす． □

この前半 (1) は数学的帰納法の演習問題だ．この定理を生かすと根の限界についてもう少し小さい値を取ることができる．

定理 22　複素数係数 $a_{n-1},\ a_{n-2},\ a_0$ の方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{2.3}$$

を考える．

(1) 方程式 (2.3) のすべての根 α は，その絶対値が方程式

$$r^n - |a_{n-1}|r^{n-1} - |a_{n-2}|r^{n-2} - \cdots - |a_0| = 0 \tag{2.4}$$

のただ 1 つの正根 r_0 を超えることはない．

また r_0 の他に $|\alpha| = r_0$ となる根は高々一つしかない．

(2) 方程式 (2.3) の係数 $a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_0$ の絶対値の最大値 (他のいずれよりも小さくないもの) を M とすれば，方程式 (2.3) のすべての根の絶対値は $M + 1$ を超えない．

証明

(1) 定理 21 より方程式 (2.4) はただ 1 つの正の解をもつ．それを r_0 とする．定理 21 の証明から $r > r_0$ なら (2.4) の左辺は正である．ゆえに複素数 α が $|\alpha| > r_0$ のとき

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &\geqq |\alpha^n| - (|a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_0|) \\ &\geqq |\alpha|^n - (|a_{n-1}||\alpha|^{n-1} + |a_{n-2}||\alpha|^{n-2} + \cdots + |a_0|) > 0 \end{aligned}$$

ゆえに $f(\alpha)=0$ なら $|\alpha| \leqq r_0$.

一般に，$|\alpha| \geqq |\beta|$ である複素数 $\alpha,\ \beta$ に関する三角不等式

$$|\alpha| - |\beta| \leqq |\alpha+\beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$$

において，左の等号が成立するのは $\arg(\alpha) = \pi + \arg(\beta)$ のとき，右の等号が成立するのは $\arg(\alpha) = \arg(\beta)$ のときである．ただし偏角は 0 から 2π にとるものとする．

つまり $|\alpha| = r_0$ となる α が解であり得るのは，上の二つの複素数に関する不等式で等号が成り立つときである．

$$\arg(\alpha^n) + \pi = \arg(a_{n-1}\alpha^{n-1}) = \cdots = \arg(a_0)$$

のときである．今，$\arg\alpha = \theta$ とおくと

$$\arg(a_0) = n\theta + \pi,\ \arg(a_1) = (n-1)\theta + \pi,\ \cdots,\ \arg(a_{n-1}) = \theta + \pi$$

とならねばならない．このような θ はあっても一つである．

(2) $r_0 \leqq 1+M$ を示す． $r > 1+M$ となる r に対して

$$\begin{aligned} & |a_{n-1}|r^{n-1} + |a_{n-2}|r^{n-2} + \cdots + |a_0| \\ = \ & r^n\left(\frac{|a_{n-1}|}{r} + \frac{|a_{n-2}|}{r^2} + \cdots + \frac{|a_0|}{r^n}\right) \\ \leqq \ & r^n M\left(\frac{1}{1+M} + \frac{1}{(1+M)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+M)^n}\right) \\ = \ & r^n\left(1 - \frac{1}{(1+M)^n}\right) < r^n \end{aligned}$$

つまり 2.4 の左辺は正になる．ゆえに解 r_0 に対しては $r_0 \leqq 1+M$ である． □

例 2.5.5 $0 < A_0 < A_1 < \cdots < A_n$ である実数に対し，方程式

$$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0 = 0$$

の解 α はすべて $|\alpha| < 1$ をみたす．

証明

$$g(x) = (x-1)(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0)$$

とおく．

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) \\ &= A_n x^{n+1} - (A_n - A_{n-1})x^n - \cdots - (A_1 - A_0)x - A_0 \end{aligned}$$

この係数

$$A_n,\ A_n - A_{n-1},\ \cdots,\ A_1 - A_0,\ A_0$$

はすべて正なので， $g(x)$ は次数 $n+1$ で定理 21(1) の条件を満たす．

$g(x) = 0$ は $x = 1$ を解にもつので，定理 21(2) から $g(x) = 0$ の $x = 1$ 以外の解 α はすべて $|\alpha| \leqq 1$ をみたす．つまり

$$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0 = 0$$

の解はすべて $|\alpha| \leqq 1$ を満たす．$|\alpha| = 1$ となる解があるとする． α の偏角を θ とする．偏角を $mod 2\pi$ で考える．

$|\alpha| = 1$ となるのは定理 21 の (2) の証明で 2 つの不等式でともに等号が成立するときなので，

$$\arg((A_n - A_{n-1})\alpha^n) = \arg((A_{n-1} - A_{n-2})\alpha^{n-1}) = \cdots = \arg((A_1 - A_0)\alpha) = \arg A_0$$

かつ，これらと $\arg(A_n\alpha^{n+1})$ は π 異なっていなければならない．

$$\therefore \quad \arg(A_0) = (n+1)\theta + \pi,\ \arg(A_1 - A_0) = n\theta + \pi,\ \cdots,\ \arg(A_n - A_{n-1}) = \theta + \pi$$

とならねばならない．係数がすべて実数なので，あり得るのは $\theta = \pi$ つまり $\alpha = -1$ のみである．

ところが $x = -1$ のとき

$$\begin{aligned} n \text{ が奇数}: \quad & A_n(-1)^n + A_{n-1}(-1)^{n-1} + \cdots + A_1(-1) + A_0 \\ = \quad & (-A_n + A_{n-1}) + (-A_{n-2} + A_{n-3}) + \cdots + (-A_1 + A_0) \neq 0 \\ n \text{ が偶数}: \quad & A_n(-1)^n + A_{n-1}(-1)^{n-1} + \cdots + A_1(-1) + A_0 \\ = \quad & (A_n - A_{n-1}) + (A_{n-2} - A_{n-3}) + \cdots + (A_2 - A_1) + A_0 \neq 0 \end{aligned}$$

なので $x = -1$ は解ではない．ゆえに解はすべて $|\alpha| < 1$ を満たす． □

南海　このような根の限界は他にもいろいろとある．ただそれは今日の主題ではないのでここでおく．

2.5.4　スツルムの定理

南海　ふたたび実根がいくつあるかの問題に戻ろう．

$f(x)$ を実係数をもつ n 次多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

とする．方程式

$$f(x) = 0$$

が与えられた区間 $[a,\ b]$ の中にいくつの実根をもつかを決定することを**スツルムの問題**という．1826 年にスツルム (Strum,Jacques Charles François ; 1803-1855) によって完全に解かれた．以下， $f(x)$ の零点 α とは $f(\alpha) = 0$ となる実数 α のこととする．

$f_0(x) = f(x)$ と $f_1(x) = f'(x)$ に対してユークリッドの互除法を行う．そのとき余りを次の定理のなかで述べられているように，通常の場合と符号を逆にとる．

定理 23 (スツルム の定理)　実数係数の多項式 $f(x)$ が与えられている．このとき次の規則で多項式の列

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_r(x)$$

を作る．

$$\begin{cases} f_0(x) = f(x),\ f_1(x) = f'(x) \\ f_{k-1}(x) \text{ を } f_k(x) \text{ で割った余りを} -f_{k+1}(x) \\ \quad \text{つまり } f_{k-1}(x) = f_k(x)Q_k(x) - f_{k+1}(x) \\ f_{r-1}(x) \text{ は } f_r(x) \text{ で割りきれる．つまり } f_{r-1}(x) = f_r(x)Q_r(x) \end{cases}$$

$f(x)$ の零点でない実数 a に対して，数の列

$$f_0(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \cdots,\ f_r(a)$$

における正負の符号変化の回数を $w(a)$ と書く．ただしこの列の中に 0 が現れるときはそれをとばして数える．

$a,\ b\ (a<b)$ は $f(x)$ の零点でないとする．このとき区間 $[a,\ b]$ 内の相異なる零点の個数 (したがって重根も 1 つと数える) は

$$w(a)-w(b)$$

に等しい．

南海　ユークリッドの互除法により，$f_r(x)$ は $f_0(x)=f(x)$ と $f_1(x)=f'(x)$ の最大公約数である．これが互いに素，つまり $f(x)=0$ が重根をもたなければ，$f_r(x)$ は定数である．

耕一　この種の問題を考えるのに $f(x)$ と $f'(x)$ は必要だとわかります．しかしそのあと，順に $f''(x),\ f'''(x),$ と作っていってそれを調べるのかな，と思っていたのですが，互除法で次々に決めていくのですね．

南海　スツルムの時代，いろんな試行錯誤があったのだろう．当然，高次微分との関係も調べられたに違いない．

高次微分の列

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f^{(3)}(x),\ \cdots$$

の符号変化に関する定理もある．これらは『代数学講義』(高木貞治著，共立出版株式会社) を見てほしい．それらの定理は意味深いが，任意の区間内の実根の個数を確定することはできない．高次微分は $f^{(j-1)}(x),\ f^{j}(x),\ f^{(j+1)}(x)$ の 3 項の間の関係を数式で表わしにくい．が，互除法ならはっきりしている．さらに互除法で余りの符号を逆にとるなどということは，ほんとにいろんな工夫の後に，スツルムにひらめいたのだ．こうして任意の区間内の実根の個数を確定するという問題をスツルムが最初に解決した．

証明

$f(x)=0$ が重根をもたない場合．

この場合，$f(x)$ と $f'(x)$ は互いに素なので，$f_r(x)$ は 0 でない定数で，隣りあう 2 項の零点に同じものはない．

区間 $[a,\ b]$ で a を固定し b を動かすことを考える．区間内の実数 α で $f(x)$ の零点ではないものをとる．この α に対し，α を零点にもつ $f_{j_0}(x)$ で，$0<j_0<r$ にあるものをとる．$x_1,\ x_2$ を $x_1<\alpha<x_2$ で区間 $[x_1,\ x_2]$ に α 以外の $f_j(x)$ の零点が存在しないようにとる．このとき $w(x_1)=w(\alpha)=w(x_2)$ である．

このような $f_{j_0}(x)$ が存在しなければ，すべて符号が一定なので明らかである．

存在するときを考える．$f_{j_0}(x)$ の前後の $f_{j_0-1}(x),\ f_{j_0+1}(x)$ は α を零点にはしないので $x=x_1,\ \alpha,\ x_2$ で同じ符号をとる．$f_{j_0}(x)$ は $x=\alpha$ の前後で負から正に変わるとする．

$$f_{j_0-1}(\alpha)=f_{j_0}(\alpha)Q_k(x)-f_{j_0+1}(\alpha)=-f_{j_0+1}(\alpha)$$

より，$x=\alpha$ の近くで $f_{j_0-1}(x)$ と $f_{j_0+1}(x)$ は異符号である．これをもとに，$x=\alpha$ の前後の値

での符号変化の回数を調べる．すると

x	$f_{j_0-1}(x)$	$f_{j_0}(x)$	$f_{j_0+1}(x)$	符号変化数
x_1	$\pm$	$-$	$\mp$	1
α	$\pm$	0	$\mp$	1
x_2	$\pm$	$+$	$\mp$	1

正から負に変わるときも同様である．したがって符号変化の回数は変わらない．α を零点にもつ各 $f_{j_0}(x)$ についていえるので，$w(x_1) = w(\alpha) = w(x_2)$ である．

次に α を $f(x)$ の零点とし，同様の考察を行う．$x = \alpha$ の前後で $f(x)$ が負から正に変わるとすると $f'(x) > 0$ なので

x	$f(x)$	$f'(x)$	符号変化数
x_1	$-$	$+$	1
x_2	$+$	$+$	0

$x = \alpha$ の前後で $f(x)$ が正から負に変わるとすると $f'(x) < 0$ なので

x	$f(x)$	$f'(x)$	符号変化数
x_1	$+$	$-$	1
x_2	$-$	$-$	0

α を零点にもつ，$0 < j_0 < r$ の範囲の $f_{j_0}(x)$ については，先の考察と同様に α の前後での符号変化の回数は変わらない．よってこの場合 $w(x_1) - 1 = w(x_2)$ である．

したがって $w(a) - w(b)$ は b が a から増加して $f(x)$ の零点を一つ超えるごとに 1 増加する．つまり $w(a) - w(b)$ は区間 $[a,\ b]$ における $f(x)$ の零点の個数そのものである．

$f(x) = 0$ が実数の重根 β をもつ場合． $f(x) = (x-\beta)^p g(x)$ とおく．

$$f'(x) = p(x-\beta)^{p-1} g(x) + (x-\beta)^p g'(x)$$

で $(x-\beta)^{p-1}$ が $f(x)$ と $f'(x)$ の公約数なので， $(x-\beta)^{p-1}$ は $f_r(x)$ の約数でもある．

$f_0(x)$ から $f_r(x)$ のすべてを $(x-\beta)^{p-1}$ で割る．

それをあらためて

$$f_0(x),\ \cdots,\ f_r(x)$$

とする．この新たな $f_0(x),\ \cdots,\ f_r(x)$ の $x = b$ での符号は，もとの $f_0(x),\ \cdots,\ f_r(x)$ の $x = b$ での符号と， $(b-\beta)^{p-1}$ の正負によってすべて同符号かすべて異符号かのいずれかであるから，符号変化の回数は変わらない．

新たな $f_0(x),\ \cdots,\ f_r(x)$ は隣りあう 2 項の間に共通の零点をもたないので $0 < j_0 < r$ に対する $f_{j_0}(x)$ の零点 α の前後で $w(b)$ の値が変わらないことは同様である．

α を $f(x)$ の零点とする． $\alpha \neq \beta$ なら α の前後で $w(b)$ の値が 1 減ることも同様である．

最後に $x = \beta$ の前後でも $w(b)$ の値が 1 減ることを確認する．$f_0(x) = (x-\beta)g(x)$ で $g(\beta) \neq 0$ である．

$$f_1(\beta) = g(\beta) + (\beta - \beta)g'(\beta) = g(\beta)$$

今 $x = \beta$ の前後で $g(\beta) > 0$ とし，上と同様の考察をする．

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	符号変化数
x_1	$-$	$+$	1
x_2	$+$	$+$	0

つまり符号変化の回数は1減る．$g(\beta)<0$ のときも同様．したがってこの場合も $w(x_1)-1=w(x_2)$ である．

よって重根をもつ場合も $w(a)-w(b)$ は b が a から増加して $f(x)$ の零点を一つ超えるごとに1増加する．

つまり $w(a)-w(b)$ は区間 $[a,\ b]$ における $f(x)$ の零点の個数そのものである．ただし，重根も1つに数えている．

以上で題意が示された． □

南海　ここで大切な注意がある．区間 $[a,\ b]$ での符号変化回数の差 $w(a)-w(b)$ を求めようとするとき，ある $f_{j_0}(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で符号が一定になたとする．

すると $j_0<j\leqq r$ の間の $f_j(x)$ に対し，各 $f_j(x)$ が途中で符号を変えても，すでに見たようにその前後の x_1 と x_2 で $w(x)$ の値が変わらず，したがって区間 $[a,\ b]$ に属する任意の x に対し数列

$$f_{j_0}(x),\ f_{j_0+1}(x),\ \cdots,\ f_r(x)$$

の間で起こる符号変化の回数は一定である．. したがって $w(a)-w(b)$ を求めようとすれば

$$f(a),\ f'(a),\ \cdots,\ f_{j_0}(a)$$
$$f(b),\ f'(b),\ \cdots,\ f_{j_0}(b)$$

の間の符号変化を調べその差をとれば十分である．

さて，n 次方程式 $f(x)=0$ がいくつ実数解をもつかを知りたければ，まず先に見たように，根の限界を何らかの方法で見つけそれを M とする．すべての実根は区間 $[-M,\ M]$ にあるので $w(-M)-w(M)$ が実根の個数である．

このようにスツルムの定理と根の限界の定理を組み合わせれば，すべての実根の個数がわかる．

そこで最初の阪大の問題だが，スツルムの定理の簡単な応用になっていることはわかるだろうか．

耕一　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とすれば $f'(x)=3x^2+2ax+b$ ．十分大きい M をとり区間 $[0,\ M]$ をとる．この区間で $f'(x)$ の符号は一定 (つねに正) なので，先の注意により $f(x)$ と $f'(x)$ の符号変化のみを調べればよい．

$f(0)>0$ なら $w(0)-w(M)=0$ ．$f(0)<0$ なら $w(0)-w(M)=1$ ．$f(0)=0$ のとき….

南海　$f(0)=0$ のとき，つまり $c=0$ のときは，任意の正の $e<M$ に対して $f(e)>0$ だから $w(e)-w(M)=0$．ゆえにやはり正の解はない．

演習 24　解答 22　次の方程式の実根の個数を求めよ．またそれぞれの実根は隣りあうどのような整数の間にあるか．

	(出典)
$x^3+3x-1=0$	『スツルムの解法』シャファレビッチ
$x^3-5x^2+8x-8=0$	『現代代数学』ファン・デル・ヴェルデン
$3.22x^6+4.12x^4+3.11x^3-7.25x^2+1.88x-7.84=0$	『代数学講義』高木貞治

南海　区間の中に1つあることがわかれば，区間を中点で区切り調べれば，そのいずれにあるかわかる．同様にくり返せばいくらでも根の近似値を求めることができる．

演習 25　解答 23

$$x^3+3x-1=0$$

の根を小数第1位まで求めよ．

演習 26 [00 香川大改題] 解答 24

3 次関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x + a^2 - a$ について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数の解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(2) (1) のとき，3 つの解は $-2a$ と $2a$ の間にあることを示せ．

2.6　原始多項式

2003.6.3

2.6.1　整数係数の整式

耕一　次の問題の別解などをいろいろ考えました．出典は不明なのですが，どこかの大学の過去問題だと思います．

例 2.6.1　(1) 最高次数の係数が 1 の整数係数の整式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

が有理数 α を用いて

$$f(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

と因数分解された．このとき α は整数であることを示せ．

(2) さらに係数 $a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_0$ がすべて素数 p の倍数であるとする．このとき，

(i) 方程式 $f(x) = 0$ が整数解 α をもてば，α は p で割り切れることを示せ．

(ii) a_0 が p^2 で割り切れなければ，方程式 $f(x) = 0$ は有理数解を持たないことを示せ．

これを一通り解きました．

解答

(1) $\alpha = \dfrac{p}{q}$ ($p,\ q$ は互いに素な整数, $q > 0$) とおく．$f(\alpha) = 0$ なので

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

これから

$$\frac{p^n}{q} = -a_{n-1}p^{n-1} - \cdots - a_0q^{n-1}$$

p^n と q も互いに素で右辺は整数であるから $q = 1$.

よって α は整数である．

(2)　(i)

$$\alpha^n = -(a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0)$$

より α^n が p の倍数であり， α が p の倍数であることがわかる．

(ii) 対偶を示す．

$f(x) = 0$ が有理数解を持てば (1) からそれは整数解である．

整数解は p の倍数である．このとき，

$$a_0 = -(\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha)$$

右辺は p^2 の倍数である．従って a_0 は p^2 の倍数となる．つまり対偶が示せたので，題意が示された．

南海　これはこれで立派な解答だ．整数係数でしかも最高次数の係数が 1 である整式は，入試問題のテーマとしてつねに登場する．この解答以外の方法や，この問題の意義について考えてみるのはよいことだ．

別解を考えようとしたというが，どのような方向で考えたのか．

耕一　はい．α を方程式の解として考える以外に，整式の因数分解の問題で考えられないかと思いました．

$\alpha = \dfrac{p}{q}$ (p, q は互いに素な整数, $q > 0$) とおく．$x - \alpha$ で割り切れることは，係数が整数の 1 次式にすると $qx - p$ で割り切れることと同値です．そこで

$$f(x) = (qx - p)S(x)$$

とおいて見ました．$S(x)$ は有理数係数の整式です．

そこで質問ですが，もし別の方向から上の $S(x)$ が整数係数であることが示せたら，$qb_{n-1} = 1$ から $q = 1$ がわかります．

これは示せないのでしょうか．

南海　実は，整数係数の整式が，有理数係数の整式に因数分解できれば，その係数は整数でとれるということがガウスによって示されている．

今の場合 $qx - p$ の係数は互いに素なので，ここからくくって $S(x)$ 全体にかける整数はないので，$S(x)$ 自身が整数係数なのだ．

それが「原始多項式」の理論だ．

ところで，整式の既約性という問題は数の場合と違ってやや複雑である．例えば，$f(x) = x^4 - 4$ は有理数の範囲で考えると $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$ までしか分解できないが，実数の範囲では $f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$ と分解でき，複素数の範囲では $f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$ と一次式に分解される．

このようにどの範囲で考えるかで，分解される範囲が異なる．複素数まで考えれば一次式の積に分解される．

いま考えているのは,「有理数の範囲で因数に分解できれば実は整数の範囲で分解できる」ことが示せないかということだ．

2.6.2　原始多項式

南海　整数係数の整式 (多項式) で，係数の最大公約数が 1 であるものを原始多項式と呼ぶ．このとき次の事実が示される．

定理 24 (ガウス)　原始多項式の積は原始多項式である．

証明

$\psi(x)$，$\phi(x)$ を n 次，m 次の原始多項式とする．

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad \phi(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

とおく．

任意の素数 p をとる．p で割り切れない係数をもつ最低次の項を $a_h x^h$, $b_k x^k$ とする．

積 $\psi(x)\phi(x)$ における x^{h+k} 次の項の係数は

$$\sum_{i+j=h+k} a_i b_j = \cdots + a_{h+2}b_{k-2} + a_{h+1}b_{k-1} + a_h b_k + a_{h-1}b_{k+1} + a_{h-2}b_{k+2} + \cdots$$

である．この和は，$i+j$ が $h+k$ となるようなすべての $(i,\ j)$ にわたるという意味だ．

ここで中央の $a_h b_k$ は p で割れないが，他のすべての $a_i b_j$ は p の倍数になる．つまりこの係数は p で割り切れない．

任意の素数 p について，p で割りきれない係数の項が存在するので，積 $\psi(x)\phi(x)$ の係数の最大公約数は 1 である．つまり積は原始多項式である． □

次の定理の証明のために一つ補題を示そう．

この補題は，整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の最大公約数が 1 なら，

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n = 1$$

となる整数 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$ が存在する，を用いている．

この証明は『初等整数論』「一次不定方程式」「一次不定方程式の解の存在」定理 5 を見てほしい．

補題 2　整数係数多項式 $f(x)$ が原始多項式 $\psi(x),\ \phi(x)$ を用いて

$$f(x) = p\psi(x) = q\phi(x)$$

と表されれば，$p = \pm q$ である．

証明

二式 $\psi(x),\ \phi(x)$ は同次なので

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\quad \phi(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

とおく．

$\dfrac{pa_i}{q} = b_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ で $a_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は互いに素なので

$$\sum_{i=1}^{n} t_i a_i = 1$$

となる整数 $t_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が存在する．ゆえに

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{pa_i}{q} t_i = \frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{n} t_i b_i$$

より $\dfrac{p}{q}$ が整数．同様に $\dfrac{q}{p}$ が整数．よって $\dfrac{p}{q} = \pm 1$ である． □

南海　そこで本題．

定理 25　整数係数多項式 f(x) が有理数の範囲で因数分解されれば，整数の範囲で因数分解される．

証明

$$f(x) = \psi(x)\phi(x)$$

で，$\psi(x)$, $\phi(x)$ の係数は有理数とする．

$f(x)$ の係数の最大公約数を α とする．α は整数である．$f(x) = \alpha f_0(x)$ とおく．$f_0(x)$ は原始多項式である．

$\psi(x)$ に係数の分母の最小公倍数をかけ，それから係数の最大公約数でくくると原始多項式が得られる．それを $\psi_0(x)$ とし，$\psi(x) = \beta\psi_0(x)$ とおく．β は有理数である．

同様に $\phi(x) = \gamma\phi_0(x)$($\gamma$ は有理数，$\phi_0(x)$ は原始多項式) とする．

$$\alpha f_0(x) = \beta\gamma\psi_0(x)\phi_0(x)$$

ガウスの定理 (24) より $\psi_0(x)\phi_0(x)$ は原始多項式なので，補題 2 より $\beta\gamma = \pm\alpha$ となり $\beta\gamma$ は整数である．ゆえに $f(x)$ は 2 つの整数係数の多項式 $\beta\gamma\psi_0(x)$，$\phi_0(x)$ に因数分解された． □

南海　ここまで来ると，例題の (2) を一般化することができる．

定理 26 (アイゼンシュタイン)　整数係数の整式で，最高次の項の係数を除いてその他の係数はすべてある素数 p で割り切れるとする．もし定数項が p^2 で割り切れなければ，この整式は有理数の範囲で因数分解されない．

証明

この多項式を $f(x)$ とする．$f(x)$ が因数分解されたとする．それを $\psi(x)$, $\phi(x)$ とし，その次数を m, n とする．

ガウスの定理の証明と同様に素数 p に対し，$\psi(x)$, $\phi(x)$ の p で割り切れない係数をもつ最低次の項を a_hx^h, b_kx^k とする．

積 $\psi(x)\phi(x)$ における x^{h+k} 次の項の係数は

$$\sum_{i+j=h+k} a_ib_j = \cdots + a_{h+2}b_{k-2} + a_{h+1}b_{k-1} + a_hb_k + a_{h-1}b_{k+1} + a_{h-2}b_{k+2} + \cdots$$

である．これは p で割り切れないのだから x^{h+k} が $f(x)$ の最高次数の項でなければならない．ゆえに $h = m$, $k = n$ である．つまり $\psi(x)$, $\phi(x)$ も最高次数の項の係数以外は p で割り切れる．

ゆえに $f(x)$ の定数項は p^2 で割り切れ，条件と矛盾し，対偶が示せた． □

南海　以上の一般論が例題の別解になっていることがわかっただろうか．

耕一　もういちどまとめます．$f(x)$ が有理数 α を用いて $f(x) = (x-\alpha)Q(x)$ と因数分解されるとき，α を $\alpha = \dfrac{p}{q}$ とすれば $f(x) = (qx-p)S(x)$ と因数分解される．この $S(x)$ が直ちに整数係数とはいえないが，さきにいわれましたように，今の場合 $qx-p$ の係数は互いに素なので，ここからくくって $S(x)$ 全体にかける整数はないので，$S(x)$ 自身が整数係数である．すると同じ記号を用いて $qb_{n-1} = 1$ より $q = 1$ となり α は整数である．

例題の最後の問題は，対偶を示すことは同じで，有理数解があれば整数解で $f(x)$ が整数の因数をもつが，アイゼンシュタインの既約性定理から $f(x)$ は既約なので，それはあり得ない．

南海　ということだ．$f(x) = (qx-p)S(x)$ のところは，次のようにしても良い．$S(x)$ の係数の分母の最小公倍数と，分子の最小公倍数を括りだし，$f(x) = \dfrac{u}{v}(qx-p)S_0(x)$ と表したとする．ここで $S_0(x)$ は原始多項式である．$f(x)$ も原始多項式で，$qx-p$ も原始多項式なので，ガウスの定理と補題から $\dfrac{u}{v} = \pm 1$．これでも良い．

2.6.3　因数分解のアルゴリズム

耕一　必ず因数分解できる方法というのはあるのでしょうか.
南海　「必ずできる方法」を何というのか.
耕一　「アルゴリズム」です.
南海　つまり「因数分解のアルゴリズム」はあるのか？　ということだ.
　因数分解についてどんな方法を知っているか.
耕一　x の整式を因数分解する方法は次のものしか知りません.

(1) 二次式 ax^2+bx+c は，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二つの根 α, β をもちいて次のように因数分解される.
$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

(2) 因数定理で一次の因数を発見し，次数を下げる.

(3) 適当な置き換えによって二次式として分解し，それを繰り返す.

　しかし，因数定理で因数を発見するというのは，方程式の根を暗算で見つけるということですからいつもそれでできるとはかぎりません.
　因数を発見する一般的な方法はあるのでしょうか．したがってまた，因数がない，つまり既約であることを証明する方法はあるのでしょうか.
南海　たいへん難しい問題だが，整数係数の多項式のの整数係数の因数を発見するアルゴリズムは，これがあるのである！
　$f(x)$ を x の整数係数の n 次の整式としよう.

(1) $f(x)$ の因数は，$\dfrac{n}{2}$ 以下のものでさがせばよい．$\dfrac{n}{2}$ を超えない最大の整数を s とする.

(2) $g(x)$ を $f(x)$ の因数とすれば $g(x)$ は $f(x)$ を割り切る.

(3) $s+1$ 個の相異なる整数 $a_0, a_1, \cdots a_s$ を選ぶ.

(4) $f(a_0), f(a_1), f(a_2), \cdots f(a_s)$ は $g(a_0), g(a_1), g(a_2), \cdots g(a_s)$ で割り切れる.

(5) $f(a_0), f(a_1), f(a_2), \cdots f(a_s)$ をそれぞれ因数分解し，約数を選ぶ．選び方の組み合わせ方は有限個である.

(6) これらの値を $g(a_0), g(a_1), g(a_2), \cdots g(a_s)$ の値とする $g(x)$ をラグランジュの補間公式で構成する.

(7) このとき， $g(x)$ の係数が整数であることなどを用いて，可能なものを限定するとよい.

(8) すべての $f(x)$ の整数係数の因数は，約数の組み合わせ方をかえててできる有限個の $g(x)$ の中にしかない．実際に割ってさがす．ひとつもなければ，既約である.

「ラグランジュの補間公式」は『新作/改作問題』「ラグランジュの補間公式」を見てほしい.
　この方法で， $f(x)=x^4+x^2+1$ を因数分解しよう.
耕一　でも $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ ですね.
南海　これがこの方法ではどうなるかやってみるのだ.

(1) 4 次の x の整数係数の整式 $f(x)$ の因数で 2 次以下のものを求める．

$g(x)$ を 2 次以下の $f(x)$ の因数とすれば $g(x)$ は $f(x)$ を割り切る．

(2) 3 個の相異なる整数として，0, 1, -1 を選ぶ．$f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(-1)=3$ である．
$f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(-1)=3$ の因数を，$A,\ B,\ C$ とする．

(3)

$$g(x)=A\frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)}+B\frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)}+C\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}$$

とおく．つまり

$$g(x)=-A(x-1)(x+1)+\frac{B}{2}(x-0)(x+1)+\frac{C}{2}(x-0)(x-1)$$

(4) $A,\ B,\ C$ のうち一つの符号は任意にとれるので $A=1$ とする．

$$g(x)=\left(-1+\frac{B+C}{2}\right)x^2+\frac{B-C}{2}x+1$$

(5) $B,C=\pm1,\pm3$ の 16 通りの組み合わせがある．

ガウスの定理 24 により，$-1+\dfrac{B+C}{2}$ が ±1 のものだけを考えればよい．よって

$$(B,C)=(1,\ 1),\ (3,\ -1),\ (-1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (1,\ 3),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (3,\ -3),\ (-3,\ 3)$$

(6) 各々 $g(x)$ を求めると，$1, 2x+1,\ -2x+1,\ \underline{x^2+x+1},\ \underline{x^2-x+1},\ -x^2+x+1,\ -x^2-x+1,\ -x^2+3x+1,\ -x^2-3x+1$.

(7) 下線を引いた 2 つが，$f(x)$ を割り切る．よって $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

南海　大切なことは，「**必要条件で絞る**方法がある」ということだ．必要条件は個別に工夫すればよいが，最後の手があるのだ．

2.6.4　代数的整数

耕一　ところで，最初の例題にかえって質問です．整数係数で最高次の項の係数が 1 である整数係数の多項式を $f(x)$ とする．有理数 α が $f(x)=0$ の解なら α は整数である，という事実の意味がよくわかりません．

南海　以下整数係数の多項式を考える．そこでいわゆる「整数」だが，これは最高次数の係数が 1 の一次式の解になっていないか．

耕一　3 は $x-3=0$ の解，-5 は $x+5=0$ の解，ということですね．最高次数の係数が 1 でない既約多項式の解は整数でない有理数になる．

南海　そこで，次数が 1 より大きくても最高次の項の係数が 1 である整数係数の多項式 $f(x)$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の解となる複素数を「(代数的) 整数」と呼ぶのだ．

耕一　えっ．すると $\sqrt{2}$ は $x^2-2=0$ の解だから代数的整数，虚数 i も $x^2+1=0$ 解だから代数的整数，$x^2+x+1=0$ の解 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ も代数的整数ということになります．

南海　その通りなのだ．いままでの整数は区別していうときは「有理整数」呼ぶ．代数的整数の理論が 19 世紀末から 20 世紀にかけて大発展した．われわれの『数論初歩』に引き続く分野なのだ．高木貞治はこの分野で「類体論」と呼ばれる決定的な仕事をした．

耕一　でも整数という以上は，和差積で得られるものはすべて整数にならなければならない．a と b を整数とすると，集合

$$\{a+b\sqrt{2}\}$$

は全部代数的整数?　ですね．$a+b\sqrt{2}$ と $a-b\sqrt{2}$ は和が $2a$，積が a^2-2b^2 だから最高次数の係数が 1 の多項式からできる方程式

$$x^2-2ax+a^2-2b^2=0$$

の解になっています．

こういう世界を考えていくのですね．

南海　そう．代数的整数の世界では有理整数の世界とは違ったことがいろいろ起こる．例えば，因数分解の一意性が成り立たない．

耕一　代数的整数 α が

$$\alpha=st=uv$$

と異なる因数分解をもつということですか．

南海　正確には，代数的整数の世界の「素数」を定義しなければならない．そしてある種の代数的整数では，一方に現れて一方に現れない素数がある 2 種の因数分解が可能なのだ．しかしこの話はここまでにしておこう．

さて，質問のあった

整数係数で最高次の項の係数が 1 である多項式を $f(x)$ とする．有理数 α が $f(x)=0$ の解なら α は整数である，という事実の意味

であるが，これは

代数的整数であって有理数でもあるものは有理整数である．

ことを意味している．

耕一　代数的整数と有理数の共通部分がちょうど有理整数ということですね．

2.7　チェビシェフの多項式

2015.10.25/2000.8.27

2.7.1　いくつかの入試問題

耕一　今日はチェビシェフの多項式についてまとめて聞かせてください．

南海　チェビシェフの多項式は大変重要なテーマだ．基礎と応用についてまとめよう．

三角関数に倍角公式というものがある．

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1\\ \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

右辺は $\cos\theta$ の多項式になっている．$x = \cos\theta$ として，これを $T_2(x)$, $T_3(x)$ とおく．

$$\begin{aligned}T_2(x) &= 2x^2 - 1\\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x\end{aligned}$$

一般に

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$$

で定まる多項式 $T_n(x)$ を n 次のチェビシェフの多項式という．

ところで倍角公式はド・モアブルの定理と二項定理から求まる．

$$\begin{aligned}& \cos 3\theta + i\sin 3\theta\\ = \;& (\cos\theta + i\sin\theta)^3\\ = \;& \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3\\ = \;& \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\\ = \;& 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i\sin\theta(3 - 4\sin^2\theta)\end{aligned}$$

耕一　三角関数の倍角公式は普通は加法定理から求めます．

南海　加法定理は，極形式で表された複素数の積公式

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

と同等だ．これはまた偏角を 0 から 2π にとることを定めておけば

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

でもあるわけだが，いずれにせよ，加法定理は複素数の性質に含まれてしまうので，三角関数で示せることは，複素数で示せる．

耕一　いつも思うのですが，上の偏角の公式は対数と同じ形ですね．

それには理由があって，実は

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

という基本的な事実がある．もちろん左辺の複素数べきの意味を定めなければならないのだが，オイラーが発見したこの式ほど人間が発見した数学の式で重要なものはないほどだ．

耕一　だから $z = e^{i\theta}$ とすると

$$\arg z = \theta = \frac{1}{i}\log z$$

となり，偏角の公式が成り立つのですね．

南海　複素数 z に関する $\log z$ の意味を定めなければならないのだが，基本的にはそういうことだ．

さて今日の本題に戻って，いくつかの入試問題を考えよう．

例 2.7.1　［96 京大後期理系］n は自然数とする．

(1) すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos\theta),\ \sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

をみたし，係数がともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ．

(2) $f_n'(x) = ng_n(x)$ を示せ．

(3) p を 3 以上の素数とするとき，$f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ．

設定が少し違う以外次の問題も同じものだ．

例 2.7.2　［91 東大前期理系］

(1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，ある多項式 $p_n(x)$, $q_n(x)$ が存在して，

$$\sin n\theta = p_n(\tan\theta)\cos^n\theta,\ \cos n\theta = q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

と書けることを示せ．

(2) このとき，$n > 1$ ならば次の等式が成立することを証明せよ．

$$p_n'(x) = nq_{n-1}(x),\ q_n'(x) = -np_{n-1}(x)$$

これらは普通にやれば数学的帰納法でやるところだ．しかし次節で複素数で考える．

2.7.2　チェビシェフの多項式

南海　上の京大の問題はチェビシェフの多項式そのものを問うている．いくつか付け加えて考えやすくするために次の定理にまとめよう．

定理 27　n は自然数とする．

(1) すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta),\ \sin n\theta = U_n(\cos\theta)\sin\theta$$

をみたし，係数がともにすべて整数である n 次式 $T_n(x)$ と $n-1$ 次式 $U_n(x)$ が存在する．最高次数の項の係数は 2^{n-1} である．

(2)

$$T_n'(x) = nU_n(x)$$

が成り立つ．

(3) $T_n(x)=0$ となる x は

$$\cos\frac{1}{2n}\pi,\ \cos\frac{3}{2n}\pi,\ \cdots,\ \cos\frac{2n-1}{2n}\pi$$

また $T_n'(x)=0$ となる x は

$$\cos\frac{1}{n}\pi,\ \cos\frac{2}{n}\pi,\ \cdots,\ \cos\frac{n-1}{n}\pi$$

(4) $T_n(x)$, $U_n(x)$ はいずれも次の漸化式を満たす.

$$A_{n+2}-2xA_{n+1}+A_n=0$$

南海　これを証明しよう.

耕一　少しずつやってみます (1)　ド・モアブルの定理と二項定理により,

$$\begin{aligned}
&\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\
=\ &\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cos^{n-k}\theta\cdot(i\sin\theta)^k\\
=\ &({}_n\mathrm{C}_0\cos^n\theta-{}_n\mathrm{C}_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+{}_n\mathrm{C}_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots)\\
&\quad+i({}_n\mathrm{C}_1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-{}_n\mathrm{C}_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+{}_n\mathrm{C}_5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots)\\
=\ &\{{}_n\mathrm{C}_0\cos^n\theta-{}_n\mathrm{C}_2\cos^{n-2}\theta(1-\cos^2\theta)+{}_n\mathrm{C}_4\cos^{n-4}\theta(1-\cos^2\theta)^2-\cdots\}\\
&\quad+i\sin\theta\{{}_n\mathrm{C}_1\cos^{n-1}\theta-{}_n\mathrm{C}_3\cos^{n-3}\theta(1-\cos^2\theta)+{}_n\mathrm{C}_5\cos^{n-5}\theta(1-\cos^2\theta)^2-\cdots\}
\end{aligned}$$

となり, { } 内は確かに $\cos\theta$ の多項式である.

n が偶数か奇数かで虚数部の最後の項の書き方が違うので，このようにしましたがいいでしょうか.

南海　十分意味がつたわるのでいいと思う.

耕一　これから,

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=T_n(\cos\theta)+i\sin\theta\cdot U_n(\cos\theta)$$

とおける. そして, $T_n(x)$ は n 次式, $U_n(x)$ は $n-1$ 次式である.

$T_n(x)$ における x^n の係数は,

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$$

また, $U_n(x)$ における x^{n-1} の係数は,

$${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$$

(2) $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ の両辺を θ で微分すると,

$$-n\sin n\theta=T_n'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)$$

つまり,

$$-n\cdot U_n(\cos\theta)\sin\theta=-T_n'(\cos\theta)\sin\theta$$

これは関数としての恒等式であるから,

$$n\cdot U_n(\cos\theta)=T_n'(\cos\theta)$$

が得られる. つまり,

$$T_n'(x) = nU_n(x)$$

(3) $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で考えると, $x = \cos\theta$ とおけて,

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\implies \cos n\theta = 0 \\ &\implies n\theta = \frac{2k+1}{2}\pi \quad (k \text{ は整数}) \\ &\implies \theta = \frac{2k+1}{2n}\pi \quad (k \text{ は整数}) \end{aligned}$$

となるから, $x = \cos\theta$ より,

$$T_n(x) = 0 \implies x = \cos\frac{1}{2n}\pi,\ \cos\frac{3}{2n}\pi,\ \cdots,\ \cos\frac{2n-1}{2n}\pi$$

そして, $T_n(x) = 0$ の解は高々n 個しかないので, これが解のすべてである. 次に,

$$T_n'(x) = 0 \implies U_n(x) = 0$$

ここで, $\theta = \dfrac{1}{n}\pi,\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{n}\pi$ に対して,

$$\sin n\theta = 0 \text{ かつ } \sin\theta \neq 0$$

であるから, $\sin n\theta = U_n(\cos\theta)\sin\theta$ より,

$$x = \cos\frac{1}{n}\pi,\ \cos\frac{2}{n}\pi,\ \cdots,\ \cos\frac{n-1}{n}\pi$$

が $U_n(x) = 0$ の解である. そして, $U_n(x) = 0$ の解は高々$n-1$ 個しかないので, これが解のすべてである.

(4)

耕一　(4) は 3 項間漸化式を作るのですね.

$$\begin{aligned} & T_n(\cos\theta) + i\sin\theta \cdot U_n(\cos\theta) \\ = \ & (\cos\theta + i\sin\theta)\{T_{n-1}(\cos\theta) + i\sin\theta \cdot U_{n-1}(\cos\theta)\} \\ = \ & \cos\theta \cdot T_{n-1}(\cos\theta) - \sin^2\theta \cdot U_{n-1}(\cos\theta) \\ & \quad + i\sin\theta\{\cos\theta \cdot U_{n-1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta)\} \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{cases} T_n(x) = xT_{n-1}(x) + (x^2-1)U_{n-1}(x) \\ U_n(x) = T_{n-1}(x) + xU_{n-1}(x) \end{cases}$$

これから漸化式を作ります.

南海　ここはケイレイ・ハミルトンの定理を活用した作り方でやってみよう.

耕一　すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_n(x) \\ U_n(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{n-1}(x) \\ U_{n-1}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & x \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} T_1(x) \\ U_1(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, $P=\begin{pmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ はケーリー・ハミルトンの定理により,

$$P^2-2xP+E=O$$

をみたすので,

$$P^{n+1}-2xP^n+P^{n-1}=O \quad (P^0=E \text{ とする})$$

である. つまり,

$$\begin{aligned} & P^{n+1}\begin{pmatrix} T_1(x) \\ U_1(x) \end{pmatrix}-2xP^n\begin{pmatrix} T_1(x) \\ U_1(x) \end{pmatrix}+P^{n-1}\begin{pmatrix} T_1(x) \\ U_1(x) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} T_{n+2}(x) \\ U_{n+2}(x) \end{pmatrix}-2x\begin{pmatrix} T_{n+1}(x) \\ U_{n+1}(x) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} T_n(x) \\ U_n(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0 \end{aligned}$$

つまり, 各成分とも漸化式 $A_{n+2}-2xA_{n+1}+A_n=0$ をみたしている.

南海　以上で証明はできた．実際の式を作っておくことは大切だ.

耕一　はい.

例 2.7.3　$i=1,2,3,4$ に対して，$T_i(x)$, $U_i(x)$ を求め $T_n'(x)=nU_n(x)$ を確認する.

$T_1(\cos\theta)=\cos\theta$ より,

$$T_1(x)=x$$

$U_1(\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta$ より,

$$U_1(x)=1$$

$T_2(\cos\theta)=2\cos^2\theta-1$ より,

$$T_2(x)=2x^2-1$$

$U_2(\cos\theta)\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$ より,

$$U_2(x)=2x$$

また,

$$\begin{aligned} & T_3(\cos\theta)+iU_3(\cos\theta)\cdot\sin\theta \\ = & (\cos\theta+i\sin\theta)^3 \\ = & \cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)-i\sin\theta(1-\cos^2\theta) \\ = & 4\cos^3\theta-3\cos\theta+i\sin\theta(4\cos^2\theta-1) \end{aligned}$$

なので,

$$T_3(x)=4x^3-3x, \quad U_3(x)=4x^2-1$$

そして,

$$\begin{aligned} & T_4(\cos\theta)+iU_4(\cos\theta)\sin\theta \\ = & (\cos\theta+i\sin\theta)^4 \\ = & \cos^4\theta+4\cos^3\theta(i\sin\theta)-6\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) \\ & \quad -4\cos\theta\cdot i\sin\theta(1-\cos^2\theta)+(1-\cos^2\theta)^2 \\ = & 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1+i\sin\theta(8\cos^3\theta-4\cos\theta) \end{aligned}$$

なので,

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad U_4(x) = 8x^3 - 4x$$

となり, いずれも $T_n'(x) = nU_n(x)$ をみたしている.

2.7.3 チェビシェフの多項式の応用

南海 関数 $f(x)$ の定義域の部分集合 I がある．関数 $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の I における最大値が存在するとき，その値を $f(x)$ の I における最大偏位という．前の問題を前提として次の問題をやってみよう．

定理 28

(1) 最高次数の項の係数が 1 である n 次の多項式

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大偏位は $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ より小さくなることはできず，$f(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ のときにかぎり，$\dfrac{1}{2^{n-1}}$ となる．

(2) x に対し，$X = \dfrac{2}{b-a}(x-a) - 1$ を対応させると，区間 $a \leqq x \leqq b$ は区間 $-1 \leqq X \leqq 1$ にうつる．これを用いて，最高次数の項の係数が 1 である n 次の多項式で区間 $a \leqq x \leqq b$ における最大偏位が最小となるものを，$T_n(x)$ を用いて表わせる．

$$2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2}{b-a}(x-a) - 1\right)$$

(3) ある区間での最大偏位が任意に指定された値よりも小さくなるような，最高次数の項の係数が 1 である多項式が常に作れるためには，その区間の長さが 4 より小さいことが必要十分条件である．

南海 どうかな.
耕一 (1) の後半,「かぎり」のところが難しいです. 普通に交わるときは多項式として一致するのですが，極で重なる場合が厳密ではありません.
南海 熊本大の (4) の部分だな．少し手助けしよう.
証明

(1) $T_n'(x) = 0$ である各点での $T_n(x)$ の値を調べる.$T_n'(x) = 0$ をみたす x は

$$x = \cos\frac{1}{n}\pi,\ \cos\frac{2}{n}\pi,\ \cdots,\ \cos\frac{n-1}{n}\pi$$

であった. この各値

$$\cos\frac{k}{n}\pi \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

に対して,

$$T_n\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = \cos k\pi = (-1)^k$$

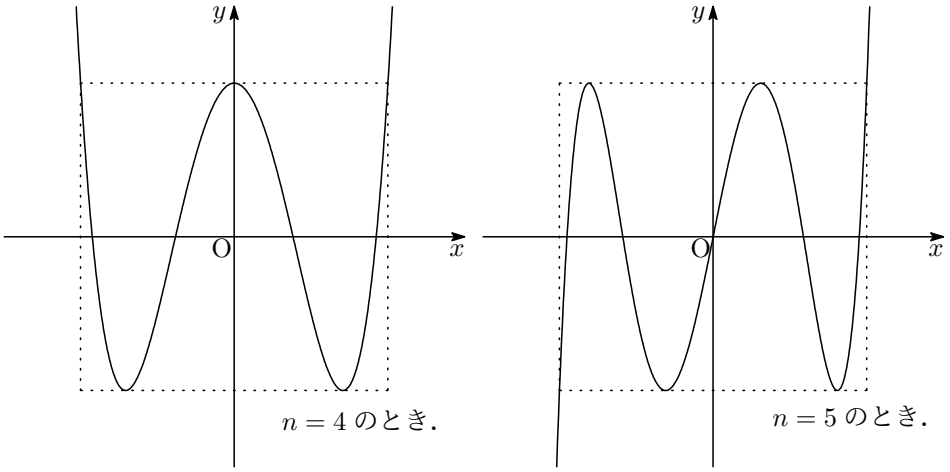
したがって, $T_n(x)$ は $T_n'(x)=0$ である x において, $+1$ と -1 を交互にとる. また, $1=\cos 0$ であるから,

$$T_n(1)=\cos 0=1$$

$-1=\cos\pi$ であるから,

$$T_n(-1)=\cos n\pi=(-1)^n$$

したがって, $T_n(x)$ のグラフは $n=4,\ 5$ では下図のようになっている.



$n=4$ のとき. $n=5$ のとき.

さて, $-1\leqq x\leqq 1$ において $|f(x)|<\dfrac{1}{2^{n-1}}$ と仮定する. いま

$$F(x)=f(x)-\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

とおくと,

$$F(1)<0,\ F\left(\cos\frac{1}{n}\pi\right)>0,\ F\left(\cos\frac{2}{n}\pi\right)<0,\ \cdots$$

というように, $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ が $\pm\dfrac{1}{2^{n-1}}$ の値をとる 1 から -1 までの $n+1$ 個の点で符号が入れ替わる. よって, $F(x)$ は

$$1>x>\cos\frac{1}{n}\pi,\ \cos\frac{1}{n}\pi>x>\cos\frac{2}{n}\pi,\ \cdots,\cos\frac{n-1}{n}\pi>x>-1$$

の n 個の各区間において値 0 をとるような x が少なくとも一つずつ存在する. つまり, $F(x)=0$ は n 個以上の解をもつ. ところが, $F(x)$ は $n-1$ 次の多項式であるから, $F(x)$ は恒等的に 0 となる. つまり,

$$f(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

これは $|f(x)|<\dfrac{1}{2^{n-1}}$ に矛盾する. したがって, $-1\leqq x\leqq 1$ において

$$|f(x)|\geqq\frac{1}{2^{n-1}}$$

となる点が必ずあり, 最大偏位は $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 以上となる.

次に, もし $f(x)$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大偏位がちょうど $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ であれば, $f(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ となることを示す. そのために, 上と同じく

$$F(x) = f(x) - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

を考える. ここで, $F(x)$ は $n-1$ 次式である. いま, n 個の各区間

$$1 \geqq x \geqq \cos\frac{1}{n}\pi,\ \cos\frac{1}{n}\pi \geqq x \geqq \cos\frac{2}{n}\pi, \cdots,\ \cos\frac{n-1}{n}\pi \geqq x \geqq -1$$

において, $n-1$ 次方程式 $F(x) = 0$ は少なくとも一つの解をもつ. その二つの解が隣り合う二つの区間の境界点 $\cos\dfrac{k}{n}\pi$ で一致したときを考える.

$$T_n\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = 1$$

とする.

$$F\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = 0$$

より

$$f\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x < \cos\frac{k}{n}\pi\text{に対して}\ \frac{f(x) - f\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right)}{x - \cos\frac{k}{n}\pi} \geqq 0$$

$$\therefore\ f'\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) \geqq 0$$

$$x > \cos\frac{k}{n}\pi\text{に対して}\ \frac{f(x) - f\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right)}{x - \cos\frac{k}{n}\pi} \leqq 0$$

$$\therefore\ f'\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) \leqq 0$$

$$\therefore\ f'\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = 0$$

一方

$$T'\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = 0$$

なので

$$F'\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = f'\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) - T'\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = 0$$

$$T_n\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = -1$$

のときも同様にして

$$F\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = 0 \quad \text{かつ} \quad F'\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right) = 0$$

となる.

したがって, $x=\cos\dfrac{k}{n}\pi$ は方程式 $F(x)=0$ の 2 重以上の重解となる. これより, 重解を含めて $F(x)=0$ は n 個以上の解を有することになり, これは $F(x)$ が $n-1$ 次式であることに矛盾する. よって, $F(x)$ は恒等的に 0 であり,

$$f(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

となる.

(2) $a\leqq x\leqq b$ の範囲の x を

$$x=a+\theta(b-a),\quad 0\leqq\theta\leqq 1$$

とおく. このとき,

$$X=\frac{2}{b-a}(x-a)-1=2\theta-1$$

となるので, $0\leqq\theta\leqq 1$ のとき $-1\leqq X\leqq 1$ である. よって, 求めるものは

$$T_n\left(\frac{2}{b-a}(x-a)-1\right)$$

をその最高次の項の係数で割って 1 としたものである. ここで, 明らかに $T_n\left(\dfrac{2}{b-a}(x-a)-1\right)$ の最高次の項の係数は

$$\left(\frac{2}{b-a}\right)^n 2^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{b-a}\right)^n$$

であるから, 求めるものは,

$$2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2}{b-a}(x-a)-1\right)$$

である.

(3) 最高次の項の係数が 1 である多項式で, 区間 $a\leqq x\leqq b$ における最大偏位が最小なものは (2) で求めたものであり, その最大偏位は $2\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^n$ であった. よって,

$$\frac{b-a}{4}<1$$

のときにかぎり, n を大きくとればいくらでも小さくできるので, $b-a$ が 4 より小さいことが必要十分条件である.

注意　$n=3$ では $2\left(\dfrac{1}{4}\right)^3>\dfrac{1}{100}$ なので不可能であるが, $n=4$ では最大偏位が $2\left(\dfrac{1}{4}\right)^4$ と $\dfrac{1}{100}$ の間にくる他の四次式をつくることも可能である (たとえば, y 軸方向の平行移動で). 解答で考えたのはその中で最大偏位が最小のものである.

例 2.7.4 最高次数の項の係数が 1 である多項式で，かつ $0\leqq x\leqq 1$ での最大偏位が $\dfrac{1}{100}$ 以下となるもののうち最も次数の小さいものを求めよう.

$0 \leqq x \leqq 1$ で最大偏位が最小となる最高次の項の係数が 1 である多項式は, (2) において $a=0,\ b=1$ を代入して,

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^n T_n(2x-1)$$

で, その最大偏位は $2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$ である. すると,

$$2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqq \frac{1}{100} \qquad \therefore \quad 4^n \geqq 200$$

よって, $n=4$ が最も次数が低い. ゆえに,

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{1}{4}\right)^4 T_4(2x-1) \\ = \ & \frac{1}{128}\{8(2x-1)^4 - 8(2x-1)^2 + 1\} \\ = \ & \frac{1}{128}\{8(16x^4 - 4\cdot 8x^3 + 6\cdot 4x^2 - 4\cdot 2x + 1) - 8(4x^2-4x+1) + 1\} \\ = \ & x^4 - 2x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{128} \end{aligned}$$

これが求める多項式である.

2.7.4 チェビシェフの多項式の係数

先の定理ではチェビシェフの多項式の最高次数の係数は求めた. 他にも定数や一次の項の係数も求まり, それが入試問題にもなっている.

例 2.7.5 ［京大 96 後期文系］

(1) $\cos 5\theta = f(\cos\theta)$ をみたす多項式 $f(x)$ を求めよ.

(2) $\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{3\pi}{10}\cos\dfrac{7\pi}{10}\cos\dfrac{9\pi}{10} = \dfrac{5}{16}$ を示せ.

これを一般化して次の値を求めよう.

$$\cos\frac{\pi}{2(2m+1)}\cos\frac{3\pi}{2(2m+1)}\cdots\cos\frac{(2m-1)\pi}{2(2m+1)}\cos\frac{(2m+3)\pi}{2(2m+1)}\cdots\cos\frac{(4m+1)\pi}{2(2m+1)}$$

この積を A とおこう.

$$\cos\frac{i\pi}{2(2m+1)},\ i=1,\ 3,\ \cdots,\ 4m+1$$

はチェビシェフの多項式 $T_{2m+1}(x)$ に対して

$$T_{2m+1}\left(\cos\frac{i\pi}{2(2m+1)}\right) = \cos\left(\frac{i(2m+1)\pi}{2(2m+1)}\right) = 0$$

をみたす $2m+1$ 個の値である. つまり $T_{2m+1}(x)=0$ の $2m+1$ 個の解である.

$T_{2m+1}(x)$ は奇関数で定数項は 0, これに対応して上の $2m+1$ 個の解のなかに

$$\cos\frac{(2m+1)\pi}{2(2m+1)} = 0$$

が入っている．

求める積 A は，ちょうどこの 0 を除いた他のすべての解の積である．

$T_{2m+1}(x)$ の x の係数を t_1 とする．

$$T_{2m+1}(x) = 2^{2m}x^{2m+1} + \cdots + t_1 x$$

一方

$$\begin{aligned} T_{2m+1}(x) &= 2^{2m}x\left(x - \cos\frac{\pi}{2(2m+1)}\right)\left(x - \cos\frac{3\pi}{2(2m+1)}\right) \\ &\quad \cdots\left(x - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2(2m+1)}\right)\left(x - \cos\frac{(2m+3)\pi}{2(2m+1)}\right) \\ &\quad \cdots\left(x - \cos\frac{(4m+1)\pi}{2(2m+1)}\right) \end{aligned}$$

なので，

$$2^{2m}(-1)^{2m}A = t_1$$

そこでチェビシェフの多項式 $T_n(x)$ の一次項の係数 t_1 を求めよう．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = T_n(\cos\theta) + i\sin\theta U_n(cos\theta)$$

であるが，さらに $T_n'(x) = nU_n(x)$ であった．

$$t_1 = T_n'(0) = nU_n(0)$$

である．$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ とすると

$$\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = T_n\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\frac{\pi}{2}U_n\left(cos\frac{\pi}{2}\right)$$

より

$$i^n = T_n(0) + iU_n(0)$$

ゆえに n が偶数なら $U_n(0) = 0$ であるが，　$n = 2m+1$ のとき

$$i^{2m} = U_{2m+1}(0)$$

$$\therefore \quad t_1 = (2m+1)(-1)^m$$

これから

$$A = (2m+1)\frac{(-1)^m}{2^{2m}}$$

を得る．

南海　さらに次の問題の別解も得られる．

例 2.7.6　［90 東工大］n を 2 以上の整数とする．

(1) $n-1$ 次多項式 $P_n(x)$ と n 次多項式 $Q_n(x)$ ですべての実数 θ に対して

$$\begin{cases} \sin(2n\theta) = n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta) \\ \cos(2n\theta) = Q_n(\sin^2\theta) \end{cases}$$

を満たすものが存在することを、数学的帰納法を用いて示せ．

(2) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して

$$\alpha_k=\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^{-2}$$

とおくと

$$P_n(x)=(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$$

となること示せ.

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=\frac{2n^2-2}{3}$ を示せ.

この解答は『問題研究』の中の「20 世紀問題研究」の「90 年東工大」にある．ここで (3) を簡明に示そう.

すでにやってきたことであるが，ド・モアブルの定理

$$\cos m\theta+i\sin m\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^m$$

の右辺を二項定理で展開し，両辺の虚数部分をとる.

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\sum_{l=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_l\cos^{m-l}\theta(i\sin\theta)^l$$

と展開されるので

$$\begin{aligned} i\sin m\theta &= {}_m\mathrm{C}_1\cos^{m-l}\theta(i\sin\theta)+{}_m\mathrm{C}_3\cos^{m-3}\theta(i\sin\theta)^3+{}_m\mathrm{C}_5\cos^{m-5}\theta(i\sin\theta)^5+\cdots \\ &= i\{{}_m\mathrm{C}_1\cos^{m-l}\theta\sin\theta-{}_m\mathrm{C}_3\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta+{}_m\mathrm{C}_5\cos^{m-5}\theta\sin^5\theta+\cdots\} \end{aligned}$$

である．全体を $\sin^m\theta$ でくくり，$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$ と表すと，

$$\sin m\theta=\sin^m\theta\left({}_m\mathrm{C}_1\cot^{m-1}\theta-{}_m\mathrm{C}_3\cot^{m-3}\theta+{}_m\mathrm{C}_5\cot^{m-5}\theta+\cdots\right)$$

となる.

耕一　$m=2n$ とすることで，(1) もできそうです.

南海　そうなのだが，(3) をただちに出すことを主眼にしよう.

それで，$m=2n$ とし，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して $\theta=\dfrac{k\pi}{2n}$ で用いてみると，$\sin m\theta=\sin k\pi=0$ なので

$$0=\sin^{2n}\frac{k\pi}{2n}\left({}_{2n}\mathrm{C}_1\cot^{2n-1}\frac{k\pi}{2n}-{}_{2n}\mathrm{C}_3\cot^{2n-3}\frac{k\pi}{2n}+\cdots+(-1)^n{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}\cot\frac{k\pi}{2n}\right)$$

となる．$\sin\dfrac{k\pi}{2n}\neq0$，$\cot\dfrac{k\pi}{2n}\neq0$ なので，

$${}_{2n}\mathrm{C}_1\cot^{2n-2}\frac{k\pi}{2n}-{}_{2n}\mathrm{C}_3\cot^{2n-4}\frac{k\pi}{2n}+\cdots+(-1)^n{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=0$$

を得る．つまり $\cot^2\dfrac{k\pi}{2n}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ は，$n-1$ 次の方程式

$${}_{2n}\mathrm{C}_1t^{n-1}-{}_{2n}\mathrm{C}_3t^{n-2}+\cdots+(-1)^n{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=0$$

の $n-1$ 個の解である．解と係数の関係から

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot^2 \frac{k\pi}{2n} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{2n}\mathrm{C}_1} = \frac{(2n-1)(n-1)}{3}$$

である．ところが，

$$\cot^2\theta + 1 = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 1 = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

なので，

$$\cot^2 \frac{k\pi}{2n} = \alpha_k - 1$$

である．したがって

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k = \frac{(2n-1)(n-1)}{3} + (n-1) = \frac{2n^2-2}{3}$$

となる．

耕一　m のままでも解と係数の関係は使えそうです．$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ として，先の $\sin m\theta$ の等式に $\theta = \dfrac{k\pi}{m}$ を代入してみます．

$$\sin k\pi = \sin^m \frac{k\pi}{m} \left({}_m\mathrm{C}_1 \cot^{m-1} \frac{k\pi}{m} - {}_m\mathrm{C}_3 \cot^{m-3} \frac{k\pi}{m} + \cdots \right)$$

となります．同様に考え $\cot \dfrac{k\pi}{m}$ は $m-1$ 次方程式

$${}_m\mathrm{C}_1 t^{m-1} - {}_m\mathrm{C}_3 t^{m-3} + \cdots = 0$$

の $m-1$ 個の解です．解と係数の関係から

$$\sum_{k=1}^{m-1} \cot \frac{k\pi}{m} = 0$$

$$\sum_{k<l}^{m-1} \cot \frac{k\pi}{m} \cot \frac{l\pi}{m} = -\frac{{}_m\mathrm{C}_3}{m} = -\frac{(m-1)(m-2)}{6}$$

です．よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \cot^2 \frac{k\pi}{m} &= \left(\sum_{k=1}^{m-1} \cot \frac{k\pi}{m} \right)^2 - 2 \left(\sum_{k<l}^{m-1} \cot \frac{k\pi}{m} \cot \frac{l\pi}{m} \right) \\ &= 0 + 2 \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{6} = \frac{(m-1)(m-2)}{3} \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left(\sin \frac{k\pi}{m} \right)^{-2} = \frac{(m-1)(m-2)}{3} + (m-1) = \frac{m^2-1}{3}$$

です．m を n に変えて先の結果と並べると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right)^{-2} &= \frac{n^2-1}{3} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sin \frac{k\pi}{2n} \right)^{-2} &= \frac{2(n^2-1)}{3} \end{aligned}$$

となります．不思議です．$n=3,\ 4$ で試してみます．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2}\left(\sin\frac{k\pi}{3}\right)^{-2} &= \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-2}+\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{-2}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\\
\sum_{k=1}^{2}\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^{-2} &= \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-2}+\left(\sin\frac{2\pi}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\frac{16}{3}\\
\sum_{k=1}^{3}\left(\sin\frac{k\pi}{4}\right)^{-2} &= \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-2}+\left(\sin\frac{2\pi}{4}\right)^{-2}+\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{-2}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=5\\
\sum_{k=1}^{3}\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^{-2} &= \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-2}+\left(\sin\frac{2\pi}{8}\right)^{-2}+\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right)^{-2}\\
&= \frac{4}{2-\sqrt{2}}+2+\frac{4}{2+\sqrt{2}}=10
\end{aligned}$$

となります．ただし $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ で計算しました．

南海　このような関係を駆使すると，ゼータ関数のある種の値の計算ができる．これについてはこの『数学対話』にある「$\zeta\ (2l)$ を関・ベルヌーイ数で表す」を見てほしい．

2.7.5　さらなる性質

南海　高校範囲ではないのだがさらに知られていることをまとめておく．

定義

$$\begin{aligned}
T_n(x) &\equiv \cos(n\cos^{-1}x)\\
&= \frac{1}{2}\{(x+i\sqrt{1-x^2})^n+(x-i\sqrt{1-x^2})^n\}\\
V_n(x) &\equiv \sin(n\cos^{-1}x)\\
&= \frac{1}{2i}\{(x+i\sqrt{1-x^2})^n-(x-i\sqrt{1-x^2})^n\}
\end{aligned}$$

それぞれ，チェビシェフの多項式，第二種のチェビシェフの関数という．$T_n(x)$ はこれまで定義してきたものと同一．$V_n(x)$ は

$$V_n(\cos\theta)=\sin\theta U_n(\cos\theta)$$

であり，x の方で書けば

$$V_n(x)=\sqrt{1-x^2}U_n(x)$$

である．

$T_n(x)$，$V_n(x)$ は次の微分方程式と漸化式の**独立な解**である．

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0\\
&A_{n+1}-2xA_n+A_{n-1}=0
\end{aligned}$$

超幾何級数表示

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)\equiv 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n\cdots\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

と定める．$F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ と $x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;x)$ とが，微分方程式

$$x(1-x)y^n+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta y=0$$

の基本解となる．F を超幾何級数と呼ぶ．

超幾何級数を用いると，チェビシェフの関数は以下のように表される．

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= F\left(n,-n;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j{}_n\mathrm{C}_{2j}x^{n-2j}(1-x^2)^j\\
&= \frac{(-1)^n(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)!!}\cdot\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}\\
V_n(x) &= \frac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!!}\cdot\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}
\end{aligned}$$

と表される．

生成関数 (母関数)

$$\begin{aligned}
\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} &= T_0(x)+2\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n\\
\frac{1}{1-2tx+t^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}V_{n+1}(x)t^n
\end{aligned}$$

直交関係

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2} & m=n\neq 0\\ \pi & m=n=0\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V_m(x)V_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & m=n\neq 0\\ 0 & \text{その他の場合}\end{cases}$$

南海　この直交関係などは計算できる．このようにチェビシェフの多項式はさすがに複素数の一般的な関係から作られただけにさまざまの深い性質を持っている．

耕一　どうしてこれを「チェビシェフの多項式」と呼ぶのですか．

南海　チェビシェフ (1821〜1894) は確率論や解析学で大きな功績のあるソビエトの数学者だ．かれは確率論の研究の中で最高次数の係数が 1 の任意の n 次の多項式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大偏位は $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ より小さくなることはできない，このことを証明する必要があって，その道具として「チェビシェフの多項式」を作り出したのだ．

耕一　そうなのですか．今日はありがとうございました．

2.7.6　関連入試問題

なお，$n=2,\ 3,\ 4$ のときのチェビシェフの多項式は入試問題でよく出題される．ここで 3 題紹介しよう．

演習 27　［95 熊本大前期理系］解答 25

関数

$$f(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$$

について，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする．また $g(x)$ を $-1 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数とする．

(1) M とそれを与える x の値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ において $|g(x)| < M$ が成り立つとき，方程式 $f(x) = g(x)$ は $-1 < x < 1$ の範囲に少なくとも 4 つの解をもつことを示せ．

(3)

$$g(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a, b, c, d \text{ は実数の定数})$$

とすると，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $|g(x)|$ の最大値は M 以上であることを示せ．

(4) $|g(x)|$ の最大値が M となるものは，$f(x)$ 以外にないことを示せ．

演習 28　［90 東大前期理系］解答 26

三次関数 $h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は次の条件 (i)，(ii) をみたすものとする．

(1) $h(1) = 1,\ h(-1) = -1$,

(2) 区間 $-1 < x < 1$ で極大値 1，極小値 -1 をとる．

このとき

(1) $h(x)$ を求めよ．

(2) 三次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が区間 $-1 < x < 1$ で $-1 < f(x) < 1$ をみたすとき，$|x| > 1$ なる任意の実数 x に対して不等式

$$|f(x)| < |h(x)|$$

が成立することを証明せよ．

演習 29　［97 京大後期理系］解答 27

次の連立方程式 $(*)$ を考える．

$$(*) \begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ z = 2y^2 - 1 \\ x = 2z^2 - 1 \end{cases}$$

(1) $(x,\ y,\ z) = (a,\ b,\ c)$ が $(*)$ の実数解であるとき，$|a| \leqq 1,\ |b| \leqq 1,\ |c| \leqq 1$ であることを示せ．

(2) $(*)$ は全部で 8 組の相異なる実数解をもつことを示せ．

演習 30　［17　お茶の水女大 (後)・理］解答 28

n を自然数とする．$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ を実数とし，関数

$$f(x) = a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + a_0$$

を考える．ただし，$\cos nx$ の係数 a_n は正にとるものとする．このとき，絶対値 $|f(x)|$ の最大値が a_n 以上であることを示したい．次の問いに答えよ．

(1) 3 次多項式 $T_3(X)$ を $T_3(X) = 4X^3 - 3X$ とおくと，恒等式 $\cos 3x = T_3(\cos x)$ が成り立つことを示せ．また各自然数 n に対して，恒等式 $\cos nx = T_n(\cos x)$ が成り立つような X の n 次多項式 $T_n(X)$ が存在することを示せ．

(2) 関数 $|f(x)|$ の最大値が a_n より小さいと仮定すると，$a_n \cos(k\pi) - f\left(\dfrac{k}{n}\pi\right)$ の値は，k が偶数であるとき正，k が奇数であるとき負であることを示せ．

(3) (2) の仮定のもとで，方程式 $a_n \cos(nx) - f(x) = 0$ は区間 $[0,\ \pi]$ において少なくとも n 個の解を持つことを証明せよ．

(4) 実数 $b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_{n-1}$ によって

$$a_n \cos nx - f(x) = b_{n-1}(\cos x)^{n-1} + b_{n-2}(\cos x)^{n-2} + \cdots + b_1 \cos x + b_0$$

と表せることを証明せよ．

(5) 設問 (3)，(4) の結論から矛盾が導かれることを示し，$|f(x)|$ の最大値が a_n 以上であることを示せ．

2.8　整式の整数論

2006.9.17

2.8.1　整数と整式の類似

太郎　2006 年の京都大学の入学試験で，前期後期とも文理共通で，整式の問題が出されました，
南海　次のものだな．演習問題として紹介しよう．

演習 31 解答 29 【06 京大文理系前期 1 番 3 番】
$Q(x)$ を 2 次式とする．整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという．このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解を持つことを示せ．

演習 32 解答 30 【06 京大文理系後期 1 番 3 番】
1 次式 $A(x)$，$B(x)$，$C(x)$ に対して $\{A(x)\}^2+\{B(x)\}^2=\{C(x)\}^2$ が成り立つとする．このとき $A(x)$ と $B(x)$ はともに $C(x)$ の定数倍であることを示せ．

太郎　それには，それぞれ 2 つの解法があって，一つは整式の多項式としての性質を用いるもの，一つは整式の数論によるものでした．その解説に次のようにありました．

> 整式では、整数と同じく因数分解ができ，かつ素因数分解の (定数倍を除く) 一意性が成り立つ．解 2 はこれを根拠とした解法である．はるかに簡明である．ただし，なぜ整式でも素因数分解の一意性がなり立つのか．それは整式でも除法の原理が成り立つからであり，結局は整数の場合と同じく，除法の原理が成立することが根拠なのである．

この後半の，除法の原理を根拠として，整式も整数と同じように考えられる，というところが，よくわかりません．
南海　『数論初歩』を読んで，その論証の仕組みを調べれば次のことがわかる．

> 初等整数論の基礎である，約数・倍数などの整除に関する基本性質の成立，素因数分解の一意性や，一次不定方程式の解の存在と構成などが，すべて，整数の集合のなかでは除法ができて商と余りが一意に決まることの根拠となっている．

とはいっても，自分で確かめるのはなかなか大変であるから，ここで改めて整数の場合の論証の仕組みをふりかえり，そのうえで，整式の場合に同様の事実が成立することを確認しよう．

2.8.2　整数の基礎

2.8.2.1　整数の除法

南海　まず整数論の入り口である，除法と，除法を用いた論証の復習だ．

定理 29 (除法の原理) a を整数，b を 0 でない整数とする．このとき，

$$a=qb+r\ ,\quad 0\leqq r<|b|$$

となる整数 q, r がただ 1 組存在する．ここに，$|b|$ は整数 b の絶対値を表す．

この証明そのものは『数論初歩』を見てほしい．重要なので概略を示す．

まず．整数 a と正整数 $|b|$ に対して

$$q|b| \leqq a < (q+1)|b|$$

となる整数 q が存在することを示す．これは入試問題の解答のレベルでは，$q|b|$ が q に関して単調増加であることによればよい．(参考『03 阪大前期理系 4 番』,『04 京都府立医大 3 番』)

『数論初歩』ではさらに厳密に，自然数の部分集合には最小の要素が存在することを根拠に証明した．

そこで $r = a - q|b|$ とおく． $q|b| \leqq a < (q+1)|b|$ より $0 \leqq r < |b|$ で

$$a = q|b| + r$$

である．$b > 0$ なら $|b| = b$ より定理が示せた．$b < 0$ のときは $|b| = -b$ より $a = (-q)(-b) + r$ とすればよい．

あとはこのような q, r が二通りあったとして，相等しいことを示せばよかった．

2.8.2.2　約数・倍数

太郎　このように割り算ができることから，約数や倍数の基本性質が導かれるのですね．

南海　どのように導かれるのか，確認しよう．

まず，整数 a が b の倍数でるとは，$a = bq$ となる整数が存在することと定める．

すると，割り算ができ，a を b で割った商と余りが一意に確定することによって，

a が b の倍数であることは，a を b で割った余りが 0 であることと同値である．

太郎　そこで質問ですが，例えば 6 の約数は普通 2 や 3 ということになりますが，-2 や -3 も約数ではないのですか．

南海　その通りだ．

素数は正のもので考えるので $6 = (-2)(-3)$ を素因数分解とはいわないのだが，因数分解であることには変わりない．

このように，約数や倍数，± 1 の自由さがあり，整除に関することは ± 1 の違いを除いて決まる．これを前提にして，正の方で代表させて考えるのである．

太郎　± 1 は特別な数なのですか．

南海　そう．整数のなかで逆数もまた整数であるのは，± 1 だけだ．このような数を**単数**というのだが，普通の整数では単数は ± 1 だけだ．

太郎　「普通の整数」でないものとは『数論初歩』に少し書かれていた二次体の整数とかですか．

南海　そうだ．いわゆる「代数的整数」だ．この話はここではこれ以上はできないが，実二次体の整数では単数が無数にある．

普通，整数といっているものは**有理整数**という．

太郎　有理整数では単数は ± 1 だけなのですね．そして，割り切れるとか，因数分解とか，すべて，ある整数で成り立てば，それに ± 1 をかけても，成り立つのですね．

南海　『数論初歩』でもそのことは書かれているが，少しわかりにくかったかもしれない．

そこでいくつかの定義．

0 および ± 1 でない整数 a は少なくとも ± 1 と $\pm a$ を約数を持つ．± 1 および $\pm a$ 以外の約数を「真の約数」ともいう．

真の約数を持たない正の整数 a を **素数** という．

真の約数を持つ整数を **合成数** という．

さらに，公約数，公倍数が定義される．

太郎　『数論初歩』に次のように公倍数，公約数の定義があります．

二つ以上の整数 $a,\ b,\ c,\ \cdots$ に共通な倍数をそれらの整数の公倍数という．0 は常に公倍数である．それを除けば公倍数の絶対値は $a,\ b,\ c,\ \cdots$ のいずれの絶対値よりも小さくはないので，公倍数の中に正で最小のものがある．それを最小公倍数 (least common multiple 略して L.C.M.) という．

二つ以上の整数 $a,\ b,\ c,\ \cdots$ に共通な約数をそれらの整数の公約数という．1 は常に公約数である．公約数の絶対値は $a,\ b,\ c,\ \cdots$ のいずれの絶対値よりも大きくはないので，公約数の中に最大のものがある．それを最大公約数 (greatest common measure 略して G.C.M.) という．

同様の理由で，公約数，公倍数は正のもので考えるのですね．

南海　最大公約数が 1 であるとき，その 2 数は**互いに素**であるという．

そこで，次の定理の (1) を示してほしい．他はこれをもとに示される．それは『数論初歩』にある．

太郎　はい．

定理 30　(1) 二つ以上の整数の公倍数は，最小公倍数の倍数である．

(2) 二つ以上の整数の公約数は，最大公約数の約数である．

(3) $a,\ b$ の最小公倍数を l，最大公約数を d とすれば $ab = dl$．

(4) $a,\ b$ が互いに素で，他の整数 c と b との積 bc が a で割りきれるなら，実は c が a で割りきれる．

証明

$a,\ b,\ c,\ \cdots$ の最小公倍数を l とし, m を任意の公倍数とする．m を l で割った商を q，余りを r とすると

$$m = ql + r, \quad 0 \leqq r < l$$

となる．l も m も a の倍数であるから $l = al',\ m = am'$ とおくと

$$r = m - ql = a(m' - ql')$$

より, r は a の倍数である．同様に $b,\ c,\ \cdots$ の倍数でもあり，r は $a,\ b,\ c,\ \cdots$ の公倍数となる．ところが l は正で最小の公倍数であったから，もし r が 0 でないとすると, l より小さい正の公倍数があることになり, l の最小性に反する．

$$\therefore \quad r = 0$$

つまり m は l の倍数である．

南海　この定理の証明において,「除法の原理」が基本定理として用いられてることがわかる．日頃当然のように論証で使っていることが,「除法の原理」を基礎に厳密に示される．

2.8.2.3　因数分解

南海　次に因数分解を考えよう．先に見たように，因数分解は

$$12 = 2^2 \cdot 3 = 2 \cdot (-2) \cdot (-3)$$

のように，全体として 1 になるように ± 1 を割り振ってもよい．

整数 α をこれ以上分解できないところまで分解して，

$$\alpha = \pm {p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \cdots {p_m}^{e_m}$$

の形にしたものを素因数分解という．

$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m$ は異なる素数，$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_m$ は正の整数である．

合成数は素数の積として順序を除けばただ一通りに表すことができる．これが**素因数分解の一意性**といわれる基本定理である．

定理 31　合成数を素数の積に分解することができる．かつ，その分解の結果は（因数の順序をのぞけば）一意である．

南海　この証明は『数論初歩』をみてほしい．概略をいえば，分解できることは数学的帰納法で示す．一意性の証明は，整数の積 ab を素数 p が割り切れば，p は a または b を割り切る，ということを用いる．これは先の定理 30 の (4) からわかる．

太郎　なるほど．すべて除法が論証の根拠になっているのですね．

南海　最近，次のような除法を用いない因数分解の一意性の証明を『数学のたのしみ』(2006 年夏号，日本評論社) の「素数・ゼータ関数・三角関数」(黒川重信) で教えられた．ツェルメロによるものであるということだ．

それを紹介しよう．これは除法を用いていない．自然数の集合には最小のものが存在することだけを用いている．

因数分解の可能性は同様なので，一意性のみ別証明をおこなう．

因数分解の一意性の別証明

異なる因数分解をもつ自然数の集合を考える．この集合に属する最小の自然数を n とする．n は相異なる 2 つの因数分解をもつ．それを

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r \qquad (p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_r)$$
$$n = q_1 q_2 \cdots q_s \qquad (q_1 \leqq q_2 \leqq \cdots \leqq q_s)$$

とする．ここに $p_1,\ \cdots,\ p_r,\ q_1,\ \cdots,\ q_s$ は素数である．これが異なる因数分解ということは $r \neq s$ か，または $r = s$ で $p_i \neq q_j$ となる $i,\ j$ が存在するか，のいずれかである．

また，$p_1,\ \cdots,\ p_r$ のいずれも $q_1,\ \cdots,\ q_s$ のいずれとも異なる．なぜなら，もし $p_i = q_j$ なら，これを約せば n より小さい数で，異なる因数分解をもつ自然数が得られ，n がそのような数のなかで最小であることに反する．

$p_1 < q_1$ とする．ここで自然数 m を

$$\begin{aligned} m &= n - p_1 q_2 \cdots q_s \\ &= (q_1 - p_1) q_2 \cdots q_s \end{aligned}$$

で定める．$m < n$ である．

この m の因数分解における因数 $q_1 - p_1$ は p_1 の倍数ではない．なぜならもし p_1 の倍数なら q_1 が p_1 の倍数となり互いに異なる素数であることに反する．よってこの因数分解に p_1 は現れない．

一方 m は

$$\begin{aligned} m &= n - p_1 q_2 \cdots q_s \\ &= p_1(p_2 \cdots p_r - q_2 \cdots q_s) \end{aligned}$$

でもある．この m の因数分解には，因数 p_1 が現れている．

よって m の 2 つの因数分解は相異なる因数分解である．

$m < n$ なので，n が異なる 2 つの因数分解をもつ最小の自然数であることと矛盾した．

したがって異なる 2 つの因数分解をもつ自然数は存在しない． □

太郎　わかりました．

除法の原理自身，除法が一意に出来ることを示すためには自然数の集合には最小のものが存在することを用いるのでした．

だから，除法を使うか使わないかにかかわらず，自然数の性質が土台になっています．

南海　そうなのだ．だから，このツェルメロの証明は，自然数の集合には最小のものが存在することをいったん除法の原理にまとめることをせず，自然数の性質から直接示す，ともいえる．

これを参考にして，後で整式の因数分解の一意性の証明もおこないたい．

2.8.2.4　差で閉じた部分集合

南海　もう一つ，証明に除法が使われる基本定理を紹介しよう．

定理 32　整数からなる，空でなく $\{0\}$ のみでもない集合 A が次の性質をもつとする．

$$a,\ b \in A \quad \Rightarrow \quad a - b \in A$$

このとき集合 A はある整数 d の倍数の全体と一致する．つまり

$$A = \{\ dn \mid n : \text{整数}\ \}$$

証明

条件から $0 = a - a \in A$ である．その結果，$a \in A$ なら $-a = 0 - a \in A$ である．

また，自然数 n に対して $na \in A$ のとき

$$(n+1)a = na - (-a) \in A$$

となるので，数学的帰納法によって $a \in A$ なら $na \in A$ である．

そこで A の要素のうち，正の要素からなる部分集合に属する最小の要素を d とする．自然数の集合には最小の要素が存在するので，d はつねに存在する．

A の任意の要素 a をとり，それを d で割る．

$$a = dq + r \quad 0 \leqq r < d$$

とおく．$d \in A$ より $dq \in A$ である．よって

$$r = a - dq \in A$$

ここでもし $r > 0$ なら d が正で最小の要素であることに反する．よって $r = 0$，つまり A の任意の要素 a は d の倍数である．

逆に，d の倍数が A に属することはすでに示した．

したがって $A = \{\, dn \mid n : \text{整数} \,\}$ が示せた． □

南海　この A ように，差と整数倍が再び A に属するような部分集合をイデアルというのだが，有理整数のイデアルは，ある整数の倍数全体になる，ことを意味している．

2.8.2.5　1 次不定方程式の解の存在

南海　これを用いると次のことが示される．

定理 33　p と q を互いに素な整数とする．このとき方程式

$$px + qy = 1$$

は整数の解をもつ．

太郎　この事実は知っていますが，証明は部屋割り論法を用いるものです．

部屋割り論法による証明

南海　まづそれを復習しよう．次の例題を解いてみてほしい．

例題 2.8.1 a, b は互いに素な整数とする．

(1) k を整数とするとき， ak を b で割った余りを $r(k)$ で表す．k, l を $b-1$ 以下の正の整数とするとき，$k \neq l$ ならば $r(k) \neq r(l)$ であることを示せ．

(2) $am + bn = 1$ を満たす整数 m, n が存在することを示せ．

太郎　(1) 対偶を示す．

$$\begin{aligned} r(k) = r(l) \quad &\Longleftrightarrow \quad ak - al = a(k-l) \text{ が } b \text{ の倍数} \\ &\qquad\quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素なので}) \\ &\Longleftrightarrow \quad k - l \text{ が } b \text{ の倍数} \\ &\qquad\quad -(b-2) \leqq k - l \leqq b - 2 \text{ なので} \\ &\Longleftrightarrow \quad k - l = 0 \end{aligned}$$

よって $k \neq l$ ならば $r(k) \neq r(l)$ であることが示された．

(2) a と b が互いに素なので，$1 \leqq k \leqq b-1$ に対して ak は b の倍数とはならない．ゆえにこのとき $1 \leqq r(k) \leqq b-1$ である．

一方 $k \neq l$ ならば $r(k) \neq r(l)$ なので $r(1)$, $r(2)$, $\cdots$, $r(b-1)$ はすべて異なる $b-1$ 個の整数で，すべて $1 \leqq r(k) \leqq b-1$ をみたす．

ゆえに鳩の巣原理により $r(1)$, $r(2)$, $\cdots$, $r(b-1)$ は 1, 2, $\cdots$, $b-1$ の各値を一つずつとる．ゆえに $r(m) = 1$ となる m $(1 \leqq m \leqq b-1)$ が存在する．つまり $am - 1$ が b の倍数である．これを bn とおくと

$$am - 1 = bn$$

すなわち，$am + bn = 1$ を満たす整数 m, n が存在することが示された．

南海　この例題も，入試問題の改題だが，高校数学ではこのように (1) を用いていわゆる部屋割り論法で証明するのが普通だ．

実は定理 32 を用いる次の証明法の方が一般的だ．

なぜなら，変数を増やして $p,\ q,\ r$ の最大公約数が 1 なら

$$px + qy + rz = 1$$

は整数の解をもつことなども，まったく同様に示せる．変数の数が多くなってもよい．

さて，定理 32 を用いる定理 33 の証明だ．

$$A = \{\ px + qy \mid x \text{ と } y \text{ は整数}\ \}$$

とおく．

$a = px_1 + qy_1$，$b = px_2 + qy_2$ が A に属せば

$$a - b = p(x_1 - x_2) + q(y_1 - y_2) \in A$$

である．

したがって定理 32 より A は，A に属するある整数 d の倍数の全体である．$d = px_0 + qy_0$ とする．

一方

$$p = p \cdot 1 + q \cdot 0 \in A,\ q = p \cdot 0 + q \cdot 1 \in A$$

なので，p も q も d の倍数である．つまり d は p と q の公約数である．p と q は互いに素なので，$d = 1$ である．つまり

$$px_0 + qy_0 = d = 1$$

より方程式 $px + qy = 1$ には解 $(x_0,\ y_0)$ が存在した．　□

2.8.3　整式の整数論

2.8.3.1　整式の除法

南海　以上の議論を，整式の場合に行おう，というのが今日の主題だ．

ここで，整式の整数論がどのように成りたつかを考えていくのだが，少し準備的な考察が必要だ．

それは係数をどこにとるかだ．

太郎　有理数係数とか，実数係数とかですか．

南海　普通は実数を係数とする整式全体を考える．このような実数係数の整式の集合を，変数を明示して $R[x]$ と表そう．

以下のことは $R[x]$ で考えても，有理数係数にかぎって $Q[x]$ で考えても，また複素数で考え $C[x]$ としても同じことである．そこで，K を有理数の集合 Q，実数の集合 R，複素数の集合 C のいずれかを表すものとし，これからは K に係数をもつ整式の集合 $K[x]$ を考えることにしよう．

ただし，整数係数で考えるときはまた別であることには注意したい．

x の整式は，つぎの除法の基本性質をもつ．ここで $\deg f(x)$ は整式 $f(x)$ の次数を表す．

定理 34 (整式の除法の原理)　整式 $f(x),\ g(x)(\deg g(x) \geqq 1)$ とする．このとき，

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)\ ,\ \deg r(x) < \deg g(x)$$

となる整式 $q(x),\ r(x)$ がただ 1 組，存在する．

証明

$\deg f(x) < \deg g(x)$ ならば $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$ でよい．

$\deg f(x) \geqq \deg g(x)$ のとき, $\deg f(x) = n$, $\deg g(x) = m$ とする． $f(x)$ と $g(x)$ の n, m 次の項をそれぞれ a_0x^n, bx^m とする．

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b}x^{n-m}g(x)$$

と定めれば, $\deg f_1(x) < \deg f(x)$ である．$f_1(x)$ と $g(x)$ について同様の操作を繰り返す．$f_k(x)$ の次数が n_k で最高次数の係数が a_k とすれば

$$f_{k+1}(x) = f_k(x) - \frac{a_k}{b}x^{n_k-m}g(x)$$

l 回の操作の後, $\deg f_l(x) < \deg g(x)$ となったとき，

$$f_l(x) = r(x),\ q(x) = \sum_{k=0}^{l-1}\frac{a_k}{b}x^{n_k-m}$$

とする．この $f_1(x)$ に対し

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)\frac{a_0}{b}x^{n-m} + f_1(x) \\ &= g(x)\frac{a_0}{b}x^{n-m} + g(x)\frac{a_1}{b}x^{n_1-m} + f_2(x) \\ &\cdots \\ &= g(x)q(x) + f_l(x) \end{aligned}$$

となるので，定理の等式を満たす．

これが 1 組しかないことを示す．2 組あったとする．

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x) \\ &= g(x)\cdot q_2(x) + r_2(x) \end{aligned}$$

すると，

$$g(x)\cdot\{q_1(x) - q_2(x)\} = r_2(x) - r_1(x) \tag{2.5}$$

となる．ここでもし $q_1(x) - q_2(x) \neq 0$ なら $\deg(r_2(x) - r_1(x)) \geqq \deg g(x)$ である．

ところが一方，$\deg r_1(x) < \deg g(x)$, $\deg r_2(x) < \deg g(x)$ だから，$\deg(r_2(x) - r_1(x)) < \deg g(x)$．これは矛盾．

ゆえに等式 (2.5) が成立するのは，$q_1(x) = q_2(x)$ のときのみである．このとき, $r_1(x) = r_2(x)$ となる． □

2.8.3.2 整式の約数・倍数

南海 まず，整数の場合と同じように，整式 $f(x)$ が整式 $g(x)$ の倍数であるとは，$f(x) = q(x)g(x)$ を満たす整式 $q(x)$ が存在することと定義する．

整式の場合も割り算ができ，$f(x)$ を $g(x)$ に対して，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商と余りが一意に確定することから，

$f(x)$ が $g(x)$ の倍数であることは，$f(x)$ を $g(x)$ で割った余りが 0 であることと同値である．

太郎　因数分解は

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)=\{3(x+1)\}\left\{\frac{1}{3}(x+2)\right\}=\cdots$$

のように，定数倍を除いて確定するのですね．

南海　その通りだ．

このように，約数や倍数，因数分解は，定数倍の違いを除いて決まる．

太郎　$K[x]$ の中で，0 でない定数は逆数もまた整式です．逆数もまた整式となるのは 0 でない定数にかぎります．$K[x]$ では 0 でない定数が単数なのですね．

南海

0 および定数でない整式 $f(x)$ は少なくとも定数と (0 でない定数) $\times f(x)$ を約数を持つ．
これら以外の約数を真の約数という．真の約数を持たない整式を **既約** という．

既約かどうかは，定数倍しても変わらない．

$$x+1,\ 3(x+1),\ -\sqrt{2}(x+1)$$

はすべて既約である．

既約な整式というのは，整数での素数と同じ役割を果たす．

ここで注意．

既約かどうかは，係数をどこで考えるかによって異なる．例を挙げてほしい．

太郎　$f(x)=x^4-4$ は

- $Q[x]$ では $f(x)=(x^2-2)(x^2+2)$ と因数分解され，$Q[x]$ で $x^2-2,\ x^2+2$ は既約．
- $R[x]$ では $f(x)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$ と因数分解され，$R[x]$ で $x-\sqrt{2},\ x+\sqrt{2},\ x^2+2$ は既約．
- $C[x]$ では $f(x)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$ と因数分解され，$C[x]$ で $x-\sqrt{2},\ x+\sqrt{2},\ x-\sqrt{2}i,\ x+\sqrt{2}i$ は既約．

となります．

南海　そう．だから既約かどうかは係数をどこにとるかで変わり，整式固有の性質ではない．

太郎　だからあまり素数とはいわないのですね．

2.8.3.3　最小公倍数・最大公約数

南海　さらに整数のときと同様に，公約数，公倍数が定義される．整数では ±1 倍を除いて考えるところを，整式では 0 でない定数倍を除いて考えることにすれば，まったく同じである．

公約数や公倍数は整数の場合と同じである．2 つの整式 $f(x)$ と $g(x)$ がある．

最大公約数とは，$f(x)$ と $g(x)$ の公約数のなかで，次数が最も大きいものをいう．最大公約数が定数のとき，$f(x)$ と $g(x)$ は**互いに素**であるという．

最小公倍数とは，$f(x)$ と $g(x)$ の公倍数のなかで，次数が最も小さいものをいう．

太郎　最大公約数も最小公倍数も定数倍を除いて一つに定まる．

南海　それは証明が必要だ．それを含めて次の定理の証明を整数の場合にならって構成してほしい．簡単のために，$a(x)$ や $b(x)$ などで整式を表すことにする．すると整数の場合の証明が，ほんの一部の手直しでそのまま使える．どこを直せばよいか考えてみてほしい．

定理 35　(1) 二つ以上の整式の公倍数は，最小公倍数の倍数である．

(2) 二つ以上の整数の公約数は，最大公約数の約数である．

(3) $a(x)$, $b(x)$ の最小公倍数を $l(x)$ ，最大公約数を $d(x)$ とすれば $a(x)b(x) = d(x)l(x)$ ．

(4) $a(x)$, $b(x)$ が互いに素で，他の整数 $c(x)$ と $b(x)$ との積 $b(x)c(x)$ が $a(x)$ で割りきれるなら，実は $c(x)$ が $a(x)$ で割りきれる．

南海　(1) を示してほしい．他はそれをもとに『数論初歩』と同様に示される．
太郎　整数の場合を手直しするところは，絶対値を次数で考えるところです．
証明
$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $\cdots$ の最小公倍数を $l(x)$ とし, $m(x)$ を任意の公倍数とする．$m(x)$ を $l(x)$ で割った商を $q(x)$ ，余りを $r(x)$ とすると

$$m(x) = q(x)l(x) + r(x), \quad \deg r(x)) < \deg l(x)$$

となる．$l(x)$ も $m(x)$ も $a(x)$ の倍数であるから $l(x) = a(x)l(x)'$, $m(x) = a(x)m(x)'$ とおくと

$$r(x) = m(x) - q(x)l(x) = a(x)\{m'(x) - q(x)l'(x)\}$$

より, $r(x)$ は $a(x)$ の倍数である．同様に $b(x)$, $c(x)$, $\cdots$ の倍数でもあり，$r(x)$ は $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $\cdots$ の公倍数となる．ところが $l(x)$ は次数が最小の公倍数であったから，もし $r(x)$ が 0 でないとすると, $l(x)$ より次数が小さい公倍数があることになり, $l(x)$ の次数の最小性に反する．

$$\therefore \quad r(x) = 0$$

つまり $m(x)$ は $l(x)$ の倍数である．　□
南海　この定理の証明においても,「除法の原理」が基本定理として用いられてることがわかる．

2.8.3.4　因数分解

南海　さて，整式 $f(x)$ を既約な整式の積に分解して，

$$f(x) = p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_m(x)^{e_m}$$

の形にしたものを素因数分解という．
$p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$, $p_m(x)$ は異なる既約な整式，e_1, e_2, $\cdots$, e_m は正の整数である．
このとき整数と同様に次の定理が成り立つ．

定理 36　整式は既約な整式の積として，定数倍と順序を除けばただ一通りに表すことができる．

整式の場合も**素因数分解の一意性**という．基本的な定理である．

太郎　この証明は整数の場合と同じですね．ここでも，除法が論証の根拠になっているのですね．

南海　そこでだ．整数の因数分解の一意性の証明にならって，整式の場合についても，除法を用いないツェルメロの方法による別証明をしてみよう．

因数分解の一意性の別証明

異なる因数分解をもつ整式の集合を考える．この集合に属する次数が最小の整式を $f(x)$ とする．$f(x)$ は相異なる 2 つの因数分解をもつ．それを

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x) \qquad (\deg p_1(x) \leqq \cdots \leqq \deg p_r(x))$$
$$f(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x) \qquad (\deg q_1(x) \leqq \cdots \leqq \deg q_s(x))$$

とする．ここに $p_1(x),\ \cdots,\ p_r(x),\ q_1(x),\ \cdots,\ q_s(x)$ は既約である．これが異なる因数分解ということは $r \neq s$ か，または $r = s$ で異なる $p_i(x)$ と $q_j(x)$ が存在するか，のいずれかである．ただし，ここで因数が異なるとは，どのような定数を一方に乗じても $p_i(x)$ と $q_j(x)$ は一致しないことをいう．

また，$p_1(x),\ \cdots,\ p_r(x)$ のいずれも $q_1(x),\ \cdots,\ q_s(x)$ のいずれとも異なる．なぜなら，もし $p_i(x) = q_j(x)$ なら，これを約せば $f(x)$ より小さい次数で，異なる因数分解をもつ整式が得られ，$f(x)$ がそのような整式のなかで次数最小であることに反する．

$\deg p_1(x) < \deg q_1(x)$ とする．$n = \deg q_1(x) - \deg p_1(x)$ とすると，適当な定数 a を

$$\deg\{q_1(x) - ax^n p_1(x)\} < \deg q_1(x)$$

となるようにとる．

ここで整式 $g(x)$ を

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - ax^n p_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x) \\ &= \{q_1(x) - ax^n p_1(x)\}q_2\cdots q_s \end{aligned}$$

で定める．$\deg g(x) < \deg f(x)$ である．

この $g(x)$ の因数分解における因数 $q_1(x) - ax^n p_1(x)$ は $p_1(x)$ の倍数ではない．なぜならもし $p_1(x)$ の倍数なら $q_1(x)$ が $p_1(x)$ の倍数となり，互いに異なる既約な整式であることに反する．よってこの因数分解に $p_1(x)$ は現れない．

一方 $g(x)$ は

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - ax^n p_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x) \\ &= p_1(x)\{p_2(x)\cdots p_r(x) - ax^n q_2(x)\cdots q_s(x)\} \end{aligned}$$

でもある．この $g(x)$ の因数分解には，因数 $p_1(x)$ が現れている．

よって $g(x)$ の 2 つの因数分解は相異なる因数分解である．

$\deg g(x) < \deg f(x)$ なので，$f(x)$ が異なる 2 つの因数分解をもつ次数最小の整式であることと矛盾した．

したがって異なる 2 つの因数分解をもつ整式は存在しない．　□

2.8.3.5　整式のイデアル

南海　もう一つ，整数の場合と同様に，証明に除法が使われる基本定理を紹介しよう．

定理 37　$K[x]$ の部分集合 H が空でなく $\{0\}$ のみでもなく，次の性質をもつとする．

$$f(x),\ g(x) \in H \quad \Rightarrow \quad f(x) - g(x) \in H$$
$$f(x) \in K[x],\ g(x) \in H \quad \Rightarrow \quad f(x)g(x) \in H$$

このとき集合 H はある整式 $d(x)$ の倍数の全体と一致する．つまり

$$H = \{\ d(x)f(x) \mid f(x) \in K[x]\}$$

南海　これが，整式のイデアルの定義だ．整式のイデアルはある整式の倍数全体になる，ということだ．
太郎
証明
条件から $0 = f(x) - f(x) \in H$ である．その結果，$f(x) \in H$ なら $-f(x) = 0 - f(x) \in H$ である．
そこで H の要素のうち，次数最小の整式 $d(x)$ をとる．
H の任意の要素 $f(x)$ をとり，それを $d(x)$ で割る．

$$f(x) = d(x)Q(x) + R(x) \quad \deg(r(x)) < \deg(d(x))$$

とおく．$d(x) \in H$ より $Q(x)d(x) \in H$ である．よって

$$R(x) = f(x) - Q(x)d(x) \in H$$

ここでもし $R(x) \neq 0$ なら $d(x)$ が次数最小の要素であることに反する．よって $R(x) = 0$，つまり H の任意の要素 $f(x)$ は $d(x)$ の倍数である．
したがって $H = \{\ d(x)f(x) \mid f(x) \in K[x]\}$ が示せた．　□

2.8.3.6　不定方程式の解の存在

南海　これを用いると次のことが示される．

定理 38　$p(x)$ と $q(x)$ を互いに素な整式とする．このとき

$$p(x)u(x) + q(x)v(x) = 1$$

を満たす整式 $u(x)$ と $v(x)$ が存在する．

太郎　整式の場合，余りが有限個ではないので部屋割り論法を用いる方法はうまくいかないようです．
南海　定理 37 を用いて定理 38 を証明してほしい..
太郎

$$H = \{\ p(x)u(x) + v(x)g(x) \mid u(x),\ v(x) \in K[x]\}$$

とおく．
$f(x) = p(x)u_1(x) + q(x)v_1(x)$，$g(x) = p(x)u_2(x) + q(x)v_2(x)$ が H に属せば

$$f(x) - g(x) = p(x)\{u_1(x) - u_2(x)\} + q(x)\{v_1(x) - v_2(x)\} \in H$$

である．

したがって定理 37 より H は，H に属するある整式 $d(x)$ の倍数の全体である．$d(x) = p(x)u_0(x) + q(x)v_0(x)$ とする．

一方

$$p(x) = p(x) \cdot 1 + q(x) \cdot 0 \in H,\ q(x) = p(x) \cdot 0 + q(x) \cdot 1 \in H$$

なので，$p(x)$ も $q(x)$ も $d(x)$ の倍数である．つまり $d(x)$ は $p(x)$ と $q(x)$ の公約数である．$p(x)$ と $q(x)$ は互いに素なので，$d(x)$ は定数である．しかも，H は 0 のみではないので $d \neq 0$ である．

つまり

$$p(x)u_0(x) + q(x)v_0(x) = d \text{ (定数)}$$

より $\dfrac{1}{d}u_0(x),\ \dfrac{1}{d}v_0(x)$ は $p(x)u(x) + q(x)v(x) = 1$ を満たす． □

2.8.3.7　ユークリッドの互除法

太郎　ユークリッドの互除法も同じようにできるのですか．

南海

簡単のために整式 $f(x),\ g(x)$ の最大公約数を $(f(x),\ g(x))$ と書く．例題にしたものあがるのでやってみてほしい．

例題 2.8.2 次の (1)(2) を証明し，これを用いて (3) を求めよ．

(1) 任意の整式 $q(x)$ に対して、 $(f(x), g(x)) = (f(x) - q(x) \cdot g(x), g(x))$

(2) $f(x)$ を $g(x)$ で割った余り $r(x)$ に対し、 $(f(x), g(x)) = (r(x), g(x))$

(3) $(x^3 + 2x^2 - 4x - 8,\ 2x^2 + 6x + 4)$

太郎　解いてみます．

(1)

$(f(x), g(x)) = d_1(x)$, $(f(x) - q(x) \cdot g(x), g(x)) = d_2(x)$ とします．

$f(x)) = d_1(x)f_1(x), g(x)) = d_1(x)g_1(x)$．また $f(x) - q(x) \cdot g(x) = d_2(x)h(x), g(x) = d_2(x)g_2(x)$ とします．

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + d_2(x)h(x) = d_2(x)\{q(x)g_2(x) + h(x)\}$$

より $d_2(x)$ は $f(x)$ と $g(x)$ の公約数である．$f(x)$ と $g(x)$ の最大公約数が $d_1(x)$ なので，定理 35(2) より，$d_2(x)$ は $d_1(x)$ の約数である．

一方

$$f(x) - q(x) \cdot g(x) = d_1(x)\{f_1(x) - q(x) \cdot g_1(x)\}$$
$$g(x) = d_1(x)g_1(x)$$

より，$d_1(x)$ は $f(x) - q(x) \cdot g(x)$ と $g(x)$ の公約数である．したがって同様の理由から $d_1(x)$ は $d_2(x)$ の約数である．

つまり $d_1(x) = d_2(x)$ が示された．

(2)

$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $q(x)$ とすると，余りが $r(x)$ なので

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

したがって，(1) から

$$(f(x), g(x)) = (f(x) - q(x) \cdot g(x),\ g(x)) = (r(x), g(x))$$

(3)

$$(x^3 + 2x^2 - 4x - 8,\ 2x^2 + 6x + 4) = (x^3 + 2x^2 - 4x - 8,\ x^2 + 3x + 2)$$

である．$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ を $x^2 + 3x + 2$ で割ることにより，

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x^2 + 3x + 2)(x - 1) - 3x - 6$$

(2) から

$$(x^3 + 2x^2 - 4x - 8,\ 2x^2 + 6x + 4) = (-3x - 6,\ x^2 + 3x + 2) = (x + 2,\ x^2 + 3x + 2)$$

$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ なので

$$(x^3 + 2x^2 - 4x - 8,\ 2x^2 + 6x + 4) = x + 2$$

2.8.4 問題

南海　いくつかの演習問題を紹介しておこう．

演習 33 解答 31 【80 京大文系】
互いに異なる n 個（$n \geqq 3$）の正の数の集合 $S = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ が次の性質をもつという．

「S から相異なる要素 $a_i,\ a_j$ をとれば $a_i - a_j,\ a_j - a_i$ の少なくとも一方は必ず S に属する」

このとき，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の順序を適当に変えれば等差数列になることを示せ．

演習 34 解答 32 【80 京大理系】
互いに異なる n 個（$n \geqq 3$）の実数の集合 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が次の性質をもつという．

「S から相異なる要素 a_i，a_j をとれば $a_i - a_j$，$a_j - a_i$ の少なくとも一方は必ず S に属する」

このとき，

(1) 次の 2 つのうちのいずれか一方が成り立つことを示せ．
（イ）$a_i \geqq 0$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$
（ロ）$a_i \leqq 0$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

(2) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の順序を適当に変えれば等差数列になることを示せ．

演習 35 解答 33 【85 お茶の水女子大】
自然数を要素とする空集合でない集合 G が次の条件 (i),(ii) を満たしているとする．

(i) $m,\ n$ が G の要素ならぱ，$m+n$ は G の要素である．

(ii) $m,\ n$ が G の要素で $m>n$ ならば，$m-n$ は G の要素である．

このとき G の量小の要素を d とすると $G=\{kd \mid k$ は自然数 $\}$ であることを証明せよ．

演習 36 解答 34 【90 京都教育大】

まず整式に関する用語の確認をする．

- 整式 $f(x)$ が整式 $g(x)$ の約数であるとは $f(x)p(x)=g(x)$ を満たす整式 $p(x)$ が存在することをいう．
- 整式 $d(x)$ が 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ の公約数であるとは，$d(x)$ が $f(x)$ の約数であり，かつ，$g(x)$ の約数でもあることをいう．
- 整式 $d(x)$ が 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ の最大公約数であるとは，$d(x)$ が $f(x)$，$g(x)$ の公約数の中で次数が最大のものであることをいう．$(f(x)=g(x)=0$ の場合は除く$)$．

これらの用語に注意して, 次の問に答えよ．

(1) 整式 $f(x)$ は $f(x)$ の約数であることを示せ．

(2) 0 と異なる整式 $f(x)$ が整式 $g(x)$ の約数であれば，$f(x)$ は $f(x)$，$g(x)$ の最大公約数であることを示せ．

(3) $f(x)$ が 0 とは異なる整式で，整式 $g(x)$ を $f(x)$ で割った余りが $r(x)$ であるとする．いま，整式 $d(x)$ が $r(x),\ f(x)$ の最大公約数であるとすれば，$d(x)$ は $f(x)$，$g(x)$ の最大公約数でもあることを示せ．

演習 37 解答 35 【02 中央大改題】

$f(x)=x-1,\ g(x)=(x+1)^3$ であるとき，

$$p(x)f(x)+q(x)g(x)=1$$

を満たす整式 $p(x),\ q(x)$ の組のなかで，$p(x)$ の次数が最小である組，および $p(x)$ の最高次数の係数が 1 であるなかで次数が最小の組，をそれぞれ求めよ．

2.9　終結式と不変式

2013.9.16/2007.5.27/2007.3.12

2.9.1　不変式としての判別式

耕介　『数論初歩』の「2 次無理数の展開と判別式」のところに次の事実が出てきました．

> 無理数 ω_0 が 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解であるとき，これと対等な無理数 $\dfrac{p\omega_0+q}{r\omega_0+s}$ を解にもつ 2 次方程式を $a'x^2+b'x+c'=0$ とする．二つの 2 次式の判別式を D と D' とすると，$D=D'$ である．

ある無理数 ω_0 に対し，無理数 ω_1 が $ps-qr=1$ であるような整数 $p,\ q,\ r,\ s$ を用いて $\omega_1=\dfrac{p\omega_0+q}{r\omega_0+s}$ と表されるとき，この二つの無理数 $\omega_0,\ \omega_1$ は互いに対等であるというのでした．$\omega_0=\dfrac{s\omega_1-q}{-r\omega_1+p}$ なので，これをもとの方程式に代入し，得られた ω_1 の満たす 2 次方程式を決める．その判別式をとるのですが，証明を読んでみると，$p,\ q,\ r,\ s$ が整数であることは使っていません．要するに，元の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の x に，$ps-qr=1$ であるような $p,\ q,\ r,\ s$ によって作られる $\dfrac{sx-q}{-rx+p}$ を代入し，分母を払って整理すると新たな 2 次方程式 $a'x^2+b'x+c'=0$ が得られる．二つの 2 次式の判別式は変わらない，ということを言っています．

南海　x を $\dfrac{sx-q}{-rx+p}$ に置きかえて得られた方程式の判別式が，この変換で変わらないことに気づいたのはすばらしい．$p,\ q,\ r,\ s$ は整数でなくてもよいばかりでなく，複素数一般でもかまわない．

数学では，何らかの変換を行ったときに，それに対して不変なものを見出し，不変なものが作る集合の構造を考えることが，大変重要である．不変な量，不変な関係を明確にすることが，数学的現象を考えるうえでもっとも基本的な方針だ．

正確な定義はこれからおこなっていくが，このような変換によって不変な式を一般に**不変式**という．

耕介　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ から，先の方法で別の 2 次方程式 $a'x^2+b'x+c'=0$ を作る．その判別式 $b'^2-4a'c'$ を，もとの係数 $a,\ b,\ c$ で表すと，結局 b^2-4ac に戻ります．

一定の係数の変換に対し判別式は不変である，ということですね．

南海　そうだ．今日は，高校数学の背景のひとつなっている不変式について，高校数学と地続きなところから考えはじめよう，

$ps-qr=1$ であるような任意の $p,\ q,\ r,\ s$ に対して，x を $\dfrac{sx-q}{-rx+p}$ に置きかえ分母を払って 2 次式を作る．係数は変化するが，判別式は変わらないという条件を考える．$p,\ q,\ r,\ s$ が $ps-qr=1$ を満たすことと，$s,\ -q,\ -r,\ p$ が $sp-(-q)(-r)=1$ を満たすことは同値であるから，この条件は，$ps-qr=1$ であるような任意の $p,\ q,\ r,\ s$ に対して，x を $\dfrac{px+q}{rx+s}$ に置きかえ分母を払って 2 次式を作っても，判別式は変わらない，という条件と同値だ．

そこで x を $\dfrac{px+q}{rx+s}$ に置きかえ分母を払って 2 次式を作ることで不変性を確認していこう．

2 次方程式を

$$f(x)=ax^2+bx+c=0$$

としよう．改めて，方程式の変換と判別式の不変性を確認しよう．

耕介　判別式は $D=b^2-4ac$ です．

南海　この x に $\dfrac{px+q}{rx+s}$ を代入し分母を払って得られる新たな 2 次方程式を

$$a'x^2+b'x+c'=0$$

とする．つまり

$$(rx+s)^2 f\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)=a'x^2+b'x+c'$$

だ．この 2 次式の判別式 D' を実際に計算してみてほしい．

耕介

$$a\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^2+b\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)+c=0$$

分母をはらってまとめると，

$$\begin{aligned}&(rx+s)^2 f\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)\\ =\;&(ap^2+bpr+cr^2)x^2+\{2apq+b(ps+qr)+2crs\}x+(aq^2+bqs+cs^2)\end{aligned}$$

です．したがって

$$\begin{cases} a'=ap^2+bpr+cr^2\\ b'=2apq+b(ps+qr)+2crs\\ c'=aq^2+bqs+cs^2\end{cases}\tag{2.6}$$

となる．$ps-qr=1$ なので

$$\begin{aligned}D' &= \{2apq+b(ps+qr)-2crs\}^2-4(ap^2+bpr+cr^2)(aq^2+bqs+cs^2)\\ &= \{(ps+qr)^2-4pqrs\}b^2+4ac\{2pqrs-(p^2s^2+q^2r^2)\}\\ &= (ps-qr)^2(b^2-4ac)=D\end{aligned}$$

確かに二つの 2 次方程式の判別式は等しい．　□

南海　今は変換された係数から直接計算したが，根の方から考える別解がある．

$$ax^2+bx+c=0$$

の根をそれぞれ α, β とする．変換された方程式の根はどのようになるなか．

耕介　$f(x)$ は

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解されます．だから

$$\begin{aligned}(rx+s)^2 f\left(\frac{px+q}{rx+s}\right) &= a(rx+s)^2\left(\frac{px+q}{rx+s}-\alpha\right)\left(\frac{px+q}{rx+s}-\beta\right)\\ &= a\{(px+q)-\alpha(rx+s)\}\{(px+q)-\beta(rx+s)\}\\ &= a\{(-r\alpha+p)x-(-s\alpha+q)\}\{(-r\beta+p)x+(-s\beta+q)\}\\ &= a(-r\alpha+p)(-r\beta+p)\left(x-\frac{s\alpha-q}{-r\alpha+p}\right)\left(x-\frac{s\beta-q}{-r\beta+p}\right)\end{aligned}$$

より

$$a'=a(-r\alpha+p)(-r\beta+p)$$

$$a'x^2+b'x+c'=0$$

の 2 根を α', β' とすると，

$$\alpha',\ \beta'=\frac{s\alpha-q}{-r\alpha+p},\ \frac{s\beta-q}{-r\beta+p}$$

です．

南海　判別式を根で表し不変性を確認してほしい．

耕介　$f(x)=ax^2+bx+c$ の解と係数の関係から $b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$ なので，判別式は

$$\begin{aligned} D &= b^2-4ac=\{-a(\alpha+\beta)\}^2-4a^2\alpha\beta \\ &= a^2(\beta-\alpha)^2 \end{aligned}$$

となる．同様に

$$D'=a'^2(\beta'-\alpha')^2$$

となる．よって

$$\begin{aligned} D' &= a'^2(\beta'-\alpha')^2 \\ &= \{a(-r\alpha+p)(-r\beta+p)\}^2\left(\frac{s\alpha-q}{-r\alpha+p}-\frac{s\beta-q}{-r\beta+p}\right)^2 \\ &= a^2\{(s\alpha-q)(-r\beta+p)-(s\beta-q)(-r\alpha+p)\}^2 \\ &= a^2(ps-qr)^2(\beta-\alpha)^2=D \end{aligned}$$

となる．□

根の変換の方から示すとこのようになりました．

南海　その通りで，この方法はそのまま一般化できる．判別式というものの定義も，係数からするのではなく，根からおこなう．

その前に，2007 年の入試問題をひとつ紹介しよう．この問題では方程式を $ax^2+bx+c=0$ の代わりに $ax^2+2bx+c=0$ と置いている．われわれも後半ではこのように置く．この 2 は ${}_2\mathrm{C}_1$ なのだが，係数をこのようにする方がより複雑なときは計算がきれいになる．$2b$ をひとかたまりにして係数の変換を考えると，これまでの考察との関連を読み取ることができる．

演習 38 (07 一橋) 解答 36

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を

$$\begin{aligned} &a_1=2, \quad a_{n+1}=4a_n \\ &b_1=3, \quad b_{n+1}=b_n+2a_n \\ &c_1=4, \quad c_{n+1}=\frac{c_n}{4}+a_n+b_n \end{aligned}$$

と順に定める．放物線 $y=a_nx^2+2b_nx+c_n$ を H_n とする．

(1) H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ．

(2) H_n と x 軸の交点を P_n，Q_n とする．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ を求めよ．

南海　さて一般的に考えるために，多項式の判別式の定義からはじめよう．

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

とする．

耕介　係数はどのようなところからとるのですか．

南海　一つの体を固定すればよいのだが，とくに断らなければ複素数体としよう．または，係数は文字のままであるとしてもよい．

定義 9 (判別式) 代数学の基本定理によって n 次方程式 $f(x) = 0$ は n 個の根をもつ．それを

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$$

とする．$f(x)$ は

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

と因数分解される．この n 個の根と最高次の係数 a_0 を用いて判別式を定義する．つまり，

$$D = a_0^{2(n-1)} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

を方程式 $f(x) = 0$，または多項式 $f(x)$ の**判別式**という．

耕介　判別式は，根をどのように入れ替えても変わりません．

南海　そう．あとで詳しく見るが，根の対称式であり，ちょうど $a_0^{2(n-1)}$ を乗じていることによって，もとの整式の係数から作られた整式になる．また，方程式 $f(x) = 0$ が重根をもつための必要十分条件が $D = 0$ であることは，判別式の定義から明らかである．

例として，$f(x) = x^3 + px + q$ の判別式を求めて見てほしい．

耕介　これは『数学対話』「三次方程式」にあります．

例 2.9.1　3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の三つの解を $\alpha,$, $\beta,\ \gamma$ とする．$a_0 = 1$ なので

$$D = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$$

である．根と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p, \quad \alpha\beta\gamma = -q$$

よって

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) &= -\{\beta^2 - \beta(\alpha + \gamma) + \alpha\gamma\} \\
&= -\{\beta^2 + \beta^2 + p - \beta(\alpha + \gamma)\} \\
&= -(\beta^2 + \beta^2 + p + \beta^2) = -(3\beta^2 + p) \\
(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) &= -(3\gamma^2 + p) \\
(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha) &= -(3\alpha^2 + p)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad D &= -(3\alpha^2+p)(3\beta^2+p)(3\gamma^2+p) \\
&= -\{p^3+3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)p^2 \\
&\qquad +9(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)p+27\alpha^2\beta^2\gamma^2\} \\
&= -[p^3+3\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}p^2 \\
&\qquad +9\{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\}p+27q^2] \\
&= -\{p^3+3\cdot(-2p)p^2+9\cdot(p^2)p+27q^2\} \\
&= -(4p^3+27q^2)
\end{aligned}
$$

この式は見たことがあります．$f(x)=x^3+px+q$ のとき，$f'(x)=3x^2+p$ です．$f(x)$ が極値をもつ場合，つまり $p<0$ のとき．極値は

$$
\begin{aligned}
f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) &= -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q \\
&= \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q \\
f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) &= -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q
\end{aligned}
$$

です．ですから，極値の積を作ると

$$
q^2-\left(\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^2=\frac{27q^2+4p^3}{27}=-\frac{D}{27}
$$

となります．ここに判別式が現れるのですね．極値が 0 になることと重根をもつことが同値です．この式はこの同値性を表しています．

これは 2 次式で $f(x)=ax^2+bx+c$ をとると，$f'(x)=2ax+b$．$x=-\dfrac{b}{2a}$ で極．極値は

$$
f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{D}{4a}
$$

となることに対応しています．

南海　そう．さて，判別式は，n 個の根の番号をどのようにつけ替えても，変わらない．つまり n 個の根の対称式である．次節で基本定理の系 1 で示すように次のことが成り立つ．

D は $f(x)$ の係数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ の $2(n-1)$ 次の整式である．

このことはここでは認め，判別式の不変性を先に確認しよう．

$ps-qr=1$ であるような 2 次行列 $\sigma=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ をとり，$f(x)$ に対して，

$$
\bar{f}(x)=(rx+s)^n f\left(\frac{px+q}{rx+s}\right) \tag{2.7}
$$

とおこう．後で定める記号からいくと $f^{\sigma^{-1}}(x)$ となる．

$$
\bar{f}(x)=a_0{}'x^n+a_1{}'x^{n-1}+a_2{}'x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}{}'x+a_n{}'
$$

とおく．

$$\begin{aligned}
& \bar{f}(x) = {a_0}'x^n + {a_1}'x^{n-1} + {a_2}'x^{n-2} + \cdots + {a_{n-1}}'x + {a_n}' \\
= \quad & (rx+s)^n \left\{ a_0 \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^n + a_1 \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{px+q}{rx+s}\right) + a_n \right\} \\
= \quad & a_0(px+q)^n + a_1(px+q)^{n-1}(rx+s) + \cdots + a_{n-1}(px+q)(rx+s)^{n-1} + a_n(rx+s)^n
\end{aligned}$$

であるから，各係数 ${a_0}'$, ${a_1}'$, $\cdots$, ${a_n}'$ はもとの係数 a_0, a_1, $\cdots$, a_n の 1 次式であり，

$$\begin{pmatrix} {a_0}' \\ {a_1}' \\ \cdots \\ {a_n}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

となる $n+1$ 次の行列 A が定まる．

耕介　2 次方程式の場合では，関係式 (2.6) が成り立つので，

$$A = \begin{pmatrix} p^2 & pr & r^2 \\ 2pq & ps+qr & 2rs \\ q^2 & qs & s^2 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

です．2 次の場合から考えると，不変式というのは，係数 a_0, a_1, $\cdots$, a_n の整式であって，それらを ${a_0}'$, ${a_1}'$, $\cdots$, ${a_n}'$ に置きかえても不変なものをいうのですね．

南海　その通りである．正確には，根の変換から定まる変換での不変式なので，**方程式の不変式**といおう．

定理 39　$f(x)$ の判別式は a_0, a_1, $\cdots$, a_n の整式であるが，この式を，${a_0}'$, ${a_1}'$, $\cdots$, ${a_n}'$ に置きかえ，そこに，変換 (2.8) で定まる a_0, a_1, $\cdots$, a_n を代入しても，不変である．つまり，判別式 D は変換 (2.8) で不変である．

南海　2 次の場合と同じであるから，証明をやってみてほしい．

耕介　はい．

証明

簡単のため $a = a_0$ とする．

$$f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = a\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$$

となるので，

$$\begin{aligned}
(rx+s)^n f\left(\frac{px+q}{rx+s}\right) &= a(rx+s)^n \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{px+q}{rx+s} - \alpha_k\right) \\
&= a\prod_{k=1}^{n}\{(px+q) - \alpha_k(rx+s)\} = a\prod_{k=1}^{n}\{(-r\alpha_k+p)x - (s\alpha_k - q)\} \\
&= a\prod_{k=1}^{n}(-r\alpha_k+p)\prod_{k=1}^{n}\left(x - \frac{s\alpha_k - q}{-r\alpha_k+p}\right)
\end{aligned}$$

したがって ${a_0}' = a\prod_{k=1}^{n}(-r\alpha_k + p)$ であり，$\bar{f}(x) = 0$ の根が $\dfrac{s\alpha_k - q}{-r\alpha_k + p}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ となる．
だからその判別式を D' とすると，定義によって

$$\begin{aligned} D' &= \left\{ a\prod_{k=1}^{n}(-r\alpha_k + p) \right\}^{2(n-1)} \prod_{1\leqq i<j\leqq n} \left(\frac{s\alpha_i - q}{-r\alpha_k + p} - \frac{s\alpha_j - q}{-r\alpha_j + p} \right)^2 \\ &= a^{2(n-1)} \prod_{1\leqq i<j\leqq n} \{(s\alpha_i - q)(-r\alpha_j + p) - (s\alpha_j - q)(-r\alpha_i + p)\}^2 \\ &= a^{2(n-1)} \prod_{1\leqq i<j\leqq n} (ps - qr)^2(\alpha_i - \alpha_j)^2 = D \end{aligned}$$

となります．確かに，判別式は不変である．この結果，係数の変換，つまり (2.9) で定まる A による係数の変換 (2.8) の方から考えてもやはり不変である． □

2.9.2 不変式の定義

南海 これまで考えてきた方程式の不変式を整理し，一般的に不変式を定義しよう．

$ps - qr = 1$ であるような 2 次行列の全体を $SL(2)$ と書こう．$\sigma \in SL(2)$ が $\sigma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ のとき，$\sigma(x) = \dfrac{px + q}{rx + s}$ と書こう．

判別式の $SL(2)$ に対する不変性の確認は，σ で考えても $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$ で考えても同じことだった．ここはもういちど最初の変換に立ちかえって考えよう．

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

に対して整式 $f^\sigma(x)$ を

$$f^\sigma(x) = (-rx + p)^n f\{\sigma^{-1}(x)\}$$

で定め，この係数を

$$f^\sigma(x) = {a_0}'x^n + {a_1}'x^{n-1} + {a_2}'x^{n-2} + \cdots + {a_{n-1}}'x + {a_n}'$$

とする．このとき，

$$\begin{pmatrix} {a_0}' \\ {a_1}' \\ {a_2}' \\ \cdots \\ {a_n}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

で定まる $n+1$ 次の行列 A が定まった．$n+1$ 次の行列で逆行列のあるものの全体を $GL(n+1)$ と書く．σ が $SL(2)$ を動くとき，これによって $GL(n+1)$ の部分集合 G が定まる．

この対応で，$\sigma,\ \tau \in SL(2)$ が $A,\ B \in GL(n+1)$ に対応しているとし，$\sigma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$，$\tau = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$ とする．$f(x)$ を σ で変換し，続いてそれを τ で変換して得られる係数はどのようになるか．

耕介　まず $f^{\sigma}(x)$ を $f^{\sigma}(x)=(-rx+p)^n f\{\sigma^{-1}(x)\}$ で定めます．

これを τ で変換すると $\tau^{-1}=\begin{pmatrix} w & -u \\ -v & t \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{aligned}(-vx+t)^n f^{\sigma}\{\tau^{-1}(x)\} &= (-vx+t)^n\{-r(\tau^{-1}(x))+p\}^n f\{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(x))\} \\ &= (-vx+t)^n\{-r(\tau^{-1}(x))+p\}^n f\{(\tau\sigma)^{-1}(x)\}\end{aligned}$$

です．

$$\begin{aligned}(-vx+t)\{-r(\tau^{-1}(x))+p\} &= (-vx+t)\left\{-r\left(\frac{wx-u}{-vx+t}\right)+p\right\} \\ &= -(vp+wr)x+(tp+ur)\end{aligned}$$

なので，これはちょうど $\tau\sigma$ による変換になります．そうか $\sigma^{-1}(x)$ と逆元を作用させるようにした方が，積同じ順の積に対応するのですね．

南海　不変性を確認するときはどちらでもよいのだが，順序を保とうとすると注意しなければならない．

耕介　これに対して係数の変換は

$$B\left\{A\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}\right\} = BA\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

となり，積 $\tau\sigma$ は BA に対応します．

南海　このようにして定まる写像

$$SL(2) \ \rightarrow \ GL(n+1)$$

は積と逆元をそのまま積と像の逆元に写す．この写像の像を G とする．G は積に関して閉じているだけではなく，行列 A が G の要素なら A^{-1} も G の要素となる．つまり G は $GL(n+1)$ の部分群である．この写像は，群の**準同型写像**であるという．

$f(x)$ の判別式は係数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ の整式であった．つまり

$$D(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)$$

と表せる．G の任意の要素 A をとり，$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ を関係式 (2.8) で変換して，判別式を

$$D(a_0{}',\ a_1{}',\ \cdots,\ a_n{}')$$

に代えたとき，$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ の整式として

$$D(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n) = D(a_0{}',\ a_1{}',\ \cdots,\ a_n{}')$$

が成り立つ．これがこれまでに調べたことのまとめだ．

耕介　なるほど．

南海　これは $SL(2)$ の $GL(n+1)$ への表現を通した判別式への作用なのだが，要するに $SL(2)$ の像である $GL(n+1)$ の部分群 G が $n+1$ 個の文字 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ に作用し，その変換で判別式を

変換すると，判別式が不変になった．そこで，次のように不変式を定義しよう．ただしここでも積が保たれるように，作用させ方を工夫しておく．

一般に n 変数の多項式

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

を考える．変数の書き方を工夫して，ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

をもちいて $f(\mathbf{x})$ と書こう．

逆行列をもつ n 次行列の集合 $GL(n)$ を考え，その部分群 G をとる．G の要素 σ に対してこれを右からかけた $\sigma\mathbf{x}$ は各要素が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の 1 次結合でできたベクトルだ．

$\sigma\mathbf{x}$ の各成分をもとの $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ に代入して得られる多項式 $f(\sigma\mathbf{x})$ を $f^\sigma(\mathbf{x})$ と書こう．

まず σ を作用させ $f^\sigma(\mathbf{x})$ を作り，この多項式に τ を作用させる．すると

$$(f^\sigma)^\tau(\mathbf{x}) = f^\sigma(\tau\mathbf{x}) = f\{\tau(\sigma\mathbf{x})\} = f(\tau\sigma\mathbf{x}) = f^{\tau\sigma}(\mathbf{x})$$

が作られる．

定義 10 (不変式) G の任意の要素 σ の作用に関して不変な多項式，つまり $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の整式として

$$f(\mathbf{x}) = f^\sigma(\mathbf{x})$$

が成り立つ多項式を $f(\mathbf{x})$ を G **不変式**という．

作用のさせ方はいろんな方式があるのだが，不変であるということに関しては，いずれでも変わらない．だから不変性を考えるかぎり混乱は起こらない．

2.9.3 対称式と基本対称式

耕介　行列が変数に何らかの変換をする．しかし，それでも変化しない整式を不変式というのですね．そうすると，置きかえで変わらない対称式も不変式ですか．あっ，置きかえも行列で表せましたっけ．

南海　いいところに気づいた．不変式の観点から対称式を考えよう．対称式とはどんなものであったか．

耕介　2 変数の場合は $f(x,y) = x^2y + 3xy + xy^2$ のように，x と y を入れ替えても式が同一になるものです．この場合 $f(x,y)$ を x と y の**対称式**という．とくに

$$x + y,\ xy$$

を**基本対称式**という．なぜ「基本」というのか．それは 2 変数の対称式はすべて $x+y,\ xy$ を用いて書き表すことができるからです．

2 変数の基本対称式は，2 次方程式の解と係数の関係に現れます．つまり，2 次方程式 $ax^2+bx+c = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

3 変数の場合は， $f(x,y,z)$ の整式で x,y,z をどのように入れ替えても式がかわらないものを対称式という．3 変数の基本対称式は，

$$x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz$$

です．

南海　さて，一般に n 個の文字変数の対称式を定義しよう．

$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の整式を $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ とする．変数の組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ をベクトルとみて $\mathbf{x}$ と書き，整式を $f(\mathbf{x})$ のようにも書く．$f(\mathbf{x})$ の単項式で各文字に関する次数の和をその単項式の次数という．各単項式の次数のなかでの最大値を，整式 $f(\mathbf{x})$ の次数という．

$f(\mathbf{x})$ が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の対称式であるとは文字変数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ のどのような置きかえに対しても，整式が不変であることをいう．文字の置きかえはいくつあるか．

耕介　$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の並べ替えだけあります．つまり $n!$ 個です．

南海　これらの置きかえも，$GL(n)$ の要素で表せる．

$n=3$ のとき，

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

のような置きかえはどのような行列に対応するか．

耕介

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ですから，行列 $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が対応します．

n 変数でも，変数の置換は各行各列の一カ所ずつのみが 1 で後は 0 の n 次行列で表せる．それが $n!$ 個ある．

南海　つまり，n 個の文字の置きかえの集合は，$n!$ 個の要素よりなる $GL(n)$ の部分群になる．普通これを S_n 等と表し，n 次対称群という．

耕介　そうか．対称式とは対称群 S_n に関する不変式なのですね．

定義 11 (対称式)　n 次対称群 S_n に関する不変式を**対称式**という．つまり S_n の任意の元 σ に対して

$$f(\mathbf{x}) = f(\sigma\mathbf{x})$$

が成り立つ整式のことである．

南海　この不変式がすべて，n 個の基本対称式の整式として表される．これを対称式の基本定理という．一般に，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の n 変数のばあい，次の n 個の対称式を基本対称式という．

耕介　それは

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\ s_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ s_n &= x_1x_2x_3\cdots x_n \end{aligned}$$

です.

南海　s_k は何個の単項式の和になっているか.

耕介　s_k は k 次の単項式の和です．k 次の単項式は，n 個から k 個選ぶ場合の数，つまり ${}_n\mathrm{C}_k$ 個あり，基本対称式はそれら同次の単項式の和です.

南海　そして，

$$\begin{aligned}&(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)\\ =\quad &X^n-s_1X^{n-1}+s_2X^{n-2}+\cdots+(-1)^ns_n\end{aligned}$$

となる．これは展開の方法を考えるとただちにわかる.

基本対称式 $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ の整式 $G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ がある．その一つの単項式

$$s_1{}^{\alpha_1}s_2{}^{\alpha_2}\cdots s_n{}^{\alpha_n}$$

についての次の和の値

$$\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n$$

を，この単項式の**重み**という．各単項式の重みの最大値を $G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ の重みという．重みは，$G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ を $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の整式と見たときの次数に他ならない.

さてこのとき，次の**対称式の基本定理**が成り立つ.

定理 40　文字 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の対称式 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ がある．$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の基本対称式を $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ とする.

(1) 任意の次数 k に対し，$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ は $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ の整式 $G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ に表され，$G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ の重みは k 以下にとれる.

(2) 表し方は一意である．つまり，n 変数の二つの整式 $G(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ と $G'(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ があり，$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ を代入して $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の整式にしたとき，G と G' が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の整式として同一の式になれば，G と G' は $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ の式として相等しい.

(3) $G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ の $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ の整式としての次数は，$f(\mathbf{x})$ の一つの変数に関する最大次数に等しい.

証明

(1)　基本対称式で表されることを，文字変数の個数 n に関する数学的帰納法で示す.

$n=1$ のとき．x_1 のみであるから明らかである．1 から $n-1$ の範囲で命題 (1) が成立するとする.

文字変数の個数が n のとき $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の対称式 $f(\mathbf{x})$ が基本対称式の重み k 以下の整式で表されることを示す.

ここで，$f(\mathbf{x})$ に対して $x_n=0$ を代入した整式 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ 0)$ を考える．この次数は k 以下である.

$n-1$ 個の文字変数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$ の基本対称式を

$$\begin{aligned}t_1&=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\\ t_2&=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_2x_3+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}\\ t_3&=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ t_{n-1}&=x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}\end{aligned}$$

とする．$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1}$ の各 x_n に 0 を代入したものが $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1}$ である．

$n-1$ のときの数学的帰納法の仮定より $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ 0)$ は基本対称式 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1}$ の重みが k 以下の整式で書き表される．それを $p(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1})$ とする．

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ 0) = p(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1})$$

$$F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) - p(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1})$$

とおく．これは文字 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の対称式である．また $p(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1})$ は，$p(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1})$ に対して，x_n に係わる項が増えているが，次数は変わらない．よってその重みも k 以下である．

$$\begin{aligned} & F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ 0) \\ = \ & f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ 0) - p(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1}) \\ = \ & f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ 0) - f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ 0) = 0 \end{aligned}$$

であるから，因数定理によって $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ は x_n を因数にもつ．

$F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ は k 次以下の $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の対称式であるから，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ を因数にもつ．よって

$$F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = x_1x_2\cdots x_ng(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

となる．

$k \leqq n-1$ なら，両辺の次数を比較して，$g(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = 0$．つまり

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) - p(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1}) = 0$$

となり $G = p(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1})$ とすれば (1) が成立．

$k \geqq n$ のとき．k についての数学的帰納法で示す．$k = n$ なら再び両辺の次数を比較して，$g(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = C$ (定数)．よって $G = p(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1}) + Cs_n$ である．

0〜$k-1$ で成立とする．

$g(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ も $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の対称式であり，再び両辺の次数を比較して，その次数は $k-n$ 以下である．したがって数学的帰納法の仮定から，$g(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ は基本対称式 $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ の整式で表される．これを $q(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ とおく．その重みは $k-n$ 以下である．これによって

$$F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) - p(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1}) = s_nq(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$$

となる．この結果，

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = p(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1}) + s_nq(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$$

となり，

$$G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n) = p(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1}) + s_nq(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$$

とおけば G の重みは k 以下で

$$f(\mathbf{x}) = G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$$

が成立する．n の場合も基本対称式で表された．

(2)　次に表し方が一通りであることを示す.

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n) = G'(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$$

と二通りに表されたとする．G と G' において $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ を変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ に置きかえ $G(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$，$G'(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ を考える．この 2 式は異なっているが，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ に $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ を代入すると，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の整式としては一致する．

$$H(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) = G(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) - G'(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$$

とおく．この 2 式は異なっているので，$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ に $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を代入したとき，$H(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \neq 0$ となるような値の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ が存在する．

ところがここで

$$(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n) = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$$

とおき，この値 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を用いて n 次方程式

$$X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

を考える．この方程式の n 個の根を

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$$

とする．$G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ と $G'(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ の $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ に $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$ を代入すると，これら二つの式の値は $H(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \neq 0$ より相異なる．

ところがこれは，$G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ と $G'(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ が，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の整式としては一致することと矛盾する．つまり相異なる二つの $G(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$，$G'(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ で二通りに表されることはない．

(3)　$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ の単項式をとる．

$$s_1{}^{\alpha_1} \cdot s_2{}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot s_n{}^{\alpha_n} = (x_1 + x_2 + \cdots)^{\alpha_1}(x_1x_2 + \cdots)^{\alpha_2} \cdots (x_1x_2\cdots)^{\alpha_n}$$

であるから，$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ の単項式としての次数と，x_1 等いずれか一つの文字に関する次数とが等しい．

したがって，$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ のなかの単項式のいずれか一つの文字に関する次数の最大値は，$G(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$ の $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ の整式としてのその単項式の次数の最大値に等しい．　□

注意 2.9.1　定理 27 は，対称式を基本対称式で表すアルゴリズムも与える．簡単な場合に確認しよう．$n = 3$ とし，$k = 2,\ 3,\ 4$ に対して，

$$f_k = x^k + y^k + z^k$$

としてみよう．

$$\begin{aligned}
f_2(x,\ y,\ z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
f_2(x,\ y,\ 0) &= x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = p(t_1,\ t_2) \\
p(s_1,\ s_2) &= (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\
f_2(x,\ y,\ z) &= p(s_1,\ s_2) = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_3(x,\ y,\ z) &= x^3+y^3+z^3\\
f_3(x,\ y,\ 0) &= x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=p(t_1,\ t_2)\\
p(s_1,\ s_2) &= (x+y+z)^3-3(xy+yz+zx)(x+y+z)\\
&= (x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}\\
&= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\
&= x^3+y^3+z^3-3xyz\\
f_3(x,\ y,\ z) &= (x+y+z)^3-3(xy+yz+zx)(x+y+z)+3xyz\\
f_4(x,\ y,\ z) &= x^4+y^4+z^4\\
f_4(x,\ y,\ 0) &= x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2(xy)^2=p(t_1,\ t_2)\\
p(s_1,\ s_2) &= (x+y+z)^4-4(xy+yz+zx)(x+y+z)^2+2(xy+yz+zx)^2\\
&= (x+y+z)^2\{(x+y+z)^2-4(xy+yz+zx)\}+2(xy+yz+zx)^2\\
&= \{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\}\{x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)\}\\
&\qquad +2(xy+yz+zx)^2\\
&= (x^2+y^2+z^2)^2-2(xy+yz+zx)^2=x^4+y^4+z^4-4xyz(x+y+z)\\
f_4(x,\ y,\ z) &= (x+y+z)^4-4(xy+yz+zx)(x+y+z)^2+2(xy+yz+zx)^2\\
&\qquad +4xyz(x+y+z)
\end{aligned}
$$

南海　証明 27 は，n 次方程式には n 個の根が存在するという，代数学の基本定理を用いた．基本定理を用いないで，計算だけで示すこともできる．また考えてみておいてほしい．

定理 27 の系として，次のことが示される．なお，**系**というのは，定理からただちに本質的な証明を経ずに得られる結果をいう．

系 1　$f(x)$ を n 次式としその判別式を D とする．D は $f(x)$ の係数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ を文字変数とする $2(n-1)$ 次の既約な整式である．

証明

$$
D=a_0^{2(n-1)}\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(\alpha_i-\alpha_j)^2
$$

において，$\displaystyle\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ は明らかに $\alpha_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の対称式である．したがってこれらの基本対称式で表される．また一つの α_1 に関しては $2(n-1)$ 次である．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\\
&= a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)
\end{aligned}
$$

なので，根と係数の関係から

$$
\begin{aligned}
\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n &= -\frac{a_1}{a_0}\\
\alpha_1\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n &= \frac{a_2}{a_0}\\
\cdots &\quad \cdots\\
\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n &= (-1)^n\frac{a_n}{a_0}
\end{aligned}
$$

定理 27 によって，$\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ は $\frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_0},\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_0}$ の $2(n-1)$ 次式で表され，D は係数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ の $2(n-1)$ 次の整式である．

D が係数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ の整式として $D=D_1D_2$ と因数分解されたとする．ところが，D_1 も D_2 も $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ の整式ということは，$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ の対称式ということである．$D=D_1D_2$ を α_1 の整式と見れば α_1 に α_2 を代入すれば 0 になるので，このとき，D_1 か D_2 のいずれかが 0 である．$D_1=0,\ D_2\neq 0$ とすれば D_1 は $\alpha_1-\alpha_2$ を因数にもち，D_2 はもたない．$D_1=0,\ D_2=0$ とすれば $D_1,\ D_2$ は $\alpha_1-\alpha_2$ を因数にもつ．

対称性から第一の場合は，D_1 が $(\alpha_i-\alpha_j)$ と因数をすべてもち D_2 が定数である．つまり D_2 は a_0 のべきであるが，これは D が a_0 を因数にもつことを示している．ところが D_1 は $\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ の定数倍で，これは $\frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_0},\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_0}$ の $2(n-1)$ 次式であるから，D は $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ の整式として a_0 を因数にもつことはあり得ない．

第二の場合は $D_1,\ D_2$ がともに $\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(\alpha_i-\alpha_j)$ を因数にもつが，これは α_i の対称式ではない．

□

演習 39 (95 上智大) 解答 37

$f(x,\ y)$ を 2 変数 $x,\ y$ に関する実数を係数にもつ多項式とする．$s=x+y,\ t=xy,\ u=x-y,\ v=x^2$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) (i) $f(x,\ y)=x^2+xy+y^2$ のとき $f(x,\ y)$ を s と u を用いて表せ．
(ii) 一般に $f(x,\ y)$ は s と u との多項式で表されることを示せ．
(iii) 恒等的に $f(x,\ y)=f(-x,\ y)$ が成り立つならば $f(x,\ y)$ は y と v との多項式であることを示せ．
(iv) 恒等的に $f(x,\ y)=f(y,\ x)$ が成り立つならば $f(x,\ y)$ は s と t との多項式であることを示せ．

(2) (i) 恒等的に $f(x,\ y)=f(x+y,\ x-y)$ が成り立つならば $f(x,\ y)=f(2x,\ 2y)$ が成り立つことを示せ．
(ii) 上の性質をもつ多項式はどのようなものか．

2.9.4 判別式と終結式

2.9.4.1 終結式

南海 不変式の問題に進む前に，判別式と関連して終結式を考えておこう．終結式も高校数学でもっと取り上げるようにしたいものである．

定義 12 (終結式) x の二つの整式 $f(x)$ と $g(x)$ がある．その根をそれぞれ $\alpha_i\ (i=1,\ \cdots,\ m)$，$\beta_j\ (j=1,\ \cdots,\ n)$ とする．

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^m+a_x^{m-1}+\cdots+a_m=a_0\prod_{i=0}^{m}(x-\alpha_i) \\ g(x) &= b_0x^n+b_x^{n-1}+\cdots+b_n=b_0\prod_{j=0}^{n}(x-\beta_j) \end{aligned}$$

である．このとき

$$R = {a_0}^n {b_0}^m \prod(\alpha_i - \beta_j)$$

とおく．積 $\prod$ において i は $i = 1,\ \cdots,\ m$，j は $j = 1,\ \cdots,\ n$ の上にわたる．mn 個の積である．

R を方程式 $f(x) = 0,\ g(x) = 0$，または整式 $f(x),\ g(x)$ の**終結式**という．

定義からただちに

$$\begin{aligned} R &= {a_0}^n g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_m) \\ &= (-1)^{mn}{b_0}^m f(\beta_1)f(\beta_2)\cdots f(\beta_n) \end{aligned}$$

とも表せることが分かる．

整式を明示したいときは $R(f,\ g)$ とも書こう．

R は α_i $(i = 1,\ \cdots,\ m)$ に関して対称で，α_1 に関して n 次である．また β_j $(j = 1,\ \cdots,\ n)$ に関して対称で，β_1 に関して m 次である．これから R は係数 $a_0,\ \cdots,\ a_m$ および $b_0,\ \cdots,\ b_n$ の整式となる．

耕介　$f(x)$ と $g(x)$ に共通根が存在することと $R(f,\ g) = 0$ が同値にになる，ということでしょうか．

南海　その通りである．また終結式は $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ から x を消去し，係数だけの関係を作ったのであるともいえる．

耕介　共通根があるということは，同じ x の値で成立することなので，消去した関係が成り立つことと同値である，のですね．

南海　その通りである．そこで，$f(x)$ も $g(x)$ も 2 次式の場合，終結式を求めてみてほしい．

耕介

例 2.9.2

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2,\ g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$$

とし，$f(x)$ の根を α と β とする．

$$a_0(\alpha + \beta) = -a_1,\ a_0\alpha\beta = a_2$$

なので

$$\begin{aligned} R(f,\ g) &= {a_0}^2 g(\alpha)g(\beta) \\ &= {a_0}^2(b_0\alpha^2 + b_1\alpha + b_2)(b_0\beta^2 + b_1\beta + b_2) \\ &= {a_0}^2\{{b_0}^2\alpha^2\beta^2 + b_0b_1(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta) + {b_1}^2\alpha\beta \\ &\qquad + b_1b_2(\alpha + \beta) + b_0b_2(\alpha^2 + \beta^2) + {b_2}^2\} \\ &= {a_2}^2{b_0}^2 - a_1a_2b_0b_1 + a_0a_2{b_1}^2 - a_0a_1b_1b_2 \\ &\qquad + {a_1}^2b_0b_2 - 2a_0a_2b_0b_2 + {a_0}^2{b_2}^2 \\ &= (a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

となります．

南海　この式はどこかで見たことがないだろうか．文字が違うので気づかなかったかも知れない．『数学対話』－「ポンスレの定理」の「楕円と円，$n = 4$ の場合」にある．このときは，消去法として用いた．

2.9.4.2　終結式と判別式

耕介　質問ですが，n 次方程式 $f(x)=0$ が重根をもつということとその判別式 $D=0$ が同値でした．一方，n 次方程式 $f(x)=0$ が重根をもつということは，$f(x)=0$ と $f'(x)=0$ の共通根があるということと同値でした．これは $R(f,\ f')=0$ を表せます．

この二つの同値性から考えて

$$D=R(f,\ f')$$

ですか．

南海　これはいいことに気づいた．$D=0$ と $R(f,\ f')=0$ が同値であることはその通りであるが，それで一致するわけではない．

$f(x)=ax^2+bx+c$ のとき，$D=b^2-4ac$ だった．$R(f,\ f')$ を求めてみてほしい．

耕介　$f(x)=ax^2+bx+c=0$ の根を α と β とします．$f'(x)=2ax+b$ ですから，この根は $-\dfrac{b}{2a}$ です．

ですから根と係数の関係より

$$\begin{aligned} R(f,\ f') &= a(2a)^2\left(\alpha+\frac{b}{2a}\right)\left(\beta+\frac{b}{2a}\right) \\ &= 4a^3\left\{\alpha\beta+\frac{b}{2a}(\alpha+\beta)+\frac{b^2}{4a^2}\right\} \\ &= a\left\{4a^2\alpha\beta+2ab(\alpha+\beta)+b^2\right\} \\ &= -a(b^2-4ac)=-aD \end{aligned}$$

です．

耕介　3 次以上になるとこの方法では大変です．一般的にはどのようにすればいいのですか．

南海　根の方から考えればよい．記号はこれまでと同様とすると，実は $n=2$ の場合と同様に次の定理が成り立つ．

定理 41

$$f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

の判別式を D とする．また

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}$$

は $f(x)$ の微分であるとする．

$$R(f,\ f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-1}\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

が成り立つ．

証明

$$f'(x)=a_0\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x-\alpha_j)$$

であるから

$$f'(\alpha_i)=a_0\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)$$

である．したがって

$$\begin{aligned} R(f,\ f') &= {a_0}^n f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)\cdots f'(\alpha_n) \\ &= {a_0}^n \left(\prod_i^n a_0 \prod_{j\neq i}(\alpha_i - \alpha_j) \right) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-1} \prod_{1\leqq i<j\leqq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \end{aligned}$$

である． □

2.9.4.3　終結式の不変性

また，判別式の場合と同様に，R は $a_0,\ \cdots,\ a_m$ および $b_0,\ \cdots,\ b_n$ の整式として，既約である．さて，終結式もまた不変式であることを確認しよう．不変性の確認なので等式 2.7 によって定まる $\bar{f}$，および同様にして定まる $\bar{g}$ に関して示せばよい．

定理 42 $f(x)$ と $g(x)$ はそれぞれ m 次，n 次の整式で最高次数の項の係数は $a_0,\ b_0$ であるとする．$\sigma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in SL(2)$ に対し

$$\bar{f}(x) = (rx+s)^n f\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)$$
$$\bar{g}(x) = (rx+s)^n g\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)$$

で $\bar{f}(x),\ \bar{g}(x)$ を定めるこのとき，

$$R(f,\ g) = R(\bar{f},\ \bar{g})$$

である．

証明

判別式の証明で示したように

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= {a_0}' \prod_{i=0}^m (x - {\alpha_i}') \\ \bar{g}(x) &= {b_0}' \prod_{j=0}^n (x - {\beta_j}') \end{aligned}$$

とすると，

$${a_0}' = a_0 \prod_{i=1}^m (-r\alpha_i + p)\ ,\quad {\alpha_i}' = \frac{s\alpha_i - q}{-r\alpha_i + p} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$
$${b_0}' = b_0 \prod_{j=1}^n (-r\beta_j + p)\ ,\quad {\beta_j}' = \frac{-\beta_j - q}{-r\beta_j + p} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

となる．だから

$$R(\bar{f},\ \bar{g}) = {a_0'}^n {b_0'}^m \prod ({\alpha_i}' - {\beta_j}')$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ a_0 \prod_{i=1}^{m} (-r\alpha_i + p) \right\}^n \left\{ b_0 \prod_{j=1}^{n} (-r\beta_j + p) \right\}^m \prod \left(\frac{s\alpha_i - q}{-r\alpha_i + p} - \frac{s\beta_j - q}{-r\beta_j + p} \right) \\
&= {a_0}^n {b_0}^m \prod \{ (s\alpha_i - q)(-r\beta_j + p) - (s\beta_j - q)(-r\alpha_i + p) \} \\
&= {a_0}^n {b_0}^m \prod \{ (ps - qr)(\alpha_i - \beta_j) \} = R(f,\ g)
\end{aligned}
$$

となる．

2.9.4.4　終結式の行列式表現

南海　さらに判別式と終結式の関係を明示的に書くには行列式による終結式と判別式の表示が必要だ．一般の n 次行列式の理解が必要だが，これは『線型代数の考え方』を見てほしい．

さて行列式を用いると終結式を係数を用いて具体的に書くことができる．

定理 43 2 つの整式

$$
f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m, \quad g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n
$$

の終結式を $R(f,\ g)$ とする．

$$
R(f,\ g) = \left| \begin{array}{ccccccc}
a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & & \\
 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n &
\end{array} \right| \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ a \end{array}} \right\} n \text{ 個} \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ a \end{array}} \right\} m \text{ 個} \end{array}
$$

が成り立つ．ただし，空白の成分は 0 とする．

証明

$f(x)$，$g(x)$ が

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = a_0 \prod_{i=0}^{m} (x - \alpha_i) \\
g(x) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = b_0 \prod_{j=0}^{n} (x - \beta_j)
\end{aligned}
$$

と因数分解されたとする．ただし，ここで各 m 個,n 個の根 $\alpha_i,\ \beta_j$ と最高次数の係数 a_0，b_0 を一般的に文字で考え，他の係数はそれらの対称式 (の $a_0,\ b_0$ 倍) として定まるものとする．

ある α_i とある β_j に共通の不定元 γ を代入する．すると

$$
\begin{aligned}
f(\gamma) &= a_0 \gamma^m + a_\gamma^{m-1} + \cdots + a_m = 0 \\
g(\gamma) &= b_0 \gamma^n + b_\gamma^{n-1} + \cdots + b_n = 0
\end{aligned}
$$

である．ここで $m+n$ 個の組

$$\gamma^{m+n-1},\ \gamma^{m+n-2},\ \cdots,\ \gamma,\ 1$$

を根とする連立 1 次方程式を考える．根を代入した形で書くと

$$\begin{cases}
a_0\gamma^{m+n-1} & +a_1\gamma^{m+n-2} & \cdots & +a_m\gamma^{n-1} & & & = 0 \\
 & a_0\gamma^{m+n-2} & +a_1\gamma^{m+n-3} & \cdots & +a_m\gamma^{n-2} & & = 0 \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & a_0\gamma^{m} & +a_1\gamma^{m-1} & \cdots & +a_m & = 0 \\
b_0\gamma^{m+n-1} & +b_1\gamma^{m+n-2} & \cdots & +b_n\gamma^{m-1} & & & = 0 \\
 & b_0\gamma^{m+n-2} & +b_1\gamma^{m+n-3} & \cdots & +b_n\gamma^{m-2} & & = 0 \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & b_0\gamma^{n} & +b_1\gamma^{n-1} & \cdots & +b_n & = 0
\end{cases}$$

である．γ は一般の不定元なので，この行列式は 0 である．

耕介　係数は根と a_0 や b_0 で書けているので行列式，

$$G = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & \\
 & & & \cdots & & \\
 & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \\
 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & \\
 & & & \cdots & & \\
 & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n
\end{vmatrix}$$

は根の対称式と a_0 や b_0 で書ける．

そのうちのある α_i とある β_j に共通の不定元 γ を代入すると，この行列式が 0 になるということですね．

南海　そういうことだ．そしてこれが任意の α_i と β_j についていえる．したがってこの行列式は，すべての $\alpha_i - \beta_j$ で割りきれる．

各 a_i $(1 \leqq i \leqq m)$ と b_j $(1 \leqq j \leqq n)$ はそれぞれ a_0 と b_0 で割りきれる (根と a_0 や b_0 との積になっている)．よって G は ${a_0}^n{b_0}^m$ で割りきれる．したがって G は $R(f,\ g)$ で割りきれる．

一方行列 G を展開すると，その項は符号を除いて

$$a_{i_1-1}a_{i_2-2}\cdots a_{i_n-n}b_{j_1-1}b_{j_2-2}\cdots b_{j_m-m}$$

と表される．ただし，$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n,\ j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_n$ は $1,\ 2,\ \cdots,\ m+n$ の順列で，a_ν については $0 \leqq \nu \leqq m$ の範囲にないときは 0，b_ν については $0 \leqq \nu \leqq n$ の範囲にないときは 0，とするものとする．

この積が 0 でないとき，その項の根から見た次数は

$$\begin{aligned}
& (i_1-1)+(i_2-3)+\cdots+(i_n-n)+(j_1-1)+(j_2-3)+\cdots+(j_m-m) \\
= \quad & \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = mn
\end{aligned}$$

これは

$$R(f,\ g) = {a_0}^n{b_0}^m \prod(\alpha_i - \beta_j)$$

における根の積の次数と等しい．したがって

$$G = cR(f,\ g)$$

となる定数が存在する．

G には ${a_0}^n{b_n}^m$ という項がある．一方，$R(f,\ g)$ の対応する項は ${a_0}^n{b_0}^m\left(\prod_{j=1}^{n}(-\beta_j)\right)^m = {a_0}^n{b_n}^m$ である．よって $c = 1$ となり，定理の等式が示された． □

耕介　例 (2.9.2) をこの方法で求めてみます．

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2,\ g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$$

ですから

$$\begin{aligned}
R(f,\ g) &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \\ & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= a_0\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} + b_0\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= {a_0}^2{b_2}^2 - a_0b_1(a_1b_2 - a_2b_1) + a_0b_0(-b_2a_2) \\
&\quad + b_0a_1(a_1b_2 - a_2b_1) - b_0a_0a_2b_2 + {b_0}^2{a_2}^2 \\
&= (a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1)
\end{aligned}$$

となり，同じ結果になりました．

南海　判別式と終結式の間に定理 41 の関係があった．

これをもとに，判別式を終結式の行列表現から求めることができる．例 (2.9.1) を行列式でやってみてほしい．

耕介

$$f(x) = x^3 + px + q$$

の判別式を行列式で求めます．$f'(x) = 3x^2 + p$ なので

$$\begin{aligned}
R(f,\ f') &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & \\ & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & & \\ & 3 & 0 & p & \\ & & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & p & & \\ 3 & 0 & p & \\ & 3 & 0 & p \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & p & q & \\ & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & \\ & 3 & 0 & p \end{vmatrix} \\
&= p^3 + 3\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & & \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix} + 3\left(-\begin{vmatrix} p & q & \\ 0 & p & \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} p & q & \\ & p & q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix}\right) \\
&= p^3 + 3\{-p^3 - p^3 + 3(p^3 + 3q^2)\} = 4p^3 + 27q^2
\end{aligned}$$

一方 $a_0 = 1$ なので

$$R(f,\ f') = (-1)^{\frac{3\cdot 2}{2}}D = -D$$

です．よって $D=-(4p^3+27q^2)$ となりました．

不変式の計算は大変です．

南海　ところがフリーソフトの Risa/Asir などを使うと，終結式や因数分解がすぐに出来る．

前に掲示板で

$a^3-3ab^2=2,\ 3a^2b-b^3=11$ から，$a,\ b$ を求めようとしましたが, 解けませんでした

という質問があった．次のように出来る．

[0] res$(b, b^3-3*a^2*b+11, 3*a*b^2-a^3+2)$;
$-64*a^9+96*a^6+3327*a^3+8$
[1] P $=-64*a^9+96*a^6+3327*a^3+8$;
$-64*a^9+96*a^6+3327*a^3+8$
[2] fctr(P);
$[[-1,1],[a-2,1],[a^2+2*a+4,1],[4*a^2+8*a+1,1],[16*a^4-32*a^3+60*a^2-8*a+1,1]]$

最初の [0] で b 終結式を用いて b を消去している．次に P を定義し，最後にそれを因数分解している．

$$\begin{aligned} & -64a^9+96a^6+3327a^3+8 \\ = \ & -(a-2)(a^2+2a+4)(4a^2+8a+1)(16a^4-32a^3+60a^2-8a+1) \end{aligned}$$

と因数分解できる．他の解がどのような意味をもつのかも考えなければならないがそれは宿題としよう．

耕介　すごいですね．どこで手に入りますか．

南海　例えば,『Risa/Asir (神戸版) ダウンロードページ』などいくつかある．

演習 40 (出典不明) 解答 38

$a,\ b$ が実数のとき，次の 2 つの 2 次方程式

$$x^2+ax+b=0, \quad ax^2+bx+1=0$$

が共通解をもつための条件を求め，共通解を求めよ．

2.9.5　方程式の不変式

2.9.5.1　判別式だけか

耕介　そこで質問です．

2 つの不変式を知りました．

第 1．方程式の $SL(2)$ の変換に関して判別式や終結式は不変である．

第 2．n 変数の変数の置きかえによる不変式，つまり対称式．

ところが，対称式の場合，

(1) n 変数の対称式は無数にある．

(2) しかし，n 個の基本対称式によって書き表すことが出来る．

が成り立ちます．すると，方程式の変換の場合も

(1) 不変式は判別式以外にもあるのか．

(2) それらはいくつかの不変式で書き表すことが出来るのか．

という問題が生まれます．

南海　そうだ．問題を自分の方から設定するのは大変いいことだ．高校範囲で出来ることにはかぎりがあるが，2 次方程式の変換による不変式が，判別式，またはそのべきしかないことを確認していこう．

これからは不変式論の伝統にしたがって，n 次の方程式を

$$f(x) = a_0x^n + \cdots + {}_n\mathrm{C}_i a_i x^{n-i} + \cdots + a_n \tag{2.10}$$

とおこう．

耕介　2 次方程式の場合は

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c = 0$$

で考えるのですね．すると，変換式 (2.6) も変わります．b と b' を $2b$ と $2b'$ に置きかえるので

$$(rx+s)^2 f\left(\frac{px+q}{rx+s}\right) = a'x^2 + 2b'x + c'$$

とおくと

$$\begin{cases} a' = ap^2 + 2bpr + cr^2 \\ 2b' = 2apq + 2b(ps+qr) + 2crs \\ c' = aq^2 + 2bqs + cs^2 \end{cases}$$

となり第 2 式が

$$b' = apq + b(ps+qr) + crs$$

となります．行列で書くと

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 2pr & r^2 \\ pq & ps+qr & rs \\ q^2 & 2qs & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

となります．そして判別式は $D = 4b^2 - 4ac$ なので，$D/4 = b^2 - ac$ について考えればいいです．

$SL(2)$ の要素 $\sigma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して，2 次方程式の係数の変換 (2.11) が定まる．この変換で不変なものが $b^2 - ac$ のみであることを示したい，ということですね．

2.9.5.2　SL(2) の分解

南海　そういうことだ．まず，$SL(2)$ の任意の要素は，3 つの型の行列

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$$

の積に分解することが出来る．

耕介　やってみます．$\sigma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ をとります．$s = 0$ のときは $r = -q^{-1}$ なので

$$\begin{pmatrix} p & q \\ -q^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -pq \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です．$s \neq 0$ のときは

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q/s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ rs & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

です．

南海　そこで，$SL(2)$ の部分集合を次のように定める．

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \right\}, \quad U_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

これらはいずれも積で閉じている．単位行列，逆行列も同じ形をしている．つまり $SL(2)$ の部分群である．そして，$SL(2)$ はこれら 3 つの部分群で生成される．つまり，これらの 3 つの部分群の要素をさまざまにかけあわせれば，$SL(2)$ の要素がすべて得られる．

耕介　すると，2 次方程式の不変式を考える場合，これら 3 つの型の行列について不変であればいいのですね．この方に対応する 3 次行列 (2.11) を書いてみます．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 2u & u^2 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これらに対応する変換 (2.11) で不変なものを確定すればよいということになります．

2.9.5.3　微分作用素

耕介　それはいいかえると，$a,\ b,\ c$ の整式 $f(a,\ b,\ c)$ で，上の変換を施した

$$\begin{cases} f(\alpha^2 a,\ b,\ \alpha^{-2} c) \\ f(a,\ ta + b,\ t^2 a + 2tb + c) \\ f(a + 2ub + u^2 c,\ b + uc,\ c) \end{cases}$$

が，任意の $\alpha,\ t,\ u$ に対して $f(a,\ b,\ c)$ と一致する，ということです．

南海　これらの変換は $a,\ b,\ c$ の 1 次式で定まるので，単項式 $a^i b^j c^k$ の次数 $i + j + k$ を変えない．だから $f(a,\ b,\ c)$ がこれらの変換で不変なら，その同次数の項を集めた部分が不変である．だからはじめから $f(a,\ b,\ c)$ は 3 変数の同次式であるとしてよい．

$f(\alpha^2 a,\ b,\ \alpha^{-2}c)$ は単項式 $a^i b^j c^k$ を単項式 $\alpha^{2(i-k)} a^i b^j c^k$ に変える．$f(\alpha^2 a,\ b,\ \alpha^{-2}c)$ が $a,\ b,\ c$ の整式として恒等的に $f(a,\ b,\ c)$ と等しいのなら，各単項式の係数が一致しなければならない．したがって $\alpha^{2(i-k)} = 1$．つまり $i = k$ である．よってこの変換 $f(\alpha^2 a,\ b,\ \alpha^{-2}c)$ で不変な同次式は，$a^i b^j c^i$ という形をした次数の等しい単項類からなることが必要である．つまり，不変式は a と c で対称である．

したがって群 T と U_+ で不変なら，必然的に U_- でも不変である．もちろん群 T と U_- で不変なら，必然的に U_+ でも不変である．といってもよい．

耕介　少しずつわかってきました．$f(a,\ b,\ c)$ が $SL(2)$ のこの作用で不変であるためには変数 a と c は必ず ac という形で入っていなければならない．だから U_+ か U_- で不変であればよい．

ところで，$f(a,\ ta+b,\ t^2a+2tb+c)$ が任意の t で $f(a,\ b,\ c)$ に等しいということは，$f(a,\ ta+b,\ t^2a+2tb+c)$ を t で微分した導関数が 0，つまり文字係数 $a,\ b,\ c$ をもつ t の整式として

$$\frac{d}{dt} f(a,\ ta+b,\ t^2a+2tb+c) = 0$$

ということではありませんか．

南海　いいところに気がついた．

耕介　この微分は合成関数の微分ですが，変数が 3 個あるので難しいです．

南海　$a,\ b,\ c$3 変数の関数 $f(a,\ b,\ c)$ をその中の a について微分することを $\dfrac{\partial}{\partial a}$ と書く．

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a,\ b,\ c) = f_a(a,\ b,\ c)$$

とおこう．

耕介　$f(a,\ ta+b,\ t^2a+2tb+c)$ の項

$$a^i (ta+b)^j (t^2a+2tb+c)^i$$

を t で微分すると

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} a^i (ta+b)^j (t^2a+2tb+c)^i \\ = \ & a^i \cdot aj(ta+b)^{j-1}(t^2a+2tb+c)^i + a^i (ta+b)^j \cdot (2ta+2b) i (t^2a+2tb+c)^{i-1} \end{aligned}$$

となります．ですから

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} f(a,\ ta+b,\ t^2a+2tb+c) \\ = \ & a f_b(a,\ ta+b,\ t^2a+2tb+c) + 2(ta+b) f_c(a,\ ta+b,\ t^2a+2tb+c) \end{aligned} \tag{2.12}$$

となります．これがつねに 0 になるのですね．この式をよく見ると，

$$a f_b(a,\ b,\ c) + 2b f_c(a,\ b,\ c)$$

の $a,\ b,\ c$ に，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix}$ によって変換した $a,\ ta+b,\ t^2a+2tb+c$ を代入したものに他なりません．

南海　任意の t で 0 になるのだから $t=0$ でも 0 になることが必要．これから恒等的に

$$af_b(a,\ b,\ c)+2bf_c(a,\ b,\ c)=\left(a\frac{\partial}{\partial b}+2b\frac{\partial}{\partial c}\right)f(a,\ b,\ c)=0 \tag{2.13}$$

が必要．一方，これは $a,\ b,\ c$ の恒等式でもあるので，$a,\ b,\ c$ に $a,\ ta+b,\ t^2a+2tb+c$ を代入しても 0．よって，(2.12) が成立．つまり (2.13) の成立は十分条件でもある．以上を整理して次の定理が示された．

定理 44 3 変数の整式 $f(a,\ b,\ c)$ が不変式であるためには，

(i) 各単項式の a と c の次数が等しい．

(ii) $\left(a\dfrac{\partial}{\partial b}+2b\dfrac{\partial}{\partial c}\right)f(a,\ b,\ c)=0$

が必要十分条件である．

注意　先に注意したように a と c について対称なので次の条件でもよい．

(i) 各単項式の a と c の次数が等しい．

(iii) $\left(2b\dfrac{\partial}{\partial a}+c\dfrac{\partial}{\partial b}\right)f(a,\ b,\ c)=0$

かっこ内の微分の組合せは，3 変数の関数に作用するので**微分作用素**という．これらの微分作用素を次のように置く．

$$D=a\frac{\partial}{\partial b}+2b\frac{\partial}{\partial c}$$
$$\Delta=2b\frac{\partial}{\partial a}+c\frac{\partial}{\partial b}$$

耕介　これは何にせよ，$a,\ b,\ c$3 変数の整式を同じ 3 変数の整式に写します．つまり $K[a,\ b,\ c]$ の要素を同じ $K[a,\ b,\ c]$ に写します．
南海　さらに 2 つの整式 $f,\ g\in K[a,\ b,\ c]$，および数定数 $p,\ q\in K$ に対して

$$D(pf+qg)=p(Df)+q(Dg)$$
$$\Delta(pf+qg)=p(\Delta f)+q(\Delta g)$$

が成り立つ．
耕介　ベクトル空間の線型写像のようです．
南海　まさにそうだ．

2.9.5.4　2 次方程式の不変式

南海　さて，今は定理 44 を満たす不変な整式をすべて求めることが目的だ．
耕介　定理 44 の条件 (i) を満たすもののなかで，D の作用で 0 になるのもを考えればいいのですね．つまり a と c の次数が等しいもののなかで考えればよい．
南海　D がどのような作用であるかを見るために次数が e の単項式

$$f=a^kb^lc^m\quad(e=k+l+m,\ 0\leqq k,\ l,\ m)$$

に D を作用させてみてほしい.

耕介

$$\begin{aligned} Df &= a\frac{\partial}{\partial b}a^k b^l c^m + 2b\frac{\partial}{\partial c}a^k b^l c^m \\ &= la^{k+1}b^{l-1}lc^m + 2ma^k b^{l+1}c^{m-1} \end{aligned}$$

となります.

南海　いずれの項も a の指数と c の指数との差が 1 増え，それに応じて，$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-2} \end{pmatrix}$ の作用によって α の指数は 2 増加する．そこで，$K[a,\ b,\ c]$ の整式で，それを構成する各単項式が指数が e で，a の指数と c の指数との差の 2 倍を w とし，$S_{e,\ w}$ とおこう．これらはこの条件を満たす単項式を基底とする K 上のベクトル空間だ.

$S_{4,\ 0}$ と $S_{4,\ 2}$ に属する単項式をあげてみてほしい

耕介

$$\begin{aligned} S_{4,\ 0}:&\quad b^4,\ ab^2c,\ a^2c^2 \\ S_{4,\ 2}:&\quad a^2bc,\ ab^3 \end{aligned}$$

です．$S_{4,\ 0}$ の 3 つの単項式に D を作用させると次のようになります.

$$\begin{aligned} D(b^4) &= 4ab^3 \\ D(ab^2c) &= 2a^2bc + 2ab^3 \\ D(a^2c^2) &= 4a^2bc \end{aligned}$$

K 上のベクトル空間としては $S_{4,\ 0}$ は 3 次元，$S_{4,\ 2}$ は 2 次元です.

D や Δ はこのようなベクトル空間の線型写像になっているのですね.

南海　そうだ．しかも上の基底の変換からわかるように，D は $S_{4,\ 0}$ から $S_{4,\ 2}$ の上への線型写像だ.

すると，$S_{4,\ 0}$ の部分空間で D の作用によって 0 になるものの作る空間の次元はいくらか.

耕介　3 次元から 2 次元に射影するのだから，それで 0 になる部分空間は 1 次元です.

ということは $a,\ b,\ c$ の整式で，今考えている変換で不変で，4 次であるものは，基底が 1 個，つまりひとつの整式で表される.

ということはその基底は $(b^2 - ac)^2$ 定数倍のみ.

同様にして，2 次方程式の不変式は判別式とそのべきしかないことが示せそうです.

南海　問題を整理しよう.

$K[a,\ b,\ c]$ の要素が不変式であるということは，定理 44 の 2 つの条件を満たすということである．条件 (i) を満たすことはある e に関する $S_{e,\ 0}$ の要素であるということだ.

次に微分作用素 D は $S_{e,\ 0}$ から $S_{e,\ 2}$ での線型写像である.

$$D : S_{e,\ 0} \to S_{e,\ 2}$$

D で 0 になる $S_{e,\ 0}$ の要素が不変式である．そしてそれらの集合は $S_{e,\ 0}$ の部分空間をなす．線型写像で 0 になる要素からなる部分空間を**核**という．不変式を調べることは，この写像 D の核の基底を調べることである.

そこで，$S_{e,\ 0}$ と $S_{e,\ 2}$ の次元を調べ，さらに D が**上への**写像であることとを確認して，D の次元を確定させよう.

耕介　$S_{e,\,0}$ の次元は，$e=k+l+k$ となる 0 以上の整数の組 $(k,\ l)$ の個数です．また，$S_{e,\,2}$ の次元は，$e=(k+1)+l+k$ となる 0 以上の整数の組 $(k,\ l)$ の個数です．

$S_{e,\,0}$の基底の個数

$e=2m$ のとき　$(k,\ l)=(m,\ 0),\ (m-1,\ 2),\ \cdots,\ (0,\ 2m)$　$m+1=\dfrac{e}{2}+1$ (個)

$e=2m-1$ のとき　$(k,\ l)=(m-1,\ 1),\ (m-1,\ 1),\ \cdots,\ (0,\ 2m-1)$　$m=\dfrac{e+1}{2}$ (個)

$S_{e,\,2}$の基底の個数

$e=2m$ のとき　$(k,\ l)=(m-1,\ 1),\ \cdots,\ (0,\ 2m-1)$　$m=\dfrac{e}{2}$ (個)

$e=2m-1$ のとき　$(k,\ l)=(m-1,\ 0),\ \cdots,\ (0,\ 2m-2)$　$m=\dfrac{e+1}{2}$ (個)

です．

次に，D を調べます．

$e=2m$ のとき．$S_{e,\,0}$ の要素 f を

$$f=\sum_{j=0}^{m}p_j a^{m-j}b^{2j}c^{m-j}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}Df &= 2p_0 ma^m bc^{m-1}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{m-1}p_j\left\{2ja^{m-j+1}b^{2j-1}c^{m-j}+2(m-j)a^{m-j}b^{2j+1}c^{m-j-1}\right\}+2p_m mab^{2m-1}\\ &= \sum_{j=0}^{m-1}2\left\{(m-j)p_j+(j+1)p_{j+1}\right\}a^{m-j}b^{2j+1}c^{m-j-1}\end{aligned}$$

したがって，任意の $S_{e,\,2}$ の要素に対し，その要素になるように p_j $(0\leqq j\leqq m)$ を定めることができる．

$e=2m-1$ のとき．$S_{e,\,0}$ の要素 f を

$$f=\sum_{j=1}^{m}p_j a^{m-j}b^{2j-1}c^{m-j}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}Df &= \sum_{j=1}^{m-1}p_j\left\{(2j-1)a^{m-j+1}b^{2j-2}c^{m-j}+2(m-j)a^{m-j}b^{2j}c^{m-j-1}\right\}+p_m(2m-1)ab^{2m-2}\\ &= p_1a^mc^{m-1}+\sum_{j=1}^{m-1}\left\{(2(m-j)p_j+(2j+1)p_{j+1}\right\}a^{m-j}b^{2j}c^{m-j-1}\end{aligned}$$

この場合も任意の $S_{e,\,2}$ の要素に対し，その要素になるように p_j $(1\leqq j\leqq m)$ を定めることができる．

したがって，いずれの場合も D は $S_{e,\,0}$ から $S_{e,\,2}$ 上への準同型写像となる．その核の次元は $S_{e,\,2}$ の次元から $S_{e,\,0}$ の次元を引いた差なので，

$$\begin{cases}1 & (e\ \text{：偶数})\\ 0 & (e\ \text{：奇数})\end{cases}$$

である．これでわかりました．2 次方程式の不変式は，偶数次数のものはひとつの不変式の定数倍，奇数次数のものは存在しない，となりました．

$S_{2m,\ 0}$ 次の場合の基底は

$$(b^2 - ac)^m$$

がとれます．つまり本質的に 2 次方程式の不変式は判別式しかない．

南海　とりあえずひとつの結論を得ることができた．

2.9.5.5　問題の一般化

南海　この方法で，3 次方程式，4 次方程式の不変式を確定していくことができる．ただし実際の計算は大変である．

方程式は (2.10) で考える．$SL(2)$ は T, U_+, U_- に分解されるわけだが，これらの作用に関する係数

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$$

の変換はどのようになるか．

耕介　そうか．$\sigma \in SL(2)$ の任意の要素で考えるよりも，T, U_+, U_- の要素でどのようになるかを確認した方が簡明です．

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ の場合．x を $\dfrac{\alpha x + 0}{0 + \alpha^{-1}} = \alpha^2 x$ に置きかえ，$(0 + \alpha^{-1})^n$ をかければよい．

$$\begin{aligned} (0+\alpha^{-1})^n f(\alpha^2 x) &= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i a_i (\alpha^2 x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i \alpha^{n-2i} a_i x^{n-i} \end{aligned}$$

したがって対応する $GL(n+1)$ 次の行列は

$$\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^{-n} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

です．同様に $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合．x を $\dfrac{x+t}{0+1} = x + t$ に置きかえればいい．

$$\begin{aligned} f(x+t) &= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i a_i (x+t)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i a_i \left(\sum_{j=0}^{n-i} {}_{n-i}\mathrm{C}_j x^{n-i-j} t^j \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_i \cdot {}_{n-i}\mathrm{C}_j &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} \\ = \quad \frac{n!}{(i+j)!(n-i-j)!} &\cdot \frac{(i+j)!}{j!i!} = {}_n\mathrm{C}_{i+j} \cdot {}_{i+j}\mathrm{C}_i \end{aligned}$$

なので，$k=i+j$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x+t) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{n-i} {}_n\mathrm{C}_{i+j} \cdot {}_{i+j}\mathrm{C}_i x^{n-i-j} t^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{k=i}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_k\mathrm{C}_i x^{n-k} t^{k-i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i t^{k-i} a_i \right) x^{n-k} \end{aligned}$$

したがって，対応する $GL(n+1)$ 次の行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t^2 & 2t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ t^k & \cdots & {}_k\mathrm{C}_i t^{k-i} & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ t^n & \cdots & {}_n\mathrm{C}_i t^{n-i} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

です．

南海　これに対応する微分作用素も決めておこう．$n=2$ のときの微分作用素の決め方と同様に考えればよい．

上の $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ の変換でもとの a_k に代入するのは

$$t^k a_0 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_i t^{k-i} a_{k-i} + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} a_{k-1} t + a_k$$

である．これを t で微分する．

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(t^k a_0 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_i t^{k-i} a_{k-i} + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} a_{k-1} t + a_k) \\ = \ & k t^{k-1} a_0 + \cdots + (k-i)\,{}_k\mathrm{C}_i t^{k-1-i} a_{k-i} + \cdots + k a_{k-1} \\ = \ & k\left(t^{k-1} a_0 + \cdots + {}_{k-1}\mathrm{C}_i t^{k-1-i} a_{k-i} + \cdots + a_{k-1}\right) \end{aligned}$$

a_{k-1} に代入すべきものの k 倍である．

耕介　ということは，t で微分して 0 となることが，$Df=0$ と同値であるような，微分作用素 D は

$$D = \cdots + k a_{k-1} \frac{\partial}{\partial a_k} + \cdots$$

となるということですね．

南海　そう．そしてこれを対称に入れ替えて Δ が作られる．

$$\Delta = \cdots + (n-k) a_{k+1} \frac{\partial}{\partial a_k} + \cdots$$

となる．

次に単項式

$$\prod_{k=0}^{n} a_k$$

に T の要素 (2.14) で変換したとき，α の次数は

$$\sum_{i=0}^{n}(n-2i)$$

なので，この値を w とおこう．

耕介　$w=0$ であることが T 不変であることを意味するのは，2 次の場合と同じです．微分作用素 D のどの項も，単項式の操作としては a_k を a_{k-1} に置きかえるので，w は 2 増えます．そこで，$n+1$ 個の変数の整式の集合

$$K[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n]$$

の中で，次数が e，先の値が w である単項類を基底とするベクトル空間を $S_{e,\ w}$ とおくと，D は

$$D : S_{e,\ 0} \to S_{e,\ 2}$$

の線型写像になるのですね．

南海　ここで証明は出来ないが，次の 2 つが成り立つ．

(1) 整式 $f \in K[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n]$ が T と U_+ で不変なら，U_- でも不変である．

(2) D は**上への**写像である．

耕介　すると，$SL(2)$ の作用に関する方程式の不変式は，やはり D の核になります．2 次の場合と同様にしていけば，それぞれの次数に関する方程式の不変式が得られるのですか．

南海　2 の場合は比較的簡単であったが，次数が増えると急速に複雑になる．3 次 4 次の場合の結果のみ記しておこう．

3 次の場合

$$f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$$

の判別式を D_3 とする．$f'(x) = 3ax^2 + 6bx + 3c$ なので，定理 41 より

$$R(f,\ f') = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d \\ 3a & 6b & 3c & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 6b & 3c & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 6b & 3c \end{vmatrix} = -aD$$

これから行列式の計算をして

$$D_3 = -3^3 \begin{vmatrix} a & 2b & c & \\ & a & 2b & c \\ b & 2c & d & \\ & b & 2c & d \end{vmatrix}$$

となる．これは 4 次式で，3 次方程式の不変式はこのべき以外にないことが示される．

4 次の場合

$$f(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e + d$$

とおく．この判別式を D_4 とすると，同様にして

$$D_4 = 4^4 \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & & \\ & a & 3b & 3c & d & \\ & & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & c & & \\ & b & 3c & 3d & c & \\ & & b & 3c & 3d & c \end{vmatrix}$$

となる．

4 次の場合は判別式よりも低い次数で不変式が見つかる．2 次の単項式で $w = 0$ となるもの，つまり $S_{2,\,0}$ の基底は

$$ae,\ bd,\ c^2$$

である．

$$D = a\frac{\partial}{\partial b} + 2b\frac{\partial}{\partial c} + 3c\frac{\partial}{\partial d} + 4d\frac{\partial}{\partial e}$$

である．これを先の 3 つの単項式に作用させると，それぞれ

$$4ad,\ ad + 3bc,\ 4bc$$

となる．そこで $Df = 0$ となる f を

$$f = pae + qbd + rc^2$$

とおく．

$$Df = 4pad + q(ad + 3bc) + 4rbc$$

となるので，$4p + q = 0$，$3q + 4r = 0$ より，

$$f = ae - 4bd + 3c^2$$

が $Df = 0$ となる．

3 次の単項式で $w = 0$ となるもの，つまり $S_{3,\,0}$ の基底は

$$ace,\ ad^2,\ b^2e,\ bcd,\ c^3$$

である．同様にして

$$f = ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3$$

が $Df = 0$ となる．これら実際に確認すれば $\Delta f = 0$ も成り立ち，確かに不変式である．

この 2 つが 2 次と 3 次の不変式で，これらで生成されたものが，4 次方程式の不変式である．ちなみに判別式 D_4 は

$$D_4 = (ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3)^2$$

という 6 次式である．

耕介　このようにして順にやっていくのは大変ではありませんか．

南海　そうだ．次数が大きくなると，不変式は多くなり複雑になっていく．

2 変数 n 次の整式 $f(x,\ y)$ に対し，

$$(x,\ y) \to \left(\frac{p_1x+q_1y+r_1}{p_3x+q_3y+r_3},\ \frac{p_2x+q_2y+r_2}{p_3x+q_3y+r_3}\right)$$

を考え，

$$(p_3x+q_3y+r_3)^n f\left(\frac{p_1x+q_1y+r_1}{p_3x+q_3y+r_3},\ \frac{p_2x+q_2y+r_2}{p_3x+q_3y+r_3}\right)$$

を作ると，これによって $f(x,\ y)$ が変換され，係数の 1 次変換が得られる．この係数変換で不変な，文字係数の整式もまた不変式である．

耕介　$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \in SL(3)$ の作用での不変式ですね．

南海　そうだ．後に抽象代数学の旗手となった女性数学者のエミー・ネーター (Amalie Emmy Noether 1882〜1935) は，この 2 変数で 4 次の場合に不変式を調べ，331 個の不変式を書きだし，それらによってすべての不変式が書き表せることを証明し，ゴルダンのもとで 1907 年に学位論文としている．

耕介　すごいですね．でもきりがありませんね．

南海　不変式論は，このように具体的に構成する段階の中から，新しい考え方をきりひらいていった．そのことが大切なので，次に新しい発展について，話そう．

2.9.6　存在と構成

2.9.6.1　ヒルベルトの第 14 問題

南海　次数が大きくなると急速に複雑になり，順次不変式を求めていくのは大変困難になる．それでも，19 世紀に不変式の権威であったゴルダン (Gordan，1837〜1912) は，5 次以上の場合を含め，方程式の不変式は次数にかかわらず，つねに有限個の基本的な不変式の多項式として表すことができることを示した．それは大変複雑な計算によってなされた．

先に，2 変数 n 次の整式 $f(x,\ y)$ に対し $SL(3)$ を作用させ，係数の整式の不変式を考えたが，同様にして m 変数 n 次の整式 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$ に，$SL(m+1)$ を作用させ，その係数の不変式を考えることができる．これも方程式の不変式と呼ぼう．ゴルダンが示したのは，$m=1$ の場合だった．イギリスのケーリー (Cayley，1821〜1895) は，

> $SL(m+1)$ が作用するような一般の場合に，方程式の不変式は，有限個の決まった不変式を用いてすべて書き表すことができるか．

という問題を立て，これをゴルダン問題と呼んだ．いろんな人がこの問題に挑戦した．先に紹介したようにネーターは，$SL(3)$ が作用する $m=2,\ n=4$ の場合に，331 個の不変式系を求めたのだ．これはおそらく実際に不変式を求める限界だったのだろう．変数が増えていった場合，基本となる不変式が多数になる．一般の場合に有限個の不変式で表されるのかどうか，証明はおぼつかなかった．実際に構成する，あるいは構成するアルゴリズムを明確にする．そのうえで，有限であることを示す．この方法は，現実の複雑さの壁に出会った．

耕介　でも，5 次方程式は必ず根をもつけれども，その根を構成する一般的な方法は存在しないのでしょう．構成できるかできないかと，存在するかしないかとは別の問題ですね．

南海　そうだ．そのような事実の発見から，19 世紀の後半期には，存在と構成は別個の問題であることが認識されていった．ここで，問題を根本的に転換させたのが，ヒルベルトだった．ヒルベルトは 1886 年の自分のノートに

> ゴルダンの方法は複雑すぎてほとんどの場合に実行できない．問題の核心はそういう計算方法でなく，存在するという事実を示すことだけだ．

と書いている．そして，1890 年，m と n が一般の場合について，他のすべての不変式を書き表すことができる有限個の不変式系が「存在すること」を示した．

耕介　それは難しいのですか．

南海　もちろん証明そのものもある程度の基礎が必要だ．だがそれ以上に，存在と構成の分離という発想の転換が重要だ．

ここでできるだけ問題を一般的にとらえて次のような問題を設定しよう．K で複素数 C や実数 R，有理数 Q などの体を表す．K を係数とする多項式を K 多項式といおう．n 変数の K 多項式の集合を $K[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]$ とする．簡単のために $K[\mathbf{x}]$ と書く．$K[\mathbf{x}]$ はその体を係数とする整式の集合であり，和や差および積の演算で閉じている．

$GL(n)$ を K の要素を成分とする n 次正方行列で逆行列をもつものの集合とする．これは行列の積に関して閉じている．いわゆる群である．

定義 13 (ヒルベルトの第 14 問題) G をある群とし，G から $GL(n)$ への準同型 (積を保つ写像)ρ がある．$\sigma \in G$ に対して，n 変数の多項式環 $K[\mathbf{x}]$ の元 $f(\mathbf{x})$ への作用が，

$$f^{\sigma}(\mathbf{x}) = f(\rho(\sigma)^{-1}\mathbf{x})$$

で定まっている．この作用による G 不変式の集合を H とする．つまり

$$H = \{\ f \in K[\mathbf{x}] \mid f^{\sigma}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),\ \sigma \in G\ \}$$

とする．H の各要素 f を適当な K 多項式 F を用いて，

$$f = F(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N)$$

と表すことができるような有限個の不変式系 $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N$ は存在するか．

ヒルベルトがこのような問題を提起したのは，実際には少し違う形で述べられたのだが，1900 年の国際数学者会議であった．世紀の変わり目において，ヒルベルトは未解決な 23 個の問題を提起した．これはその第 14 番目にあったのでこのように呼ばれている．

それに先立つ 1890 年，ヒルベルトは従来の方法とはまったく異なる観点から方程式の不変式が有限個で表されることを示し，ケーリーのゴルダン問題を解決していた．その問題をさらに一般の行列の作用に普遍化したのが，ヒルベルトの問題だ．

耕介　結論的に，ヒルベルトの問題は肯定的なのですか．

南海　いや．1958 年に永田雅宜先生が反例を構成された．

耕介　そうなのですか．

南海　この面については最後の参考文献を見てほしい．

2.9.6.2　ヒルベルトの基底定理

南海　ヒルベルトは，方程式の不変式については，問題を肯定的に解決した．その根拠となったのが次の基底定理である.『数学対話』「整式の整数論」に**イデアル**が出てきた．
耕介　整数の部分集合 A で，A の 2 つの元の差，および A の元の整数倍が再び A に属するような部分集合をイデアルという，とありました．
南海　これを多項式の場合に正確に言おう．n 変数の多項式の集合 $K[\mathbf{x}]$ には，和の単位元 0 と積の単位元 1 があり，和差および積の演算で閉じている，つまりそれらの演算の結果は再び $K[\mathbf{x}]$ に属する．このような性質をもつ集合を**環**という．多項式の集合の場合は多項式環といわれる．

定義 14 (多項式環のイデアル) $K[\mathbf{x}]$ の部分集合 I で次の性質をもつものを $K[\mathbf{x}]$ のイデアルという．

(1) $f,\ g \in I$ なら $f - g \in I$

(2) $f \in I$ なら任意の $p \in K[\mathbf{x}]$ に対して $p \cdot f \in I$

例えば，1 変数多項式環 $K[x]$ で定数項が 0 であるような多項式の集合 J_0 はイデアルである．

さて，イデアル I が $f_1,\ f_2,\ \cdots$, (無限個あってもよい) で生成されるとは，I の各元 f が $f_1,\ f_2,\ \cdots$ の中の (f によって異なってもよい) 有限個の $f_{a_1},\ f_{a_2},\ \cdots,\ f_{a_t}$ を用いて $p_{a_1}f_{a_1}+p_{a_2}f_{a_2}+\cdots+p_{a_t}f_{a_t}$ と書き表されることをいう．いいかえると，

$$I = \{p_1f_1 + p_2f_2 + \cdots \mid p_1,\ p_2,\ \cdots,\ \in K[\mathbf{x}],\ \text{有限個を除く } p_i \text{ は } 0\}$$

と表せることをいう．
耕介　J_0 は x で生成されます．
南海　そう．この場合は 1 つの元で生成される．さて，次の基本定理が成り立つ．つまり，上の $f_{a_1},\ f_{a_2},\ \cdots,\ f_{a_t}$ を固定することが出来る．

定理 45 (ヒルベルトの基底定理) $K[\mathbf{x}]$ の元 $f_1,\ f_2,\ \cdots$ で生成される任意のイデアルは，$f_1,\ f_2,\ \cdots$ の中の有限個の元で生成される．

証明

$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の変数の個数 n についての数学的帰納法でおこなう．

$n = 0$ のとき．このとき多項式環は定数項のみからなり K そのものである．K の任意のイデアル I に対し，0 でない I の元 j を取ると，$\dfrac{1}{j}$ が K の元なので，j との積 1 が I に属する．したがって任意の K の元 k に対して，$k = k \cdot 1$ より，k が I に属する．つまり，K のイデアルは $\{0\}$ と K しかない．このときは I はそれぞれ 0 と 1 で生成される．

変数の個数が $n-1$ のとき，つまり $K[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}]$ で定理が成立するとする．

I の元 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ を x_n で整理し，

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = f^*(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1})x_n^N + \cdots$$

とする．これら x_n に関して最高次の項の係数となる $K[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}]$ の整式 $f^*(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1})$ の全体で生成される $K[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}]$ のイデアルを I^* とする．数学的帰納法の仮定から，I^* には有限個の元 $f_1^*,\ \cdots,\ f_s^*$ が存在し，I^* はこれらで生成される．$f_1,\ \cdots,\ f_s$ の中の x_n に関する次数の最高値を d とする．

次に $0 \leqq i \leqq s$ に対して

$$L_i = \{0\} \cup \{f^* \mid f \in I, \deg f = i\}$$

とする．これは明らかに $K[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}]$ のイデアルなので，その中の有限個の元で生成される．それを

$$g_{ik}^* \ (1 \leqq k \leqq r(i))$$

とする．そこで，I の元の集合

$$\{f_1,\ \cdots,\ f_s\} \cup \bigcup_{i=1}^{s} \{g_{ik} \mid 1 \leqq k \leqq r(i)\}$$

を考え，これで生成される $K[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]$ のイデアルを I' とする．

$I' = I$ を示す．$I' \subset I$ は明か．

I の任意の元 f をとる．$f \in I'$ を f の次数に関する数学的帰納法で示す．

$\deg f = 0$ なら，$f = f^* \in L_0$ より成立．$d-1$ 次までは成立するとする．

$d < s$ のとき．$f^* \in L_d$ なので，$K[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}]$ の元 p_k を用いて

$$f^* = \sum_{k=1}^{r(d)} p_k g_{dk}^*$$

と表せる．このとき，

$$\deg\left(f - \sum_{k=1}^{r(d)} p_k g_{dk}\right) \leqq d-1$$

となるので，帰納法の仮定から $f - \sum_{k=1}^{r(d)} p_k g_{dk}$ は I' に属し，かつ $\sum_{k=1}^{r(d)} p_k g_{dk} \in I'$ であるから，あわせて $f \in I'$ である．

$d \geqq s$ のとき．同様に考え $K[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}]$ の元 p_k を用いて

$$f^* = \sum_{k=1}^{s} p_k f_k^*$$

と表せる．$\deg f_k = \beta_k$ $(1 \leqq k \leqq s)$ とする．このとき，

$$\deg\left(f - \sum_{k=1}^{s} p_k x_n^{d-\beta_k} f_k\right) \leqq d-1$$

となるので，帰納法の仮定から $f - \sum_{k=1}^{s} p_k x_n^{d-\beta_k} f_k$ は I' に属し，かつ $\sum_{k=1}^{s} p_k x_n^{d-\beta_k} f_k \in I'$ であるから $f \in I'$ である．

よって $I \subset I'$ となり，$I = I'$ が示された．

この結果 I が有限個の元で生成されることが確定した． □

2.9.6.3 有限群の場合

南海

この基底定理を根拠にすると，G が有限群の場合，ヒルベルトの問題が肯定的に示される．多項式環 $K[\mathbf{x}]$ の元 f に対し

$$E(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} f^{\sigma}(\mathbf{x})$$

とおく．ただし，$|G|$ は G の要素の個数を表す．

耕介　これって G が作用していった多項式の平均ではありませんか．

南海　そうだ．

補題 3　(1) $E(f)$ は G 不変である．

(2) f が G 不変なら $E(f) = f$．

(3) $f,\ g \in K[\mathbf{x}]$ に対し $E(f+g) = E(f) + E(g)$．

(4) f が G 不変なら $g \in K[\mathbf{x}]$ に対し $E(fg) = fE(g)$．

証明

(1) G の要素を

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots\sigma_t$$

とし，τ を G の任意の要素とすると，G が群なので

$$\{\tau\sigma_1,\ \tau\sigma_2,\ \cdots\tau\sigma_t\} = \{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots\sigma_t\} = G$$

である．だから

$$E(f)^{\tau} = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} f^{\tau\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} f^{\sigma}(\mathbf{x}) = E(f)$$

f が何であっても $E(f)$ は G 不変である．

(2) 明らかである．

(3) 明らかである．

(4)

$$\begin{aligned} E(fg) &= \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}(fg)^{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} f^{\sigma}g^{\sigma}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} fg^{\sigma}(\mathbf{x}) = f\cdot\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} g^{\sigma}(\mathbf{x}) = fE(g) \end{aligned}$$

□

さらに一点注意として，$f \in K[\mathbf{x}]$ への $GL(n)$ の作用は次数を変えないので，f が G 不変式なら，f を

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d \quad (f_j\text{は } f \text{ の次数 } j \text{ の部分})$$

と分割すると，各 f_j が G 不変式である．f_j を斉次不変式という．

定理 46 G を $GL(n)$ の有限部分群とし，G 不変式の集合を H とする．有限個の G 不変式 $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N$ が存在し，H の各要素 f を適当な K 多項式 F を用いて，

$$f = F(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N)$$

と表すことができる．

証明

次数が正の斉次不変式が生成する $K[\mathbf{x}]$ のイデアルを I とする．ヒルベルトの基底定理により，I は有限個の次数正の G 不変斉次式 $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N$ で生成される．K 係数の $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N$ の多項式の集合を R とする．

$$R = K[s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N] = H$$

を示せばよい．

$$R \subset H$$

は明らかである．そこでこれが一致しないとする．H の元であって R には属さない不変式が存在する．そのような不変式の斉次部分全体のなかで，次数が最小のものを f とする．f は次数最小の G 不変斉次式である．$f \in I$ なので，斉次式 $p_1,\ \cdots,\ p_N$ が存在して

$$f = p_1 s_1 + p_2 s_2 + \ \cdots\ + p_N s_N$$

とかける．このとき

$$\begin{aligned} E(f) &= E(p_1 s_1 + p_2 s_2 + \ \cdots\ + p_N s_N) \\ &= E(p_1)E(s_1) + E(p_2)E(s_2) + \ \cdots\ + E(p_N)E(s_N) \\ &= E(p_1)s_1 + E(p_2)s_2 + \ \cdots\ + E(p_N)s_N \end{aligned}$$

$E(p_i)$ がすべて R の元なら結局 f が R の元になる．したがって $E(p_i)$ の中に R の元ではないものが存在する．それを $E(p_a)$ とする．

一方，$E(p_a)$ はそれ自身 G 不変斉次式なので $E(p_a) \in H$ である．そして

$$\deg E(p_a) < \deg f$$

なので，これは $\deg f$ の最小性に反する．よって $R = H$ が示された． □

2.9.6.4　ユニタリー群の場合

南海　ゴルダン問題 2.9.6.1 は 1890 年，ヒルベルトによって，基底定理を土台に解決された．その後，ヘルマン・ワイルによって別の方法が示された．それは，先の有限群のときの考え方を生かすものであった．ここではワイルの方法を $m = 1$ で n 次の場合について話そう．リー群論という分野を勉強すれば，一般の m の場合に展開することが出来る．とはいえ，高校範囲からいえば，いくつかのことは証明なしに進まなければならない．

耕介　有限群の場合は，総和を群の元の個数で割った平均 $E(f)$ をつかうことで，数学的帰納法がうまく使えました．無限群では，加えたものを元の個数で割るということは出来ません．

南海　しかし，総和に代わるものがあるだろう．

耕介　積分ですか．

南海　そうだ．全体にわたる積分が有限確定なら，平均を考えることも不可能ではない．そのことを話してみよう．そこで，ここからは多項式環の係数は複素数 C とする．よって $SL(2)$ も成分は複素数値である．

耕介　複素数 $p,\ q,\ r,\ s$ で $ps-qr=1$ であるようなものによって $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ と表される行列の全体です．しかしそうすると，$SL(2)$ が作用するベクトル空間も複素数成分ですか．

南海　そうだ．$(z_1,\ z_2)$, $(z_1,\ z_2 \in C)$ であるような空間を考える．これを C^2 と書こう．

耕介　複素 2 次元ということは，実数から見れば 4 次元ですか．

南海　そうだ．そして，ベクトル $\mathbf{x}=(z_1,\ z_2)$ の大きさを

$$|\mathbf{x}|^2=|z_1|^2+|z_2|^2=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$$

で定める．

耕介　これって 2 つのベクトル $\mathbf{x}=(z_1,\ z_2)$ と $(\overline{z_1},\ \overline{z_2})$ の内積です．

南海　普通これを「エルミート積」という．内積の記号を使うと $\mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{x}}$ と書ける．$SL(2)$ の元であって，C^2 のベクトルの大きさ，つまりエルミート積を変えないものの集合を $SU(2)$ と書く．これは $SL(2)$ の部分群で**ユニタリ群**といわれる．この群は有限群とは違うが，全体を積分した値が有限である．それを考える．そこでまず，$SU(2)$ の元はどんな形をしているか．

耕介　$\sigma=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とします．また任意の $\mathbf{x}=(z_1,\ z_2)$ をとります．内積を 1 行 2 列，あるいは 2 行 1 列の行列の積と見れば

$$z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=(z_1,\ z_2)\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}$$

なので，$\sigma\mathbf{x}$ のエルミート積は

$$\sigma\mathbf{x}\cdot\overline{\sigma\mathbf{x}}=(z_1,\ z_2)\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ \overline{r} & \overline{s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}$$

となります．これがつねに $z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$ と等しいので，

$$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ \overline{r} & \overline{s} \end{pmatrix}$$

が単位行列です．かつ $SL(2)$ の元でもあるので，成分で書くと

$$\begin{cases} p\overline{p}+r\overline{r}=1 \\ q\overline{q}+s\overline{s}=1 \\ p\overline{q}+r\overline{s}=0 \\ ps-qr=1 \end{cases}$$

これをもとに，r と s を求めると，$r=-\overline{q}$，$s=\overline{p}$ になります．結局

$$SU(2)=\left\{\begin{pmatrix} p & q \\ -\overline{q} & \overline{p} \end{pmatrix}\ \middle|\ |p|^2+|q|^2=1,\ p,\ q\ \in C\right\}$$

です．

これは，実成分で $z_1 = s + it$，$z_2 = u + iv$ とおくと

$$s^2 + t^2 + u^2 + v^2 = 1$$

です．球面の方程式のようです．

南海　4 次元空間の中の 3 次元球面だ．そこで，

$$s^2 + t^2 + u^2 + v^2 = r^2$$

を考える．これは半径 r の 3 次元球面だ．この体積 $V(r)$ と表面積 $S(r)$，実際は 4 次元立体と 3 次元立体のなのだが，これは求まるか．

耕介　そんな積分はわかりません．

南海　では，円の面積と円周，球の体積と表面積はどのような関係であったか．

耕介

2 次元	3 次元	4 次元
面積 : πr^2	体積 : $\dfrac{4\pi}{3}r^3$	$V(r)$
円周 : $2\pi r$	表面積 : $4\pi r^2$	$S(r)$

です．

南海　上段を r で微分すると下段になる．球の体積は円の面積から回転体の体積計算で求まる．

耕介　3 次元の体積を回転させて $V(r)$ を求め，それを微分すれば $S(r)$ になるのですね．v を固定すると

$$s^2 + t^2 + u^2 = r^2 - v^2$$

は 3 次元球体なのでその体積は

$$\frac{4\pi}{3}(r^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}$$

です．だから $v = r\sin\theta$ で置換すれば計算できます．

$$\begin{aligned} V(r) &= 2\int_0^r \frac{4\pi}{3}(r^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}\,dv = \frac{8\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\cos^3\theta r\cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{8r^4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{8r^4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\ &= \frac{8r^4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\cos 2\theta + \dfrac{1+\cos 4\theta}{2}}{4}\,d\theta = \frac{\pi^2 r^4}{2} \end{aligned}$$

したがって

$$S(r) = V'(r) = 2\pi^2 r^3$$

です．

南海　とにかく有限群ではないが，$SU(2)$ はその 3 次元球面としての総面積が $S(1) = 2\pi^2$ であることがわかった．

南海　これで次の場合に不変式が有限個でかけることが示せる．そのために $SL(2)$ の不変式についてもういちどふり返っておこう．

$SL(2)$ の元 σ に対して 2.7 の方法で x の n 次式が変換され，その結果 $n+1$ 個の係数の間の変換が定まる．今は，不変式の伝統に従い $f(x)$ を (2.10) において係数の変換定めている．

この過程を通して $SL(2)$ が $n+1$ 変数の整式に作用するのだった．そこで f をこのような $n+1$ 変数の整式とし，この作用による f の変換を f^σ と書こう．

今は，$SL(2)$ の部分群 $SU(2)$ の不変式を考えるのだ．

耕介　有限群の場合に平均 $E(f)$ をとった作用に関して，ユニタリー群 $SU(2)$ の場合は，形式的には x の整式 f に対して

$$E(f) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{SU(2)} f^\sigma \, d\sigma$$

とするのですね．

南海　有限群のときは単なる和であったが，この場合は積分なので，$\sigma \in SU(2)$ の元を $\sigma \in SU(2)$ にかけると，これは球面 H をそれ自身に写す変換であるが，この変換で $d\sigma$ が変わらないことをおさえなければならない．ところが $SU(2)$ はエルミート積を一定に保ち，図形的には球面 S の長さとなす角，したがってその面積要素を変えない．この結果 $E(f)$ は $SU(2)$ の作用による不変式となる．f が $SU(2)$ 不変なら $E(f) = f$ も成り立つ．

耕介　まだ $SL(2)$ 不変ではないですね．

南海　そう．それはこれから考える．

今わかったことは，次のことだ．

定理 47 $GL(2)$ の部分群 G を $SU(2)$ にとる．方程式の係数変換を通して $SU(2)$ を $n+1$ 変数の整式 f に作用させる．この作用による不変式の集合を H とする．有限個の G 不変式 $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N$ が存在し，H の各要素 f を適当な K 多項式 F を用いて，

$$f = F(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N)$$

と表すことができる．

耕介　証明は有限群の場合とまったく同じですね．

2.9.6.5　有限性の証明への道

南海　$SU(2)$ に関する不変式の有限性は示せた．

これをもとに $SL(2)$ に関する不変性がどのように示されるのか話そう．f はいま $n+1$ 次式としている．この場合に一般化することは難しくないので，計算は $n=2$，つまりこれまでやってきた場合にしたい．

まず，$SL(2)$ が

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \right\},\quad U_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},\quad U_- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

という 3 つの部分群で生成されることは示した．ところが

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

のように，T の元が U_+ と U_- で書けるので，$SL(2)$ は U_+ と U_- で生成される．

耕介　ということは f が $SL(2)$ であるための必要十分条件は

$$Df = 0,\ \Delta f = 0$$

なわけですね．

南海　さて $SL(2)$ 不変ならもちろん $SU(2)$ 不変である．ところが方程式の不変式に関してはこの逆も成り立つ．

$SU(2)$ には $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が含まれる．

耕介　最初のものは θ の回転ですね．

南海　まず，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ に対応する 3 次行列 (2.11) を書いてほしい．

耕介

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} & \sin 2\theta & \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \\ \dfrac{-\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta & \dfrac{\sin 2\theta}{2} \\ \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} & -\sin 2\theta & \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \end{pmatrix}$$

南海　$f(a,\ b,\ c)$ が角 θ を変化させたときに不変であることは，変換を行った式を θ で微分したとき恒等的に 0 になるということだった．計算してみてほしい．

耕介

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\theta} f\left(a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b\sin 2\theta + c\frac{1-\cos 2\theta}{2},\right. \\ &\qquad a\frac{-\sin 2\theta}{2} + b\cos 2\theta + c\frac{\sin 2\theta}{2}, \\ &\qquad \left. a\frac{1-\cos 2\theta}{2} - b\sin 2\theta + c\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \\ = \ &(-a\sin 2\theta + 2b\cos 2\theta + c\sin 2\theta)\, f_a(\prime\prime) \\ &\quad + (-a\cos 2\theta - 2b\sin 2\theta + c\cos 2\theta)\, f_b(\prime\prime) \\ &\quad + a\sin 2\theta - 2b\cos 2\theta - c\sin 2\theta)\, f_c(\prime\prime) \end{aligned}$$

南海　この結果を次のように変形する．

$$\begin{aligned} &2\left(\frac{-a\sin 2\theta}{2} + b\cos 2\theta + \frac{c\sin 2\theta}{2}\right) f_a(\prime\prime) \\ &\quad + \left(a\frac{1-\cos 2\theta}{2} - b\sin 2\theta + c\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) f_b(\prime\prime) \\ &\quad - \left(a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b\sin 2\theta + c\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) f_b(\prime\prime) \\ &\quad -2\left(\frac{-a\sin 2\theta}{2} + b\cos 2\theta + \frac{c\sin 2\theta}{2}\right) f_c(\prime\prime) \end{aligned}$$

耕介　これが恒等的に 0 になることは，

$$\left(2b\frac{\partial}{\partial a} + c\frac{\partial}{\partial b} - a\frac{\partial}{\partial b} - 2b\frac{\partial}{\partial c}\right) f = (\Delta - D)f = 0$$

と同値です.

南海　次に $\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ に対応する 3 次行列 (2.11) を書いて同様に続けてほしい.

耕介

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & 2i\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ i\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta & i\cos\theta\sin\theta \\ -\sin^2\theta & 2i\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} & i\sin 2\theta & \dfrac{-1+\cos 2\theta}{2} \\ \dfrac{i\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta & \dfrac{i\sin 2\theta}{2} \\ \dfrac{-1+\cos 2\theta}{2} & i\sin 2\theta & \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \end{pmatrix}$$

これを用いて同じように計算する.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\theta} f\left(a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + bi\sin 2\theta + c\frac{-1+\cos 2\theta}{2},\right. \\ &\qquad a\frac{i\sin 2\theta}{2} + b\cos 2\theta + c\frac{i\sin 2\theta}{2}, \\ &\qquad \left. a\frac{-1+\cos 2\theta}{2} + bi\sin 2\theta + c\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \\ = \;& (-a\sin 2\theta + 2bi\cos 2\theta - c\sin 2\theta)\, f_a(\prime\prime) \\ &+ (ai\cos 2\theta - 2b\sin 2\theta + ci\cos 2\theta)\, f_b(\prime\prime) \\ &+ (-a\sin 2\theta + 2bi\cos 2\theta - c\sin 2\theta)\, f_c(\prime\prime) \end{aligned}$$

この結果を次のように変形する.

$$\begin{aligned} &2i\left(\frac{ai\sin 2\theta}{2} + b\cos 2\theta + \frac{ci\sin 2\theta}{2}\right) f_a(\prime\prime) \\ &+i\left(a\frac{-1+\cos 2\theta}{2} + bi\sin 2\theta + c\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) f_b(\prime\prime) \\ &+\left(a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + bi\sin 2\theta + c\frac{-1+\cos 2\theta}{2}\right) f_b(\prime\prime) \\ &+2i\left(\frac{ai\sin 2\theta}{2} + b\cos 2\theta + \frac{ci\sin 2\theta}{2}\right) f_c(\prime\prime) \end{aligned}$$

これが恒等的に 0 になることは,

$$\left(2bi\frac{\partial}{\partial a} + ci\frac{\partial}{\partial b} + ai\frac{\partial}{\partial b} + 2bi\frac{\partial}{\partial c}\right) f = i(\Delta + D)f = 0$$

と同値です.

南海　$SU(2)$ 不変であれば，その中の特定の形で不変であり，その結果

$$(\Delta - D)f = 0,\ (\Delta + D)f = 0$$

となる．これから

$$Df = 0,\ \Delta f = 0$$

が得られ，$SL(2)$ で不変になる．方程式の不変式については $SL(2)$ 不変であることと $SU(2)$ 不変であることとが同値になり，かくして定理 47 によって $SL(2)$ の作用による不変式が有限個の不変式で表されることが示された．

$SL(2)$ の n 次式への作用による $n+1$ 変数整式の場合に拡張することは難しくない．$SL(m+1)$ の作用に一般化するには，具体的に計算で確かめることは出来ないので，いくつかの基礎理論が必要である．

これはヘルマン・ワイルによる方法である．

19 世紀末から 20 世紀にかけて，このような問題が大きく発展し，現代の数学につながっていった．関心をもった人は，さらに勉強を進めてほしい．今回の話しは，一応このあたりで終えるとしよう．

2.9.7 参考にした文献

ほんのさわりだけをかじっています．

(1) 向井茂:不変式とモジュライ (『数学のたのしみ』No.28 2001.12，日本評論社)

http://www.nippyo.co.jp/maga_suutano/st28.htm

(2) Mukai,S.: 『An Introduction to Invariants and Moduli』(2003，Cambridge Studies in Advanced Mathematics)

http://www.amazon.co.jp/Introduction-Invariants-Cambridge-Advanced-Mathematics/dp/0521809061

(3) 向井茂:不変式の話　数理解析研究所公開講座

(4) 向井茂:不変式の話 (『数学セミナー』連載)

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mukai/paper/SuSemi06.pdf

第 1 回　対称式からヒルベルトの第 14 問題へ（2005 年 12 月号）
第 2 回　方程式の不変式（2006 年 1 月号）
第 3 回　ヒルベルトの基定理とワイルの手品（2006 年 2 月号）
第 4 回　第 14 問題に対する反例と二つの未解決問題（最終，2006 年 4 月号）

(5) ヘルマン・ワイル:古典群 (蟹江幸博訳，シュプリンガー数学クラシックス，2007)

http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/weyl_cg/index.htm

2.10　二項間漸化式

2006.9.19

2.10.1　漸化式とは何か

2.10.1.1　漸化式の定義

早苗　漸化式 $a_{n+1}=3a_n+5\cdot 2^n$ の解法を習いました．両辺を 2^{n+1} で割って解く方法を習いましたが，3^{n+1} で割っても解けるということで，やってみたら出来ました．解き方がいろいろあって，どの解き方にするのか迷ったり，わからなかったりします．

このような 2 項間の漸化式について，およそのどのような解法があるのか，知りたいのですが．

南海　確かに，いろんな解法をまとめて書いてある参考書は少なそうだ．ここでいろいろと考えてみよう．ただ，漸化式は必ずしも解くことがすべてではない．数列の整数的な性質などでは，漸化式で定まる数列の性質を漸化式そのものから示すことも大切なのだ．

また，確率や場合の数の漸化式では，解く以前に**漸化式を立てる**ことが問題を解く要であったりする．そして立てた漸化式をもとに確率を計算していく問題も多い．そのことを前提として指摘しておこう．そのうえで，ではまず，漸化式とは何か．

早苗　$a_{n+1}=3a_n+5\cdot 2^n$ のように，a_{n+1} を a_n で表した等式です．

南海　漸化式は何を定めるのだろうか．

早苗　数列 $\{a_n\}$ を定めます．

南海　どのようにして定めるのか？

早苗　a_1 の値は与えられていますので，それを順に代入していけば，数列が求まります．

南海　それは何を意味しているのだろう．そのことを，ここでは 2 項間の漸化式で考えよう．

2 項間漸化式とは，数列 $\{a_n\}$ の第 $n+1$ 項 a_{n+1} を，第 n 項 a_n と n を含む式 $F(a_n,\ n)$ によって

$$a_{n+1}=F(a_n,\ n)$$

と表す等式である．このとき a_1 の値が与えられれば, この数列 $\{a_n\}$ は一意に確定する．それは数学的帰納法によって示される．

早苗

$$a_2=F(a_1,\ 1),\ a_3=F(a_2,\ 2),\ a_4=F(a_3,\ 3),\ \cdots$$

と決まっていきます．このことを数学的帰納法で示すのですね．

$n=1$ のときの値は与えられている．

$n=k$ の値が決まるとする．このとき $a_{k+1}=F(a_k,\ k)$ によって a_{k+1} の値が定まる．

したがってすべての n に対して，a_n の値が確定する．

ですね．そうか，数列 $\{a_n\}$ は初項をもとに漸化式によって定まることが数学的帰納法で示されるのですね．

南海　そうなのだ．これを漸化式による数列の**帰納的定義**という．

2.10.1.2　漸化式を解く

早苗　n に対して a_n が定まるのだから，a_n は n の式で書けるはずだ，ということですね．
南海　いや．定まることと書けることは同じではない．例えば

$$a_{n+1} = -{a_n}^2 + a_n + 2$$

のような 2 次の項のある漸化式は，書けるかもしれないが簡単ではないはずだ．a_n を n の式で書くことを**漸化式を解く**という．
早苗　すると数列 $\{a_n\}$ は未知数列で，それを満たす数列を具体的に求めることが，漸化式を解くことなのですね．
南海　未知数列であることをはっきりさせるためには，$x_{n+1} = F(x_n,\ n)$ のようにした方が分かりやすいとも言える．何にせよ，漸化式を解くことは簡単ではないのだ．
早苗　$a_{n+1} = n^2 a_n + 3n$ なんかも難しそうです．

2.10.2　$a_{n+1} = ra_n + f(n)$ の解法

南海　そこで今考えるのは，式 $F(a_k,\ k)$ が a_n については 1 次で，かつ 1 次の係数が定数である漸化式である．もちろんその他にも

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} a_n$$

のように係数が n の式なるものもある．これはこのようによほど特別な型でなければ解けない．これは今は置いておく．

今考えるのは，漸化式が定数 r と n の関数 $f(n)$ を用いて

$$a_{n+1} = ra_n + f(n) \quad \cdots ①$$

と表せるものだ．この型の漸化式ですぐに解けるのはどのようなときか．
早苗　$r = 1$ で $f(n) = d$ (定数) なら等差数列です．$f(n) = 0$ なら数列 $\{a_n\}$ は等比数列です．これらは一般項が求まります．

$a_1 = a$ とすると，$r = 1$ で $f(n) = d$ のときは $a_n = a + d(n-1)$ です．$f(n) = 0$ のときは $a_n = ar^{n-1}$ です．
南海　その証明は？
早苗　えっ．そうかこれも数学的帰納法で示せばよい．
南海　そう．これはすぐにできる．もうひとつ $r = 1$ のとき．これも教科書にのっている．
早苗　はい．階差数列が $a_{n+1} - a_n = f(n)$ となるので，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

です．
南海　以上の 3 つは ① 型のうち簡単に解ける漸化式だ．その他の漸化式も，いろいろ変形を工夫して，このいずれかの解ける場合に持ちこむのだ．

そこで，$a_{n+1} = ra_n + f(n)$ 型の漸化式の解法をまとめよう．解き方は，大きく分けて 3 通りある．それぞれについてまず一般的方法を述べて，教科書にものっている漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 2$ を $a_1 = 1$ として解きながら説明しよう．

2.10.2.1　解法 1:一つの解を見つける

南海　漸化式 $a_{n+1}=ra_n+f(n)$ を満たす数列，つまり

$$u_{n+1}=ru_n+f(n)$$

となる数列 $\{u_n\}$ を何らかの方法で見つけるのだ．これを，$a_{n+1}=ra_n+f(n)$ をから辺々引くと

$$a_{n+1}-u_{n+1}=r(a_n-u_n)$$

これから数列 $\{a_n-u_n\}$ は公比 r の等比数列なので，

$$a_n-u_n=r^{n-1}(a_1-u_1)$$

$$\therefore\quad a_n=u_n+r^{n-1}(a_1-u_1)\quad\cdots②$$

早苗　一つ見つけるといっても簡単ではありません．
南海　いや実は $a_{n+1}=3a_n+2$ の場合，教科書はこの方法で解いている．
早苗　これは教科書では，

$$\alpha=3\alpha+2$$

とおいて $\alpha=-1$．これから

$$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$$

と変形します．
南海　これがまさに，解法 1 なのだ．
早苗　u_n は？…．そうかわかりました．$u_n=-1$ で定数の数列です．
南海　そうなのだ．
早苗　このとき ② は

$$a_n+1=3^{n-1}(a_1+1)=2\cdot3^{n-1}$$

となります．これから $a_n=2\cdot3^{n-1}-1$ です．
南海　この解法 1 は $f(n)$ が n の多項式のとき特に有効だ．$f(n)$ の次数を j とする．j 次式 $g(n)$ を

$$g(n)=e_jn^j+e_{j-1}n^{j-1}+\cdots$$

とおき，

$$g(n+1)=rg(n)+f(n)$$

となるように，係数比較して $g(n)$ を決める．未知係数が $j+1$ 個あり，それらをすべて比較した連立 1 次方程式を解けばよい．そして，$u_n=g(n)$ とすればよいのだ．
早苗　$f(n)$ が n の多項式のときは，一つの解自身が n の多項式で得られるのですね．
南海　$f(n)$ が cp^n の指数関数型でもこの方法が使える．それはあとの例でやろう．

2.10.2.2　解法 2:3 項間漸化式に持ちこむ

南海　$a_{n+1}=ra_n+f(n)$ より $a_{n+2}=ra_{n+1}+f(n+1)$ である．また漸化式に定数 t をかけて $ta_{n+1}=tra_n+tf(n)$ とし，辺々引くと

$$a_{n+2}-ta_{n+1}=ra_{n+1}-tra_n+f(n+1)-tf(n)\quad\cdots③$$

これから

$$a_{n+2}-(t+r)a_{n+1}+tra_n=f(n+1)-tf(n)$$

ここで $f(n+1)-tf(n)$ が簡単なものになるように t を選ぶのだ．それができれば，三項間漸化式が得られる．

早苗　これも難しく見えます．この方法で $a_{n+1}=3a_n+2$ を解くのはどうなるのですか．この場合は $f(n)=2$ なので

$$f(n+1)-tf(n)=2-2t$$

そうか，この場合は $t=1$ でいいのですね．これは要するに $a_{n+1}=3a_n+2$ と $a_{n+2}=3a_{n+1}+2$ から

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$$

と階差をとる方法です．得られた階差数列が等比数列になるタイプです．

$a_2=3+2=5$ なので，

$$a_{n+1}-a_n=3^{n-1}(a_2-a_1)=4\cdot 3^{n-1}$$

したがって，階差数列からもとの数列を求めて

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot 3^{k-1} \\ &= 1+4\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=2\cdot 3^{n-1}-1 \end{aligned}$$

となるのです．$n=1$ のときも成り立ちます．

南海　階差をとる方法は $f(n)$ が n の j 次多項式のときにも有効だ．

$$f(n+1)-f(n)$$

は $j-1$ 次となる．何回かくりかえせば，最後は定数になって解ける．

早苗　でもそこから，階差数列を順に解いていくのは大変です．

南海　そうだ．n の 1 次式や 2 次式なら可能だが，それ以上になると不便だ．$t\neq 1$ の場合は，例題でやってみよう．

2.10.2.3　解法 3:等比数列との比をとる

南海　以上の 2 つの解法が一般的なものだ．

もう一つ $a_{n+1}=F(a_n,\ n)$ が a_n の定数係数の 1 次式であることを生かす解法がある．① の両辺を r^{n+1} で割る．

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\frac{a_n}{r^n}+\frac{f(n)}{r^{n+1}}$$

である．これから

$$\frac{a_n}{p^n}=\frac{a_1}{r}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)}{r^{k+1}}$$

これを求めて，分母を払えばよい．

早苗　$a_{n+1}=2a_n+5^n$ などでは，2^{n+1} で割らずに，5^{n+1} で割るのも習いました．

南海　0 でない定数 p で割って，

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{r}{p} \cdot \frac{a_n}{p^n} + \frac{f(n)}{p^{n+1}}$$

とし，$\dfrac{f(n)}{p^{n+1}}$ が簡単になるようにできるのなら，それも一つの方法である．

早苗　$f(n) = cp^n$ のような指数型のときは使えます．

例 2.10.1 p は 0 でなく，r は $r \neq p$ となる定数，c は定数とする．漸化式

$$a_{n+1} = ra_n + cp^n$$

を，$a_1 = a$ で，3 通りの方法で解け．

早苗

解法 1

$u_n = Ap^n$ でできないか考えてみます．

$$Ap^{n+1} = r \cdot Ap^n + cp^n$$

$p \neq 0$ より

$$Ap = r \cdot A + c$$

これから，$A = \dfrac{c}{p-r}$ である．つまり $u_n = \dfrac{c}{p-r}p^n$ は一つの解である．$u_1 = \dfrac{cp}{p-r}$ より，② から

$$\begin{aligned} a_n &= u_n + r^{n-1}(a_1 - u_1) \\ &= \frac{c}{p-r}p^n + r^{n-1}\left(a - \frac{cp}{p-r}\right) \\ &= ar^{n-1} + cp \cdot \frac{p^{n-1} - r^{n-1}}{p-r} \end{aligned}$$

解法 2

$t = p$ で解法 2 を用いる．

$a_{n+1} = ra_n + cp^n$ の両辺に p をかけ，$n+1$ のときの漸化式から引く．

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= ra_{n+1} + cp^{n+1} \\ pa_{n+1} &= pra_n + cp^{n+1} \end{aligned}$$

より

$$a_{n+2} - pa_{n+1} = ra_{n+1} - pra_n = r(a_{n+1} - pa_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - pa_n\}$ は公比 r の等比数列なので，

$$a_{n+1} - pa_n = r^{n-1}(a_2 - pa_1) = r^{n-1}(ra + cp - pa) = -(p-r)ar^{n-1} + cpr^{n-1}$$

一方．漸化式は

$$a_{n+1} - ra_n = cp^n$$

なので，辺々引いて

$$\begin{aligned} (p-r)a_n &= (p-r)ar^{n-1} + cp^n - cpr^{n-1} \\ \therefore \quad a_n &= ar^{n-1} + cp \cdot \frac{p^{n-1} - r^{n-1}}{p-r} \end{aligned}$$

3 項間漸化式から得られる 2 項間漸化式の一方がはじめの漸化式で，もう一つが新しく得られたものです．

解法 3-1

漸化式の両辺を r^{n+1} で割る．

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{a_n}{r^n} + \frac{c}{r}\left(\frac{p}{r}\right)^n$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{r^n} = \frac{a}{r} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c}{r}\left(\frac{p}{r}\right)^k = \frac{a}{r} + \frac{cp}{r^2} \cdot \frac{\left(\dfrac{p}{r}\right)^{n-1} - 1}{\dfrac{p}{r} - 1}$$

$$\therefore \quad a_n = ar^{n-1} + cp \cdot \frac{p^{n-1} - r^{n-1}}{p - r}$$

$n = 1$ のときもこの式で成立する．

解法 3-2

漸化式の両辺を p^{n+1} で割る．

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{r}{p} \cdot \frac{a_n}{p^n} + \frac{c}{p}$$

$$\alpha = \frac{r}{p} \cdot \alpha + \frac{c}{p}$$

より $\alpha = \dfrac{c}{p - r}$ である．これから

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} - \frac{c}{p - r} = \frac{r}{p}\left(\frac{a_n}{p^n} - \frac{c}{p - r}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{a_n}{p^n} - \frac{c}{p - r} = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\left(\frac{a}{p} - \frac{c}{p - r}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad a_n &= \frac{c}{p - r} \cdot p^n + pr^{n-1}\left(\frac{a}{p} - \frac{c}{p - r}\right) \\ &= ar^{n-1} + cp \cdot \frac{p^{n-1} - r^{n-1}}{p - r} \end{aligned}$$

南海　このように漸化式の解法は一つではない．一つの漸化式が与えられると，その漸化式を含むより一般的な場合の考え方が適用できる．具体的な漸化式の一般化が一つではないので，それに対応していろいろな解法ができる．これからも漸化式の解法は柔軟に対応するようにしたい．

2.11　三項間漸化式と行列の累乗

2005.2.14/2001.4.14

2.11.1　三項間漸化式と連立漸化式

拓生　定期テストで，三項間漸化式

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n\,, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1$$

を解く問題が出ました．特性方程式 $t^2 - 2t - 3 = 0$ の二つの解が 3 と -1 で異なります．特性方程式の異なる二つの解が $\alpha,\ \beta$ のとき a_n がいつも $\alpha^{n-1},\ \beta^{n-1}$ からできているので，求める数列を

$$a_n = p \cdot 3^n + q \cdot (-1)^n$$

と置いて，最初の二項が一致するように p と q を求めました．でも試験では大幅に減点でした．
南海　数列がいつもこの形をしていることに気づいたのはよい．しかしただ単に計算だけするのは解答としては不十分だ．このように書けることはどんな意味があるのか考え，なぜこの形になるのか論証しなければならない．
拓生　もう一つ質問ですが，連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$$

を解こうとしていろいろやっていると，

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$$

が得られました．その変形はいつもできそうですが，連立漸化式と三項間漸化式の関係がはっきりしていません．
南海　なるほど．それならこの機会に三項間漸化式と連立漸化式についてまとめておこう．まず三項間漸化式と連立二項間漸化式の相互関係だ．

2.11.1.1　三項間漸化式と連立二項間漸化式の定義

数列 $\{a_n\}$ と n の関数 $f(n)$ があってその間に

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + f(n)$$

の関係式がすべての n に対して成り立つとき，この関係式を**三項間漸化式**という．$(a_1,\ a_0)$ の値が決まれば，数学的帰納法によって数列 $\{a_n\}$ の各項の値が一意に定まる．$f(n) = g(n+2) - pg(n+1) - qg(n)$ となる 0 以上の整数を定義域とする関数 $g(n)$ が見つかれば，これは

$$\{a_{n+2} - g(n+2)\} = p\{a_{n+1} - g(n+1)\} + q\{a_n - g(n)\}$$

となる．$f(n) = 0$ の場合に解けることが，基本だ．それで以下では

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad \cdots ①$$

となる漸化式を考えよう.

次に，二つの数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の間に成り立つ

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases} \quad \cdots ②$$

のような漸化式を**連立二項間漸化式**という．$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ の値が定まれば，二つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の各項の値が一意に定まる．

この二つの形の漸化式は，実は同等である．つまり一方から他方への変換があり，それによって，一方が解ければ他方が解ける．

2.11.1.2　連立二項間漸化式から三項間漸化式へ

まず，連立二項間漸化式② を考えよう．行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると② は

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

と表される．したがって，等比数列と同様に

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

となる．ハミルトン・ケイレイの定理より

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$$

つまり

$$A^{n+2} - (a+d)A^{n+1} + (ad-bc)A^n = 0 \quad \cdots ③$$

である．これからまた

$$\begin{aligned} & A^{n+2}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - (a+d)A^{n+1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (ad-bc)A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

つまり, 数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ はともに同じ三項間漸化式をみたす.

$$\begin{cases} x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} - (ad-bc)x_n \\ y_{n+2} = (a+d)y_{n+1} - (ad-bc)y_n \end{cases} \quad \cdots ④$$

をみたす.

このとき，それぞれの三項間漸化式の初期条件は

$$(x_1,\ x_0) = (ax_0 + by_0,\ x_0),\ (y_1,\ y_0) = (cx_0 + dy_0,\ y_0)$$

である.

2.11.1.3　三項間漸化式から連立二項間漸化式へ

こんどは三項間漸化式① を考えよう．$q=0$ なら実質は二項間等比数列なので $q\neq 0$ とする．$p=a+d,\ q=-(ad-bc)$ となるような数 $a,\ b,\ c,\ d$ を一組とる．同じ理由で $b\neq 0$ にとる．その組に対して

$$\begin{cases} a_{n+1}=aa_n+bb_n \\ b_{n+1}=ca_n+db_n \end{cases}$$

とおく．初期条件は $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0 \\ \dfrac{a_1-aa_0}{b} \end{pmatrix}$ とする．これは $a_1=aa_0+bb_0$ であるように b_0 をとるということである．行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=A^2-pA-qE=0$$

となる．ゆえに，この連立二項間漸化式から三項間漸化式を作る方法で作り直した数列 $\{a_n\}$ はもとの三項間漸化式① の解になる．なお数列 $\{b_n\}$ の方は $a,\ b,\ c,\ d$ の取り方で異なる．実際に解くときは $a=p,\ b=q,\ c=1,\ d=0$ という組を用いればよい．つまり

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases} \quad \cdots ⑤$$

とおく．初期条件は $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0 \\ \dfrac{a_1-pa_0}{q} \end{pmatrix}$ である．

以上から，三項間漸化式を解くことと連立二項間漸化式を解くことは同等である．

2.11.2　三項間漸化式を解く

2.11.2.1　行列で解く

ではこれをもとに三項間漸化式を行列で求めよう．

三項間漸化式① に対し，連立二項間漸化式⑤ を作る．⑤ の行列を $A=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

であるから，A^n が求まればよい．行列の n 乗を求める方法はいろいろある．最も簡単で便利な方法を用いよう．x を変数として x^n を $x^2-(a+d)x+(ad-bc)$ で割った余りを u_nx+v_n とする．つまり

$$x^n=\{x^2-(a+d)x+(ad-bc)\}Q(x)+u_nx+v_n$$

と表される．このとき x の所に A を代入すれば

$$A^n=u_nA+v_nE$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \{u_nA + v_nE\}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pu_n + v_n & qu_n \\ u_n & v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ \dfrac{a_1 - pa_0}{q} \end{pmatrix} \\ \therefore \quad a_n &= (pu_n + v_n)a_0 + u_n(a_1 - pa_0) = u_na_1 + v_na_0\end{aligned}$$

あとは $u_n,\ v_n$ を決めればよい．

$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とする．つまり

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = (x - \alpha)(x - \beta)$$

とする．

(1)　$\alpha \neq \beta$ のとき．

$$\begin{cases} \alpha^n = u_n\alpha + v_n \\ \beta^n = u_n\beta + v_n \end{cases}$$

より

$$u_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha},\ v_n = \frac{\alpha^n\beta - \alpha\beta^n}{\beta - \alpha}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}a_1 + \frac{\alpha^n\beta - \alpha\beta^n}{\beta - \alpha}a_0 \quad \cdots ⑥$$

(2)　$\alpha = \beta$ のとき．

$$x^2 - px - q = (x - \alpha)^2$$

であるから $p = 2\alpha,\ q = -\alpha^2$. よって

$$b_0 = \frac{a_1 - pa_0}{q} = \frac{a_1 - 2\alpha a_0}{-\alpha^2}$$

であることに注意する．さて

$$x^n = (x - \alpha)^2Q(x) + u_nx + v_n$$

の両辺を微分する．

$$nx^{n-1} = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2Q'(x) + u_n$$

それぞれに $x = \alpha$ を代入する．

$$u_n = n\alpha^{n-1},\ v_n = \alpha^n - (u_n\alpha) = (1 - n)\alpha^n$$

$$\therefore \quad a_n = n\alpha^{n-1}a_1 + (1 - n)\alpha^na_0 \quad \cdots ⑦$$

2.11.2.2　等比数列を作って解く

南海　これで三項間漸化式が解けたのだが，行列を使わない解法もまとめておこう．
拓生　はい．

三項間漸化式 ① に対して，二次方程式

$$x^2 - px - q = 0$$

をこの三項間漸化式の特性方程式という．特性方程式の解を $\alpha,\ \beta$ とする．

$$p = \alpha + \beta,\ q = -\alpha\beta$$

である．つまり三項間漸化式は

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

と表される．

(1) $\alpha \neq \beta$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} &= \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} &= \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{aligned}$$

と変形できる．ゆえに

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= \beta^n(a_1 - \alpha a_0) \\ a_{n+1} - \beta a_n &= \alpha^n(a_1 - \beta a_0) \end{aligned}$$

この辺々を引けば

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^n(a_1 - \alpha a_0) - \alpha^n(a_1 - \beta a_0)$$

これから

$$a_n = \frac{\beta^n(a_1 - \alpha a_0) - \alpha^n(a_1 - \beta a_0)}{\beta - \alpha}$$

これはもちろん ⑥ と同一の結果である．

(2) $\alpha = \beta$ (重解) のとき

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \alpha^n(a_1 - \alpha a_0)$$

つまり

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha}a_1 - a_0$$

したがって

$$\frac{a_n}{\alpha^n} = a_0 + n\left(\frac{1}{\alpha}a_1 - a_0\right)$$

ゆえに

$$a_n = n\alpha^{n-1}a_1 + (1-n)\alpha^n a_0$$

2.11.2.3　三項間漸化式を満たす数列の集合

南海　上で求めた 数列 $\{a_n\}$ の一般項を少し違う立場で考えよう．2数 $s,\ t$ と二つの数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ に対して数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = sa_n + tb_n\ (n = 0,\ 1,\ \cdots)$$

で定めこれを $s\{a_n\} + t\{b_n\}$ と書く．つまり

$$s\{a_n\} + t\{b_n\} = \{sa_n + tb_n\}$$

と定める． 数列 $\{a_n\}$ と 数列 $\{b_n\}$ がともに漸化式

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$$

を満たすとき $s\{a_n\} + t\{b_n\}$ も同じ漸化式を満たす．実際

$$\begin{aligned} & (sa_{n+2} + tb_{n+2}) - p(sa_{n+1} + tb_{n+1}) - q(sa_n + tb_n) \\ = \quad & s(a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n) + t(b_{n+2} - pb_{n+1} - qb_n) = 0 \end{aligned}$$

だからである．そこで $p,\ q$ を実数の定数とし，一つの漸化式を満たす数列の集合を考える．ただし初期条件 $a_1,\ a_0$ の値は実数とする．

$$V = \{\{a_n\} \mid a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n,\ a_1,\ a_0 \in R\} \quad \cdots ⑧$$

このとき V の要素 $\{a_n\}$ に対して平面ベクトル $\vec{x} = (a_1,\ a_0)$ を対応させることで V は平面ベクトルの全体と一致する．$\{a_n\}$ が $\vec{x}$ に対応し $\{b_n\}$ が $\vec{y}$ に対応していれば $s\{a_n\} + t\{b_n\}$ は $s\vec{x} + t\vec{y}$ に対応する．

したがってこの対応で演算もそのまま対応する．ゆえに V と平面ベクトルは同じものと見なすことができる．平面ベクトルの集合を，実二次元ベクトル空間 R^2 と書きあらわすと, V は，ベクトル空間として R^2 と**同型**である．さて，任意の平面ベクトル $\vec{x}$ は，平行でない二つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて

$$\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表され，しかもこの表し方は一通りであった．

とくに xy 座標平面においては平行でない二つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ のなかで $\vec{e}_1 = (1,\ 0),\ \vec{e}_2 = (0,\ 1)$ を「基底ベクトル」と呼ぶ．

とすれば，⑧ で定義された集合 V についても同じことが言える．V の任意の要素を二つの 数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ で

$$sa_n + tb_n$$

と表すためには，対応する xy 平面のベクトルが平行でなければよい．そのような数列の組をいくつか求めよう．

(1) $\alpha \neq \beta$ のとき．

二つの 数列 $\{e_n\},\ \{f_n\}$ を

$$e_n = \frac{\alpha^n\beta - \alpha\beta^n}{\beta - \alpha},\ f_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$$

で定める．このとき $e_0 = 1,\ e_1 = 0$ ，$f_0 = 0,\ f_1 = 1$ となるので，一方が他方の定数倍ということはない．V のすべての数列は，数列 $\{e_n\},\ \{f_n\}$ を用いて表される．

$$V = \{s\{e_n\} + t\{f_n\} \mid s,\ t \in R\}$$

(2) $\alpha,\ \beta$ が実数で $\alpha \neq \beta$ のときはさらに次のようにもできる．$\alpha^2 = p\alpha + q$ より

$$\alpha^{n+2} = p\alpha^{n+1} + q\alpha^n$$

なので， 数列 $\{\alpha^n\},\ \{\beta^n\}$ も漸化式を満たす．$n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して数列 $\{\alpha^n\},\ \{\beta^n\}$ がともに V の要素になり，対応する xy 平面のベクトル

$$(\alpha,\ 1),\ (\beta,\ 1)$$

が平行でないので数列 $\{\alpha^n\},\ \{\beta^n\}$ で V を表すこともできる．

$$V = \{s\alpha^n + t\beta^n \mid s,\ t \in R\}$$

(3) $\alpha = \beta$ のとき．つまり $p = 2\alpha,\ q = -\alpha^2$ のとき．

二つの 数列 $\{e_n\},\ \{f_n\}$ を

$$e_n = (1-n)\alpha^n,\ f_n = n\alpha^{n-1}$$

で定める．このときやはり $e_0 = 1,\ e_1 = 0$ ，$f_0 = 0,\ f_1 = 1$ となり

$$V = \{se_n + tf_n \mid s,\ t \in R\}$$

また， 数列 $\{n\alpha^{n-1}\}$ を考えると

$$p(n+1)\alpha^n + qn\alpha^{n-1} = 2(n+1)\alpha^{n+1} - n\alpha^{n+1} = (n+2)\alpha^{n+1}$$

なのでこの数列も漸化式① を満たす．

数列 $\{\alpha^n\}$ と数列 $\{n\alpha^{n-1}\}$ に対応する xy 平面のベクトルは

$$(\alpha,\ 1),\ (1,\ 0)$$

なので平行でない．ゆえにこの二つで V を表すことができる．

$$V = \{s\{\alpha^n\} + t\{n\alpha^{n-1}\} \mid s,\ t \in R\}$$

南海　最初の質問に関していえば，

(1) 拓生君の方法で求まる数列が最初の漸化式を満たすことと，

(2) 初期条件が同じものは一つしかないこと

をいえば，最初の定期テストの解答で解になっている．

またすでに気づいているとは思うが，連立漸化式 ② を解くことは，② から定まる行列 A の累乗 A^n を求めることと同値である．関係式 ③ を，あたかも三項間漸化式を等比数列を作って解くのと同じように変形していけば，A^n を直接求めることもできる．その結果は

$$A^n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}A + \frac{\alpha^n\beta - \alpha\beta^n}{\beta - \alpha}E$$

となる．

2.11.3　固有値の方法

拓生　行列 A の累乗 A^n を求めるのに，入試問題でも

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \cdots ⑨$$

と対角化する方法を材料にしたものが見うけられます．しかし問題ではいつもヒントになることが個別に与えられ，一般的な方法としてはよくわかりません．

南海　いわゆる**固有値の方法**というものだ．固有値を本当に理解しようとすれば，一次変換とベクトル空間についての理解がいる．『線形代数の考え方』を見てほしい．

　ここでは二次行列の変形という範囲に絞って固有値の方法を話そう．行列 A に対して ⑨ の形に変形できるということはどういうことか．行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とするとき，二つの縦ベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ を

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$$

とする．$\vec{u}$, $\vec{v}$ はどんな関係式を満たすか．

拓生　⑨ は

$$A\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p & \beta q \\ \alpha r & \beta s \end{pmatrix}$$

です．これから

$$A\vec{u} = \alpha\vec{u},\ A\vec{v} = \beta\vec{v}$$

となります．ということは逆にいえば

$$A\vec{x} = t\vec{x} \quad \cdots ⑩$$

となるベクトル $\vec{x}$ が 2 個見つかれば対角化できる．

南海　そういうことだ．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．⑩ は

$$\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}\vec{x} = 0$$

ということだ．これを満たす 0 でないベクトルが存在するための条件は何か．

拓生　左辺の行列の Δ が 0，つまり

$$(a-t)(d-t) - bc = 0$$

です．これを整理すると

$$t^2 - (a+d)t + ad - bc = 0$$

これは ④ の漸化式の固有方程式と同じものです．

南海　これが相異なる二つの解 α, β をもつときは，それぞれの t の値に対して ⑩ を満たすようなベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ をとる．$\vec{u}$, $\vec{v}$ は，0 でない実数倍だけとり方はあるが，いずれをとってもよい．

この 2 つのベクトルを，それぞれ α と β に対応する**固有ベクトル**という．実数倍しても同じことなので，行列 A に**固有**な方向であると考えてもよい．これで A^n が求まり，連立漸化式などが解ける．

試しに次の連立漸化式を解いてほしい．

例 2.11.1 次の連立漸化式を解け．

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + 8b_n \\ b_{n+1} = a_n + 6b_n \end{cases} \quad a_1 = 0,\ b_1 = 1$$

拓生　$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ とおきます．まず A を対角化し連立漸化式を変形する．

$$\Delta\begin{pmatrix} 4-t & 8 \\ 1 & 6-t \end{pmatrix} = t^2 - 10t + 16 = (t-2)(t-8)$$

より，固有値は 2 と 8．$t = 8$ のとき

$$\begin{pmatrix} 4-t & 8 \\ 1 & 6-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{O}$$

より，x と y の満たすべき関係式は $x - 2y = 0$．同様に $t = 2$ のとき，x と y の満たすべき関係式は $x + 4y = 0$ である．したがって

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

等がとれる．このとき

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

とする．検算をかねて計算すると，$P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ なので，

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

です．これから $A = P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ なので, 連立漸化式

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

となる．つまり

$$P^{-1}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

これから

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

つまり連立漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+1} + 4b_{n+1} = 8(a_n + 4b_n) \\ a_{n+1} - 2b_{n+1} = 2(a_n - 2b_n) \end{cases}$$

と，二つの等比数列に分解された．

$$\therefore \quad \begin{cases} a_n + 4b_n = 8^{n-1}(a_1 + 4b_1) = 4 \cdot 8^{n-1} \\ a_n - 2b_n = 2^{n-1}(a_1 - 2b_1) = -2 \cdot 2^{n-1} \end{cases}$$

これから

$$a_n = \frac{4}{3}\left(8^{n-1} - 2^{n-1}\right)$$
$$b_n = \frac{1}{3}\left(2 \cdot 8^{n-1} + 2^{n-1}\right)$$

となる．

南海　もちろん $\alpha = \beta$ となるときも考えなければならならない．また要するに固有値とは何か，についてもこのままではわからない．それらについてはまた後日話すことにしよう．

2.11.4　関連入試問題

三項間漸化式と二次行列に関してはいろんな入試問題がある．いくつか紹介しよう．また 95 年の神戸大の問題は，数列の全体が作るベクトル空間を問題にしているものなのであわせて紹介しよう．

演習 41　［00 年静岡大後期］　解答 39

行列 $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して, $d = ps - qr,\ t = p + s$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．ただし, E は二次の単位行列であり, $A = kE$ となる実数 k は存在しないものとする．

(1) $A^2 = tA - dE$ となることを示せ.

(2) $A^n = a_nA + b_nE$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき, $a_{n+1},\ b_{n+1}$ を $a_n,\ b_n,\ d,\ t$ を用いて表せ.

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, A^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

演習 42　［00 年新潟大前期］　解答 40

実数 d を定数とし, 二次の正方行列 A は $A^2 - A + dE = O$ をみたすとする．また，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, x についての整式の x^n を $x^2 - x + d$ で割ったときの商を $Q_n(x)$, 余りを $a_nx + b_n$ とする. すなわち,

$$x^n = (x^2 - x + d)Q_n(x) + a_nx + b_n$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし, E は単位行列，0 は零行列を表す.

(1) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して, $a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=-da_n$ が成り立つことを示せ.

(2) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して, $A^n=a_nA+b_nE$ が成り立つことを (1) の式を用い，数学的帰納法で証明せよ.

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき, $A^2-A-6E=O$ であることを示し, $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して, A^n を n の式で表せ.

演習 43　［96 年神大理系後期］　解答 41

数列 $\{f_n\}$ は, $f_{n+1}=2f_{n-1}+f_n$ $(n=2, 3, \cdots)$ となる関係がある．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$ $(n=2, 3, \cdots)$ をみたす行列 A を求めよ.

(2) (1) の行列に対して $A\begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$ をみたす $a,\ b,\ u,\ v$ を求めよ．ただし, $a>b$ とする.

(3) (2) の $u,\ v$ に対して $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u & v \end{pmatrix}$ とする. $P^{-1}AP$ を求めよ.

(4) $n \geqq 3$ のとき, f_n を $f_1,\ f_2$ を用いて表せ.

演習 44　［95 神大理系前期］　解答 42

数列 $\{x_n\}$ が

$$x_{n+3}=x_n+x_{n+1}+x_{n+2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとき， 数列 $\{x_n\}$ は性質 (F) を持つということにする．このとき次の問に答えよ.

(1) 数列 $\{u_n\},\ \{v_n\}$ がともに性質 (F) を持つならば，$\alpha,\ \beta$ を実数とするとき数列 $\{\alpha u_n+\beta v_n\}$ は性質 (F) を持つことを示せ.

(2) 数列 $\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$ は性質 (F) を持ち，数列 $\{a_n\}$ の初めの 3 項は順に $1,\ 0,\ 0$ ，数列 $\{b_n\}$ の初めの 3 項は順に $0,\ 1,\ 0$ ，数列 $\{c_n\}$ の初めの 3 項は順に $0,\ 0,\ 1$ である．このとき性質 (F) を持つ 数列 $\{y_n\}$ は，ある実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を選んで，$\{\alpha a_n+\beta b_n+\gamma c_n\}$ と表すことができることを示せ.

(3) 数列 $\{d_n\},\ \{e_n\},\ \{f_n\}$ は性質 (F) を持ち，数列 $\{d_n\}$ の初めの 3 項は順に $0,\ 1,\ 1$ ，数列 $\{e_n\}$ の初めの 3 項は順に $1,\ 1,\ 0$ ，数列 $\{f_n\}$ の初めの 3 項は順に $1,\ 0,\ -1$ である．このとき性質 (F) を持ち，初めの 3 項が $1,\ 1,\ 1$ である 数列 $\{h_n\}$ は，どのように実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を選んでも $\{\alpha d_n+\beta e_n+\gamma f_n\}$ と表すことができないことを示せ.

演習 45　［02 千葉大理系前期］　解答 43

行列 E と A を

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく．行列 $xE-A$ が逆行列をもたないような x の 2 つの値を $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ とし，行列 $P,\ Q$ を

$$P=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}\alpha+1 & 3\\ 2 & \alpha-4\end{pmatrix},\ Q=\frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix}\beta+1 & 3\\ 2 & \beta-4\end{pmatrix}$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列の積 PQ を計算せよ．

(2) 自然数 n に対して，P^n を求めよ．

(3) すべての自然数 n に対して

$$A^n=\alpha^nP+\beta^nQ$$

が成立することを示せ．

2.12　カタラン数

＞ 2000.8

2.12.1　ある入試問題

耕一　最近次のような問題をしました.

例 2.12.1　［96 九州大学］
原点 O から出発して座標平面上を x 軸の正の方向，または y 軸の正の方向に 1 だけ進むことを次々行って得られる経路を道という．原点と点 (i,j) を結ぶ，領域 $\{(x,y)|x \geqq y\}$ 内の道の総数を $N(i,j)$ とする．次の問に答えよ．

(1) $N(2,2)$ ， $N(3,1)$ ， $N(3,2)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 1$ のとき， $N(n,1)$ を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ のとき， $N(n,2)$ を $N(n,1)$ と $N(n-1,2)$ で表し $N(n,2)$ を求めよ．

南海　これは解けたのかな.
耕一　はい．解は

(1) $N(2,2)=2,\ N(3,1)=3,\ N(3,2)=5$

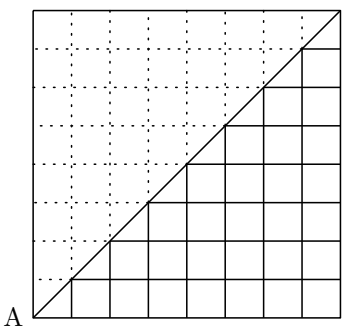
(2) $N(n,1)=n$

(3) $N(n,2)=N(n,1)+N(n-1,2),\ N(n,2)=(1/2)(n+2)(n-1)$

です.
それで質問は，この $N(i,j)$ は一般に求まるのか，またこの $N(i,j)$ にはどんな意味があるのか，ということです.

2.12.2　カタラン数

南海　この $N(i,j)$ のことを普通はカタラン数と呼んでいる.
それではまず，$i=j=n$ のとき，つまり $N(n,n)$ を考えよう.



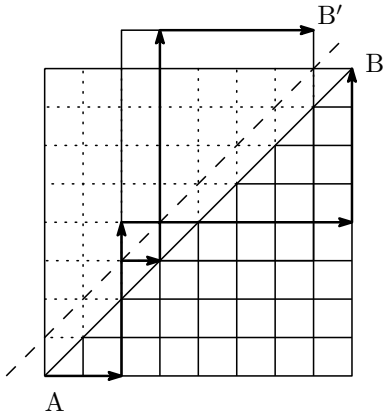
n 区画

図 1 のように AB が対角線である正方形の各辺が n に区切られ，小正方形 n^2 に分けられている.
A から B への最短経路のうち対角線 AB より上半分には出ない（対角線に乗るところまでは許される）経路の総数を c_n とする．ただし $c_0=1$ とする.
c_n を求める方法は二つある．ひとつは技巧的な工夫をするものだ.

例 2.12.2 図 2 を参考にして， A から B への最短経路の総数から対角線を越え出る場合の総数を減じる考えにより

$$c_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

を示し， c_n の式を求めよ．



解答

不適な場合は必ず対角線を越え出るので，最初に対角線を越えて到達した点を C とする．C から AB に平行な向きを対称軸として折り返すと，C から B に至る経路が図の B′ に至る経路となる．逆に，A から B′ に至る経路を最初に上半分の領域に入った点で逆に折り戻すことにより，B へ一度は対角線を越えてから至る経路となる．このように，A から B へ対角線を越えて至る経路と A から B′ への経路が対応している．したがって，求める経路の数は A から B に至るすべての経路の数から上の経路の数を減ずればよい．すなわち，

$$\begin{aligned} c_n &= {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n-1)!(n-1)!}\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right\} \\ &= \frac{(2n)!}{(n-1)!(n-1)!}\cdot\frac{n+1-n}{n^2(n+1)} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} \end{aligned}$$

□

ここで c_2, c_3, c_4 を求めておこう．

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{3} = \frac{4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 2 \\ c_3 &= \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{4} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5 \\ c_4 &= \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 14 \end{aligned}$$

c_n の漸化式

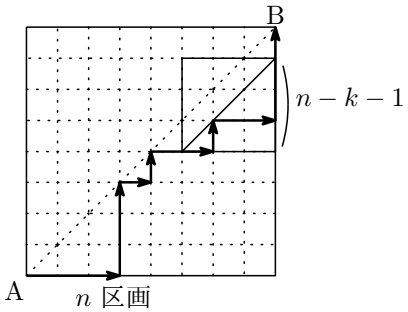


図 1 のように AB が対角線である正方形の各辺が n に区切られ，小正方形 n^2 に分けられている．A から B への最短経路のうち対角線 AB より上半分には 経出ない（対角線に乗るところまでは許される）経路の総数を c_n とする．ただし $c_0 = 1$ とする．

路が最後に対角線に乗った番号で分類することにより，

$$c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{n-1}c_0$$

なぜならすべての経路を，最後に対角線に乗った番号で分類する．対角線 AB 上第 k 番 $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ までの経路の総数は

$$c_k\,(\text{通り})$$

このあとは再び対角線には乗らないのであるから，図のように

$$c_{n-k-1}\,(\text{通り})$$

したがって，$k = 0, 1, \cdots, n-1$ の各場合の数を加えることにより

$$c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{n-1}c_0$$

南海　一般的な生成関数による方法がある．これは『数学対話』「生成関数の方法」を見てほしい．

2.12.3　カタラン数の意味

耕一　カタラン数にどんな意味があるのですか．
南海　三つの例を練習問題にしよう．

例題 2.12.1　次の確率を求めよ．
切符売場に 1 列に $2n$ 人の人がならんでいる．このうち n 人が 500 円硬貨をもち，残りの n 人は 1000 円札しかもっていない．切符は 1 枚 500 円である．切符を売りはじめるとき売場にはお金がない．切符を買う人が誰も釣り銭ができるのを待たずにすむ確率はいくらか．

解答
500 円硬貨を持った人が来れば右へ，1000 円札を持った人が来れば上へそれぞれ 1 区画ずつ進むことにすれば，おつりがいらないのは次のような場合に実現する．

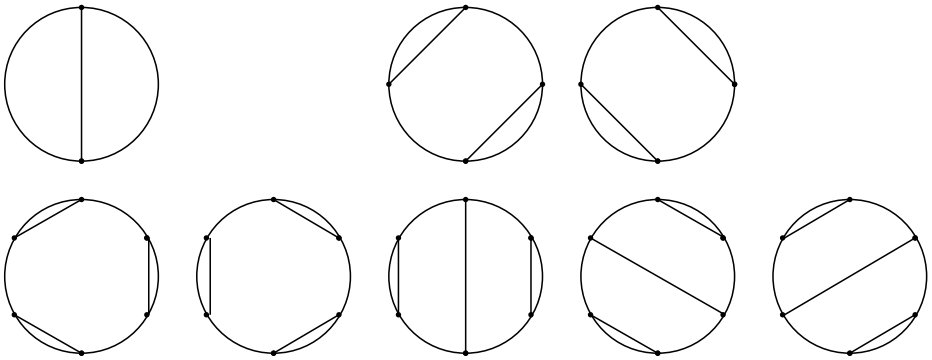
どの場合においても，そのときまでに来た人のうち 500 円硬貨を
持った人の方が 1000 円札を持った人よりも多い．

したがって，この事象の数は A から B へ対角線を越えて上半分に入ることなく，B に至る最短経路の総数に等しい．そして，全事象の数は A から B へ至る最短経路の総数に他ならないから，求める確率は

$$\frac{c_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{1}{n+1}$$

□

例題 2.12.2　次の個数を求めよ．
円周上に $2n$ 個の点がある．これらの点を 2 点ずつ結んで内部で互いに交わらない n 個の弦をひくとき，いく通りの違った方法があるか．



解答

求める方法の数を Φ_n とする．そして，円周上の点を順に A_1，A_2，$\cdots$，A_{2n} とおく．このとき，2 点を結ぶ弦を $(\mathrm{A}_i,\ \mathrm{A}_j)$ $(i<j)$ のように表すことにし，A_i を始点，A_j を終点とよぶことにする．

さて，題意のような n 本の弦が引けた状態のうちの一つを考える．この状態において，A_1，A_2，$\cdots$，A_{2n} を始点と終点に分け，

$$\mathrm{A}_{i_1},\ \mathrm{A}_{i_2},\ \cdots,\ \mathrm{A}_{i_n}\ ;\ \text{始点},\ \mathrm{A}_{j_1},\ \mathrm{A}_{j_2},\ \cdots,\ \mathrm{A}_{j_n}\ ;\ \text{終点}$$

とする．このとき，この始点と終点の組が題意をみたす (どの弦も互いに交わらない) ための必要十分条件が

$$\begin{aligned}&\text{すべての } k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \text{ に対し，} \mathrm{A}_1 \text{ から終点 } \mathrm{A}_{j_k} \text{ までの}\\&\text{点の中で始点となるものが半分以上あること}\cdots(*)\end{aligned}$$

であることを，n についての数学的帰納法で証明しよう．

(1) $n=1$ のとき，A_1 が始点，A_2 が終点となるので，明らかに成立する．

(2) $n=m(\geqq 1)$ のときの成立を仮定し，$n=m+1$ のときを考える．

最初の設定より，A_1 はつねに始点となる．そこで，A_1 から順に見ていき，最初に現れた終点を A_{j_1} とおく．すると，この点を終点とする弦が他の弦と交わらないのであるから，A_{j_1} に対応する始点は A_{j_1} の直前の点，つまり A_{j_1-1} しかあり得ない．

すると，弦 $(\mathrm{A}_{j_1-1},\ \mathrm{A}_{j_1})$ とこの 2 点を結ぶ弧によってできる弓形 (他の点を含まない方) の内部には他に弦がないから，$2(m+1)$ 個の点から 2 個の点 A_{j_1-1}，A_{j_1} を除いた残りの点については，それらを結ぶ弦が互いに交わらない．よって，仮定よりこれら $2m$ 個の点については $(*)$ が成り立ち，これに $(\mathrm{A}_{j_1-1},\ \mathrm{A}_{j_1})$ を加えても，始点，終点がこの順に 1 個ずつ加えられるだけであるから，$n=m+1$ のときも $(*)$ が成立する．

以上より，求める方法の数は点 A_1，A_2，$\cdots$，A_{2n} から始点，終点を順に終点の前にある始点の個数が終点の個数よりも少なくないように選ぶ場合の数，すなわち c_n に他ならないから，

$$\Phi_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

となる． □

［注意］直接意味を考えて，

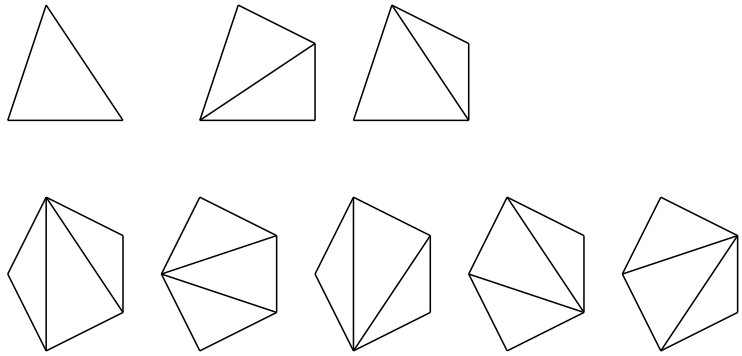
$$\Phi_n=\Phi_0\Phi_{n-1}+\Phi_1\Phi_{n-2}+\cdots+\Phi_{n-2}\Phi_1+\Phi_{n-1}\Phi_0\quad(\Phi_0=1)$$

を示すこともできる．すると，Φ_n，c_n は同一の漸化式をみたすので

$$\Phi_n = c_n$$

となる．

例題 2.12.3 凸 n 角形をその内部で交わらない対角線で三角形に分割するとき，違った分割の仕方はいく通りあるか．



解答

条件を満たす分割の方法の総数を T_n とする．頂点を A_1，A_2，$\cdots$，A_n とおく．$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k$ が対角線の一つであるような分割の仕方は，

$$\mathrm{A}_1,\ \cdots,\ \mathrm{A}_k\,;\, T_k(\text{通り})\quad \mathrm{A}_k,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{A}_1\,;\, T_{n-k+2}(\text{通り})$$

あるので，結局，

$$T_kT_{n-k+2}(\text{通り})$$

ある．よって，A_1 を通る対角線が関係するような分割の仕方は，

$$T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3(\text{通り})$$

である．そして，これをすべての頂点について和をとると，一つ一つの分割方法は，その分割における対角線の数の 2 倍だけ繰り返し数えあげられることになる．

そこで，一つの分割で用いられている対角線の本数を考えることにする．いま，n 角形の内部に 3 角形は $n-2$ 個できている．そして，内部の対角線は二つずつの 3 角形に共有され，辺は一つずつ用いられているので，対角線の本数を q とすれば，

$$\frac{2q+n}{3} = n-2 \qquad \therefore \quad q = n-3$$

よって，

$$n(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3) = 2(n-3)T_n \quad (n \geqq 4)$$

ただし，$T_3 = 1$ である．すると，

$$\begin{aligned}
&4T_3^2 = 2T_4 \qquad \therefore \quad T_4 = 2\\
&5(T_3T_4 + T_4T_3) = 2\cdot 2T_5 \qquad \therefore \quad T_5 = 5\\
&6(T_3T_5 + T_4T_4 + T_5T_3) = 2\cdot 3T_6 \qquad \therefore \quad T_6 = 14
\end{aligned}$$

であるから,

$$T_{n+2} = c_n = \Phi_n$$

と予想することができる. そこで, これを数学的帰納法で証明する.

(1) $n = 1$ のとき,

$$T_3 = c_1 = 1$$

より明らかに成立する.

(2) $n \leqq m (m \geqq 1)$ をみたすすべての n についての成立を仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} 2mT_{m+3} &= (m+3)(T_3T_{m+2} + T_4T_{m+1} + \cdots + T_{m+2}T_3) \\ &= (m+3)(c_1c_m + c_2c_{m-1} + \cdots + c_mc_1) \end{aligned}$$

そして,

$$c_{m+2} = c_0c_{m+1} + c_1c_m + \cdots + c_{m+1}c_0$$

なので,

$$2mT_{m+3} = (m+3)(c_{m+2} - 2c_{m+1})$$

よって,

$$\begin{aligned} T_{m+3} &= \frac{m+3}{2m}(c_{m+2} - 2c_{m+1}) \\ &= \frac{m+3}{2m}\left(\frac{{}_{2m+4}\mathrm{C}_{m+2}}{m+3} - 2 \cdot \frac{{}_{2m+2}\mathrm{C}_{m+1}}{m+2}\right) \\ &= \frac{m+3}{2m}\left\{\frac{(2m+4)!}{(m+2)!(m+3)!} - \frac{2(2m+2)!}{(m+1)!(m+2)!}\right\} \\ &= \frac{m+3}{2m} \cdot \frac{(2m+2)!}{(m+2)!(m+3)!}\{(2m+3)(2m+4) - 2(m+2)(m+3)\} \\ &= \frac{m+3}{2m} \cdot \frac{2m(m+2)(2m+2)!}{(m+2)!(m+3)!} \\ &= \frac{(2m+2)!}{(m+2)!(m+1)!} = \frac{{}_{2m+2}\mathrm{C}_{m+1}}{m+2} = c_{m+1} \end{aligned}$$

となるので, $n = m+1$ のときも成立する.

したがって

$$T_n = c_{n-2} = \frac{{}_{2(n-2)}\mathrm{C}_{n-2}}{n-1}$$

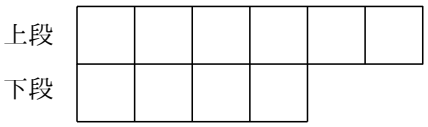
となる. □

2.12.4 関連入試問題

南海 2001 年にまた違うカタラン数の例が入試問題に登場した.

演習 46 ［01 京都府医大］解答 44

n, k は正の整数 $(n \geqq k)$ で, $N = n + k$ とする. 図のように, N 個の同じ大きさの空白の枠がある. 上段には n 個の枠があり, 下段には k 個の枠がある. 上段と下段の左端はそろっており, 各段の枠は隣との間にすき間はない.



図では，$n=6,\ k=4$ である．

1 から N までの N 個の自然数を各段の枠のなかに一つずつ次の二つの条件を満たすように並べる．

(1) 各段においては，枠の中の数は右に行くに従って大きくなる．

(2) 左から k 個の各列においては，下段の数は上段の数より大きい．

この二つの条件を満たすように 1 から N を並べる並べ方の数を $f(n,\ k)$ とする．このとき

(1) $n>k\geqq 2$ のとき，次が成り立つことを示せ．

$$f(n,\ k)=f(n-1,\ k)+f(n,\ k-1)$$

(2) $n\geqq 2$ のとき，次が成り立つことを示せ．

$$f(n,\ n)=f(n,\ n-1)$$

(3) 次が成り立つことを示せ．

$$f(n,\ k)={}_{n+k}\mathrm{C}_k\frac{n-k+1}{n+1}$$

2.13　一次変換を見る

2005.9.11

2.13.1　一次変換は平面全体の変換だ

南海　今日は一次変換を目で見てみよう．

一次変換は平面全体を平面に移す変換だ．個別の点や図形の行き先を見るだけではわかりにくい．そのために，平面上の各点について，それが一次変換でどの点に移るのかを図示するのだ．

拓生　図示といっても，平面の点は無数にあります．

南海　もちろんそうだ．それで格子点，つまり座標が整数である点について，その点と行き先とを線分で結んでいくのだ．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば，格子点 $(x,\ y)$ と $(ax+by,\ cx+dy)$ を結んでいくのだ．

これは点 $(x,\ y)$ が点 $(ax+by,\ cx+dy)$ に移るとも考えられるし，ベクトル $(x,\ y)$ がベクトル $(ax+by,\ cx+dy)$ に移るとも考えられる．

拓生　それでもたくさんあります．計算はたいへんです．

南海　そこで，プログラムだ．これは BASIC の一番簡単な応用だ．

ここでは文教大学の白石和夫先生が作られた**十進 BASIC** を使った．フリーソフトなので，手元のパソコンですぐに利用できる．

プログラムは

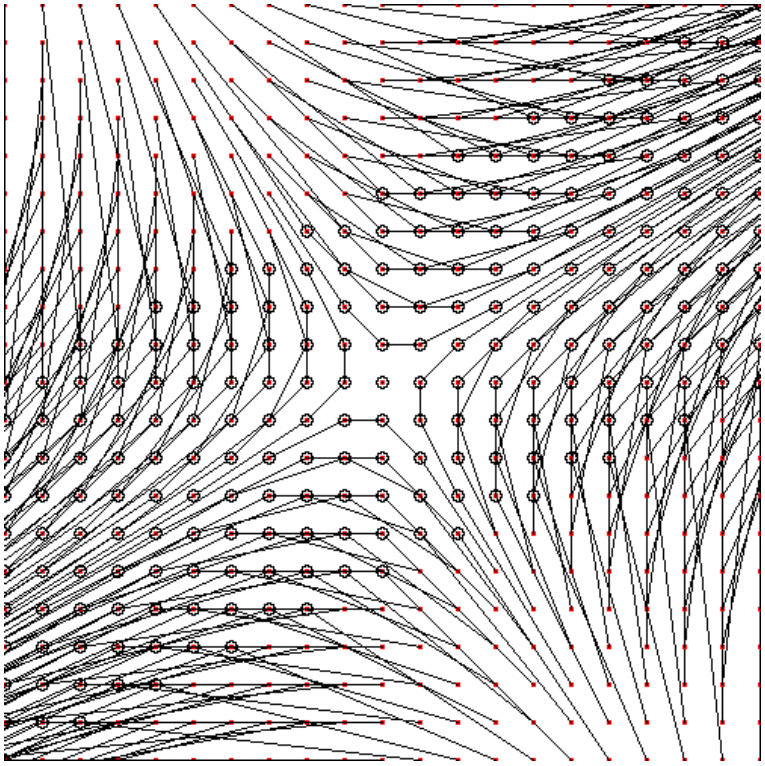
```
SET WINDOW -10,10,-10,10
INPUT PROMPT "a,b,c,d=":a,b,c,d
FOR M=-10 TO 10 STEP 1
   FOR N=-10 TO 10 STEP 1
      SET AREA COLOR 4
      DRAW disk WITH SCALE(0.05)*SHIFT(M,N)
      DRAW circle WITH SCALE(0.15)*SHIFT(a*M+b*N,c*M+d*N)
      PLOT LINES: M ,N ; a*M+b*N,c*M+d*N
   NEXT N
NEXT M
END
```

で終わり．

これは，始点を赤の点「・」で，終点を小円「○」にとり，それを線分で結んだものが得られる．

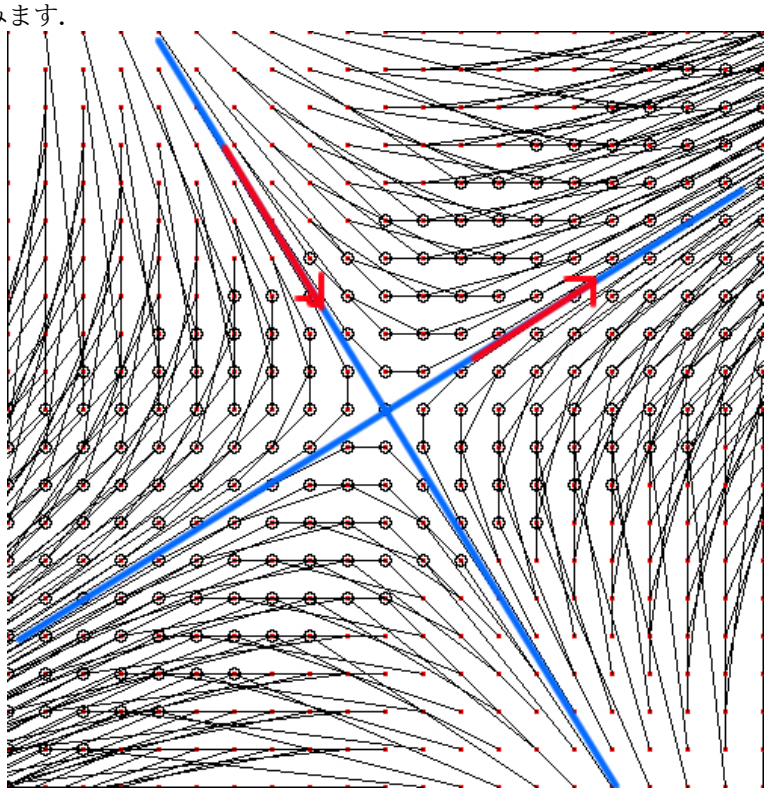
2.13.1.1　固有方程式が 2 実解の場合

拓生　早速，$a=2,\ b=1,\ c=1,\ d=1$ を代入してみました．



なるほど.

2 つの方向が見て取れます. この直線上の点は同じ直線上の点に移るようです. 図に描き入れてみます.



南海　この方向はどのようにして求めるのだったか.

拓生　それが固有値と固有ベクトルです.

行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする.

$$A\vec{u} = t\vec{u}$$

となるベクトルが固有ベクトルです. つまり

$$\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}\vec{u} = 0$$

です,

このようなベクトル $\vec{u}$ で零ベクトルでないものが存在するためには左辺の行列 Δ が 0, つまり

$$(a-t)(d-t) - bc = 0$$

です. これを整理すると

$$t^2 - (a+d)t + ad - bc = 0$$

南海　これを固有方程式という.

拓生　今の場合

$$t^2 - 3t + 1 = 0$$

これを解いて

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

です.

$$\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

ですから固有ベクトルとして例えば

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

がとれます. 実際

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

この方向が 2 本直線の方向なのですね.

南海　今は方程式

$$t^2 - (a+d)t + ad - bc = 0$$

が異なる 2 実解をもった.

これが他の場合にどのようになるかを見ていこう.

2.13.1.2　重解の場合

南海

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

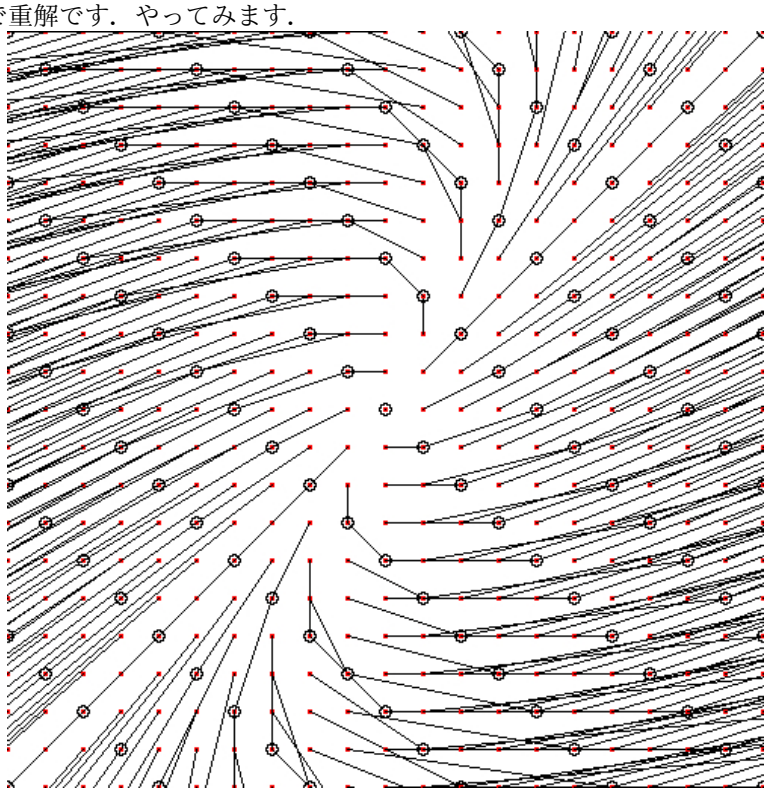
ではどうか.

拓生

　このとき固有方程式は

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

で重解です. やってみます.



　このようなとき行列の対角化はどうなるのだろう.

南海　それはまた,『線型代数入門』に書く予定だ. それを見てほしい.

　今は例を作ってみよう.

2.13.1.3　虚数解の場合

南海

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

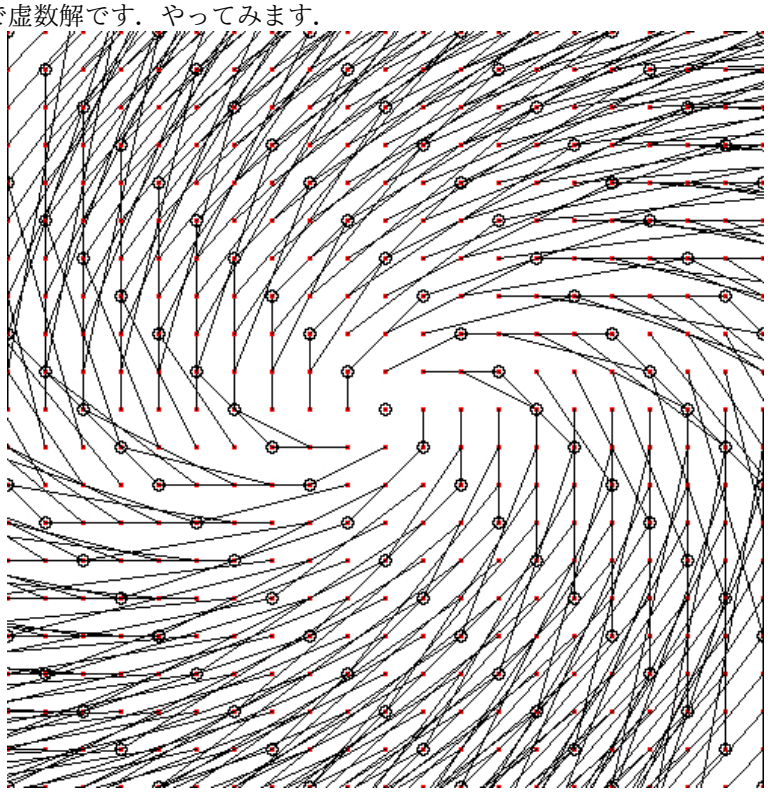
ではどうか.

拓生

　このとき固有方程式は

$$t^2 - 3t + 4 = 0$$

で虚数解です．やってみます．



これは渦巻きのように見えます．

南海　虚数解の場合は固定された方向は (xy 平面上には) 存在しない．

2.13.1.4　回転の場合

南海

$$A = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

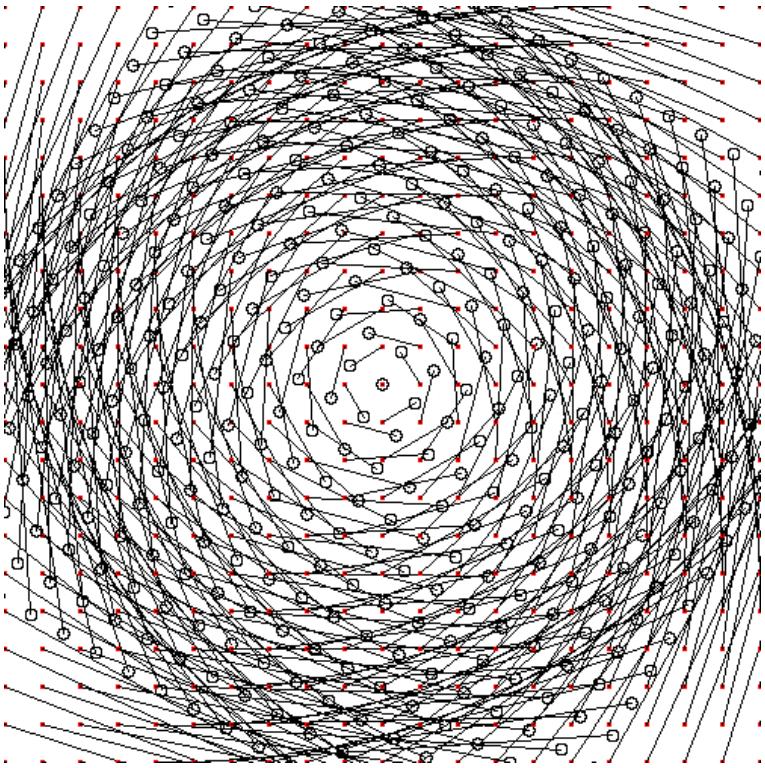
の近似として

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{pmatrix}$$

ではどうか．

拓生

やってみます．



2.13.1.5　その他の場合

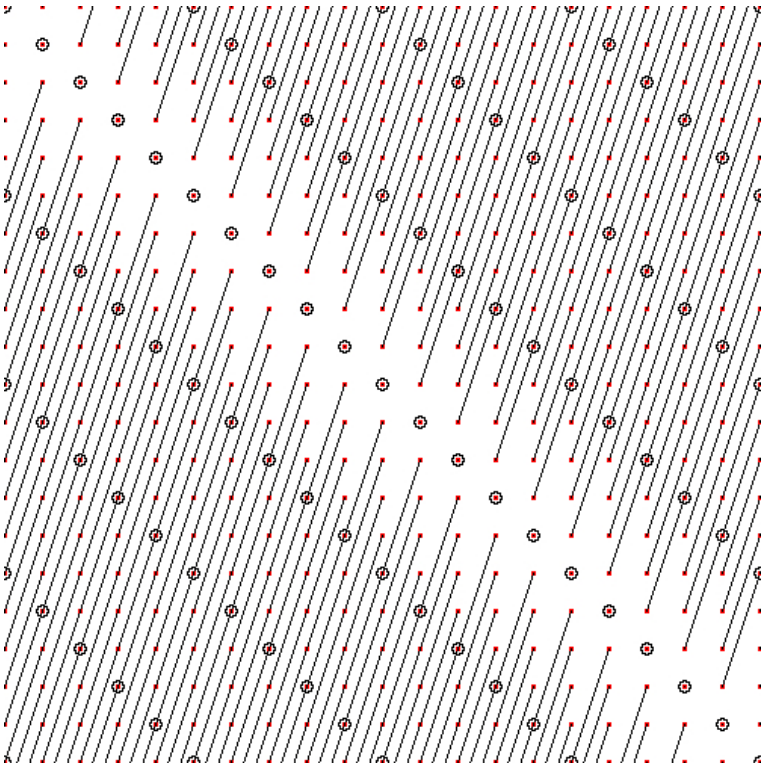
その 1
南海

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ではどうか.
拓生
　このとき固有方程式は

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

で，解は 1, 5 です．やってみます.



えっ.

南海　これは一つの固有ベクトルが動かない場合だ.

このように 1 次変換は見ることができる.

プログラムを工夫して，遊んでみてほしい.

その 2

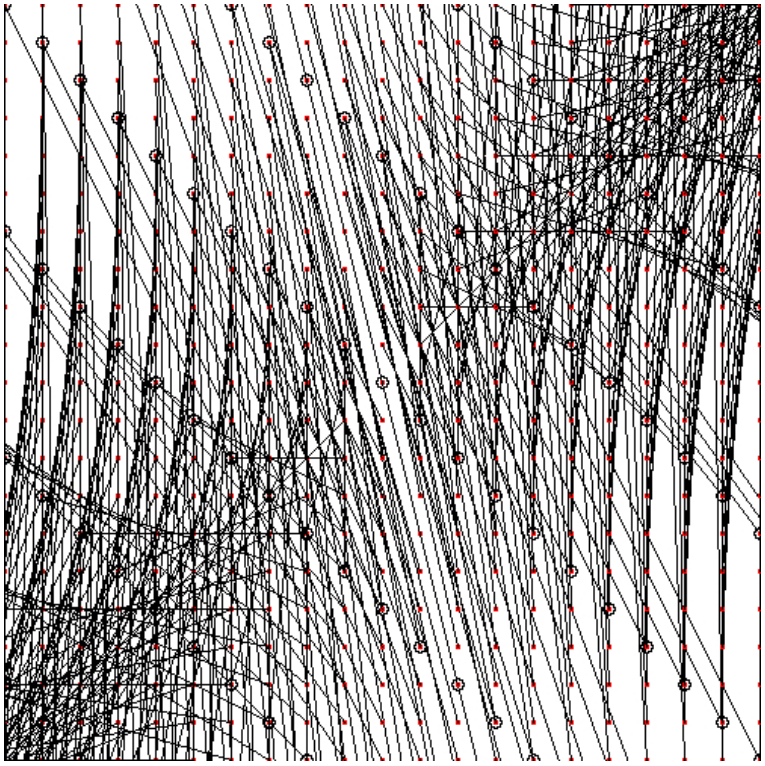
拓生

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

でやってみました．このとき固有方程式は

$$t^2 + t - 6 = 0$$

で，解は -3, 2 と，最初の場合と異なり，固有値が正と負です.



その 3

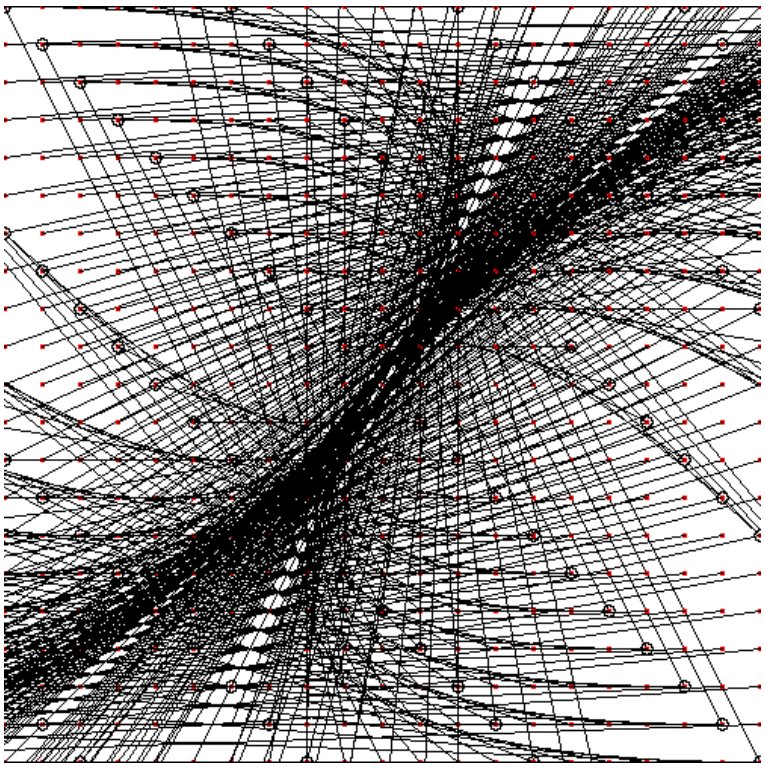
拓生

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

でやってみました．このとき固有方程式は

$$t^2 + 5t + 6 = 0$$

で，解は $-3,\ -2$ と，固有値がともに負です．



2.14　線型代数の考え方

2005.6.10

2.14.1　ベクトル空間と線型写像

2.14.1.1　一次変換から線型写像へ

南海　2005 年辺りから，高校数学に一次変換が復活している．これはいいことだ．だが今回の課程変更で導入された一次変換は，行列による座標平面の個別の点の移動という観点だけである．これでは，一次変換の意義がよくわからない．10 年以上前の課程では，次の 2 つの観点がはっきりしていた．

- 平面全体の変換であること．
- ベクトルの集合からベクトルの集合への写像である．

これが 2005 年からの教科書ではあいまいである．

2012 年 9 月追記 : 2005 年の一次変換復活を述べて 7 年，2012 年に 1 年の学年あたりから再び行列と一次変換がなくなる．愚かなことである．高校時代に学ぶべきことが，この 10 年で変化したというのか．まったくそのようなことはない．やはり最低限，2 次行列の扱いと平面ベクトルの一次変換の考え方を知っておくことは必要である．

この対話は，高校でそれを習うことを前提にしている．今高校範囲の部分を追記する時間はない．意欲的な高校生はぜひ行列や一次変換の入った教科書や参考書を図書館などで見つけ，基本事項を読んでほしい．数時間から数日で可能である．高校時代にいちど触れておくなら，大学での線型数学の理解がそれだけ容易になる．

南海　また大学生になって最初にとまどうのが「線型代数」だ.『線型代数』や『行列と行列式』と題した参考書はたくさんある．しかし，計算処理の方法が中心である参考書と，線型空間の一般的な定義からはじめる教科書風のものとに分かれていて，線型代数の基礎概念を高校数学の内容の分析からはじめて，概念を掘りさげていく参考書は少ないように思われる．

それは，大学生向けの書物が，高校数学を数学とは見なさず単なる受験数学と見なし，大学生の数学を高校数学とは切り離されたところからはじめるからである．青空学園数学科は，高校数学を数学という学問として考え，学んでいこうという立場である．この立場からすると，高校数学を掘りさげることで線型代数の基礎概念を学ぶことが大切であり，またそれは可能である．

そこで大学初年度の線型代数とつながるように，線型代数の考え方を話していこう．高校数学では 2 次，つまり平面までなのだが，ここでは基礎概念の意味を考えながら，できるだけ一般的に定義し，計算は可能なかぎり 3 次行列も材料にすることにしよう．また，例や演習のなかでは，数学 C で習ったことは既知とする．まず，一次変換とは何か．

耕一　一次変換とは，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって，xy 平面の点 $(x,\ y)$ を，次の式で定まる点 $(X,\ Y)$ に移す変換のことです．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

つまり点 $(x,\ y)$ を点 $(X,\ Y) = (ax + by,\ cx + dy)$ に移す変換のことです．

これは空間の場合も同様です．空間の場合，一次変換とは行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ によって，xyz 空間の点 $(x,\ y,\ z)$ を次の式で定まる点 $(X,\ Y,\ Z)$ に移す変換のことです．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

つまり点 $(x,\ y,\ z)$ を点 $(X,\ Y,\ Z) = (ax + by + cz,\ dx + ey + fz,\ gx + hy + iz)$ に移す変換のことです．

南海　それで正しい．**変換**とは集合から同じ集合への写像のことをいう．いまの場合は xy 平面という点の集合から xy 平面への写像になっている．**一次**というのは，式が (定数項のない) 一次式になっているからだ．

一次変換の全体像を見るために，平面上の点がどのように移動されるかを見てみよう．簡単なプログラムを組めばよい．ここでは文教大学の白石和夫先生が作られた**十進 BASIC** を使う．

http://www.vector.co.jp/authors/VA008683/

にあるフリーソフトなので，手元のパソコンですぐに利用できる．プログラムは

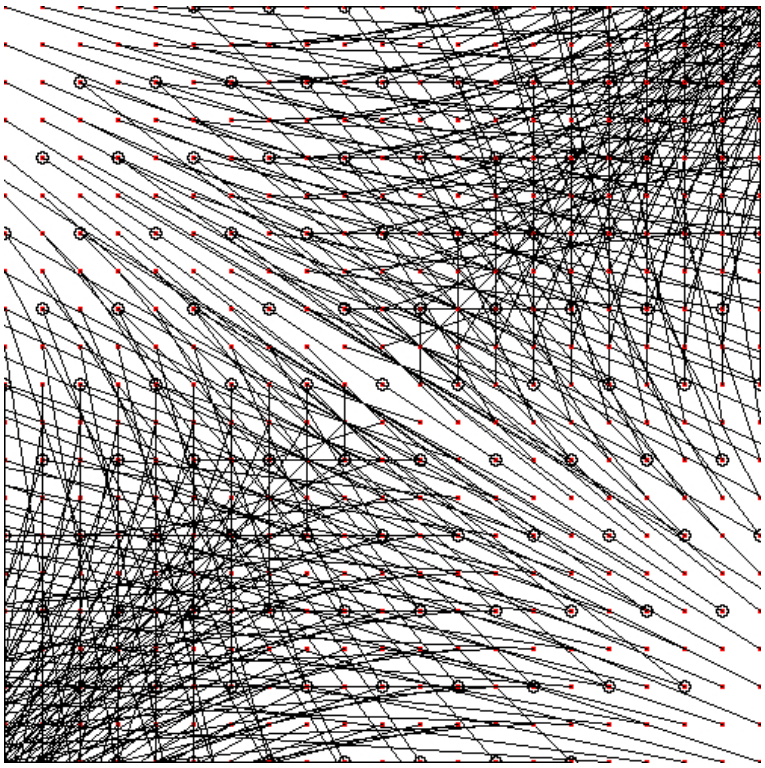
```
SET WINDOW -10,10,-10,10
INPUT PROMPT "a,b,c,d=":a,b,c,d
FOR M=-10 TO 10 STEP 1
   FOR N=-10 TO 10 STEP 1
      SET AREA COLOR 4
      DRAW disk WITH SCALE(0.05)*SHIFT(M,N)
      DRAW circle WITH SCALE(0.15)*SHIFT(a*M+b*N,c*M+d*N)
      PLOT LINES: M ,N ; a*M+b*N,c*M+d*N
   NEXT N
NEXT M
END
```

である．これは，始点を赤の点「・」で，終点を小円「○」にとり，それを線分で結んだものが得られる．『一次変換を見る』にいろんな例を作ってみた．参考にしてほしい．

行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．このときは次のようになる．

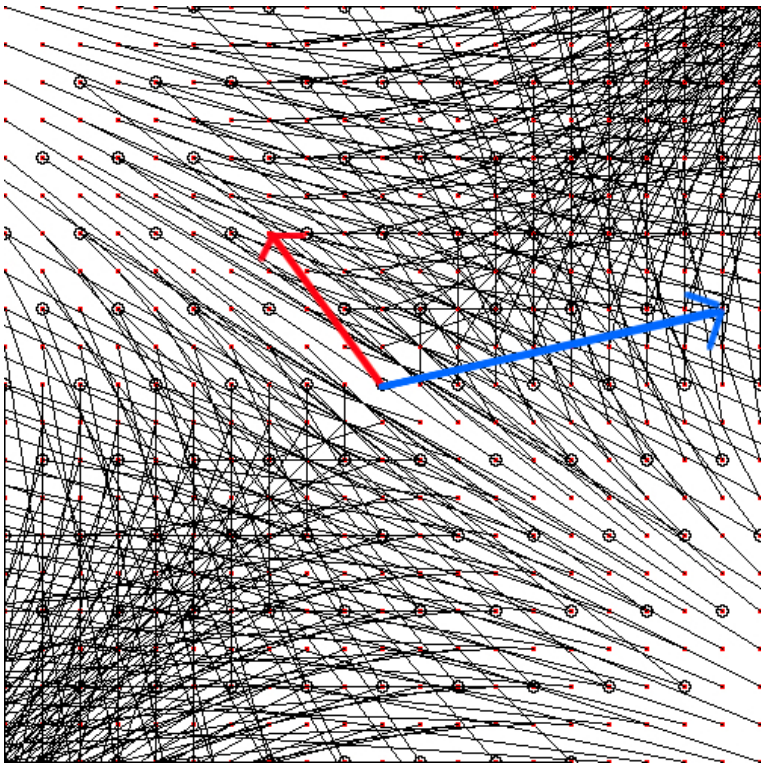


耕一　確かによくわかります．今は 2 次元，3 次元で考えましたが，1 次元の場合に考えると，数直線上の点 x を ax に移す変換ではありませんか．これって正比例関数です．

南海　一次変換は 1 次元の場合は正比例関数そのものだ．それを高次元に一般化したものだ．いま「正比例関数」といったように，これは関数だ．つまり，一次変換は単なる点の変換以上の意味，関数，あるいは写像なのだ．一次変換は点の変換であるが，同時にまたベクトル $\vec{u} = (x,\ y)$ をベクトル $\vec{v} = (X,\ Y) = (ax + by,\ cx + dy)$ に移す写像とも考えられる．

耕一　ベクトルからベクトルへの写像ですか．写像というのは，集合から集合への関数のようなものでした．すると，ベクトルの集合を考えるのですか．

南海　その通りだ．ベクトルの集合が**ベクトル空間**になるのだ．先ほどの例を，ベクトルでいえば図のように，赤ベクトルが青ベクトルに変換されるのだ．

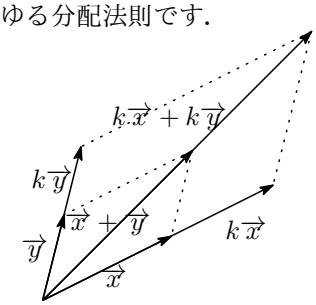


さて，一次変換をベクトルの写像と見るとき，どのような性質があるかを考えたい．そこでまずベクトルにはどんな演算があったか．

耕一　加法，減法と実数倍です．さらに，実数 k とベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対して

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

が成り立ちます．いわゆる分配法則です．



南海　もう少し一般的に演算法則は書いた方がいいが，とにかくいわゆる分配法則が成り立つように，実数倍が定義されている．このような演算が定まっているベクトルの集合をベクトル空間という．次に，「式が (定数項のない) 一次式」なので一次変換というわけだが，定数項がないことは，写像としては何を意味するのか．

耕一　点の変換という見方でいえば xy 平面の原点が，原点に移ります．つまり一次変換は原点を動かしません．しかしそれ以上のことはわかりません．

南海　一次変換をベクトルの写像として考えよう．つまりベクトル $\vec{u} = (x,\ y)$ を，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{u}$$

によって，ベクトル $\vec{v}$ にうつす．これをさらに

$$\vec{v} = f(\vec{u})$$

と書こう．f はベクトル空間からベクトル空間への写像になる．ベクトルの演算である和と実数倍と，この写像の関係は？

耕一

$$\begin{aligned} f(k\vec{u}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} k\vec{u} \\ &= kf(\vec{u}) \\ f(\vec{u}+\vec{v}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\vec{u}+\vec{v}) \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \end{aligned}$$

です．

2.14.1.2　ベクトル空間と線型写像の定義

南海　行列を間にはさんで得られた $f(k\vec{u}) = kf(\vec{u})$ のような関係は，写像 f が行列を用いて定義されているということとは独立な f 自身の性質である．そこで，平面や空間の矢線，また行列から離れて，次のようにベクトル空間と線型写像を定義しよう．

耕一　いったん行列から離れるのですか．

南海　ベクトルとは必ずしも矢線ではない．行列は線型写像に固有のものではない．後で見るように，同じ線型写像でもいろんな行列表現をもつ．行列と線型写像を切り離して考えることができないと，行列の対角化の意味もわかりづらい．そこでベクトルの記号だが，矢線をつけて $\vec{u}$ と表す代わりに，書体を変えて，$\mathbf{u}$ と表すことにする．

定義 15 (ベクトル空間) ベクトルの集合 V が次の性質をもつとき，V を**ベクトル空間**という．

(i) 和が定まり，交換法則

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

と，結合法則

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{z}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{z}$$

が成り立つ．

任意のベクトル $\mathbf{u}$ に対して

$$\mathbf{u} + \mathbf{e} = \mathbf{u}$$

となるベクトル $\mathbf{e}$ が存在する．これを零ベクトルといい，$\mathbf{0}$ と表す．

任意のベクトル $\mathbf{u}$ に対して

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

となるベクトル $\mathbf{v}$ が存在する．これをベクトル $\mathbf{u}$ の逆ベクトルといい，$-\mathbf{u}$ と表す．

言いかえると，V は加法に関して可換な群である．

(ii) 実数倍 $k\mathbf{u}$ が定義され，実数 $k,\ l$ に対し

$$\begin{aligned} &1\mathbf{u} = \mathbf{u} \\ &k\,(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u} \\ &(k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u} \end{aligned}$$

が成り立つ．また和との間に分配法則

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

が成り立つ．

定義 16 (線型写像) ベクトル空間 V からベクトル空間 W への写像 f が次の性質をもつとき，f を線型写像という．任意のベクトル $\mathbf{u},\ \mathbf{v}$ と実数 k に対して

$$\begin{aligned} &f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u}) \\ &f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

をみたす．

これをベクトル空間と線型写像の定義としよう．定義するとは，考える対象を明確にすることだ．このように考える対象をはっきりさせることが，数学では大切なのだ．ベクトルを「方向と大きさのある数学的対象」と考えるかぎり見えてこないが，上のように定義することで，次のような対象もベクトル空間となる．

例 2.14.1 (1) 漸化式

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の集合．

$$V = \{\ \{a_n\} \mid a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0\ \}$$

実際，V の 2 つの要素 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ と任意の定数 $\alpha,\ \beta$ に対して

$$c_n = \alpha a_n + \beta b_n$$

で数列 $\{c_n\}$ を定めると，$\{c_n\}$ も同じ漸化式を満たす．これから V がベクトル空間であることがわかる．

(2) 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + p(x)\frac{d}{dx}f(x) + q(x)f(x) = 0$$

を満たす関数 $f(x)$ の集合 V．これも V の 2 つの要素 $f(x),\ g(x)$ と任意の定数 $\alpha,\ \beta$ に対して

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

で関数 $h(x)$ を定めると，$h(x)$ も同じ微分方程式を満たす．これから V がベクトル空間であることがわかる．

数学ではこのように，考えている対象の本質を取り出すことで，他の分野のある対象も同じ本質を満たすことがわかり，視野が広がることがよくある．今は一般的に「本質」といったが，数学的にいえば「構造」ということだ．平面ベクトルの集合と，漸化式を満たす数列の集合が「同じ構造をもつ」ということだ．

耕一　ベクトルは「向き」と「大きさ」からなる数学の対象だと習いました．確かに上の例はそれではとらえられない対象です．では逆に，一般的なベクトル空間に大きさの概念はどのように定義されるのでしょうか．また高校では，2 次元の平面ベクトルと 3 次元の空間ベクトルという風に別々に分けて習いました．これまでのところ，ベクトル空間の定義には次元の概念もありません．

南海　上のベクトル空間の定義には，まだ大きさは定義されていない．「大きさ」の概念なしにどのようなことまでが成り立つのかを考えるのだ．「線型代数」の一般的な教程ではベクトルの大きさや距離は後で導入される．後ほどベクトルの「大きさ」も定義しよう．また，次元は先に定義されていることではなく，次に考えるように，このベクトル空間の定義のなかから，ベクトル空間に固有の値として，次元の概念がうかびあがってくる．

2.14.1.3　ベクトル空間の基底

南海　ベクトルの一次独立性を定義しよう．

定義 17 (一次独立) ベクトル空間 V の p 個のベクトル $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ がある．任意の実数 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p$ に対して

$$\begin{aligned} & k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \cdots + k_p\mathbf{u}_p = 0 \\ \iff\quad & k_1 = k_2 = \cdots = k_p = 0 \end{aligned}$$

が成り立つとき，$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ は実数体上**一次独立**であるという．

$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ が**一次独立**であることは，

$$\begin{aligned} & x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_p\mathbf{u}_p = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + \cdots + y_p\mathbf{u}_p \\ \iff\quad & (x_1 - y_1)\mathbf{u}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (x_p - y_p)\mathbf{u}_p = 0 \\ \iff\quad & x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \cdots,\ x_p = y_p \end{aligned}$$

でもあることに注意しよう．

さて，ベクトル空間 V の p 個のベクトル $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ は一次独立で，さらに，$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ に，これらと異なる 0 ベクトルでない V のベクトル $\mathbf{u}$ をどのように選んで加えても，それを加えた $\mathbf{u},\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ はもはや一次独立ではないとき，$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ は V の**最大独立系**をなすという．

定義から最大独立系に属するベクトルは零ベクトルではない．$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ が最大独立系のとき，V の任意のベクトル $\mathbf{u}$ に対し実数 $a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_p$ を選んで，

$$a\mathbf{u} + a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

とすることができる．$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ は一次独立であるから $a \neq 0$ であり，したがって各係数を a で割ったものを改めてとりなおせば V の任意のベクトル $\mathbf{u}$ を

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p$$

表すことができる．このことに注意して次の定理を証明しよう．

定理 48 V の二つの最大独立系

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$$
$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_q$$

がある．このとき $p = q$ が成り立つ．

証明

$p \neq q$ とし，$p > q$ とする．$\mathbf{u}_1$ は

$$\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_q\mathbf{v}_q$$

と表すことができる．$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ なので，右辺の係数のうちの少なくとも一つは 0 ではない．必要なら番号をつけ替えて $a_1 \neq 0$ とする．等式を a_1 で割り移項すれば，ベクトル $\mathbf{v}_1$ が

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_q$$

によって表された．V の任意のベクトルを $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_q$ で表した式があるとする．

$\mathbf{v}_1$ に，$\mathbf{v}_1$ を $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_q$ で表したものを代入することにより，V の任意のベクトルが，$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_q$ で表される．よって特に $\mathbf{u}_2$ が

$$\mathbf{u}_2 = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_q\mathbf{v}_q$$

と表される．$\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ は一次独立なので，$b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_q$ がすべて 0 ということはない．$b_2 \neq 0$ とする．同様に考え，$\mathbf{v}_2$ が

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{v_3},\ \cdots,\ \mathbf{v}_q$$

で表すことができた．同様の手順で

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_q$$

を

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_q$$

で置きかえることができる．つまり

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_q$$

で V の他の任意のベクトルを表すことができる．特に $\mathbf{u}_{q+1},\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ も表すことができる．これは $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_p$ が最大独立系であることに矛盾する．

したがって $p > q$ ではあり得ない．つまり $p = q$ であることが示された． □

耕一　そうか．わかった．ベクトル空間の次元とは，最大独立系のベクトルの個数なのです．平面ベクトルでは 2 個の一次独立なベクトルがとれ，空間ベクトルでは 3 個の一次独立なベクトルがとれる．

南海　次元の定義はいろいろある．しかし実数体上のベクトル空間に関して言えば，いま言ったとおり最大独立系をなすベクトルの個数と考えてよい．

耕一　では大きさは？

2.14.1.4　内積とベクトルの大きさ

南海　ベクトルの絶対値 $|\mathbf{u}|$ と密接に関係あるのは内積だ．2 つのベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の内積とは，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ によって定まる実数 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ のことだった．内積と絶対値は相互にどのような関係があったか．
耕一

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left\{|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right\}$$

です．
南海　そこで，内積が先か，大きさが先かということになる．結論的には，ベクトル空間は内積を基礎にする．
耕一　『数学対話』-「高校数学の土台」-「座標の方法」-「ベクトルと座標」では，内積の 2 つの定義

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\cdot\cos\theta$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2$$

は同値である，と教わりました．ここで，角 θ は 2 つのベクトルのなす角，$\mathbf{u} = (x_1,\ y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2,\ y_2)$ です．
南海　今は，それ以前の議論をしている．第 1 の定義のなかで用いられている「大きさ」と，「なす角 θ」はどのように定めるのか．また，第 2 の定義で用いた座標は，ベクトル空間 V では，まだ設定されていない．
耕一　確かに．
南海　ベクトル空間 V の内積を，次のように定義しよう．

定義 18 (内積) ベクトル空間 V の 2 つのベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ に対して定まる実数値 $B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ が，次の性質をもつとき，$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ をベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の**内積**という．

任意のベクトル $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}$ と実数 k に対して

(i)

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = B(\mathbf{v},\ \mathbf{u})$$

(ii)

$$B(k\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = kB(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$$
$$B(\mathbf{u}+\mathbf{w},\ \mathbf{v}) = B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) + B(\mathbf{w},\ \mathbf{v})$$

(iii)

$$0 \leqq B(\mathbf{u},\ \mathbf{u}) \text{ かつ } B(\mathbf{u},\ \mathbf{u}) = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

第 3 の条件は，内積の定義そのものには不要で，この条件を満たすものを特に「正値な内積」と呼ぶのだが，簡単のためここではこの条件も内積の定義のなかに入れておく．直交座標が定まっていて，大きさが普通のユークリッド式の距離であるときは，$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ を $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ と書くのだった．
耕一　B は何から来ているのですか．
南海　性質 (i) と (ii) は，$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ が，$\mathbf{u},\ \mathbf{v}$ のそれぞれについて一次 (線型) であるということを意味している．すなわち $\mathbf{v}$ を固定し，$\mathbf{u}$ を変数とすると，$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ は V から実数への線型写像に

なっている．逆に $\mathbf{u}$ を固定しても同様である．つまり内積は双線型 (bilinear) なのだ．この B から来ている．

さて，今はまだ座標も定まっていない段階だが，普通の xy 座標が入った平面ベクトルでの内積の例を作っておこう．

例 2.14.2 xy 平面の 2 つのベクトル $\mathbf{u} = (x_1,\ y_1),\ \mathbf{v} = (x_2,\ y_2)$ に関して

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = ax_1x_2 + cx_1y_2 + dy_1x_2 + by_1y_2$$

と定める．これが内積になるための $a,\ b,\ c,\ d$ の条件を求めよ．

耕一　内積の満たすべき性質 (i) から

$$\begin{aligned} & B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = ax_1x_2 + cx_1y_2 + dy_1x_2 + by_1y_2 \\ = \quad & B(\mathbf{v},\ \mathbf{u}) = ax_2x_1 + cx_2y_1 + dy_2x_1 + by_2y_1 \end{aligned}$$

がつねに成立しなければならない．よって $c = d$ である．内積の満たすべき性質 (ii) が成立することは明らか．またこのとき，

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{u}) = a{x_1}^2 + 2cx_1y_1 + b{y_1}^2$$

これが (iii) を満たすためには，この 2 次式のの判別式を D とすると

$$a > 0,\ D/4 = c^2 - ab < 0$$

詳しくは x_1 か y_1 の 0 でない方で割って 2 次関数にして考えなければなりませんが．

以上から

$$a > 0,\ c = d,\ c^2 - ab < 0$$

ということは

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 5y_1y_2$$

なんかも内積になるのですね．

南海　そう．さて，この内積を用いて，ベクトルの大きさとしての絶対値 $|\mathbf{u}|_B$ を次のように定める．B によって定まる絶対値という意味で B を添えて書いておこう．

$$|\mathbf{u}|_B = \sqrt{B(\mathbf{u},\ \mathbf{u})}$$

絶対値はどんな性質をもっていたか．

耕一

$$|k\mathbf{u}|_B = |k||\mathbf{u}|_B$$

のような性質があります．

これは内積の定義から

$$\begin{aligned} |k\mathbf{u}|_B &= \sqrt{B(k\mathbf{u},\ k\mathbf{u})} \\ &= \sqrt{k^2B(\mathbf{u},\ \mathbf{u})} \\ &= |k|\sqrt{B(\mathbf{u},\ \mathbf{u})} = |k||\mathbf{u}|_B \end{aligned}$$

とわかります．

南海　問題は三角不等式だ．つまり内積とそれを用いた絶対値の定義に対し

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|_B \leqq |\mathbf{u}|_B + |\mathbf{v}|_B$$

は，この一般の内積でも成立するか，だ．

耕一　両辺負ではないので，2 乗する．左辺の 2 乗は

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}+\mathbf{v}|_B^2 &= B(\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= B(\mathbf{u},\ \mathbf{u}) + 2B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) + B(\mathbf{v},\ \mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|_B^2 + 2B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|_B^2 \end{aligned}$$

また，右辺の 2 乗は

$$|\mathbf{u}|_B^2 + 2|\mathbf{u}|_B|\mathbf{v}|_B + |\mathbf{v}|_B^2$$

したがって三角不等式は，不等式

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) \leqq |\mathbf{u}|_B|\mathbf{v}|_B$$

と，同値です．

南海　実はこれより強い

$$\{B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})\}^2 \leqq |\mathbf{u}|_B^2|\mathbf{v}|_B^2$$

が成り立つ．

耕一　これって，普通の場合，成分で書くと

$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leqq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

ですね．コーシー・シュワルツの不等式ではありませんか．

南海　そう．この不等式が一般的な内積で成立する．これを証明しよう．

定理 49 (コーシー・シュワルツの不等式) ベクトル空間 V に内積 $B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ が定まっている．内積とそれから定まるベクトルの大きさ $|\mathbf{u}|_B$ の間に次の不等式が成立する．

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})^2 \leqq |\mathbf{u}|_B^2|\mathbf{v}|_B^2$$

証明

$\mathbf{u} = \mathbf{o}$ のときは両辺 0 で成立．$\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ とする．内積の定義 (iii) から，任意の実数 t に対して

$$\begin{aligned} 0 &\leqq B(t\mathbf{u}+\mathbf{v},\ t\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= B(\mathbf{u},\ \mathbf{u})t^2 + 2B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})t + B(\mathbf{v},\ \mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|_B^2t^2 + 2B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})t + |\mathbf{v}|_B^2 \end{aligned}$$

が任意の実数 t に対して成立する．したがって t の二次式としての判別式について

$$D/4 = B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})^2 - |\mathbf{u}|_B^2|\mathbf{v}|_B^2 \leqq 0$$

が成立する．等号成立は $t\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となる t が存在するときである．　□

耕一　ということは先の例で考えた内積でこれを実際に書くと

$$\begin{aligned} &(ax_1x_2 + cx_1y_2 + cy_1x_2 + by_1y_2)^2 \\ \leqq\ &(a{x_1}^2 + 2cx_1y_1 + b{y_1}^2)(a{x_2}^2 + 2cx_2y_2 + b{y_2}^2) \end{aligned}$$

です．もちろん条件

$$a > 0,\ c^2 - ab < 0$$

の下でですが．これが一般化されたコーシー・シュワルツの不等式ですね．普通は $a = b = 1,\ c = 0$ ですが．

2.14.2 線型写像と行列

2.14.2.1 線型写像の行列表現

南海 ベクトル空間 V と一組の基底

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$$

をとり，V から V への線型写像 f を考える．V から他のベクトル空間でもよいが，結局は V から V への場合を考えれば，他の場合は処理できるので，ここでは過度な一般化は避け，V から V への線型写像を考えよう．

V のベクトル $\mathbf{u}$ を実数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ を用いて

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k$$

と表す．

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(\mathbf{e}_k)$$

である．よって $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について $f(\mathbf{e}_k)$ がわかれば，$f(\mathbf{u})$ が決まる．

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n \\
&\cdots \\
f(\mathbf{e}_k) &= a_{1k}\mathbf{e}_1 + a_{2k}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nk}\mathbf{e}_n \\
&\cdots \\
f(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{e}_n
\end{aligned}$$

とおく．

耕一 係数のつきかたが行列の成分の並び方と逆ですね．

南海 そうだ．こうすることで以下に見るように統一的に扱える．まず，

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{u}) &= \sum_{k=1}^{n} x_k f(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(a_{1k}\mathbf{e}_1 + a_{2k}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nk}\mathbf{e}_n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\right)\mathbf{e}_j
\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\
&\cdots \\
y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

とおく．すると，

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j$$

となる．この $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ と $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の関係を高校数学 C の行列の積の記法で書けば，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となる．

耕一　写像 f による基底の行き先を元の基底を用いて表す行列の係数を，a_{11} から a_{nn} への対角線に関して対称に入れ替えた行列が，通常の行列による一次変換の記法に一致するのですね．

南海　そうだ．

耕一　高校数学 C で成分で書かれたベクトルと行列によって，一次変換が定まると習いました．実は逆で，線型写像に対して基底をひとつ固定することで，行列が定まるのですね．

南海　ここで，基底の像と行列の関係を見やすくするために次のように考えよう．基底を一組固定し，それを

$$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)$$

のように書く．この基底で表されるベクトル

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k$$

を

$$\mathbf{u} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表すことにする．

耕一　内積の計算と同じようにかけて和をとるのですね．

南海　これを用いると，これらの基底の f による像は

$$\{f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)\} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と表せる．このとき

$$f\,(\mathbf{u}) \quad = \quad \{f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \quad (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となる．これが

$$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

となるのだから，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となるのだ．

2.14.2.2　線型写像の演算と行列の演算

南海　基底 $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)$ を固定し，線型写像 f から定まる行列 A を A_f のように書くことにしよう．2 つの線型写像 f と g，および実数 k に対して

$$(f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})$$
$$(kf)(\mathbf{u}) = k\{f(\mathbf{u})\}$$

と定めれば，写像の和と実数倍が定義される．

耕一　ということはベクトル空間 V から V への線型写像の集合自体が，またベクトル空間になるということですか．

南海　その通りなのだ．が，ここではこの線型写像の作るベクトル空間の研究には深入りしない．

　ここでは上に定めた線型写像の和と実数倍に対して，対応する行列もまた，行列の和と実数倍になることである．つまり

$$A_{f+g} = A_f + A_g$$
$$A_{kf} = kA_f$$

が成り立つ．これはすぐにわかる．さらに写像 f と g の積 fg を，写像の合成によって

$$fg(\mathbf{u}) = f\{g(\mathbf{u})\}$$

で定める．このとき

$$A_{fg} = A_f A_g$$

が成り立つ，ただし右辺は行列の積である．

耕一　確認します．基底を $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)$ とし，

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_k) &= \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\mathbf{e}_j \\ g(\mathbf{e}_k) &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{e}_j \end{aligned}$$

とします．つまり行列の一般項で書くと

$$A_f = (a_{jk}),\ A_g = (b_{jk})$$

とします．このとき，

$$\begin{aligned} fg(\mathbf{e}_k) &= f\left\{g(\mathbf{e}_k)\right\} = f\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)\mathbf{e_i} \end{aligned}$$

よって

$$A_{fg} = (c_{ik})$$

とおくと

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

となり，確かに数学 C で習った行列の積に一致します．つまり

$$A_{fg} = A_f A_g$$

となっています．

南海　これは

$$(\cdots,\ g(\mathbf{e}_k),\ \cdots) = (\cdots,\ \mathbf{e}_k,\ \cdots)A_g$$

より

$$(\cdots,\ fg(\mathbf{e}_k),\ \cdots) = (\cdots,\ f(\mathbf{e}_k),\ \cdots)A_g = (\cdots,\ \mathbf{e}_k,\ \cdots)A_f A_g$$

なので

$$A_{fg} = A_f A_g$$

が成立する．このようにしてもわかる．

2.14.2.3　逆行列の存在条件

南海　写像 e は，任意のベクトル $\mathbf{u}$ に対して

$$e(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

が成り立つとき，恒等写像という．恒等写像 e と任意の写像 f に対して

$$fe = ef = f$$

が成り立つ．恒等写像を表現する行列は基底のとり方にかかわらず

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．これを**単位行列**という．

線型写像 f に対して

$$fg = gf = e \text{ (恒等写像)}$$

が成り立つ g が存在するとき，g を f の逆写像という．この g を f^{-1} と書きあらわす．

$fg = gf = e$ (恒等写像) となる g が存在するとき，f はベクトル空間 V の一対一写像である．なぜなら $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ となれば $gf(\mathbf{a}) = gf(\mathbf{b})$ で $gf = e$ より $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ となり，g についても同様に示されるからである．

f に対応する行列を A，f^{-1} に対応する行列を B とすると，

$$AB = BA = E$$

が成り立つ．B のことを行列 A の**逆行列**という．

写像 f に逆写像が存在するための条件が次のように基底の概念を用いて言い表される．

定理 50 ベクトル空間 V から V への写像 f が逆写像 g をもつための必要十分条件は，V の一組の基底

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$$

に対して

$$f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)$$

もまた V の基底となることである．

証明

$$f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)$$

が V の基底であるとき．基底の定義から，V の任意のベクトルは

$$x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n)$$

と表される．この基底で表されたベクトルを

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

に移す写像を g とする．これは明らかに線型写像である．一方，f は

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

を

$$x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n)$$

に移す写像である．f と g はこの二つのベクトルを相互に移す写像である．よって $fg = gf = e$ が成り立つ．

逆に $fg = gf = e$ となる g が存在するとする．このとき

$$f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)$$

が一次独立でないとし，関係

$$x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{o}$$

が成り立つとする．このとき

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= g\{x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n)\} \\ &= x_1 gf(\mathbf{e}_1) + x_2 gf(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n gf(\mathbf{e}_n)\} \\ &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

これは

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$$

が基底であることと矛盾．ゆえに

$$f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)$$

は n 個の一次独立なベクトルである．つまり基底であることが示された． □

演習 47　解答 45

xy 座標の定まった平面ベクトル空間で，基底

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとる．線型写像 f を

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で定めるとき，逆写像 f^{-1} を求めよ．

2.14.2.4　基底変換と行列の変換

南海　次の問題は，線型写像 f に対して，基底の取り方を変えたときに，f を表現する行列はどのように変わるのか，という問題である．2 組の基底

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$$
$$\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n$$

をとる．線型写像 f のそれぞれの基底に対する行列を A と B とする．つまり

$$\{f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)\} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)A$$
$$\{f(\mathbf{w}_1),\ f(\mathbf{w}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{w}_n)\} = (\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n)B$$

また 2 組の基底の間には

$$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)P = (\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n)$$

という関係が成り立っているとする．P の成分を

$$P = (p_{ij})$$

とすると，この関係は.

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\mathbf{e_i}$$

である．したがって

$$f(\mathbf{w}_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} f(\mathbf{e_i})$$

となるので,

$$\{f(\mathbf{w}_1),\ f(\mathbf{w}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{w}_n)\} = \{f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)\}P$$

である．P はまた $h(\mathbf{e_i}) = \mathbf{w}_i$ となる V の線型写像 h を自然に定める．定理 50 からこの線型写像には逆写像があり，P は逆行列をもつ．これから

$$\begin{aligned} & \{f(\mathbf{w}_1),\ f(\mathbf{w}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{w}_n)\} \\ = \ & \{f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)\}P \\ = \ & (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)AP \\ = \ & (\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n)P^{-1}AP \end{aligned}$$

よって

$$B = P^{-1}AP$$

を得る．関係を図示すると次のようになる．

$$\begin{array}{ccc} & f : A & \\ V & \longrightarrow & V \qquad /(\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) \\ \uparrow\ P^{-1} & & \downarrow\ P \\ V & \longrightarrow & V \qquad /(\mathbf{w}_1,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n) \\ & f : P^{-1}AP & \end{array}$$

耕一　基底の変換 P を適当に選んで $B = P^{-1}AP$ を対角行列にしようというのが，対角化なのですね.

演習 48　解答 46

xy 座標の入った平面ベクトル空間で，基底

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとる．この基底で線型写像 f に対応する行列を $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とする.

(1) f を基底

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって表すとき対応する行列を求めよ.

(2) f を基底

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

によって表すとき対応する行列を求めよ.

演習 49　解答 47 4 次元の空間で線型写像 f が，基底 $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4$ を用いて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

と表されるものとする．このとき次の 4 つのベクトルをこの順で基底に用いると f はどのような行列で表されるか.

(1) $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_4$

(2) $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$

2.14.3　行列と行列式

2.14.3.1　行列式がみたすべき条件

南海　さて，いよいよ「行列式」について考えなければならない．行列式を用いなければ，逆行列を求めたりする実際の計算ができない.
耕一　高校の数学でも行列式は出ているのですか.
南海　行列式という名前は出てこない.
だが，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$\Delta = ad - bc$$

とおく，というのは出てくるだろう.
耕一　はい．$\Delta = ad - bc$ が 0 でないことが，A の逆行列が存在するための必要十分条件でした.
南海　この $ad - bc$ が行列 A の**行列式**なのだ．A の行列式であることを明示して $\Delta(A) = ad - bc$ と書いたり，もとの行列の各成分で明示して

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

と書いたりする.

耕一　まえから不思議に思っていたのですが，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2 つの縦ベクトル

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

に分けると，$\Delta(A)=ad-bc=0$ ということは，この 2 つのベクトルの平行条件そのものです．これはどういうことでしょうか．

南海　じつはここに線型写像と行列式の内容が隠れている．ベクトル空間と xy 座標の関係は後に改めて考える．例を，高校数学で習う xy 平面上のベクトルにとって，説明しよう．xy 平面上のベクトルは，始点を原点にとることで，xy 座標で表すことができた．これを

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように縦にとって表そう．これはつまり 2 つのベクトル

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を基底ベクトルにとっているということだ．

ある線型写像 f をとる．この基底に対して線型写像 f で定まる行列が $A_f=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ であるとする．これは何を意味していたか．

耕一　基底が線型写像 f によって

$$\mathbf{e}_1=a\mathbf{e}_1+c\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2=b\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_2,$$

にうつるということでした．

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

です．わかりました．$\Delta(A)=ad-bc\neq 0$ は，$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2$ が平行でない，つまり一次独立で再び基底になっている，ということを意味しているのですね．さらに，このとき定理 50 によって，f には逆写像があります．だから $\Delta(A)=ad-bc\neq 0$ のときは，逆行列があるのですね．それと，線型写像に対応する行列を定めるとき，係数の添え字のつけ方を行列の成分の並び方と逆にとった意味もわかりました．

南海　うん．そうすることで，二次の場合の自然な線型写像と行列の対応の一般化になるのだ．

さて，一般の場合の行列式を定義するために，二次の行列式の性質をいくつかまとめておこう．行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を二つの縦ベクトル

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

に分ける．そして実数 $\Delta(A)=ad-bc$ を

$$\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)$$

と書きあらわす．このとき次のようなことが成り立つ．

(1) $\Delta(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1,\ \mathbf{u}_2) = \Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) + \Delta(\mathbf{v}_1,\ \mathbf{u}_2)$

(2) $\Delta(k\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = k\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)$

(3) $\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = -\Delta(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1)$

また，二つの行列 $A,\ B$ に関して

$$\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$$

も成り立つ．

耕一　最初の二つは左側のベクトルに関して線型であることを意味しています．第三の性質から右側の成分に関しても線型です．

$\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ が一次独立でないとき，つまり $\mathbf{u}_2 = k\mathbf{u}_1$ のとき，行列式が 0 になることがここから導かれればいいのですが．

南海　第三の性質から

$$\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1) = -\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1)$$

これから $\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1) = 0$ がわかる．

耕一　だから

$$\Delta(\mathbf{u}_1,\ k\mathbf{u}_1) = k\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1) = 0$$

になるのですね．

2.14.3.2　行列式の定義

南海　そこで n 次元のベクトル空間での行列式を定義しよう．そのためには次の定理が基本的だ．

定理 51 n 次元のベクトル空間 V と一組の基底

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$$

をとる．n 個のベクトルの組

$$\mathbf{u}_i,\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

に対し，次の性質をもつ実数

$$\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n)$$

がただひとつ定まる．

(1) $\Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ k\mathbf{u}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) = k\Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n)$.

(2) $\Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) = \Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) + \Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n)$.

(3) $\Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_j,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) = -\Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_j,\ \cdots,\ \mathbf{u}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n)$.

(4) $\Delta(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) = 1$

耕一　証明は難しいのですか．

南海　いや．実際に構成してみせるのだ．ただそのために置換の考え方がいる．n 個の数 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ の集合

$$N = \{\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\ \}$$

をとり N から N 自身の上への一対一写像 σ を**置換**という．

$$\sigma(k) = a_k\ ,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

とすれば，この置換 σ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

のように，置きかえ先を列記することで書きあらわすことができる．2 つの置換 σ と τ について，その積を写像の合成で定める．

$$\sigma\tau(k) = \sigma\{\tau(k)\}$$

要するに，順に置換を施していくということだ．

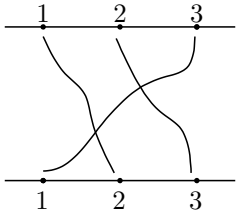
また $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のうち i と j のみを入れ替え，他はそのままである置換を互換といい，$(i,\ j)$ のように書きあらわす．つまり

$$\sigma(i) = j,\ \sigma(j) = i,\ \sigma(k) = k,\ (k \neq i,\ j)$$

となる置換 σ を $(i,\ j)$ と書くのである．

耕一　$n = 3$ のときは，置換は結局 $a_1,\ a_2,\ a_3$ の決め方だから $3! = 6$ 個あるのですね．

南海　置換を目で見るには次のようにしてみればよい．例えば $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ は，次のようにひもで結べばよい．



耕一　ひもは 2 回交わります．

南海　そこでどのようなことが起こっているか．

耕一　まず 2 と 3 が入れ替わり，次にその 2 と 1 が入れ替わります．実際上から順にこの入れ替えを書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

です．

南海　こうして置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ は 2 つの互換 $(2,\ 3),\ (1,\ 2)$ の積になった．

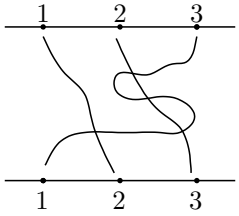
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,\ 2)(2,\ 3)$$

ただし，ここでは右側から順に作用させる．

耕一　でも右のようなときもあります．これは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,\ 2)(2,\ 3)(2,\ 3)(2,\ 3)$$

となるだけですが．



南海　次の事実が成り立つ．

補題 4　n 個の文字の置換は互換の積に分解される．分解の仕方は一通りではないが，互換の個数が偶数個か奇数個かは，各置換によって一定である．

証明

$f = \prod_{1 \leqq i < j < n} (x_i - x_j)$ とおく．n 個の文字の置換 σ によって，$x_1,\ \cdots,\ x_n$ を置きかえると，新しい f^σ ができるが，σ は f の符号のみをかえるので，$f^\sigma = \pm f$ であり，その符号は σ によって確定する．一方，置換が偶数個の互換の積に分解されるなら $f^\sigma = f$，奇数個の互換の積に分解されるなら，$f^\sigma = -f$ である．したがって，偶数奇数の別は分解の仕方によらない．　□

偶数個の互換の積に分解される置換を**偶置換**，奇数個の互換の積に分解される置換を**奇置換**という．記号で

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma\text{偶置換}) \\ -1 & (\sigma\text{奇置換}) \end{cases}$$

と定める．つまり $f^\sigma = \mathrm{sign}(\sigma) f$ である．

例 2.14.3　次の置換の偶奇は次のようになる．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ は $(3,4)(2,3)(1,2)$ と分解され，奇置換．

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ は $(1,2)(3,4)(2,3)$ と分解され，奇置換．

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ は $(2,3)(3,4)(1,3)$ と分解され，奇置換．

南海　定理 51 の証明をしておこう．ある程度添え字の置き方にも慣れてきたので和記号を用いていく．

定理 51 の証明

定理 51 に掲げた 4 つの性質をもつ Δ が存在するとする．

$$\mathbf{u}_i = \sum_j a_{ji} \mathbf{e}_j,\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

とおく．

$$\begin{aligned} & \Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) \\ = \ & \Delta(\sum_j a_{j1}\mathbf{e}_j,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) \\ = \ & \sum_j a_{j1} \Delta(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) \\ = \ & \sum_j a_{j1} \Delta(\mathbf{e}_j,\ \sum_k a_{k2}\mathbf{e}_k,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) \\ = \ & \sum_j \sum_k a_{j1} a_{k2} \Delta(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) \end{aligned}$$

同様に順次係数を用いて表すと

$$\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) = \sum \cdots \sum a_{j1}a_{k2}\cdots a_{ln}\Delta(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k,\ \cdots,\ \mathbf{e}_l)$$

ここで，$j,\ k,\ \cdots,\ l$ は $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のいずれかで，同じものは含まないので，ある置換 σ によって

$$j = \sigma(1),\ k = \sigma(2),\ \cdots,\ l = \sigma(n)$$

とおける．また和がこのようなあらゆる置換にわたることも明らかである．つまり

$$\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\Delta(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ \cdots,\ \mathbf{e}_{\sigma(n)})$$

ここでひとつ入れ替えるたびに $\pm$ が入れ替わるので，

$$\Delta(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ \cdots,\ \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\Delta(\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)$$

である．よって

$$\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) = \Delta(\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)\sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\Delta(\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) \tag{2.15}$$

$\Delta(\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) = 1$ より

$$\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

逆に

$$\mathbf{u}_i = \sum_j a_{ji}\mathbf{e}_j,\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

に対して，

$$\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

と定める．これが定理 51 に掲げた性質のうち，第 1，第 2 が成り立つことは明らか．第 3 は，いずれか 2 つを入れ替えると，ちょうど互換がひとつ増減することから，成立する．第 4 も明らかである．よって定理 51 が示された． □

さて行列 $A = (a_{ij})$ に対して，この基底に関して

$$\mathbf{u}_i = \sum_j a_{ji}\mathbf{e}_j,\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

とおいたときの $\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n)$ を，行列 A の (この基底に関する) **行列式**といい，

$$\Delta(A), \quad |A|$$

などと記す．次の事実が成り立つ．

(1) 行列式 $\Delta(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n)$ で，$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n$ の中に同じものがあれば，行列式の値は 0 である．入れ替えると符号が変わるのだから，同じものがあればそこを入れ替えることで，値が 0 であることがわかる．

したがって $\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n$ の $\mathbf{u}_i$ に，$\mathbf{u}_i$ 以外のベクトルの 1 次結合を加えても，行列式の値は変わらない．実際

$$\begin{aligned}
& \Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_i + \sum_{k,k\neq i} c_k\mathbf{u}_k,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) \\
= \ & \Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) + \sum_{k,k\neq i} c_k\Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_k,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n) \\
= \ & \Delta(\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_i,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n)
\end{aligned}$$

である．

(2) 2 つの行列 $A,\ B$ に関して，

$$\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$$

が成り立つ．一組の基底 $\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$ をとり

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)A &= (\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n) \\
(\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n)B &= (\mathbf{w}_1,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n)
\end{aligned}$$

とおく．$\Delta(A) \neq 0$ なら $(\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n)$ も基底なので定理 51 の証明における等式 (2.15) と同様に

$$\begin{aligned}
\Delta(BA) &= \Delta(\mathbf{w}_1,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n) \\
&= \Delta(B)\Delta(\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n) \\
&= \Delta(B)\Delta(A)\Delta(\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)
\end{aligned}$$

これから $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$ がわかる．

$\Delta(A) = 0,\ \Delta(B) \neq 0$ なら，まず $(\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n)$ は 1 次従属．その関係式に

$$(\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n) = (\mathbf{w}_1,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n)B^{-1}$$

を代入して，$(\mathbf{w}_1,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n)$ も 1 次従属．よって $\Delta(AB) = 0$．これから $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$．

$\Delta(A) = 0,\ \Delta(B) = 0$ のときも成立する．

耕一　今は行列を縦ベクトルに分けて，行列式を定義しましたが，横ベクトルに分けてもいいのですか．

南海　それは，σ の逆置換 σ^{-1}，置換群的な考察が必要なのだ．

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
= \ & \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
= \ & \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}
\end{aligned}$$

第一の等号は並べ替えただけだ．第二の等号は σ が置換全体を動けば，σ^{-1} も置換全体を動くことから結論づけられる．最後の式は横ベクトルで考えたものそのものだ．

耕一　少し難しいです．

南海　そうだろう．そこで具体的な場合に戻ろう．2 次行列の場合，この定義が Δ そのものであることを確認してほしい．ただし，基底は $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

耕一　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

です．これでやってみます．

例 2.14.4　1 と 2 の置換は $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の 2 つです．$\mathrm{sign}(\sigma) = 1$, $\mathrm{sign}(\tau) = -1$ なので

$$\Delta(A) = \mathrm{sign}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2} + \mathrm{sign}(\tau)a_{\tau(1)1}a_{\tau(2)2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

となります．

南海　3 次の場合は？ただし，基底は $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

耕一　同じように考えます．

例 2.14.5　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする．

1，2，3 の置換は，(1 2 3) を並べ替えた結果で書くと

$$\begin{array}{ll} \sigma_0 = (1\ 2\ 3) & \mathrm{sign}(\sigma_0) = 1 \\ \sigma_1 = (2\ 3\ 1) = (12)(23) & \mathrm{sign}(\sigma_1) = 1 \\ \sigma_2 = (3\ 1\ 2) = (12)(13) & \mathrm{sign}(\sigma_2) = 1 \\ \sigma_3 = (2\ 1\ 3) = (12) & \mathrm{sign}(\sigma_3) = -1 \\ \sigma_4 = (1\ 3\ 2) = (23) & \mathrm{sign}(\sigma_4) = -1 \\ \sigma_5 = (3\ 2\ 1) = (13) & \mathrm{sign}(\sigma_5) = -1 \end{array}$$

の 6 個です．したがって

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad -a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

これは $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ で，左上から右下方向にとるときは符号は正，左下から右上方向にとるときは符号は負ということで，覚えやすい．

2.14.3.3　行列式の展開

南海　行列式の定義そのままではいろんな応用に不便である．なぜこれが逆行列の構成に役立つのかもみにくい．これに対して，行列式を余因子といわれる小行列式を用いて展開し計算することができる．

行列 A のあるひとつの要素 a_{ij} とする．

$$\Delta(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

の $n!$ 個の項のうち，a_{ij} を因子にもつものをまとめ，そこから a_{ij} をくくりだして，これを $a_{ij}A_{ij}$ と書こう．行列式のすべての項は第 i 行の要素を 1 つ，そしてただ 1 つだけ含んでいる．だから行列 A の i 行をとって

$$\Delta(A) = a_{i1}Ai1 + \cdots + a_{ij}Aij + \cdots + a_{in}Ain$$

と表せる．これを $\Delta(A)$ の i 行目の要素による展開という．同様に j 列をまとめて部分和をつくることによって，j 列目の要素による次の展開が得られる．

$$\Delta(A) = a_{1j}A1j + \cdots + a_{ij}Aij + \cdots + a_{nj}Anj$$

耕一　3 次行列で確認します．

$$\begin{aligned}\Delta(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) \\ &\quad + a_{12}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) \\ &\quad + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\end{aligned}$$

(　) 内も行列のようです．

南海　そこで，係数 A_{ij} がどんなものであるかを調べよう．要素 a_{ij} を含む項はすべて次の形をしている．つまり $\sigma(j) = i$ となる置換で

$$\mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \cdots \cdot a_{ij} \cdot \cdots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

これらから a_{ij} を除いたものは，符号を別にして，もとの行列から i 行と j 列の要素をすべて取り除いて得られた小行列式の項である．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(i) = j & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

に対し

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(i-1) & \sigma(i+1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

とおこう．

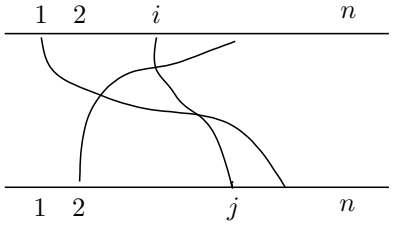
i と j を結ぶひもと交わるひもで，左から右に交わるものを p 本，右から左に交わるもの q 本とすれば

$$q - p = j - i$$

である．よってその和は

$$p + q = j - i + 2p = i + j + 2(p - i)$$

である．



i と j を取りのぞいた交点数の偶奇で $\mathrm{sign}(\sigma')$ が決まるので

$$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{i+j}\mathrm{sign}(\sigma')$$

が成り立つ．これがすべての σ で成立する．ゆえに i 行と j 列の要素をすべて取り除いて得られた行列の行列式を D_{ij} とすると，

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$$

が成り立つ．つまり

$$\Delta(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}D_{i1} + \cdots + a_{ij}(-1)^{i+j}D_{ij} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}D_{in}$$

という展開が成り立つ．また $k \neq i$ のとき

$$a_{i1}(-1)^{k+1}D_{k1} + \cdots + a_{ij}(-1)^{k+j}D_{kj} + \cdots + a_{in}(-1)^{k+n}D_{kn} = 0$$

である．これは，元に戻せばはじめの行列式の k 行目をすっかり i 行目に置きかえたものになり，2 つの行が一致する行列の行列式そのものだからである．

便利な記号として

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

とおくと

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{k+i}D_{ki} = \delta_{ik}\Delta(A)$$

が成り立つ．同様に

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+k}D_{ik} = \delta_{jk}\Delta(A)$$

も成り立つ．

耕一　3 次行列で確認します．

$$\begin{aligned}
\Delta(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\
&\qquad -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\qquad -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

です．これで逆行列も作れます．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & \cdots & (-1)^{n+1}D_{n1} \\ -D_{12} & D_{22} & \cdots & (-1)^{n+2}D_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{1+n}D_{1n} & (-1)^{2+n}D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta(A) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

なので

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & \cdots & (-1)^{n+1} D_{n1} \\ -D_{12} & D_{22} & \cdots & (-1)^{n+2} D_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{1+n} D_{1n} & (-1)^{2+n} D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix}$$

です.

南海　ということだ．いま作った行列

$$\begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & \cdots & (-1)^{n+1} D_{n1} \\ -D_{12} & D_{22} & \cdots & (-1)^{n+2} D_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{1+n} D_{1n} & (-1)^{2+n} D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix}$$

のことを，もとの行列 A の**余因子行列**という．

2.14.3.4　クラメルの公式

南海　連立方程式の解公式であるクラメルの公式を作っておこう．連立方程式は

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = p_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = p_2 \\ & \cdots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = p_n \end{aligned}$$

と表されるものであった．これは行列では

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

と表せる．したがって $\Delta(A) \neq 0$ のときは，ただ一組の解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

が定まる．ところが

$$A^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & \cdots & (-1)^{n+1} D_{n1} \\ -D_{12} & D_{22} & \cdots & (-1)^{n+2} D_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{1+n} D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{\Delta(A)}\left\{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}D_{jk}p_j\right\} \\ &= \frac{1}{\Delta(A)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & p_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & p_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & p_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ただし，最後の行列式は，A の第 k 列 $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$ に置きかえたものである．

耕一　2 次と 3 次では次のようになる．

例 2.14.6

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

の解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

です．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

の解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & a_{12} & a_{13} \\ q & a_{22} & a_{23} \\ r & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & p & a_{13} \\ a_{21} & q & a_{23} \\ a_{31} & r & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & p \\ a_{21} & a_{22} & q \\ a_{31} & a_{32} & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

です．

演習 50　解答 48

次の等式を証明せよ．またその一般化を考えよ．

(1) $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3(a_2b_1 - a_1b_2)(a_3b_2 - a_2b_3)$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_1 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_2 \end{vmatrix} = 1$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 \end{vmatrix} = -(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$

2.14.4 固有ベクトルと線型写像の対角表現

2.14.4.1 固有値と固有ベクトル

南海 線型写像 f に対して，一組の基底

$$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)$$

をとると，線型写像 f には，その基底の像をもとの基底で表したとき

$$\{f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)\} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

となる行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

が対応するのだった．そこで基底をうまくとって，この行列が対角行列になるようにできないか，という問題が起こる．ただし，対角行列とは，

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

となる行列のことをいう．

耕一 それは

$$\{f(\mathbf{e}_1),\ f(\mathbf{e}_2),\ \cdots,\ f(\mathbf{e}_n)\} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

つまり

$$f(\mathbf{e}_k) = a_{kk}\mathbf{e}_k \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

となる 1 次独立な n 個のベクトルが見つかればいいということですね．

南海　そこで，線型写像 f に対して

$$f(\mathbf{u}) = t\mathbf{u} \tag{2.17}$$

となるベクトル $\mathbf{u}$ を，**固有値** t に対する**固有ベクトル**という．固有値と固有ベクトルを具体的に計算するために，一組の基底が固定され，線型写像が上のように行列で表されているとする．

耕一　すると関係式 (2.17) は

$$A\mathbf{u} = t\mathbf{u}$$

となります．

南海　E を単行列とすれば

$$(A - tE)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

である．零ベクトルでない解 $\mathbf{u}$ が存在するためには，行列式

$$|A - tE| = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = 0$$

が必要十分な条件である．この行列式は t の n 次多項式である．これを**固有多項式**という．

耕一　$n = 2$ のとき．

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - t \end{vmatrix} = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$n = 3$ のときは複雑になります．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t \end{vmatrix} &= -t^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 \\ &\quad - \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) t \\ &\quad - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

南海　うまく行列や小行列でまとめた．

耕一　線型写像 f に対して一組の基底をとり，行列 A を定め，それによって固有多項式ができました．基底のとり方をかえれば多項式は変わるのですか．

南海　基底のとり方をかえれば，対応する行列は

$$P^{-1}AP$$

に変わる．このとき

$$\begin{aligned} |P^{-1}AP - tE| &= |P^{-1}AP - tP^{-1}P| \\ &= |P^{-1}(A - tE)P| \\ &= |P^{-1}||A - tE||P| \\ &= |A - tE| \end{aligned}$$

なので，固有多項式は変わらない．つまり固有多項式は線型写像によって定まる．それでこれ以降，固有多項式を $P_f(t)$ のように表すことにする．すると既に見たように，n 次方程式

$$P_f(t) = 0$$

の根 α に対して

$$f(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$$

となるベクトル $\mathbf{u}$ が存在する．

これが固有値 α に対応する固有ベクトルである．

定理 52 線型写像 f の固有多項式を $P_f(t)$ とする．n 次方程式

$$P_f(t) = 0$$

に異なる 0 でない根 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ $(m \geqq 2)$ があるとき，それらの根に対応する固有ベクトル

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_m$$

は一次独立である．

証明

m についての数学的帰納法で示す．

$m = 2$ のとき．$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ が一次従属なら

$$\mathbf{u}_2 = k\mathbf{u}_1$$

となる 0 でない数 k がある．ところが

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_2) &= f(k\mathbf{u}_1) \\ &= kf(\mathbf{u}_1) = k\alpha_1\mathbf{u}_1 \\ &= \alpha_1 k\mathbf{u}_1 = \alpha_1\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

となり，ベクトル $\mathbf{u}_2$ の固有値が α_1 となる．これは $\alpha_1 \neq \alpha_2$ に反する．

$m-1$ のとき成立するとし，m のときも成立することを示す．ここで，

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_m$$

は一次従属であるとする．するとベクトル $\mathbf{u}_m$ は，すべては 0 ではない係数 h_j $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ を用いて

$$\mathbf{u}_m = \sum_{j=1}^{m-1} h_j\mathbf{u}_j$$

と他の $m-1$ 個のベクトルで表される．

$$f(\mathbf{u}_m) = \sum_{j=1}^{m-1} h_j f(\mathbf{u}_j)$$

より

$$\alpha_m\mathbf{u}_m = \sum_{j=1}^{m-1} h_j\alpha_j\mathbf{u}_j$$

これから

$$\alpha_m \left(\sum_{j=1}^{m-1} h_j \mathbf{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{m-1} h_j \alpha_j \mathbf{u}_j$$

数学的帰納法の仮定から

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_{m-1}$$

は一次独立である．したがって

$$\alpha_m h_j = h_j \alpha_j \ (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

h_j のうちには 0 でないものが存在するので，$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ $(m \geqq 2)$ がすべて異なることとに反する．ゆえに

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \cdots,\ \mathbf{u}_m$$

は一次独立である．m で成立したので，定理が示された． □

2.14.4.2　行列の対角化

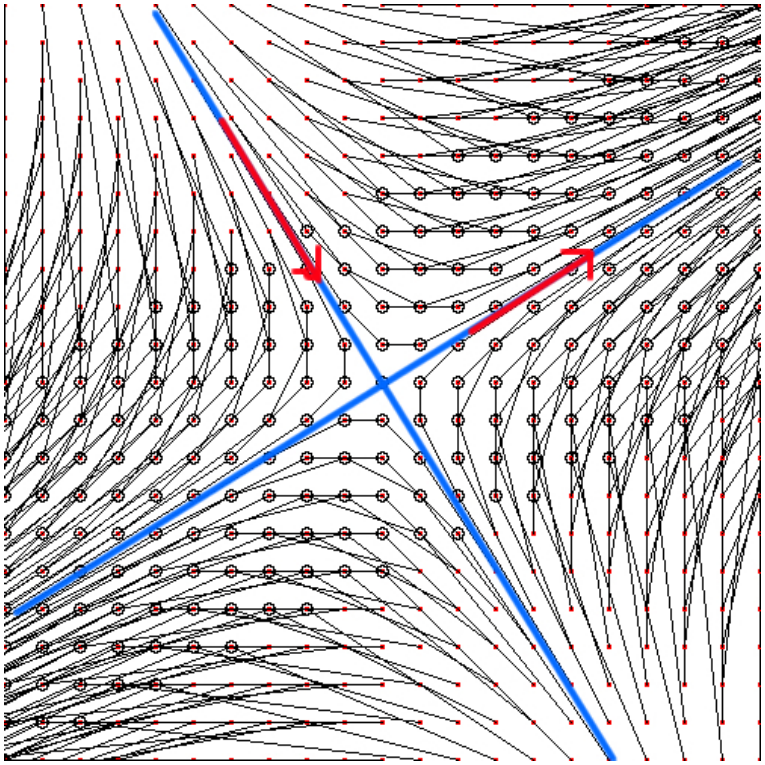
南海　定理 52 によって，もし固有方程式が 0 でない相異なる n 個の根をもつなら，n 個の一次独立な固有ベクトルが得られる．

それらのベクトルを基底として線型写像を表現すれば，その行列は対角行列である．『一次変換を見る』にいろんな例を作ってみた．参考にしてほしい．

耕一　『一次変換を見る』の最初の例を，詳しく見てみます．xy 平面で

$$\mathbf{e}_1 = (1,\ 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,\ 1)$$

を基底とするとき，$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される線型写像が f_A です．xy 平面の格子点と f による行き先を結ぶと，2 つの方向が見て取れます．



この方向が固有ベクトルの方向です．固有方程式は

$$t^2 - 3t + 1 = 0$$

これを解いて

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

です．この t に対して

$$\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

です．固有ベクトルを $\mathbf{u} = (x,\ y)$ とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{1 \mp \sqrt{5}}{2} x + y = 0 \\ x + \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{2} y = 0 \end{cases}$$

です．これから固有ベクトルによる基底として

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

がとれます．すると

$$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)$$

となり，

$$P=\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

となるはずです．実際

$$P^{-1}=\frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ -3+\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 10+6\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -10+6\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

です．

南海　固有方程式が重根をもつ場合，対角化はできるのか，あるいはできないならどのような標準形に変換できるのかという問題などは，後に考えよう．次に 3 次行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ を対角化してみてほしい．

耕一

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -t & 7 & -6 \\ -1 & 4-t & 0 \\ 0 & 2 & -2-t \end{vmatrix} &= -t\begin{vmatrix} 4-t & 0 \\ 2 & -2-t \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2-t \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -1 & 4-t \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -t(4-t)(-2-t)-7(2+t)+12 \\ &= -t^3+2t^2+t-2=0 \end{aligned}$$

これを解いて

$$t=1,\ -1,\ 2$$

となる．それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求める．

$t=1$ のとき．

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & -6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を解いて，$x = 9h,\ y = 3h,\ z = 2h$ と任意の数 h を用いて表せる．

$t = -1$ のとき．

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を解いて，$x = 5h,\ y = h,\ z = 2h$ と任意の数 h を用いて表せる．

$t = 2$ のとき．

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を解いて，$x = 4h,\ y = 2h,\ z = h$ と任意の数 h を用いて表せる．

したがって 3 つの固有ベクトルは

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．2 次の場合と同様に

$$P = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9(1-4) - 5(3-4) + 4(6-2) = -6$$

これから

$$P^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 1-4 & -(5-8) & 10-4 \\ -(3-4) & 9-8 & -(18-12) \\ 6-2 & -(18-10) & 9-15 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -1 & -1 & 6 \\ -4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

そして確かに

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -1 & -1 & 6 \\ -4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & -6 \\ -8 & 16 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります．

2.14.4.3　ハミルトン・ケイレイの定理

南海　ハミルトン・ケイレイの定理は高校数学 C にも載っている．

耕一　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

です．この式は固有方程式そのものです．

南海　いいところに気づいた．実は次の事実が成り立つ．

定理 53 (ハミルトン・ケイレイの定理) f を線型写像とし，ある基底で f が行列 A で表されたとする．f の固有多項式を $P_f(t)$ とすると

$$P_f(A) = O$$

証明

$$P_f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$$

とおく．また，行列 $A - tE$ の余因子行列を B とおく．B の各成分は t の $n-1$ 次以下の多項式である．B の各成分の t の j 次の項の係数を成分とする行列を B_j とおくと

$$B = t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + B_0$$

と書ける．行列 $A - tE$ の余因子行列が B なので，第 3 節の等式 (2.16) より

$$(A - tE)B = P_f(t)E$$

これから

$$\begin{aligned} & (A - tE)(t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + B_0) \\ = \quad & a_n t^n E + a_{n-1}t^{n-1}E + \cdots + a_0 E \end{aligned}$$

を得る．

$$\begin{aligned} & (A - tE)(t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + B_0) \\ = \quad & -t^n B_{n-1} + t^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \cdots + t(AB_1 - B_0) + AB_0 \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} & -t^n B_{n-1} + t^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \cdots + t(AB_1 - B_0) + AB_0 \\ = \quad & a_n t^n E + a_{n-1}t^{n-1}E + \cdots + a_1 tE + a_0 E \end{aligned}$$

これが任意の t で成立するので，t の各次数の行列の各成分が両辺一致する．つまり，t の各次数の行列が一致する．

$$\begin{aligned} -B_{n-1} &= a_n E \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1}E \\ &\cdots \\ AB_1 - B_0 &= a_1 E \\ AB_0 &= a_0 E \end{aligned}$$

第 1 式の両辺に A^n を，第 2 式の両辺に A^{n-1} を左から乗じ，以下同様にすると．右辺は数と E の積なので $A^j a_j E = a_j A^j$ 等が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}
&-A^n B_{n-1} = a_n A^n \\
&A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} = a_{n-1} A^{n-1} \\
&\cdots \\
&A^2 B_1 - A B_0 = a_1 A \\
&A B_0 = a_0 E
\end{aligned}$$

これをすべて加えると

$$O = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = P_f(A)$$

を得る． □

耕一　2 次行列のときに確認してみます．前と同様に直交座標の x 軸 y 軸方向の単位ベクトルを基底にして f が $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表されるとします．

$$P_f(t) = |A - tE| = t^2 - (a+d)t + (ad - bc)$$

です．ここで行列 $A - tE$ は

$$\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}$$

なので，その因子行列は

$$\begin{pmatrix} d-t & -b \\ -c & a-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} - tE$$

です．$B_0 = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とします．

$$\begin{aligned}
(A - tE)(B_0 - tE) &= \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d-t & -b \\ -c & a-t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t^2 - (a+d)t + (ad-bc) & 0 \\ 0 & t^2 - (a+d)t + (ad-bc) \end{pmatrix} \\
&= \{t^2 - (a+d)t + (ad-bc)\} E = P_f(t) E
\end{aligned}$$

そうか．要するに $\{t^2 - (a+d)t + (ad-bc)\}E$ が $(A - tE)(B_0 - tE)$ と因数分解されるのですね．t に A を代入すると

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

です．教科書では単なる計算として書かれていますが，この余因子を作る方法の方が納得できます．

南海　一般の場合も積の順序の問題を明確にするため，いったん分けてから代入して加えたが，因数分解できている行列の式に代入したことに変わりない．

演習 51　解答 49

次の行列の最小多項式を求め，各行列の 8 乗を計算せよ．

$$（1）\quad A=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix},\qquad （2）\quad B=\begin{pmatrix}3&3&3\\-1&1&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

2.14.4.4　ジョルダンの標準形

南海　固有方程式が重根をもつときどのようなところまで標準形にできるのか，概略を考えよう．例として『一次変換を見る』であつかった $A=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$ を考えよう．

耕一　固有方程式は

$$t^2-4t+4=0$$

で $t=2$ が重解です．

$$A-2E=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$

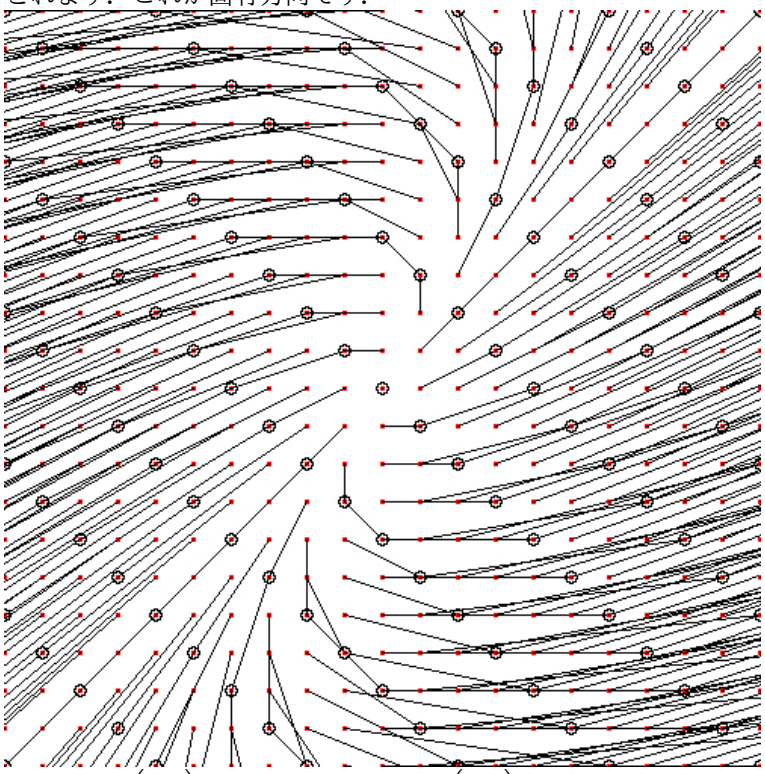
なので，

$$(A-2E)\mathbf{u}=O$$

となる $\mathbf{u}$ として

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

がとれます．これが固有方向です．



南海　$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とし，さらに $\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $(a\neq b)$ として，これを新たな基底にとると行列はどのように変わるか．

耕一

$$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = (\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)$$

となり，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

とおいて計算をすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & a-b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となります．

南海　$a = 1,\ b = 0$ とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

という形にできた．3 次正方行列では，α が重根で β が単根の場合，P を適切にとると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とすることができる，α が 3 重根の場合は

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},\ \text{または} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

のいずれかにすることができる．このような形の標準形を**ジョルダンの標準形**という．一般に

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

のように対角線より下の成分が 0 である行列を**三角行列**というが，このような三角行列の固有方程式は

$$|A - tE| = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\cdots(a_{nn} - t)$$

となり，その根は対角成分

$$a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}$$

となる．だからジョルダンの標準形では，対角線上の固有値はその重複回数だけ並ぶことがわかる．

演習 52　解答 50

次の行列のジョルダンの標準形を複素数の範囲で求めよ．

$$\text{（1）}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix},\qquad \text{（2）}\quad B = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -4 \\ -9 & 18 & -8 \\ -15 & 29 & -13 \end{pmatrix}$$

2.14.5　内積と直交変換

2.14.5.1　内積と二次形式

南海　n 次元ベクトル空間 V の内積をもう一度考えよう．

いま一組の基底 $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$ をとる．内積は 1 節ですでに定義している．ベクトル空間 V の 2 つのベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ に対して内積 $B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ といわれる実数値が定まる，その定義は**内積の定義 (18)** を見てほしい．一言でいえば，2 つのベクトルを変数とし，**双線型で正の値をとる対称実数値関数**ということである．

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$
$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$$

とする．このとき

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)\right)$$
$$= (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\begin{pmatrix} B(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2) & \cdots & B(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_n) \\ B(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2) & \cdots & B(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B(\mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_2) & \cdots & B(\mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

と基底によって定まる一定の行列を用いて表される．

耕一

$$B(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j) = B(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_i)$$

なので，この行列は左上から右下への対角線に関して対称です．

南海　このような行列を**対称行列**と呼ぼう．またベクトル

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

を

$$\mathbf{u} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

のように成分で書いて 1 行 n 列の行列と同一視しよう．そして縦に書いたベクトルは

$${}^t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

のように表す．一般に記号 ${}^tA$ は行列 A の i 行 j 列の成分を j 行 i 列の成分と入れ替えた行列を表す．${}^tA$ を行列 A の転置行列という．すると内積は対称行列 A を用いて

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \mathbf{u}A{}^t\mathbf{v}$$

と書くことができる．ただし

$$A = \Big(B(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)\Big)$$

である．

耕一　逆に対称行列 A を用いて

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \mathbf{u}A^t\mathbf{v}$$

で $B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ を定義すると，これは内積になりますか．あっ，正の値をつねにとるかどうかがわからないのですね．

南海　双線型な実数値関数が得られるが，正値かどうかは未定である．一般に，基底を一つ固定したとき対称行列 A に対して定まる

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \mathbf{u}A^t\mathbf{v}$$

を**双線型形式**と呼ぼう．また対称行列に対して定まる

$$Q(\mathbf{u}) = \mathbf{u}A^t\mathbf{u}$$

を**二次形式**と呼ぼう．

二次形式があれば次のようにして双線型形式が定まる．

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left\{Q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{v})\right\}$$

これが双線型形式であることを確認してほしい．

耕一

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})A^t(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}A^t\mathbf{u} + \mathbf{u}A^t\mathbf{v} + \mathbf{v}A^t\mathbf{u} + \mathbf{v}A^t\mathbf{v} \\ &= Q(\mathbf{u}) + Q(\mathbf{v}) + \mathbf{u}A^t\mathbf{v} + \mathbf{v}A^t\mathbf{u} \end{aligned}$$

ですが，A が対称行列なので

$$\mathbf{u}A^t\mathbf{v} = \mathbf{v}A^t\mathbf{u}$$

です．ゆえに

$$\frac{1}{2}\left\{Q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{v})\right\} = \mathbf{u}A^t\mathbf{v}$$

となります．

南海

$$A = \begin{pmatrix} a & l & m \\ l & b & n \\ m & n & c \end{pmatrix}$$

とし，$\mathbf{u} = (x,\ y,\ z)$ とすれば，二次形式とはどのようなものになるか．

耕一

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &= (x,\ y,\ z)\begin{pmatrix} a & h & l \\ h & b & m \\ l & m & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2lxz + 2myz \end{aligned}$$

です．ここで $z = 1$ とすると,『数学対話』－「パスカルの定理」－「特別な場合の演習問題 62」に出てくる 2 次曲線の一般形です．

2.14.5.2　内積の対角型行列表示

南海　ここで基底のとり方をかえることを考える．同じ双線型形式を 2 つの基底で表すとき，行列 A はどのように変わるかを見よう．2 組の基底の間には

$$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)P = (\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n)$$

という関係が成り立っているとする．ベクトル $\mathbf{u}$ が基底 $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$ で

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

と表されているとする．これを基底 $\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n$ で表すとどのようになるか．
耕一

$$\mathbf{u} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

でしたので，

$$\mathbf{u} = (\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n)P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となり．ベクトル $\mathbf{u}$ を基底 $\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n$ で表して

$$\mathbf{u} = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 + \cdots + y_n\mathbf{w}_n$$

とすると

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

です．言いかえると

$$P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となります．つまり

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)^t P$$

です．よって

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)^t PAP \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

がすべての $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ で成立しなければならない．つまり新しい基底に関する行列を

$$^tPAP$$

ととれば，双線型形式は変わりません．

南海　これを準備して次の定理を証明しよう．

定理 54 V をベクトル空間，$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ を V の 2 つのベクトルに対し双線型な対称実数値関数とする．V の適当な基底をとれば，$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ は対角型の行列で表示される．

証明

これを V の次元 n に関する数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のときは明らかに成立する．

$n-1$ 次元につては定理が成立するものとする．V のすべてのベクトル $\mathbf{u}$ で

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{u}) = 0$$

が成り立つときは A が零行列であるから成立する．そうでないとき

$$B(\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1) \neq 0$$

となる V のベクトル $\mathbf{w}_1$ をとる．この場合 $\mathbf{w}_1 \neq 0$ であるから $\mathbf{w}_1$ を含む V の基底

$$\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n$$

が存在する．この基底に関する B の行列を

$$A = (a_{ij})$$

とする．すると

$$a_{11} = B(\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1) \neq 0$$

である．そこで

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{12}}{a_{1n}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき

$$
\begin{aligned}
{}^tP_1AP_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & & \\ & \cdots & & \\ a_{1n} & \cdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{12}}{a_{1n}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & \\ & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{12}}{a_{1n}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ & & B & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と 1 行目と 1 列目は 11 成分が 1 で他は 0 となる．そして

$$
{}^t({}^tP_1AP_1) = {}^tP_1{}^tAP_1 = {}^tP_1AP_1
$$

より B も対称行列である．数学的帰納法の仮定から適当な $n-1$ 次行列 Q によって ${}^tQBQ$ が対角型の行列になる．したがって

$$
P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}
$$

とし，

$$
P = P_1P_2
$$

とすれば，${}^tPAP$ は対角型である． □

南海　このように，ベクトル空間 V の双線型関数 B は適当な基底をとれば対角型行列で表現される．このとき，

$$
\begin{aligned}
B(\mathbf{u},\ \mathbf{u}) &= (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & \end{pmatrix} {}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \\
&= \alpha_1{x_1}^2 + \alpha_2{x_2}^2 + \cdots + \alpha_n{x_n}^2
\end{aligned}
$$

となる．したがって B が正値であることは $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ がすべて正にとれること同値である．

2.14.5.3　正規直交基底

ベクトル空間 V と内積 B が与えられている．定理によって，適当な基底をとると，内積が対称行列 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & \end{pmatrix}$ で表された．

この基底を $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$ とする．ベクトル $\mathbf{u}$ をこの基底で表して

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j,\qquad \mathbf{v}=\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j$$

とすると，

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j y_j$$

となるのであった．したがってとくに

$$B(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k)=\begin{cases} \alpha_j & (j=k\ \text{のとき}) \\ 0 & (j\neq k\ \text{のとき}) \end{cases}$$

となる．α_j はすべて正なので，$\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_j}}\mathbf{e}_j$ を改めて基底 $\mathbf{e}_j$ にとると，この基底に関して内積は

$$B(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k)=\begin{cases} 1 & (j=k\ \text{のとき})\ \text{〔正規性〕} \\ 0 & (j\neq k\ \text{のとき})\ \text{〔直交性〕} \end{cases}$$

となる．この基底を内積 B に関する**正規直交基底**という．上の〔　〕内に書いたようにそれぞれの性質を正規性，直交性という．

耕一　正規直交基底で

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j,\qquad \mathbf{v}=\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j$$

と表されるベクトルの内積は

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{y})=\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

となります．任意の正値をとる内積から出発して，結局普通の内積になりました．

南海　そういうことなのだ．ベクトル空間に内積が与えられると，これから

$$|\mathbf{u}|=\sqrt{B(\mathbf{u},\ \mathbf{u})}=\sqrt{Q(\mathbf{u})}$$

でベクトルの大きさが定義される．このように大きさが与えられたベクトル空間を**ユークリッド空間**という．

耕一　ベクトルの大きさということは，2 点を結ぶベクトルの大きさ，つまり 2 点間の距離が定まると言うことですか．

南海　そう．距離が与えられれば，二次形式から内積を作ったのと同じように内積が定まる．内積を与えることと，距離を与えることとは同値なのだ．

2.14.5.4　直交変換と直交行列

南海　ベクトル空間 V に内積が定まり，この内積に関する正規直交基底 $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$ が与えられているとする．

V の 1 次変換 f が，任意のベクトルに関してその大きさを変えないとき，f は**正規直交変換**と呼ばれる．略して直交変換ということも多い．

耕一　つまり，任意のベクトル $\mathbf{u}$ に関して

$$B(f(\mathbf{u}),\ f(\mathbf{u})) = B(\mathbf{u},\ \mathbf{u})$$

が成り立つということですね．

f をこの基底で行列で表して得られる行列を F とします．また $\mathbf{u}$ の成分を $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ とすれば f が直交変換であるということは

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n){}^tF F\,{}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n){}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

がすべての $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ で成立するということです．つまり f が直交変換であるということは，それを表す行列では

$$ {}^tFF = E$$

が成り立つことです．

南海　これをみたす行列を**直交行列**とよぼう．これから直ちに直交行列は次のような性質をもつことがわかる．

(i) $\Delta({}^tFF) = \Delta(F)^2 = 1$ より $\Delta(F) = \pm 1$.

(ii) $F^{-1} = {}^tF$.

直交行列は逆行列をもつので，

$$(\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n) = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)F$$

で定まる $(\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n)$ も基底になる．のみならず，これは新たな正規直交基底である．つまり直交行列は，正規直交基底を正規直交基底に変換する行列としても特徴づけることができる．そこで，2 次の直交行列を具体的に求めてほしい．

耕一　$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，

$$ {}^tFF = E \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1,\ ab + cd = 0$$

を満たすものを求めればよい．

$a = \cos\theta,\ c = \sin\theta$ とおくと，$ab + cd = 0$ から

$$b = k\sin\theta,\ d = -k\cos\theta$$

とおける．$b^2+d^2=1$ より $k^2=1$ である．したがって 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

となる．

南海

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であるから，結局 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

およびこれらの積でできているといえる．

耕一　回転と x 軸での対称変換ですね．

南海　以上が線型代数の基本である．概念をつかむことを主にした．計算問題は多くない．線型代数の参考書はたくさんあるので，それらによって計算練習をつんでほしい．

2.15　ムーアヘッドの不等式とその応用

2013.4.30/2010.7.22

エジプト分数とは，有理数をいくつかの異なる単位分数（分子が 1 の分数）の和に表したものをいい，またその方式をいう．2006 年富山大学の入学試験に，1 より小さい 2 個または 3 個からなるエジプト分数に関して，その最大値を求める問題が出題された．

この問題は，1 をエジプト分数で下から近似するとき，最良の近似がシルベスター数列（後に定義する）から得られる，と一般化される．その証明をいろいろ試行錯誤し，結局はそれを証明している論文を知って，解決した．(2010.10)

その上で，さらにそれを一般化して，単位分数を，エジプト分数で下から近似するとき，その最良の近似は，拡張された N-シルベスター数列から得られる．これを証明することができた．(2013.4)

ここで用いられるのはムーアヘッドの不等式である．試行錯誤の過程と，不等式の証明，そして一般化された定理の証明を行う．

2.15.1　入試問題の一般化

2.15.1.1　ある入試問題

南海　次の問題は 2006 年富山大の入試問題である．

例題 2.15.1　次の問いに答よ．

(1) $a,\ b$ を $a<b$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<1$ を満たす任意の自然数とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ の最大値が $\dfrac{5}{6}$ であることを証明せよ．

(2) $a,\ b,\ c$ を $a<b<c$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$ を満たす任意の自然数とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ の最大値が $\dfrac{41}{42}$ であることを証明せよ．

南海　これを解いてみよう．
太郎　必要条件で絞りながら，やってみます．
解答

(1) $b>0$ より

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$$

よって $a>1$，a は自然数なので $2\leqq a$ である．$a<b$ より $3\leqq b$ である．この結果

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

等号は $a=2,\ b=3$ のときである．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ の最大値が $\dfrac{5}{6}$ であることが示された．

(2) (1) と同様に $2\leqq a,\ 3\leqq b$ である．$a=2,\ b=3$ とする．$c\leqq 6$ とすると，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

よって $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$ となるために $7 \leqq c$ が必要である．このとき，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$$

等号は $a=2,\ b=3,\ c=7$ のとき成立．

$3 \leqq a$ とすると，$4 \leqq b,\ 5 \leqq c$ より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}<\frac{41}{42}$$

$a=2$ で $4 \leqq b$ とすると $5 \leqq c$ なので，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<\frac{41}{42}$$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ の最大値は $a=2,\ b=3,\ c=7$ のとき $\dfrac{41}{42}$ であることが示された．

2.15.1.2　入試問題の一般化

南海　先の問題の最大値を与える場合の分母になる数はどのようになっているか．
太郎

$$2,\ 3=2+1,\ 7=3\cdot 2+1$$

となっています．規則性は何かと考えると，それまでの数をかけて 1 加えるので，4 変数の場合は 4 番目の分数の分母が $43=7\cdot 3\cdot 2+1$ のとき，最大になりそうです．
南海　そこで，この問題を次のように一般化した．

定理 55　数列 $\{p_k\}$ を次式で定義する．

$$p_1=2,\quad p_{k+1}=p_1p_2\cdots p_k+1\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

n を自然数の定数とし，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を $a_i<a_{i+1}\ (1 \leqq i \leqq n-1)$，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<1$ を満たす n 個の自然数とする．不等式

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \leqq \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}$$

が成立し，等号は $a_k=p_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき，そしてそのときにかぎる．　■

南海　数列 $\{p_n\}$ は**シルベスター数列**といわれる．Sylvester's sequence には大きい値の因数分解も載っている．

$$p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=7,\ p_4=43,\ p_5=1807,\ p_6=3263443,$$
$$p_7=10650056950807,\ p_8=113423713055421844361000443,\ldots$$

太郎　一気に大きくなるのですね．
南海　そこで，自然数の逆数和で 1 を超えないものの最大値が，このシルベスターの数列によって与えられると考え，定理 55 にまとめたのだ．
　この定理はさらに一般化される．最後にそれを証明する．

証明の試み　この証明にいたる過程では，いくつかの試行錯誤があった．変数の個数を個別に固定すると証明できるのだが，すべての n でそれがいえることはなかなか証明できなかった．試行錯誤のなかでは次のような命題も証明してみた．

命題 2　A を自然数の定数とする．自然数 x と y が，条件

$$x < y, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{A}$$

をみたして変化する．このとき $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ は，$x = A+1$，$y = A^2 + A + 1$ のとき，最大値

$$\frac{1}{A+1} + \frac{1}{A^2+A+1}$$

をとる．

証明　$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{A}$ のとき $x > A$ なので自然数 n をとって $x = A + n$ とおく．

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{A} - \frac{1}{A+n} = \frac{n}{A(A+n)}$$

よって $y > \dfrac{A(A+n)}{n}$，つまり $ny > A(A+n)$．これから $ny \geqq A(A+n)+1$，つまり $\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{n}{A(A+n)+1}$．よって

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{A+n} + \frac{n}{A(A+n)+1}$$

がつねに成立する．

ここで

$$\frac{1}{A+n} + \frac{n}{A(A+n)+1} \leqq \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A(A+1)+1} \tag{2.18}$$

が成立することを示す．

$$\begin{aligned}
\text{右辺} - \text{左辺} &= \frac{1}{A+1} - \frac{1}{A+n} + \frac{1}{A(A+1)+1} - \frac{n}{A(A+n)+1} \\
&= \frac{n-1}{(A+1)(A+n)} - \frac{(n-1)(A^2+1)}{\{A(A+1)+1\}\{A(A+n)+1\}} \\
&= (n-1)\left\{\frac{1}{(A+1)(A+n)} - \frac{A^2+1}{(A^2+1+A)(A^2+1+nA)}\right\} \\
&= \frac{(n-1)(A^2+1-n)}{(A+1)(A+n)(A^2+1+A)(A^2+1+nA)} \geqq 0
\end{aligned}$$

であるから，$A^2+1 \geqq n$ のとき不等式 (2.18) は成立する．

$A^2+1 < n$ のときは，$A^2+1+A < A+n = x$ で，$y > A$ も必要なので $y \geqq A+1$．よってこのときも，不等式 (2.18) は成立する．したがって，条件を満たすすべての x と y に関して

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A(A+1)+1}$$

が成立し，等号は $x = A+1$，$y = A(A+1)+1$ のとき成立する．

よって本命題が示された．□

これを用いれば，変数の個数が決まっているときは，条件を絞りながら，個別に調べることで，最大値を与える数列を決定することができる．実際，この命題 2 と同じ命題，およびその 3 変数への拡張を用いて，栃木県の先生が，4 変数，5 変数の場合について考察しておらる．数研通信 66 号（2010 年 1 月）所収の論文である．

しかし，一般の自然数でつねに定理 55 が成立することの証明は，次元が異なる問題になる．

太郎　個別に確認する方法があるということと，一般的に証明することができるということは，異なることなのですね．

南海　そうなのだ．当初，この命題を用いれば定理 55 が証明できると考え次のところまで書いた．しかしこの方向ではできなかった．

途中で止まった証明　$\{a_k\}$ の項の中に $\{p_k\}$ と一致しないものがあるとする．それを小さい方から見て最初に p_k と異なるものを a_l とする．

$a_l < p_l$ と仮定する．$a_l \leqq p_l - 1$ なので

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_l} \\ = \quad & \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{l-1}} + \frac{1}{a_l} = 1 - \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_{l-1}} + \frac{1}{a_l} \\ = \quad & 1 - \frac{1}{p_l - 1} + \frac{1}{a_l} \geqq 1 - \frac{1}{p_l - 1} + \frac{1}{p_l - 1} = 1 \end{aligned}$$

となり，条件に反する．よって $a_l > p_l$ である．$l \leqq n-1$ とする．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_l} + \frac{1}{a_{l+1}} \\ = \quad & \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{l-1}} + \frac{1}{a_l} + \frac{1}{a_{l+1}} \\ = \quad & 1 - \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_{l-1}} + \frac{1}{a_l} + \frac{1}{a_{l+1}} < 1 \end{aligned}$$

つまり

$$\frac{1}{a_l} + \frac{1}{a_{l+1}} < \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_{l-1}}$$

である．ここで命題 2 を $A = p_1 p_2 \cdots p_{l-1}$ で用いる．$\dfrac{1}{a_l} + \dfrac{1}{a_{l+1}}$ が最大となるのは

$$\begin{aligned} a_l \quad &= \quad A + 1 = p_l \\ a_{l+1} \quad &= \quad A(A+1) + 1 = p_{l+1} \end{aligned}$$

のときである．(中断).

しかし，これから

$$\frac{1}{a_l} + \frac{1}{a_{l+1}} + \frac{1}{a_{l+2}} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

が最大となるとき，$a_l = p_l$，$a_{l+1} = p_{l+1}$ であることなどを，直ちに結論づけることはできない．

太郎　確かに．個別の n のときには，その他の場合をすべて調べて，消してゆけばよいですが，しかしそれで一般の場合を示せるかというと，簡単ではないのですね．

南海　困っているときに，教え子で数学科に進んだせきさんから，定理 55 を証明している論文「APPROXIMATING 1 FROM BELOW USING n EGYPTIAN FRACTIONS（n 個のエジプト分数による 1 の下からの近似）」(K.SOUNDRARAJAN) を紹介された．ここには一つすばらしい着想がある．

上記論文の証明は，**ムーアヘッドの不等式**を用いる．この不等式は，数学セミナー 2009 年 2 月号,「特集 : 不等式の世界」で岡山理科大の示野信一先生が「対称式と不等式」と題してムーアヘッドの不等式について書いておられた．それを参考にした．後にまた『不等式』[8] も手に入れた．ここには詳しく述べられている．ムーアヘッドの不等式はそれ自身たいへんおもしろい不等式である．

この不等式を用いれば，定理 55 と命題 2 を統合し，より一般的な形で証明することができる．

そこで，上記論文などを参考にして，高校範囲で証明するために，それぞれ独自に論証を再編した．責任は南海にある．

2.15.2　ムーアヘッドの不等式

文字列の置換　3 個の文字の (1, 2, 3) の並び替えは 6 通り (それ自身を含む) ある．その一つ一つは (1, 2, 3) の置きかえであると考えることができる．例えば (2, 3, 1) に対しては

$$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 1$$

の置きかえ σ が対応している．一般に n 個の文字 $(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して $n!$ 個の置きかえ σ ができる．

この記号を用いて表される次の定理をムーアヘッドの定理，その不等式をムーアヘッドの不等式という．

定理 56　$n \geqq 2$ とする．

条件 $0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_n$ と $0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_n$ を満たす二つの実数列 $\{s_i\}$, $\{t_i\}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ に関する二つの条件 (1) と (2) は，同値である．

(1)

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \tag{2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \leqq \sum_{i=1}^{k} t_i \ \ (k = 1, \ldots, n-1) \tag{2.20}$$

を満たす．

(2) 任意の非負実数 $x_1, \ldots, x_n$ に対し，不等式

$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{s_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{s_n} \geqq \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{t_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{t_n} \tag{2.21}$$

が成立する．ここに和は $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置きかえ σ 全体にわたる．

同値な条件 (1)，(2) のもとで，$s_i \neq t_i$ となる i が存在すれば，等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときのみ成立する．■

これを**ムーアヘッドの定理**という．

σ 全体にわたる和なので

$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{s_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{s_n} = \sum_{\sigma} x_1^{s_\sigma(1)} \cdots x_n^{s_\sigma(n)}$$

でもあることに注意しよう.

例 2.15.1 $s_1 = \cdots = s_{n-1} = 0,\ s_n = 1,\ t_1 = \cdots = t_n = \dfrac{1}{n}$ は条件を満たす.

$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{s_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{s_n} = (n-1)! \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{t_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{t_n} = n! (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

よりこれは相乗平均と相加平均の関係を示す不等式である.

例 2.15.2 $s_1 = 0,\ s_2 = 2,\ t_1 = t_2 = 1$ は条件を満たす.

$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{s_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{s_n} = {x_1}^0 {x_2}^2 + {x_1}^2 {x_2}^0$$
$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{t_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{t_n} = {x_1}^1 {x_2}^1 + {x_1}^1 {x_2}^1$$

これは次式を意味する.

$${x_1}^2 + {x_2}^2 \geqq 2 x_1 x_2$$

例 2.15.3 $s_1 = s_2 = 0,\ s_3 = 3, t_1 = t_2 = t_3 = 1$ は条件を満たす. さらに $u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2$ とすると, $\{s_i\}$ と $\{u_i\}$, $\{u_i\}$ と $\{t_i\}$ も条件を満たす.

$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{s_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{s_n} = 2({x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3)$$
$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{u_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{u_n} = {x_1}^2 x_2 + x_1 {x_2}^2 + {x_2}^2 x_3 + x_2 {x_3}^2 + {x_3}^2 x_1 + x_3 {x_1}^2$$
$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{t_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{t_n} = 6 {x_1}^1 {x_2}^1 {x_3}^1$$

これからムーアヘッドの不等式は次式を意味する.

$$\begin{aligned}
\{s_i\}, \{u_i\} \quad &: \quad 2({x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3) - ({x_1}^2 x_2 + x_1 {x_2}^2 + {x_2}^2 x_3 + x_2 {x_3}^2 + {x_3}^2 x_1 + x_3 {x_1}^2) \\
&= (x_1 - x_2)^2 (x_1 + x_2) + (x_2 - x_3)^2 (x_2 + x_3) + (x_3 - x_1)^2 (x_3 + x_1) \geqq 0 \\
\{u_i\}, \{t_i\} \quad &: \quad {x_1}^2 x_2 + x_1 {x_2}^2 + {x_2}^2 x_3 + x_2 {x_3}^2 + {x_3}^2 x_1 + x_3 {x_1}^2 - 6 x_1 x_2 x_3 \\
&= (x_1 - x_2)^2 x_3 + (x_2 - x_3)^2 x_1 + (x_3 - x_1)^2 x_2 \geqq 0 \\
\{s_i\}, \{t_i\} \quad &: \quad {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_2}^3 - 3 x_1 x_2 x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 \\
&= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \right\} \geqq 0
\end{aligned}$$

$\{s_i\}$ と $\{t_i\}$ に対して $\{u_i\}$ を作りあいだに入れることは, 次の定理の証明の中で用いられる.

以上の例はいずれも s_i や t_i が有理数であるが, これが条件を満たす実数列で成りたつというのが, 本定理である.

ムーアヘッドの定理の証明

(1) ならば (2) が成り立つことを示す.

非負実数 $x_1, \ldots, x_n$ がすべて 0 なら明らかなので，0 でないものがあるとする.

n に関する数学的帰納法で示す.

$n = 2$ のとき．$s_1 = t_1$ なら $s_1 + s_2 = t_1 + t_2$ より $s_2 = t_2$ となって等号で成立．$s_1 < t_1$ とする．このとき条件から

$$s_1 < t_1 < t_2 < s_2, \quad t_1 - s_1 = s_2 - t_2$$

である.

$$\begin{aligned}
& \sum_\sigma x_{\sigma(1)}^{s_1} x_{\sigma(2)}^{s_2} - \sum_\sigma x_{\sigma(1)}^{t_1} x_{\sigma(2)}^{t_2} \\
= \;& {x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2} + {x_2}^{s_1} {x_1}^{s_2} - {x_1}^{t_1} {x_2}^{t_2} - {x_2}^{t_1} {x_1}^{t_2} \\
= \;& {x_1}^{s_1} {x_2}^{t_2} ({x_2}^{s_2 - t_2} - {x_1}^{t_1 - s_1}) + {x_1}^{t_2} {x_2}^{s_1} ({x_1}^{s_2 - t_2} - {x_2}^{t_1 - s_1}) \\
= \;& ({x_2}^{s_2 - t_2} - {x_1}^{t_1 - s_1})({x_1}^{s_1} {x_2}^{t_2} - {x_1}^{t_2} {x_2}^{s_1}) \\
= \;& {x_1}^{s_1} {x_2}^{s_1} ({x_2}^{s_2 - t_2} - {x_1}^{t_1 - s_1})({x_2}^{t_2 - s_1} - {x_1}^{t_2 - s_1})
\end{aligned}$$

$s_2 - t_2 = t_1 - s_1 > 0,\ t_2 - s_1 > 0$ より

$$({x_2}^{s_2 - t_2} - {x_1}^{t_1 - s_1})({x_2}^{t_2 - s_1} - {x_1}^{t_2 - s_1}) \geqq 0$$

で等号は $x_1 = x_2$ のときにかぎり成立する．よって $n = 2$ のとき命題は成立する.

$n - 1$ について命題が成立するとする.

$s_i = t_i$ となる i があるとき．証明すべき等式は s_i $(1 \leqq i \leqq n)$ と t_i $(1 \leqq i \leqq n)$ のそれぞれについて対称である．したがって $s_1 = t_1$ としてよい．このとき.

$$\sum_\sigma x_{\sigma(1)}^{s_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{s_n} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{s_1} \sum_{\sigma'} x_{\sigma'(2)}^{s_2} \cdots x_{\sigma'(n)}^{s_n}$$

$$\sum_\sigma x_{\sigma(1)}^{t_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{t_n} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{t_1} \sum_{\sigma'} x_{\sigma'(2)}^{t_2} \cdots x_{\sigma'(n)}^{t_n}$$

ここで σ' は，和の外にくくったのもが $\sigma(1) = k$ のときは，$(2, \cdots, n)$ から，1 から n で k をのぞく $n - 1$ の数への置きかえを意味する．その σ' 全体の和は，1 から n で k をのぞく $n - 1$ の数から，1 から n で k をのぞく $n - 1$ の数への置きかえにわたる和と等しい．$s_i,\ t_i$ $(i : k = \sigma(1)$ を除く数) の $n - 1$ 個ずつの数も同じ定理の条件をみたす．よって数学的帰納法の仮定から

$$\sum_{\sigma'} x_{\sigma'(2)}^{s_2} \cdots x_{\sigma'(n)}^{s_n} \geqq \sum_{\sigma'} x_{\sigma'(2)}^{t_2} \cdots x_{\sigma'(n)}^{t_n}$$

が成り立つ．$s_i \neq t_i$ となる i が 1 から n で k をのぞく $n - 1$ の数の中にあることと $1 \leqq i \leqq n$ あることが同値であり，非負実数 $x_1, \ldots, x_n$ のなかに 0 でないものがあるので等号成立条件も成り立つ.

$s_i = t_i$ となる i がないとき．$s_1 < t_1$，$s_n > t_n$ なので，$1 \leqq p \leqq n - 1$ で

$$s_p < t_p, t_{p+1} < s_{p+1}$$

となる p がある．ここで u_i $(1 \leqq i \leqq n)$ を次のように定義する．

$$\begin{cases} u_i = s_i \quad (i \neq p,\ p+1), \\ u_p = t_p,\ u_{p+1} = s_p + s_{p+1} - t_p & (s_{p+1} - t_{p+1} \geqq t_p - s_p \text{のとき}) \\ u_p = s_p + s_{p+1} - t_{p+1},\ u_{p+1} = t_{p+1} & (s_{p+1} - t_{p+1} < t_p - s_p \text{のとき}) \end{cases}$$

このようにすると $0 \leqq u_1 \leqq \ldots \leqq u_n$ であり，さらに

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^{k} s_i \leqq \sum_{i=1}^{k} u_i \leqq \sum_{i=1}^{k} t_i \ \ (k = 1, \ldots, n-1)$$

が成立する．ところが s_i の列と u_i の列，u_i の列と t_i の列にはそれぞれ等しい項がある．$s_1 = t_1$ のときの証明と同様にべきの等しい項をくくることで数学的帰納法の仮定から

$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{s_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{s_n} \geqq \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{u_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{u_n} \geqq \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{t_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{t_n}$$

となる．$s_i = t_i$ となる i がないことと u_i の定義から，べきの等しい項をくくった残余の項の添え数のあいだの和の等号は 1 文字を除いた他の x_i がすべて等しいときにかぎる．この結果，非負実数 $x_1, \ldots, x_n$ のなかに 0 でないものがあるので和全体の等号も x_i がすべて等しいときにかぎる．つまり，等号成立条件を含めて定理の命題が成立する．かくして n の場合も成立し，(1) ならば (2) が成立することが証明された．

(2) ならば (1) が成り立つことを示す．

(2) の不等式 (2.21) を $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ で用いる．この不等式は

$$n! x^{s_1 + s_2 + \cdots + s_n} \geqq n! x^{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}$$

となる．これが $1 < x$ で成立し，かつ $0 < x < 1$ でも成立するので，

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

である．よって等式 (2.19) が成立．

次に，$1 \leqq k \leqq n-1$ について，(2) の不等式 (2.21) を $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$，$x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = x$ で用いる．この不等式の両辺の最高次の項はそれぞれ

$$x^{s_{k+1} + s_{k+2} + \cdots + s_n}, \quad x^{t_{k+1} + t_{k+2} + \cdots + t_n}$$

となる．両辺 x の多項式であるから，x を十分大きくとると，不等式 (2.21) が成立するために，

$$s_{k+1} + s_{k+2} + \cdots + s_n \geqq t_{k+1} + t_{k+2} + \cdots + t_n$$

が必要である．等式 (2.19) とあわせて，不等式 (2.20) が成立する．これで (1) の成立が示された．
□

系 2　$n \geqq 2$ とする．実数の列 $0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_n$ と $0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_n$ は次の二つの条件，

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} t_i$$
$$\sum_{i=1}^{k} s_i \leqq \sum_{i=1}^{k} t_i \ \ (k = 1, \ldots, n-1)$$

を満たす．このとき任意の非負実数 x に対し，不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x^{s_i} \geqq \sum_{i=1}^{n} x^{t_i}$$

が成立する．$s_i \neq t_i$ となる i が存在すれば，等号は $x = 1$ のときのみ成立する． ■

証明　定理 56 において，$x_1 = x,\ x_2 = \cdots = x_n = 1$ とおく．和において，$(n-1)!$ 個ずつ同じ項が現れるので，それを約すると，本不等式になる． □

注意 2.15.1　定理 56 の証明を，$x_1 = x,\ x_2 = \cdots = x_n = 1$ として追ってゆくと，たいへん簡明な不等式であることがわかる．適当な総和法を用いて，数学的帰納法によらず直接に証明が出来そうであるが，それはまだやっていない．

2.15.3　定理の一般化

定理 55 をさらに次のように一般化しよう．

定理 57　N を自然数の定数とし，数列 $\{q_k\}$ を次式で定義する．

$$q_0 = N, \quad q_{k+1} = q_0 q_1 \cdots q_k + 1 \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

n を自然数の定数とし，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を $a_i < a_{i+1}\ (1 \leqq i \leqq n-1)$，$\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} < \dfrac{1}{N}$ を満たす n 個の自然数とする．不等式

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_n}$$

が成立し，等号は $a_k = q_k\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき，そしてそのときにかぎる． ■

注意 2.15.2　数列 $\{q_n\}$ を **N-シルベスター数列**といおう．

$N = 1$ のときが，定理 55 である．また本定理の数列 $\{q_n\}$ では，

$$q_0 = N,\ q_1 = N + 1,\ q_2 = N(N+1) + 1$$

なので，命題 2 は定理 58 で $N = A$，$n = 2$ の場合である．つまり，定理 58 は命題 2 の一般化でもある．

補題を一つ準備する．

補題 5　定理 58 内で定義された数列 $\{q_n\}$ は，関係式

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_n} = \frac{1}{N} - \frac{1}{q_0 q_1 q_2 \cdots q_n}$$

を満たす． ■

証明　数学的帰納法で示す．

$n=1$ のときは $q_1=N+1$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}-\frac{1}{q_0q_1} &= \frac{1}{N}-\frac{1}{N(N+1)}\\ &= \frac{1}{N+1}=\frac{1}{q_1}\end{aligned}$$

より成立．n で成立とする．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_{n+1}}\\ =\ &\frac{1}{N}-\frac{1}{q_0q_1q_2\cdots q_n}+\frac{1}{q_{n+1}}=\frac{1}{N}-\frac{q_{n+1}-q_0q_1q_2\cdots q_n}{q_0q_1q_2\cdots q_nq_{n+1}}\\ =\ &\frac{1}{N}-\frac{1}{q_0q_1q_2\cdots q_nq_{n+1}}\end{aligned}$$

つまり，$n+1$ のときも成立する．よって命題はすべての n で成立する．　□

一般化定理の証明　定理 58 の成立を，n についての数学的帰納法で示す．

$n=1$ のときは $q_1=N+1$ なので $\dfrac{1}{a_1}<\dfrac{1}{N}$ なら $a_1>N$，つまり $a_1\geqq q_1$ である．よって

$$\frac{1}{a_1}\leqq\frac{1}{q_1}$$

は成立し，等号成立は $a_1=q_1$ のときにかぎる．

定理 58 の命題の $n-1$ 以下での成立を仮定する．

$$\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{X}{a_1a_2\cdots a_n}$$

と表すとき，$\dfrac{X}{a_1a_2\cdots a_n}<\dfrac{1}{N}$ より $NX\leqq a_1a_2\cdots a_n-1$ である．よって

$$\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqq\frac{a_1a_2\cdots a_n-1}{Na_1a_2\cdots a_n}$$

である．

補題 6 より

$$\begin{aligned}\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_n} &= \frac{1}{N}-\frac{1}{Nq_1q_2\cdots q_n}\\ =\frac{q_1q_2\cdots q_n-1}{Nq_1q_2\cdots q_n}&\end{aligned}$$

なので，$a_1a_2\cdots a_n<q_1q_2\cdots q_n$ なら

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} &\leqq \frac{a_1a_2\cdots a_n-1}{Na_1a_2\cdots a_n}=\frac{1}{N}-\frac{1}{Na_1a_2\cdots a_n}\\ &< \frac{1}{N}-\frac{1}{Nq_1q_2\cdots q_n}=\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_n}\end{aligned}$$

となり成立．

以下では $a_1a_2\cdots a_n \geqq q_1q_2\cdots q_n$ とする．

$a_n \geqq q_n$ のとき．帰納法の仮定により成立する $n-1$ のときの不等式の両辺に，$\dfrac{1}{a_n} \leqq \dfrac{1}{q_n}$ を加えると

$$\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} \leqq \frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_n}$$

となり，等号成立条件も成立する．

よって $a_n < q_n$ とする．このとき不等式の成立と等号の不成立を示せばよい．

$a_1a_2\cdots a_n \geqq q_1q_2\cdots q_n$ とあわせると，番号 l で $a_la_{l+1}\cdots a_n \geqq q_lq_{l+1}\cdots q_n$ となる最大のものがある．それを l とする．$l \leqq n-1$ である．

$$a_la_{l+1}\cdots a_n \geqq q_lq_{l+1}\cdots q_n,$$
$$a_{l+1}\cdots a_n < q_{l+1}\cdots q_n,\ a_{l+2}\cdots a_n < q_{l+2}\cdots q_n,\ \cdots,\ a_n < q_n$$

であるから

$$a_l > q_l,\ a_la_{l+1} > q_lq_{l+1},\ \cdots,\ a_la_{l+1}\cdots a_{n-1} > q_lq_{l+1}\cdots q_{n-1} \tag{2.22}$$

である．有理数 r と整数 a_{n+1} を

$$r = q_n\cdot\frac{a_la_{l+1}\cdots a_n}{q_lq_{l+1}\cdots q_n},\ a_{n+1} = q_n$$

で定める．

$$q_n \leqq r,\ a_n < q_n = a_{n+1}$$

である．ここで

$$s_i = \log(q_{l+i-1}),\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-l+1),\ s_{n-l+2} = \log r$$
$$t_i = \log(a_{l+i-1}),\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-l+2)$$

とする．この実数の列は条件

$$0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_{n-l+2},\quad 0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_{n-l+2}$$

を満たし，さらにその定義と不等式列 (2.22) より

$$\sum_{i=1}^{n-l+2} s_i = \log\left(q_n\cdot a_la_{l+1}\cdots a_n\right) = \sum_{i=1}^{n-l+2} t_i$$
$$\text{かつ}\qquad \sum_{i=1}^{k} s_i \leqq \sum_{i=1}^{k} t_i\ \ (k = 1,\ldots,n-l+1)$$

を満たす．ただし $k = 1,\ldots,n-l$ の範囲では等号不成立．つまり系 7 の条件を満たす．

$$x = e^{-1}$$

で系 7 を用いる．この場合，$x \neq 1$ から，等号は成立しない．

$$\sum_{i=1}^{n-l+2} e^{-s_i} = \sum_{i=1}^{n-l+1} e^{-\log(q_{l+i-1})} + e^{-\log r}$$
$$> \sum_{i=1}^{n-l+2} e^{-t_i} = \sum_{i=1}^{n-l+2} e^{-\log(a_{l+i-1})}$$

を得る．これから

$$\sum_{i=1}^{n-l+1} \frac{1}{q_{l+i-1}} + \frac{1}{r} > \sum_{i=1}^{n-l+2} \frac{1}{a_{l+i-1}}$$

を得る．ここで，$a_{n+1} \leqq r$ より $\dfrac{1}{a_{n+1}} \geqq \dfrac{1}{r}$ なので，

$$\frac{1}{a_l} + \frac{1}{a_{l+1}} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{q_l} + \frac{1}{q_{l+1}} + \cdots + \frac{1}{q_n}$$

である．帰納法の仮定から

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{l-1}} \leqq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_{l-1}}$$

は成立．両辺加えて n のときの成立が示され，等号成立条件も示されている． □

太郎　ムーアヘッドの不等式といっても，系 7 の形で，つまり $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$ の場合に使うだけですね．

南海　そうなのだ．ムーアヘッドの不等式の証明を $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$ の場合に書き出してみると，案外簡単な証明だ．先にも言ったが直接の証明もできそうだ．

ただ，ムーアヘッドの不等式は，たいへん面白いし，多くの具体的な不等式を生みだす．置換群の記号が出てくるので，少しとっつきにくいが，ぜひ自分で後を追ってみてほしい．

2.16　単位分数のエジプト分数による下からの近似

2013.9.3

これは『初等数学』(2013 年 9 月号) に投稿した一文であり,「ムーアヘッドの不等式とその応用」の必要な部分をまとめたものである.

2.16.1　入試問題の一般化

エジプト分数とは，有理数をいくつかの異なる単位分数（分子が 1 の分数）の和に表したものをいい，またその方式をいう．2006 年の富山大学の入学試験に，1 より小さい 2 個または 3 個からなるエジプト分数に関して，その最大値を求める次のような問題が出された．

次の問いに答よ．

(1) $a,\ b$ を $a<b$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<1$ を満たす任意の自然数とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ の最大値が $\dfrac{5}{6}$ であることを証明せよ．

(2) $a,\ b,\ c$ を $a<b<c$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$ を満たす任意の自然数とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ の最大値が $\dfrac{41}{42}$ であることを証明せよ．

本問の最大値を与える $a,\ b,\ c$ は $a=1+1=2$，$b=1\cdot a+1=3$，$c=1\cdot a\cdot b+1=7$ で得られるものであり，これはよく知られたシルベスター数列の第 1，第 2，第 3 項である．この入試問題は，1 をエジプト分数で下から近似するとき，最良の近似がシルベスター数列から得られると，一般化される．

本稿では，さらにそれを一般化して，単位分数をエジプト分数で下から近似するとき，その最良の近似は，拡張された N シルベスター数列から得られる，という定理を証明する．そこで用いられる補題は 1 変数の場合のムーアヘッドの不等式である．

2.16.2　シルベスター数列の拡張

定義 19　N を自然数の定数とする．次の漸化式

$$q_0=N,\quad q_{k+1}=q_0q_1\cdots q_k+1\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

で定義される数列 $\{q_k\}$ を **N-シルベスター数列**，$N=1$ のときは**シルベスター数列**という．　□

補題 6　N-シルベスター数列 $\{q_k\}$ は，次の関係式を満たす．

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_n}=\frac{1}{N}-\frac{1}{q_0q_1q_2\cdots q_n}<\frac{1}{N}$$

証明　数学的帰納法で示す．$n=1$ のときは $q_1=N+1$ なので，

$$\frac{1}{q_1}=\frac{1}{N+1}=\frac{1}{N}-\frac{1}{N(N+1)}=\frac{1}{N}-\frac{1}{q_0q_1}<\frac{1}{N}$$

より成立．n で成立とする．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_{n+1}}=\frac{1}{N}-\frac{1}{q_0q_1q_2\cdots q_n}+\frac{1}{q_{n+1}}\\ =\ &\frac{1}{N}-\frac{q_{n+1}-q_0q_1q_2\cdots q_n}{q_0q_1q_2\cdots q_nq_{n+1}}=\frac{1}{N}-\frac{1}{q_0q_1q_2\cdots q_nq_{n+1}}<\frac{1}{N}\end{aligned}$$

つまり，$n+1$ のときも成立する．よって命題はすべての n で成立する．　（証明終わり）

2.16.3　一般化定理

定理 58　N は与えられた自然数とし，数列 $\{q_n\}$ を N-シルベスター数列とする．

n を自然数とし，n 個の自然数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を次の条件を満たすようにとる．

$$a_i<a_{i+1}\ (1\leqq i\leqq n-1),\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{N}$$

このとき，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ の最大値は $\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}+\cdots+\dfrac{1}{q_n}$ で与えられる．　□

2.16.4　1 変数のムーアヘッドの不等式

次の補題は**ムーアヘッドの不等式**の特別な場合である．この証明は「対称式と不等式」（文献［3］）に教えられたものである．一般の場合のムーアヘッドの不等式については末尾の文献［2］,［3］,［4］を参照されたい．

補題 7　$n\geqq 2$ とする．実数の列 $0\leqq s_1\leqq\cdots\leqq s_n$ と $0\leqq t_1\leqq\ldots\leqq t_n$ は次の条件，

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{i=1}^{n}t_i,\quad \text{かつ}\ \sum_{i=1}^{k}s_i\leqq\sum_{i=1}^{k}t_i\ \ (k=1,\ldots,n-1)$$

を満たす．このとき任意の非負実数 x に対し，不等式

$$\sum_{i=1}^{n}x^{s_i}\geqq\sum_{i=1}^{n}x^{t_i}$$

が成立する．$s_i\neq t_i$ となる i が存在すれば，等号は $x=1$ のときのみ成立する．　□

証明　$x=0$ なら明らかなので，$0<x$ とする．このときの命題を n に関する数学的帰納法で示す．

$n=2$ のとき．$s_1=t_1$ なら $s_1+s_2=t_1+t_2$ より $s_2=t_2$ となって等号で成立．$s_1<t_1$ とする．このとき条件から

$$s_1<t_1<t_2<s_2,\quad t_1-s_1=s_2-t_2$$

である．

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺}\ &=\ x^{s_1}+x^{s_2}-x^{t_1}-x^{t_2}\\ &=\ x^{s_1}(1-x^{t_1-s_1})+x^{t_2}(x^{s_2-t_2}-1)\\ &=\ x^{s_1}(1-x^{t_1-s_1})(1-x^{t_2-s_1})\end{aligned}$$

と変形される．$t_1 - s_1 > 0,\ t_2 - s_1 > 0$ より $x \geqq 1$ か $x \leqq 1$ に応じて，$x^{t_1-s_1},\ x^{t_2-s_1} \geqq 1$ か $x^{t_1-s_1},\ x^{t_2-s_1} \leqq 1$ であるから

$$(1 - x^{t_1-s_1})(1 - x^{t_2-s_1}) \geqq 0$$

となり，$x = 1$ のときにかぎり等号が成立する．よって $n = 2$ のとき命題は成立する．

$n - 1$ 以下のとき，命題が成立するとする．

$s_j = t_j$ となる j があるとき．$s_j,\ t_j$ を除く $n - 1$ 個ずつの $s_i,\ t_i$ も定理の条件をみたす．よって数学的帰納法の仮定から，等号成立条件を含め不等式は成立する．

$s_j = t_j$ となる j がないとき．$s_1 < t_1$，$s_n > t_n$ なので，$1 \leqq p \leqq n - 1$ で

$$s_p < t_p, t_{p+1} < s_{p+1}$$

となる p がある．ここで $u_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ を次のように定義する．

$$\begin{cases} u_i = s_i \quad (i \neq p,\ p+1), \\ u_p = t_p,\ u_{p+1} = s_p + s_{p+1} - t_p & (s_{p+1} - t_{p+1} \geqq t_p - s_p \text{のとき}) \\ u_p = s_p + s_{p+1} - t_{p+1},\ u_{p+1} = t_{p+1} & (s_{p+1} - t_{p+1} < t_p - s_p \text{のとき}) \end{cases}$$

このようにすると $0 \leqq u_1 \leqq \ldots \leqq u_n$ であり，さらに

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^{k} s_i \leqq \sum_{i=1}^{k} u_i \leqq \sum_{i=1}^{k} t_i \ \ (k = 1, \ldots, n-1)$$

が成立する．ところが s_i の列と u_i の列，u_i の列と t_i の列にはそれぞれ等しい項がある．よって，$s_j = t_j$ なる j があるときと同様の理由で，数学的帰納法の仮定から

$$\sum_{i=1}^{n} x^{s_i} \geqq \sum_{i=1}^{n} x^{u_i} \geqq \sum_{i=1}^{n} x^{t_i}$$

が成立する．これから等号成立条件を含めて n の場合も成立し，すべての n で補題が成立する．（証明終わり）

2.16.5　一般化定理の証明

この証明は，文献［1］の証明を単位分数の下からの近似の場合に一般化したものである．

定理 58 の証明　n についての数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のときは $q_1 = N + 1$ なので $\dfrac{1}{a_1} < \dfrac{1}{N}$ なら $a_1 > N$，つまり $a_1 \geqq q_1$ である．よって

$$\frac{1}{a_1} \leqq \frac{1}{q_1}$$

は成立し，等号成立は $a_1 = q_1$ のときにかぎる．

定理 58 の $n - 1$ 以下での成立を仮定する．

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{X}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

と表すとき，$\dfrac{X}{a_1a_2\cdots a_n} < \dfrac{1}{N}$ より $NX \leqq a_1a_2\cdots a_n - 1$ である．よって

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqq \frac{a_1a_2\cdots a_n - 1}{Na_1a_2\cdots a_n}$$

である．補題 6 より

$$\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} = \frac{1}{N} - \frac{1}{Nq_1q_2\cdots q_n} = \frac{q_1q_2\cdots q_n - 1}{Nq_1q_2\cdots q_n}$$

なので，$a_1a_2\cdots a_n < q_1q_2\cdots q_n$ なら

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} &\leqq \frac{a_1a_2\cdots a_n - 1}{Na_1a_2\cdots a_n} = \frac{1}{N} - \frac{1}{Na_1a_2\cdots a_n} \\ &< \frac{1}{N} - \frac{1}{Nq_1q_2\cdots q_n} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}\end{aligned}$$

となり成立．

以下では $a_1a_2\cdots a_n \geqq q_1q_2\cdots q_n$ とする．

$a_n \geqq q_n$ のとき．帰納法の仮定により $\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}} \leqq \dfrac{1}{q_1} + \cdots + \dfrac{1}{q_{n-1}}$ は成立．$\dfrac{1}{a_n} \leqq \dfrac{1}{q_n}$ より，

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}$$

が成立し，等号成立条件も成立する．

$a_n < q_n$ のとき．このとき不等式の成立と等号の不成立を示せばよい．

$a_1a_2\cdots a_n \geqq q_1q_2\cdots q_n$ とあわせると，番号 l で $a_la_{l+1}\cdots a_n \geqq q_lq_{l+1}\cdots q_n$ となる最大のものがある．それを l とする．$l \leqq n-1$ である．

$$\begin{aligned}&a_la_{l+1}\cdots a_n \geqq q_lq_{l+1}\cdots q_n, \\ &a_{l+1}\cdots a_n < q_{l+1}\cdots q_n,\ a_{l+2}\cdots a_n < q_{l+2}\cdots q_n,\ \cdots,\ a_n < q_n\end{aligned}$$

であるから

$$a_l > q_l,\ a_la_{l+1} > q_lq_{l+1},\ \cdots,\ a_la_{l+1}\cdots a_{n-1} > q_lq_{l+1}\cdots q_{n-1}$$

である．有理数 r と整数 a_{n+1} を

$$r = q_n \cdot \frac{a_la_{l+1}\cdots a_n}{q_lq_{l+1}\cdots q_n},\ a_{n+1} = q_n$$

で定める．

$$q_n \leqq r,\ a_n < q_n = a_{n+1}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}&s_i = \log(q_{l+i-1}),\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-l+1),\ s_{n-l+2} = \log r \\ &t_i = \log(a_{l+i-1}),\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-l+2)\end{aligned}$$

とする．この実数の列は条件

$$0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_{n-l+2}, \quad 0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_{n-l+2}$$

を満たし，さらに

$$\sum_{i=1}^{n-l+2} s_i = \log\left(q_n \cdot a_l a_{l+1} \cdots a_n\right) = \sum_{i=1}^{n-l+2} t_i$$

かつ　$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} s_i \leqq \sum_{i=1}^{k} t_i \ \ (k = 1, \ldots, n-l+1)$

を満たす．ただし $k = 1, \ldots, n-l$ の範囲では等号不成立．

よって，数列 $\{s_i\}, \{t_i\}$ は補題 7 の条件を満たす．

$x = e^{-1}$ で補題 7 を用いる．この場合，$x \neq 1$ から，等号は成立しない．

$$\sum_{i=1}^{n-l+2} e^{-s_i} = \sum_{i=1}^{n-l+1} e^{-\log(q_{l+i-1})} + e^{-\log r} > \sum_{i=1}^{n-l+2} e^{-t_i} = \sum_{i=1}^{n-l+2} e^{-\log(a_{l+i-1})}$$

を得る．これから

$$\sum_{i=1}^{n-l+1} \frac{1}{q_{l+i-1}} + \frac{1}{r} > \sum_{i=1}^{n-l+2} \frac{1}{a_{l+i-1}}$$

を得る．ここで，$a_{n+1} \leqq r$ より $\dfrac{1}{a_{n+1}} \geqq \dfrac{1}{r}$ なので，

$$\frac{1}{a_l} + \frac{1}{a_{l+1}} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{q_l} + \frac{1}{q_{l+1}} + \cdots + \frac{1}{q_n}$$

である．帰納法の仮定から

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{l-1}} \leqq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_{l-1}}$$

は成立．両辺加えて n のときの成立が示され，等号成立条件も成立する．　（証明終わり）

参考文献

［1］APPROXIMATING 1 FROM BELOW USING n EGYPTIAN FRACTIONS,
（by K.SOUNDRARAJAN http://arxiv.org/pdf/math/0502247）

［2］『不等式』（G.H. ハーディ／ J.E. リトルウッド著，細川尋史訳，シュプリンガー社）

［3］「対称式と不等式」(示野信一著，数学セミナー 2009 年 2 月号所収)

［4］「ムーアヘッドの不等式とその応用」（青空学園数学科内の『数学対話』所収）

2013 年 6 月 24 日

青空学園数学科（http://www33.ocn.ne.jp/~aozora_gakuen/) 管理人

連絡先：kawam@skyblue.ocn.ne.jp

Approximating a unit fraction from below using n egyptian fractions

Hisanari Kawamura

第3章　幾何分野

3.1　フェルマ点

2019.9.29/2018.5.4/2000.9.4

3.1.1　問題の発見

拓生　最近次の二つの問題をしました．

例 3.1.1　2 定点 $\mathrm{A}(0,a)$，$\mathrm{B}(b,c)$ と，x 軸上を動く点 P とがある．$a,b,c>0$ とする．

(1) $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ が最小になるような点 P の座標を求めよ．

(2) $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ が最小になるような点 P の座標を求めよ．

これは解けました．解答です．

解答

(1) $\mathrm{P}(t,0)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= a^2+t^2+(b-t)^2+c^2\\ &= a^2+2t^2-2bt+b^2+c^2\\ &= 2\left(t-\frac{b}{2}\right)^2+a^2+\frac{b^2}{2}+c^2\end{aligned}$$

よって，$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ が最小となるのは，$t=\dfrac{b}{2}$ のとき，つまり，$\mathrm{P}\left(\frac{b}{2},0\right)$ のときである．

(2) x 軸に関する B の対称点を $(b,-c)$ とおく．

$\mathrm{A}(0,a)$ と $(b,-c)$ を結ぶ直線は，

$$y=\frac{-a-c}{b}x+a$$

となり，これと x 軸とが交わる点が求める点である．

$y=0$ とおいて，$\dfrac{a+c}{b}x=a$．よって $x=\dfrac{ab}{a+c}$ で，求める点の座標は $\mathrm{P}\left(\dfrac{ab}{a+c},0\right)$．　□

さらに

例 3.1.2　頂点の座標が $\mathrm{A}(0,\, a)$ ，$\mathrm{B}(a,\, 0)$ ，$\mathrm{C}(-a,\, 0)$ である三角形 ABC がある．座標平面上の任意の点 P に対して，

$$\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2 \geqq \frac{8}{3}a^2$$

が成り立つことを示せ．等号が成立するときの点 P の座標を求めよ．

問題そのものはできました．解答です．

解答　$\mathrm{P}(x,\, y)$ とおく．

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2 &= x^2 + (y-a)^2 + (x-a)^2 + y^2 + (x+a)^2 + y^2 \\
&= 3x^2 + 3y^2 - 2ay + 3a^2 \\
&= 3\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} + 3a^2 + 3x^2 \\
&= 3\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}a^2 + 3x^2 \geqq \frac{8}{3}a^2
\end{aligned}$$

等号成立は，$x = 0,\, y = \dfrac{a}{3}$ ，つまり点 P の座標が $\mathrm{P}\left(0,\, \dfrac{a}{3}\right)$ のとき．　□

2 番の問題の最小値を与える点は，三角形 ABC の重心で，問題のような特別な点でなくても，一般的に「3 点への距離の二乗の和が最小になる点は重心です」．

南海　その通り．一般に 3 点からの距離の和を最小にする点は，3 点を頂点とする三角形の重心です．

拓生　はい．これは結局，二次関数の最小問題です．

そこで，問題の 1 番と 2 番を見比べると，3 点からの **距離の和** を最小にする点 P はどのような点なのか，作図はできるのか，という問題が浮かびあがります．これは解けるのでしょうか．

南海　与えられた問題が解けたことに満足せず，問題の型を見比べて新しい問題を見いだす，というのは大切なことだ．

3 点からの距離の和が最小となる点を作図せよというわけだ．これは結構てごわい問題なんだ．

拓生　よく知られた問題ですか．

南海　この距離の和を最小にする点は「フェルマ点」と言うもので，つまりはあのフェルマ先生が研究した．

3.1.2　トレミーの定理

これを考えるためには，次のトレミーの定理が必要だ．

定理 59 (トレミーの定理)　三角形 ABC と点 D がある．この順でこのとき，ABCD が凸な四角形となるものとする．このとき，不等式

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} + \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} \geqq \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}$$

が成立する．等号が成立するのは，A, B, C, D が同一円周上にあるときである．　■

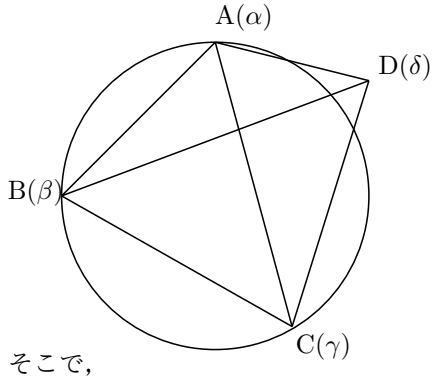
拓生　トレミーの定理って，不等式でしたか．

南海　いや．普通は同一円周上にあるとき等号が成立するところをいうのがトレミーの定理だ．不等式の方は「オイラーの定理」というのだが，ここでは一般化されたトレミーの定理として，そのままトレミーの定理とする．

拓生　私の教科書の複素数の章の最後の「発展」に「トレミーの定理」の複素数を使った証明が載っています.

南海　教科書の複素数を使う方法を少し発展させてやってみよう.

証明



4 点を表す複素数を順に，α,β,γ,δ としよう．すると，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= |\alpha-\beta|,\ \mathrm{CD}=|\gamma-\delta|,\ \mathrm{AD}=|\alpha-\delta|, \\ \mathrm{BC} &= |\beta-\gamma|,\ \mathrm{AC}=|\alpha-\gamma|,\ \mathrm{BD}=|\beta-\delta| \end{aligned}$$

となる．

そこで，

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$$

を計算する．

$$\begin{aligned} & (\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma) \\ = \ & \alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma+\beta\delta+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\delta+\gamma\delta \\ = \ & \alpha(\beta-\delta)-\gamma(\beta-\delta) \\ = \ & (\alpha-\gamma)(\beta-\delta) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} & |\alpha-\beta|\,|\gamma-\delta|+|\alpha-\delta|\,|\beta-\gamma| \\ \geqq \ & |(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)| \\ = \ & |\alpha-\gamma|\,|\beta-\delta| \end{aligned}$$

すなわち

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}\geqq\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

等号が成立するのは，負でない実数 k で

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=k(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$$

となるものがあるときである．変形すると，

$$\frac{\beta-\alpha}{\delta-\alpha}\cdot\frac{\delta-\gamma}{\beta-\gamma}=-k$$

よって，

$$\arg\frac{\beta-\alpha}{\delta-\alpha}+\arg\frac{\delta-\gamma}{\beta-\gamma}=180^\circ+360^\circ n$$

つまり，

$$\angle\mathrm{DAB}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$$

すなわち，四点が同一円周上にあるときである．　□

南海　その通り．さていよいよ本題だが，次の事実がなりたつ．

3.1.3　フェルマ点

定理 60 (フェルマ点)　三角形 ABC と，三辺の比が

$$\mathrm{L_2L_3} : \mathrm{L_3L_1} : \mathrm{L_1L_2} = r_1 : r_2 : r_3$$

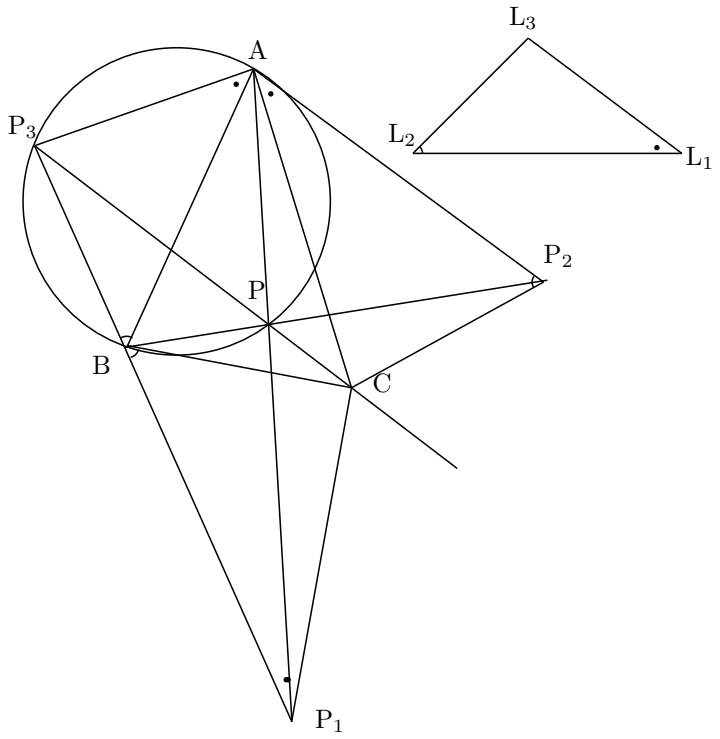
である三角形 $\mathrm{L_1L_2L_3}$ がある．点 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$ を

$$\triangle \mathrm{L_1L_2L_3} \propto \triangle \mathrm{P_1BC} \propto \triangle \mathrm{AP_2C} \propto \triangle \mathrm{ABP_3}$$

であるようにとる．ただし，$\angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{CAP_2} < 180°$，$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{CBP_1} < 180°$ であるとする．このとき，

(1) 三直線 $\mathrm{AP_1}$, $\mathrm{BP_2}$, $\mathrm{CP_3}$ は一点 P で交わる．

(2) P は $r_1\mathrm{AP} + r_2\mathrm{BP} + r_3\mathrm{CP}$ を最小にする点である．　■



拓生　証明をやってみます．

証明

(1) $\mathrm{AP_1}$ と $\mathrm{BP_2}$ の交点を P とする． 条件から点 P は $\mathrm{P_3}$ とは逆の側の弧 AB 上にある．

$$\mathrm{AC} : \mathrm{CP_2} = \mathrm{P_1C} : \mathrm{CB}, \quad \angle \mathrm{ACP_1} = \angle \mathrm{BCP_2}$$

であるから，

$$\triangle \mathrm{ACP_1} \propto \triangle \mathrm{BCP_2}$$

よって

$$\angle \mathrm{AP_1C} = \angle \mathrm{P_2BC}$$

よって点 B, P_1, C, P が同一円周上にある．これから

$$\angle P_1CB = \angle P_1PB = \angle BP_3A$$

ここで，$\angle BP_3A + \angle BPA = 180^\circ$ より P, A, P_3, B も同一円周上にある．

よって，

$$\angle APP_3 = \angle ABP_3$$

一方，点 B, P_1, C, P が同一円周上にあるので

$$\angle P_1BC = \angle P_1PC$$

よって対頂角が等しいので，P_3, P, C が同一直線上にある．

つまり，三直線 AP1, BP_2, CP_3 は一点 P で交わる．

(2) トレミーの定理より，

$$AP \cdot BP_3 + BP \cdot AP_3 = AB \cdot P_3P$$

つまり

$$r_1AP + r_2BP = r_3P_3P$$

よって，

$$r_1AP + r_2BP + r_3CP = r_3P_3C \quad (\text{一定})$$

他の P に対してはトレミーの定理より，

$$AP \cdot BP_3 + BP \cdot AP_3 > AB \cdot P_3P$$

となるので，

$$r_1AP + r_2BP + r_3CP > r_3P_3C \quad (\text{一定})$$

である．つまり P は

$$r_1AP + r_2BP + r_3CP$$

を最小にする点である． □

南海　よくできている．

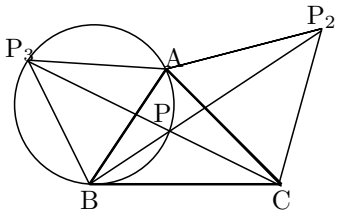
拓生　はじめの質問の三点からの距離の和が最小となる点は，$L_2L_3 : L_3L_1 : L_1L_2 = 1 : 1 : 1$ である正三角形 $L_1L_2L_3$ をとればいいのですね．

南海　そう．ただ，三角形の頂角が 120° より小さいという条件がいる．

このとき，△ABC の外に正三角形 $\triangle P_1BC$，$\triangle AP_2C$，$\triangle ABP_3$ をとる．三直線 AP_1, BP_2, CP_3 の交点 P が求める点だ．この点を △ABC の**フェルマ点**という．

$$\angle APB = 180^\circ - \angle BS_3A = 120^\circ$$

三角形 AP_3C と三角形 ABP_2 は合同なので，P_3C と P_2B の交点を W とすると，P_3, B, W, A は同一円周上にあり，A, W, C, P_2 も同一円周上にある．



この結果 W は 2 つの外接円の交点であり，P_3, P, W は同一直線上にあるので，$P = W$ となる．
この結果，

$$\angle APC = 120^\circ$$

となり，

$$\angle APC = \angle BPA = \angle CPB = 120^\circ$$

である．

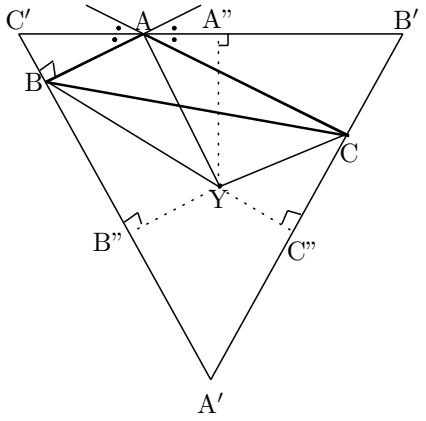
$\angle BAC > 120^\circ$ のとき

$$\angle P_3AB + \angle BAC > 180^\circ$$

となり，交点 P は存在しない．

このとき，$AP + BP + CP$ を最小にする点は A であることを示す．

点 B, C をとおりこれに直交する 2 つの直線と頂点 A の外角の 2 等分線でできる三角形を $A'B'C'$ とする．任意の点 P からこれらの辺に下ろした垂線の足を A”B”C” とする．



このとき，

$$\angle A' < 60^\circ, \quad \angle B' = \angle C' > 60^\circ$$

そして，

$$A'B' = A'C' > B'C'$$

である．

$$AP + BP + CP > A”P + B”P + C”P$$

であるが，面積を考えることで，

$$\begin{aligned} & (AP + BP + CP) \cdot A'B' \\ \geqq \quad & 2 \triangle A'B'C' = (AB + AC) \cdot A'B' \end{aligned}$$

であるから，

$$A”P + B”P + C”P \geqq AB + AC$$

この結果，

$$AP + BP + CP \geqq AB + AC$$

となり，点 P を A にとったとき，最小となる．

3.1.4　フェルマ点証明の解析的方法

『解析概論』の読者会で寄せられた解答を紹介しよう．この問題は実は『解析概論』第 2 章の章末問題 11 にあるのだ.

ただし頂角はすべて 120° より小さいとする．

『解析概論』第 2 章の章末問題 11 の方法の紹介

$\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2), \mathrm{C}(x_3, y_3)$ とする．また $\mathrm{P}(x, y)$ とする．

$$f(x, y) = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} + \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$$

$f(x, y)$ はすべての (x, y) で連続で各頂点以外では x , y のそれぞれについて微分可能である.

明らかに

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x, y) = \infty, \lim_{y\to\pm\infty} f(x, y) = \infty$$

なので，必ず最小値は存在する.

最小値は

$$\frac{d}{dx}f(x, y) = 0, \quad \frac{d}{dy}f(x, y) = 0$$

となる点か，あるいは頂点のいずれかでとる,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}f(x, y) \\ \quad = \dfrac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} + \dfrac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} + \dfrac{x-x_3}{\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}} \\ \dfrac{d}{dy}f(x, y) \\ \quad = \dfrac{y-y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} + \dfrac{y-y_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} + \dfrac{y-y_3}{\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}} \end{cases}$$

である．この条件を満たす点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}(x-x_1, y-y_1) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}$$

などから

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|} = \vec{0}$$

がなりたつ．これがフェルマ点を特徴づける．

大きさ 1 の三つのベクトルで，和が $\vec{0}$ のとき，各ベクトルがなす角は 120° である．各頂角が 120° より小さい場合，このような点はただ一つ三角形の内部に存在する．したがってこの点が求める点である．　□

3.1.5　その他の方法

南海　フェルマ点についてはその他にもいろんな方法がある．読者会の ML に寄せられたものを紹介しよう.

関沢正躬　「数の世界，図形の世界」(国土社)　の紹介

三角形 ABC をどの頂角も 120 度未満の三角形とします．今，点 P を三角形の内部にとります．AP+BP+CP が最小になるような P を捜せというのが問題でした．

話を決めるため，三角形 ABC の向き（頂点の順番）は A を原点，B を x 軸上の正の位置に持ってきたとき C が $y>0$ の範囲に来るようにとってあるとします.

さて，三角形 APC を A の回りに +60 度回転させて三角形 AP′C′ を得たとします．上に述べた三角形の向きのとり方から A を中心に AB から始めて正の向きに回転して行くと AC, AC′ の順に並んでいることに注意します.

また，角 A が 120 度未満ですから，C を 60 度回転して得られた C′ も $y>0$ の領域にあります．作り方から三角形 PAP' は正三角形になります.（二等辺三角形で角 A が 60 度だから）したがって，AP=PP′ です．また，三角形 APC と三角形 AP'C' が合同であることがすぐわかるので，CP = P′C′ です．ゆえに

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=\mathrm{BP}+\mathrm{PP'}+\mathrm{P'C'}$$

この最後の式は BPP′C′ という折れ線の長さになっていることに注意します．というわけで，結局この折れ線の長さをできるだけ小さくすればよいということになりました．B と C′ を結ぶ折れ線の長さの最小値は B と C を結ぶ直線で実現されます．B, P, P′, C′ が直線上に並ぶ条件を調べれば容易に，角 APB = 角 BPC = 角 CPA = 120 度がでてきます. □

『問題解法幾何学事典』（笹部貞一著, 聖文社, 昭和 39 年）にある別解

三角形 ABC で頂角はいずれも 120 ゜未満とする ．三角形 ABC の内部の点 Q を，AQ を一定にして動かす. この円周上の点で BQ+CQ が最小になるのは B と C を焦点とする楕円でこの円にる接するものの，その接点 P である.

なぜなら，円周上の点 Q は接点 P 以外は楕円の外にあるので BQ+CQ ≧BP+CP（一定）だから. このとき楕円の接線の性質から ∠APB= ∠APC である．ここで A に代えて他の頂点から考えても同じなので，和が最小になるのは ∠APB= ∠APC= ∠BPC のとき. □

拓生　トレミーの定理を使うものばかりでもないのですね.

南海　このフェルマ点の定理は奥が深いのだ. さらに最近の入試でも出題された.

3.1.6　関連入試問題

※　平成 30 年度試行調査数学 IA の 5 番

演習 53　［00 東北後期］解答 51

(1) $\vec{0}$ でない平面ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\vec{0}$$

を満たすとき，三つのベクトルの互いになす角をそれぞれ求めよ.

(2) $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{x}$ を任意の平面ベクトルとするとき，

$$|\vec{a}-\vec{x}|\geqq|\vec{a}|-\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

であることを示せ.

ここで $\vec{x}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ は $\vec{x}$ と $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の内積を表す.

(3) すべての内角が 120° 未満の △ABC の内部の点 X から各頂点までの距離の和

$$|\overrightarrow{\mathrm{XA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{XB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{XC}}|$$

が最小になるような X を求めよ.

演習 54　［13 東大理科］解答 52

△ABC において $\angle \mathrm{BAC} = 90°$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{3}$ とする．△ ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|} = \vec{\mathrm{O}}$$

を満たすとする.

(1) ∠APB，∠APC を求めよ.

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ.

3.2　シュタイナー楕円

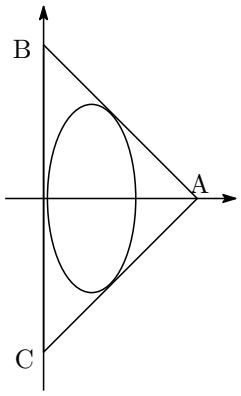
2018.5.5/＞ 2000.8

3.2.1　入試問題の分析

南海　おもしろい問題がある．解いてみよう．

例 3.2.1　［00 東大前期理系］
AB=AC，BC=2　の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し，ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ．

拓生　やってみます．
解答



A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$(0,\ -1)$ と xy 座標平面におく．△ABC に内接し軸が BC と平行な楕円は対称性から原点で y 軸と接する．したがって，

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

とおける．

この楕円が点 $(1-t,\ t)$ で線分 AB に接しているとする．楕円のこの点での接線は

$$\frac{(1-t-a)(x-a)}{a^2}+\frac{ty}{b^2}=1$$

である．これが $x+y=1$ と一致する．つまり

$$\frac{1-t-a}{a^2}x+\frac{t}{b^2}y=1+\frac{1-t-a}{a}$$

が $x+y=1$ と一致する．よって，

$$\frac{1-t-a}{a^2}=\frac{t}{b^2}=1+\frac{1-t-a}{a}$$

これから t を消去して a と b の関係式を求めると $b^2=1-2a$ となる．楕円の面積は半径 1 の円を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍したものであるから，πab である．

$$\pi ab=\pi\sqrt{a^2-2a^3}$$

$f(a)=a^2-2a^3$ とおく．$0<a<\dfrac{1}{2}$ である．

$$f'(a)=2a-6a^2$$

より $a=\dfrac{1}{3}$ で極大かつ最大である．面積の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$ である．　□

拓生　ずいぶんあっさりとした解答です．
南海　いや．大切なことは，必ず解ける方法でやることだ．この場合，内接する条件を書きあげ，その条件をみたしつつ面積を最大にする場合を求めればよいのだから，この方法でいいのだ．

ただし，最大値そのものは次のようにして求めることもできる．

△ABC を x 軸の正の方向に $\sqrt{3}$ 倍拡大する．すると △ABC は一辺 2 の正三角形になる．

正三角形に内接する楕円で面積最大のものは，各辺の中点で内接する円である．その円の半径は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ でその面積は $\dfrac{\pi}{3}$ である．

これを x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍に縮小してもとに戻すと円は楕円になり，その面積は $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ である．

拓生　この解答では，正三角形に内接する楕円で面積最大のものは，各辺の中点で内接する円であることを証明なしに使っています．

南海　そう．この点で不十分なのだが，方向性はよくわかる．

さて，この問題についてもう少しふかめて考えよう．楕円とくれば当然その焦点を考えねばならない．焦点の座標はどうなるかな．

拓生　$a=\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ t=\dfrac{1}{2}$ ですから計算すると，$\left(\dfrac{1}{3},\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ です．

南海　ここで平面を複素数平面とする．焦点は $\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}i$ となるわけだが，三角形の三つの頂点は

$$1,\ i,\ -i$$

だ．これらを解とする三次方程式は何かな．

拓生　それは

$$(x-1)(x-i)(x+i)=x^3-x^2+x-1=0$$

です．

南海　ここで方程式の部分を微分すると

$$3x^2-2x+1=0$$

拓生　あっ．この二次方程式の二解が焦点になっている！

南海　そうなのだ．さらに，三角形の重心は $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ であるが，これが楕円の中心と一致する．

次のことが成り立つ．

3.2.2　内接楕円

定理 61　複素数平面上の 3 点を $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とする．

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とおき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha) \\ &= 3(x-u)(x-v) \end{aligned}$$

とおく．$u,\ v$ に対応する点を U, V とする．

このとき次のことが成り立つ．

(1) U, V を焦点とし，△ABC に各辺の中点で内接する楕円が存在する．

(2) △ABC の重心と，この楕円の中心は一致する．

(3) この楕円は △ABC に内接する楕円のなかで，面積最大のものである．

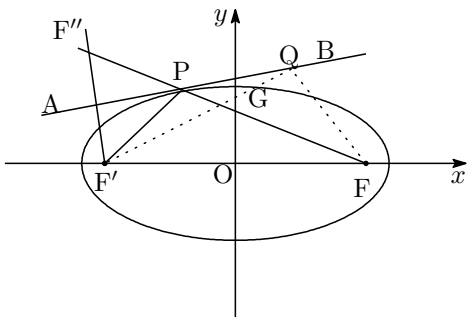
南海　まず次の補題を確認しておこう．

補題 8　平面上に 2 定点 F, F′ がある．同じ平面上に点 A, B と点 P がある．次の 2 条件は同値である．

(i) 2 定点 F, F′ を焦点とする楕円 C で，直線 AB が点 P で C と接するものが存在する．

(ii) $\angle \mathrm{APF} = \angle \mathrm{BPF}'$

証明



条件を満たす楕円 C が存在したとする．直線 AB 上の点 Q をとる．直線 AB は楕円の外部にある．線分 F′Q と C の交点を G とする．楕円の定義と三角形 GQF の成立条件から

$$\begin{aligned} \mathrm{FQ} + \mathrm{F}'\mathrm{Q} &\geqq \mathrm{FG} + \mathrm{F}'\mathrm{G} \\ &= \mathrm{FP} + \mathrm{F}'\mathrm{P} \end{aligned}$$

が成り立ち，Q = P のときにかぎり等号が成立する．つまり点 P は直線 AB 上の点 Q のうち FQ + F′Q を最小にする点である．

したがって，直線 AB に関する点 F′ の対称点 F″ をとると，3 点 F″, P, F は 1 直線上にある．ゆえに $\angle \mathrm{APF} = \angle \mathrm{BPF}'$ が成立する．

逆に $\angle \mathrm{APF} = \angle \mathrm{BPF}'$ がなり立っているとする．2 点 F, F′ を焦点とし，長軸の長さが FP+F′P となる楕円を C とする．C は点 P を通る．直線 AB に関する点 F′ の対称点 F″ をとると，$\angle \mathrm{APF} = \angle \mathrm{BPF}'$ なので，3 点 F″, P, F は 1 直線上にある．ゆえに，点 P は直線 AB 上の点 Q のうち FQ + F′Q を最小にする点である．

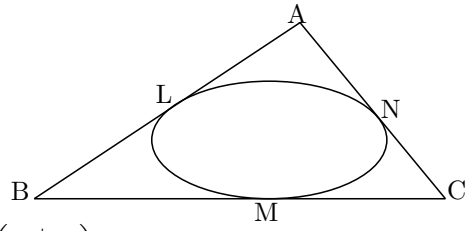
もし点 Q が楕円 C の内部にあれば

$$\mathrm{FQ} + \mathrm{F}'\mathrm{Q} < \mathrm{FP} + \mathrm{F}'\mathrm{P}$$

となることが前半と同様に示される．ゆえに直線 AB は点 P を除き，楕円 C の外部になければならない．つまり直線 AB は楕円 C と点 P で接している．□

定理 61 の (1) と (2) の証明

AB， BC， CA の中点をそれぞれ L， M， N とする．



$\mathrm{L}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\mathrm{M}\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)$, $\mathrm{N}\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}\right)$ である．(1) を示すためには次の 2 点を示せばよい．

(i) $\angle \mathrm{ALU} = \angle \mathrm{BLV}$，$\angle \mathrm{BMV} = \angle \mathrm{CMU}$，$\angle \mathrm{CNU} = \angle \mathrm{ANV}$

(ii) UL+VL=UM+VM=UN+VN

解と係数の関係から

$$3(u+v) = 2(\alpha+\beta+\gamma),\ 3uv = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

が成立する．

(i) $\angle \mathrm{ALU} = \angle \mathrm{VLB}$ は

$$\arg\left(\frac{u-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\alpha-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\right) = \arg\left(\frac{\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{v-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\right)$$

と同値である．つまり

$$\frac{u-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\alpha-\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \frac{v-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \text{ が正の実数}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
\frac{u-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\alpha-\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \frac{v-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}} &= -\frac{\{2u-(\alpha+\beta)\}\{2v-(\alpha+\beta)\}}{(\beta-\alpha)^2} \\
&= -\frac{4uv-2(\alpha+\beta)(u+v)+(\alpha+\beta)^2}{(\beta-\alpha)^2} \\
&= -\frac{4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha+\beta)^2}{3(\beta-\alpha)^2} \\
&= -\frac{4\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2}{3(\beta-\alpha)^2} \\
&= \frac{1}{3} > 0
\end{aligned}$$

(ii)

$$(\mathrm{UL}+\mathrm{VL})^2 = (\mathrm{UM}+\mathrm{VM})^2 = (\mathrm{UN}+\mathrm{VN})^2$$

を示す．

$$\begin{aligned}
(\mathrm{UL}+\mathrm{VL})^2 &= \left(\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-u\right|+\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-v\right|\right)^2 \\
&= \left(\frac{\alpha+\beta}{2}-u\right)\left(\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2}-\bar{u}\right)+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-v\right)\left(\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2}-\bar{v}\right) \\
&\qquad +2\left|\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-u\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-v\right)\right| \\
&= 2\left|\frac{\alpha+\beta-(u+v)}{2}\right|^2+\frac{|u-v|^2}{2}+\frac{|\beta-\alpha|^2}{6} \\
&= \frac{|\alpha+\beta-2\gamma|^2}{18}+\frac{|\beta-\alpha|^2}{6}+\frac{|u-v|^2}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9}\{2(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2) \\ -(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma+\gamma\bar{\alpha}+\bar{\gamma}\alpha)\}+\frac{|u-v|^2}{2}$$

ここで第 1 の項は $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の対称式，第 2 の項は $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に無関係.
したがって $(\mathrm{UM}+\mathrm{VM})^2,\ (\mathrm{UN}+\mathrm{VN})^2$ も同じ値を取るので，これらは相等しい.

したがって確かに題意を満たす楕円が存在する．そして

$$\frac{u+v}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

より，楕円の中心と三角形の重心は一致する． □

3.2.3 一次変換とシュタイナー楕円の特徴付け

拓生 東大の問題は三角形に内接する楕円で面積最大のものを求めよ，ということでした．それを一般化したのが (3) ですね.

3.2.4 一次変換からの準備

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を用いて， xy 平面の点 $(x,\ y)$ から点 $(x',\ y')$ への変換

$$f_A\ :\ (x,\ y)\longrightarrow(x',\ y')$$

を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

で定め,「一次変換」という.
$\vec{p}=(x,\ y),\ \vec{p'}=(x',\ y')$ とするとベクトルからベクトルへの変換でもある．これは次の性質を持つ.

(1) $f_E(\vec{p})=\vec{p}$ (恒等写像)

(2) $f_A(\alpha\vec{p}+\beta\vec{q})=\alpha f_A(\vec{p})+\beta f_A(\vec{q})$

(3) $f_B(f_A(\vec{p}))=f_{BA}(\vec{p})$

さらに $\Delta(A)=ad-bc\neq 0$ のとき次のことが成り立つ.

(i) $f_A^{-1}(f_A(\vec{p}))=f_E(\vec{p})$ より $f_A^{-1}=f_{A^{-1}}$ ．逆写像が存在する．よってまた 1 対 1 の対応である.

(ii) $f_A(\vec{p}+t\vec{q})=f_A(\vec{p})+tf_A(\vec{q})$ より直線は直線に移る．線分上の内分（外分）点は，移った線分上の同じ比率の内分（外分）点に移る．従って，三角形の重心は，移った三角形の重心に移る.

(iii) $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$ が $(x_1',\ y_1'),\ (x_2',\ y_2')$ に移ったとする．

$$|x_1'y_2' - x_2'y_1'| = |ad - bc||x_1y_2 - x_2y_1|$$

より △ABC が △A′B′C′ に移れば

$$\triangle \mathrm{A'B'C'} = |ad - bc| \triangle \mathrm{ABC}$$

図形の面積は三角形の面積の和の極限であるから，一般に面積は $|ad - bc|$ 倍される．とくに面積の大小関係は保たれる．

(iv) 一次変換で二次曲線は二次曲線に移ることを示す．二次曲線

$$px^2 + 2lxy + qy^2 + 2mx + 2ny + r = 0$$

が一次変換 f_A で二次曲線

$$p'x^2 + 2l'xy + q'y^2 + 2m'x + 2n'y + r' = 0$$

に移ったとする．

$$px^2 + 2lxy + qy^2 = (x,\ y)\begin{pmatrix} p & l \\ l & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

かつ $x' = ax + by,\ y' = cx + dy$ とすれば

$$p'x'^2 + 2l'x'y' + q'y'^2 = (x',\ y')\begin{pmatrix} p' & l' \\ l' & q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

で

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} px^2 + 2lxy + qy^2 &= (x,\ y)\begin{pmatrix} p & l \\ l & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x',\ y')\,{}^tA^{-1}\begin{pmatrix} p & l \\ l & q \end{pmatrix}A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= p'x'^2 + 2l'x'y' + q'y'^2 \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} p'q' - l'^2 &= \Delta\left({}^tA^{-1}\begin{pmatrix} p & l \\ l & q \end{pmatrix}A^{-1}\right) \\ &= \Delta({}^tA^{-1})\Delta\begin{pmatrix} p & l \\ l & q \end{pmatrix}\Delta(A^{-1}) \\ &= \Delta\begin{pmatrix} p & l \\ l & q \end{pmatrix} = pq - l^2 \end{aligned}$$

である．ここで ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ を表す．

よって一次変換で二次曲線の $pq - l^2$ の値は不変.

適当な一次変換で二次曲線が標準形になったとする．標準形は $l' = 0$ のときである．よって $pq - l^2 = p'q'$ となる．これは $pq - l^2 >, =, < 0$ に応じて楕円，放物線，双曲線，であることを示し，さらに一次変換で楕円は楕円に移ることを示している．

(v) 任意の三角形を正三角形に移す変換が存在する．$\vec{p} = (x_1,\, y_1)$，$\vec{q} = (x_2,\, y_2)$ を $(2,\, 0)$, $(1,\, \sqrt{3})$ に移す変換 A を

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

より

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

で定めればよい.

(vi) この一次変換で，二次曲線とその接線は，二次曲線と接線に移る．

(vii) 楕円に対しその軸を x 軸に平行にする回転を行い，その軸方向のみの拡大縮小を行い，そのうえで逆方向に回転することにより，楕円を円にする一次変換を構成できる．

3.2.5　シュターナー内接楕円

定理 61 の (3) の証明

(1) △ABC に一次変換を施し正三角形にする．正三角形に内接する楕円の面積が最大になるのは，各辺の中点で接する円のときであることを示せばよい.

(2) 正三角形に内接する楕円において面積が最大になるのは円の時である．円でない楕円で面積が大きいものがあるとする．この楕円と正三角形を，その楕円が内接円と一致するように一次変換を施す．このとき三角形は円に外接し，しかもその面積は正三角形より小さい.

(3) ところが，円に外接する三角形の中で面積が最小になるのは正三角形のときである．正三角形の 1 辺を，円に接しながら動かす．こうしてできた三角形は周長が大きく，その結果，面積＝周長×半径÷ 2 で得られる面積も大きい．逆に，周長を最短にする三角形が正三角形でなければ等しくない 2 辺をとり，その 2 辺が等しくなるよう第 3 の辺を動かすことで，面積が小さくなる．(ii) はこの結果と矛盾する.

以上で，(3) が示された. □

三角形に内接する楕円で面積最大のもをシュタイナー内接楕円という．これに対し，三角形に外接する楕円で面積最小のもをシュタイナー外接楕円という.

3.3　包絡線

＞ 2000.8

3.3.1　はじめに

南海　掲示板へ次の質問が来た．

例 3.3.1　長さ 1 の線分を，両端が放物線 $y = x^2$ の上にあるように動かすとき，その線分の通過領域を求めよ．

直線がある条件をみたしながら動くとき，その通過する領域を求める問題は，入試問題でも頻出だ．これはどのような方法があるのだったかな．

拓生　線分の通過領域は，結局，放物線上にある長さが 1 離れた 2 点を結ぶ直線を考え，その通過領域のうち放物線の周と上部にある部分をとれば，求まるはずです．長さが 1 離れた 2 点を $(\alpha,\, \alpha^2\,)$, $(\beta,\, \beta^2\,)$ とすると，条件と直線は次のようになります．

$$(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2\,)^2=1$$
$$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

$\alpha,\, \beta$ が第一式を満たして変わるとき，第二式の直線の通過領域を求めよ，ということです．それで，ここから $\alpha\beta$ を消去すると，

$$\{1+(\alpha+\beta)^2\}\cdot\{(\alpha+\beta)^2-4(\alpha+\beta)x+4y\}-1=0$$

です．$t=\alpha+\beta$ とおくと，

$$(t^2+1)(t^2-4tx+4y)-1=0 \quad \cdots ①$$

です． t は全実数を動くので，結局そのときのこの直線の通過領域を求めることになります．これを展開すると，

$$t^4-4xt^3+(4y+1)t^2-4xt+4y-1=0 \quad \cdots ②$$

左辺の最小値が 0 以下になればよいので，左辺を微分すると，

$$2\{2t^3-6xt^2+(4y+1)t-2x\}$$

でもこれは因数分解できない．

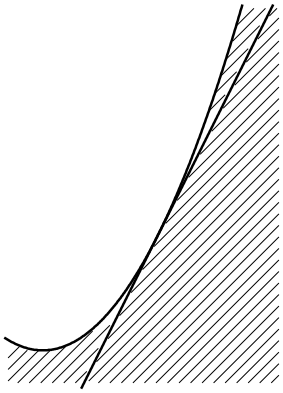
南海　そこですこし発想を変えてみよう．

3.3.2　通過領域と境界の曲線

南海　通過領域と通過しない領域の境界となる曲線を考えよう．直線を

$$a(t)x+b(t)y+c(t)=0$$

とする．



この直線が動いて境界を形成するので，直線は各 t に対して境界の曲線と必ず共有点をもつわけだが，必ずその共有点で接している．通過領域なのだから，接点の近くで直線が領域の一方の側にあり，したがって交わることはない．この接点を

$$(x(t),\, y(t))$$

と置こう．
接点は直線の上にあるのだから，

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0$$

である．この両辺を t で微分すると，

$$a'(t)x(t) + a(t)x'(t) + b'(t)y(t) + b(t)y'(t) + c'(t) = 0 \quad \cdots ③$$

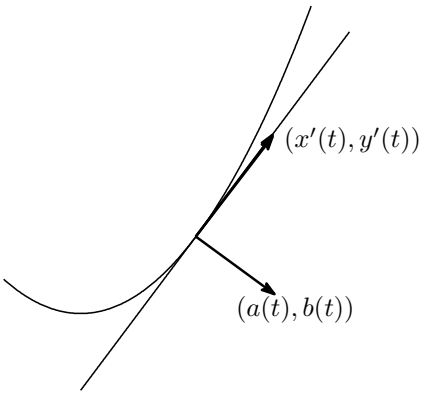
を得る．
一方 $(x'(t),\, y'(t))$ は接線方向であるから，直線と平行である．
$(a(t),\, b(t))$ が直線の法線方向だから，これと $(x'(t),\, y'(t))$ は直交する．つまり，

$$a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0$$

である．したがって，③ とあわせて，

$$a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0$$

を得る．



この接点は，

$$\begin{aligned} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) &= 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす．これは $x(t),\, y(t)$ の連立一次方程式だから，$x(t),\, y(t)$ について解くことができ，境界の曲線の媒介変数表示が得られる．このように直線群が接している曲線をこの直線群の**包絡線**と言うんだ．

3.3.3　計算の実行

拓生　計算をしてみます．② 式を整理すると次のようになります．

$$(4t^3 + 4t)x + (-4t^2 - 4)y + (-t^4 - t^2 + 1) = 0$$

t について微分すると次のようになります．

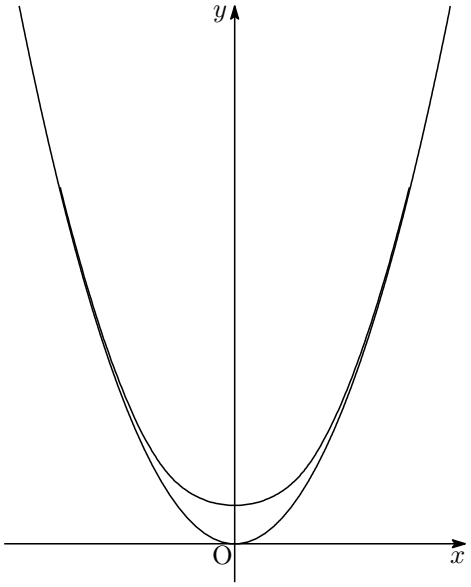
$$(6t^2 + 2)x + (-4t)y + (-2t^3 - t) = 0$$

この連立方程式を解くと，

$$x=\frac{2t^5+4t^3+4t}{4(t^2+1)^2}\quad y=\frac{t^6+2t^4+4t^2+1}{4(t^2+1)^2}$$

となります．でもこのグラフは書けるのですか．

南海　それがパソコンを使えば書ける．細かく t に値を代入していけばよいのだから．そのようにして得られたのが次のグラフだ．下にあるのが $y=x^2$ だ．



拓生　媒介変数表示されたものから x と y の関係式を求めることはできるのですか．

南海　それもできるのだ．ここに『RISA/ASIR　日本で生まれた数式処理ソフト』（SEG 出版）がある．これはたいへん強力なソフトで，しかも手軽に多項式の計算なんかに使える．これで，t を消去してみよう．すると，

$$\begin{aligned}&-1024x^6+(-2048y^2+4352y-752)x^4\\&\quad+(-1024y^4+3328y^3-4544y^2+1264y-112)x^2\\&\qquad+1024y^5-1280y^4+1152y^3-544y^2+180y-25=0\end{aligned}$$

となるというのだ．

以上でかっぱさんの答えになっただろうか．

次の問題を，この方法で解いてみよう．

演習 55　［97 東大文系］解答 53

$0\leqq t\leqq 1$ をみたす実数 t に対して，xy 平面上の点 A，B を

$$\mathrm{A}\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)},\ -2\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{2}{3}t,\ -2t\right)$$

と定める．t が $0\leqq t\leqq 1$ を動くとき，直線 AB の通りうる範囲を求めよ．

演習 56　解答 54

x 軸上の点 A と y 軸上の点 B が，AB $=1$ を満たして動くとき，線分 AB の通りうる範囲を求めよ．

3.4　根軸

＞ 2000.8

3.4.1　二円の交点を通る円

拓生　最近，二つの円の 2 交点とさらにある定点を通るような円を求める問題を学校で習いました．例えば次の問題です．

例 3.4.1　二つの円 $x^2+y^2=1$ と $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ がある．

(1) 二円の交点を通り，かつ点 $(-2,0)$ を通る円を求めよ．

(2) 二円の交点を通る直線を求めよ．

この問題は，次のよう解きました．

解答

(1) 求める円または直線を

$$j(x^2+y^2-1)+k\{(x-2)^2+(y-1)^2-4\}=0\ (j,\ k \text{ は同時には } 0 \text{ でない})\cdots①$$

と置く．

① が点 $(-2,\ 0)$ を通るので, $3j+13k=0$.

$k=-\dfrac{3}{13}j$ を代入して， j で割り分母を払って整理すると，

$$\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{10}\right)^2=\frac{41}{20}$$

を得る．

(2) 二円の交点を通る曲線 ① が直線になるのは $x^2,\ y^2$ の係数が 0 になるとき，つまり $k=-j$ のときである．

よって，

$$2x+y-1=0$$

を得る．　□

南海　教科書では普通， (一の円) $+k$(二の円) $=0$ と置きます．どうして j(一の円) $+k$(二の円) $=0$ としたのですか．

拓生　教科書の置き方では二の円自身が求めるものである場合 k が解なしになってしまうので，このようにしました．実際は $j:k$ の比で決まるので，場合分けすれば二つの文字は必要ないのですが．

南海　いや，ここにある問題は，直線を $y=mx+n$ と表すと $x=k$ 型の直線が表せないが $ax+by+c=0$ と置くとすべて表せ， $a:b:c$ の比で直線が決まる，という問題と本質は同じです．

拓生　なるほど，少しわかります．

南海　これについては別にまた考えましょう．ところで君の質問は?

3.4.2　二円が交わらないときは？

拓生　次の疑問が解決しないのです.

(1) 求める円はいつもつねに $(x^2+y^2-1)+k\{(x-2)^2+(y-1)^2-4\}=0$ または $h(x^2+y^2-1)+\{(x-2)^2+(y-1)^2-4\}=0$ という形をしているのでしょうか．他に全然違う形の円はないのでしょうか．この形をしたなかで求めるだけで題意を満たすすべての円が求まるのでしょうか.

(2) $k=-1$ のときは交点を通る直線になります．しかし二円が交点をもたなくても同様の方法で何かある直線は作れます．たとえば

$$(-1)(x^2+y^2-1)+(x-3)^2+(y+2)^2-4=0$$

です．このとき，この直線はいったいどのような意味があるのですか.

南海　まず (1) についてだが，同一直線上にない三点があれば，その三点を通る円は一つしかない．なぜかな?

拓生　二つの線分の，それぞれの垂直二等分線の交点として中心が定まるからです.

南海　そうだ．また別の観点からいえば，円は，中心の x 座標， y 座標，半径の三つが定まれば定まる．三点を通るということで連立方程式を立てればこの三定数が定まる.

拓生　その場合，三点が同一直線上にないということが，きっと連立方程式が解ける条件になるのでしょうね．私の疑問の (1) は，円の交点と他の一点が定まれば，円は一つに定まるので，一つの置き方で解が求まれば，他に全然違う形の円はないのですね.

南海　疑問 (1) に答えるという点では，それでよいのだが，疑問の (2) が (1) と関連しているのです.

3.4.3　曲線族と「束」

南海　実数 k に対し，$k(x^2+y^2-1)+(x-3)^2+(y+2)^2-4=0$ とすると，これはどのような図形を表しますか.

拓生　式を整理すると，

$$(k+1)x^2-6x+(k+1)y^2+4y-k+9=0$$

となりますから， $k=-1$ のとき，直線になり， $k\neq -1$ のときは，両辺を $k+1$ で割って整理すると，

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{3}{k+1}\right)^2+\left(y+\frac{2}{k+1}\right)^2 &= \frac{13}{(k+1)^2}+\frac{k-9}{k+1}\\ &= \frac{k^2-8k+4}{(k+1)^2}\end{aligned}$$

$k^2-8k+4>0$ のとき円になり, $k^2-8k+4=0$ のとき 1 点，さらに $k^2-8k+4<0$ のときは空集合，です.

南海　k が大きくなるとどうなりますか.

拓生　$(x^2+y^2-1)+\dfrac{1}{k}\{(x-3)^2+(y+2)^2-4\}=0$ で $k\to\pm\infty$ ですから， $x^2+y^2-1=0$ に近づいていく.

南海　そうです．まとめると

k	表す図形
$+\infty$	$x^2+y^2-1=0$
$\vdots$	円
$4+2\sqrt{3}$	点 $\left(\dfrac{15-6\sqrt{3}}{13},\ \dfrac{-10+4\sqrt{3}}{13}\right)$
$\vdots$	空集合
$4-2\sqrt{3}$	点 $\left(\dfrac{15+6\sqrt{3}}{13},\ \dfrac{-10-4\sqrt{3}}{13}\right)$
$\vdots$	円
0	$(x-3)^2+(y+2)^2-4=0$
$\vdots$	円
-1	直線 $3x-2y-5=0$
$\vdots$	円
$-\infty$	$x^2+y^2-1=0$

このように媒介変数 k の一次式で定まる曲線族を「束」と呼びます．問題は，この「束」を特徴づける幾何的な性質はどのようなことか，と言うことです．

拓生　私の質問とどのような関係があるのでしょうか．

3.4.4　一般的に考える

南海　その関連を解明するのが次の問題です．その疑問 (2) は次の問題の (1) で解決されます．それから逆に疑問 (1) を見直す．やってみてほしい．

定理 62　二つの二次式

$$\begin{cases} f(x,y) &= x^2+y^2-2ax-2by+c \\ g(x,y) &= x^2+y^2-2px-2qy+r \end{cases}$$

がある．$f(x,y)=0,\ g(x,y)=0$ で円が定まるとし，その円を $C_f,\ C_g$ とする．このとき $C_f,\ C_g$ は同心円でないとする．

(1) xy 平面の点 P から C_f と C_g に接線を引きその接点をそれぞれ T, S とする．$\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{PS}}$ となる点 P の軌跡は

$$-2(a-p)x-2(b-q)y+c-r=0$$

以下このようにして定まる軌跡を「C_f と C_g の根軸」と呼ぶ．

(2) -1 でない実数 k に対して，$h_k(x,\ y)=f(x,\ y)+kg(x,\ y)$ とおき，$h_k(x,\ y)=0$ で円が定まるとき，これを C_k とする．二円 $C_f,\ C_k$ の根軸は，二円 $C_f,\ C_g$ の根軸と一致する．

(3) 逆に，平面上の $C_f,\ C_g$ とは異なる円 C と C_f との根軸が，二円 $C_f,\ C_g$ の根軸と一致したとする．このとき円 C の式はある実数 $j,\ k$ によって $h(x,\ y)=jf(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$ と表される．

拓生
証明

(1) 円の中心を $\mathrm{O}_f,\ \mathrm{O}_g$ とし，円の中心と半径を求める．

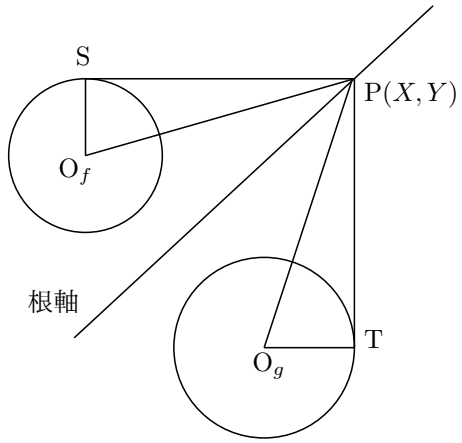
$$\begin{cases} x^2+y^2-2ax-2by+c=(x-a)^2+(y-b)^2-a^2-b^2+c \\ x^2+y^2-2px-2qy+r=(x-p)^2+(y-q)^2-p^2-q^2+r \end{cases}$$

よって， $\mathrm{O}_f(a,\ b), \mathrm{O}_g(p,\ q)$ ， 半径の二乗は $a^2+b^2-c,\ p^2+q^2-r$ である．$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする．

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{PS}}^2 & = \overline{\mathrm{PO_f}}^2-(a^2+b^2-c) \\ & = \{(X-a)^2+(Y-b)^2\}-(a^2+b^2-c) \\ & = f(X,\ Y) \\ \overline{\mathrm{PT}}^2 & = \overline{\mathrm{PO_g}}^2-(p^2+q^2-r) \\ & = \{(X-p)^2+(Y-q)^2\}-(p^2+q^2-r) \\ & = g(X,\ Y) \end{cases}$$

よって点 P は $f(X,\ Y)=g(X,\ Y)$ を満たす点である．つまり求める軌跡は，

$$-2(a-p)x-2(b-q)y+c-r=0$$



(2)

$$\begin{aligned} h_k(X,\ Y) &= f(X,\ Y)+kg(X,\ Y) \\ &= (x^2+y^2-2ax-2by+c)+k(x^2+y^2-2px-2qy+r) \\ &= (1+k)\left\{x^2+y^2-\frac{2(a+kp)}{1+k}x-\frac{2(b+kq)}{1+k}y+\frac{c+kr}{1+k}\right\} \end{aligned}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} & -2ax+\frac{2(a+kp)}{1+k}x-2by+\frac{2(b+kq)}{1+k}y+c-\frac{c+kr}{1+k} \\ = & -\frac{2k(a-p)}{1+k}x-\frac{2k(b-q)}{1+k}y+\frac{k(c-r)}{1+k} \\ = & \frac{k}{1+k}\{-2(a-p)x-2(b-q)y+c-r\} \\ = & 0 \end{aligned}$$

である．よって，二円 C_f, C_k の根軸は，二円 C_f, C_g の根軸と一致する．

(3) 円 C の式 $h(x,\ y)$ を

$$h(x,\ y) = x^2 + y^2 - 2sx - 2ty + u$$

と置く．題意より二つの根軸:

$$-2(s-a)x - 2(t-b)y + u - c = 0$$
$$-2(a-p)x - 2(b-q)y + c - r = 0$$

が一致する．よってある実数 l があって，

$$\begin{cases} s - a = l(a-p) \\ t - b = l(b-q) \\ u - c = l(c-r) \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} s = (l+1)a - lp \\ t = (l+1)b - lq \\ u = (l+1)c - lr \end{cases}$$

と表される．よって，

$$h(x,\ y) = (l+1)f(x,\ y) - lg(x,\ y)$$

つまり $j = l+1,\ k = -l$ と置けばよい． □

南海　なかなか見事なものだ．これで君の疑問はすべて解決したな．また，二円が共有点を持つときは，その二点を通る他の円は，従って根軸が共通な円であり，問題の (3) によって，必ずもとの二円によって，j(一の円) $+ k$(二の円) $= 0$ と表せる．

拓生　私の疑問 (2) が解けました．二円の接点までの距離が等しい点の軌跡として根軸を定義する．その根軸という考え方に立てば，二円が，二点で交わっているか，接しているか，離れているかは，無関係なのですね．

南海　なお関連入試問題として，91 年東大後期 2 番をよく考えておいてほしい．これは，2 円の直行する円群は共通の根軸をもつということを意味している．

3.5　九点円の不思議

2013.9.9/2012.9.22/2010.3.12

3.5.1　九点円とフォイエルバッハの定理

3.5.1.1　九点円

耕一　授業の中で次の問題に関連して「九点円」を習いました．

例題 3.5.1 鋭角三角形 ABC の外接円 O の中心を O，辺 BC の中点を M，頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線と，頂点 B から対辺 AC に下ろした垂線の交点を H とする．このとき次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ．

(2) O の円周上の点 P に対して，Q は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

をみたす点とする．点 P が外心 O に対する A の対称点 A′ のとき，Q の位置を求めよ．

(3) P が円 O の周上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

耕一　(1) の H は △ABC の垂心で，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となります．これは知っていました．(2) の解は線分 AH の中点です．これも代入すればわかります．(3) で外接円の半径を R とすると点 P のベクトル方程式は $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = R$ となる．ここに $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を代入し P を消去，整理して Q のベクトル方程式をつくると

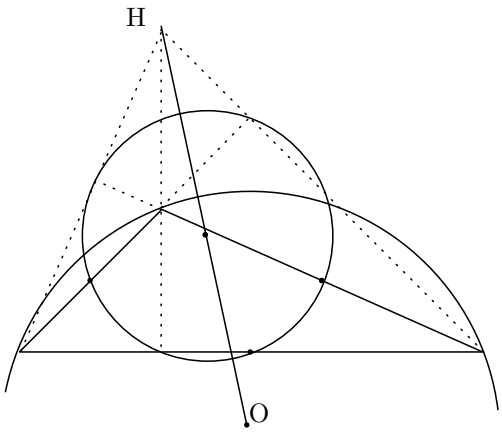
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \frac{R}{2}$$

となります．これは OH の中点を中心とし，外接円の半径の $\frac{1}{2}$ を半径とする円です．(2) よりこの円は線分 AH の中点を通ります．他も同じなので，軌跡の円が AH, BH, CH の中点を通ることがわかります．

さらにこの問題の解説のなかで先生が，まず鋭角三角形であることは必要でない．鈍角三角形，直角三角形でも同様に円が定まるといわれました．確かに辺の延長線上を考えても，直交関係などは同じことなので，鈍角三角形でも同じです．

その上で，軌跡の円の上には，各頂点から対辺への垂線の足，各辺の中点の合計 9 個の点が乗っていることを教えてくれました．実際に図を描くと確かに 9 個の点が 1 つの円上にあって，感動しました．

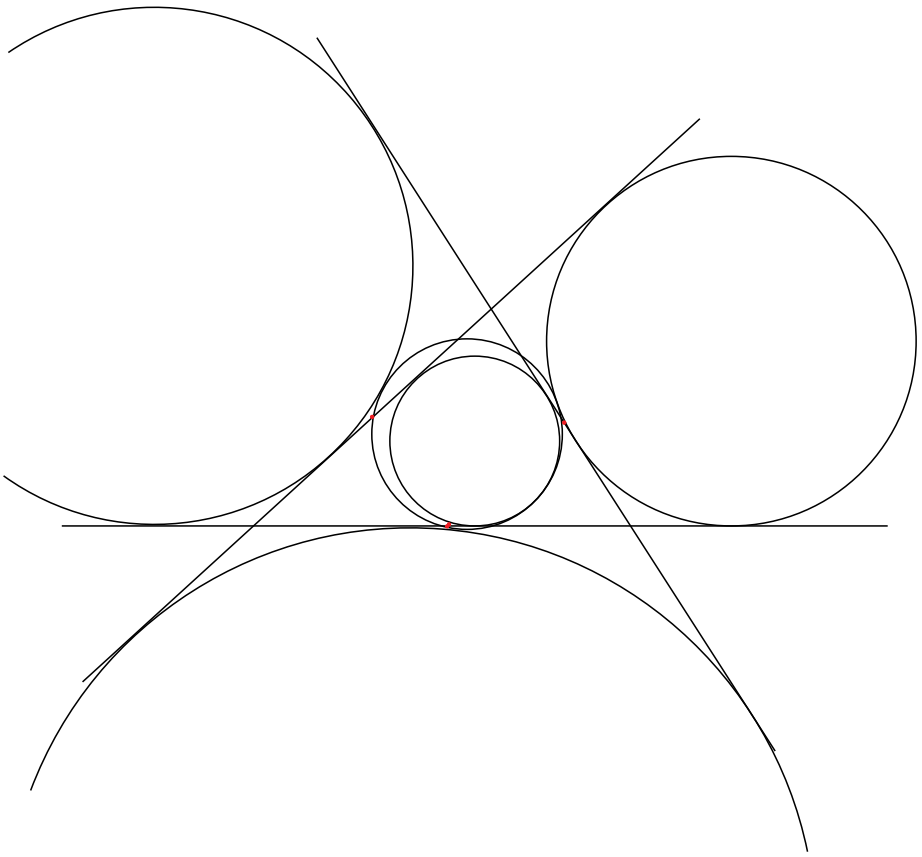
各辺の中点の 3 点で定まる円と，頂点から対辺への垂線の足の 3 点で定まる円と，頂点と垂心の中点である 3 点で定まる円が一致するのです．



南海　一つの円上に 9 個もの点が乗っている．だからこの円を**九点円**というのだ．最初にこれを見つけた人は感動しただろう．

ところが九点円はさらに不思議ないくつもの性質をもっている．それがフォイエルバッハの定理だ．フォイエルバッハの定理とは △ABC の内接円や傍接円がこの九点円に接しているということなのだ．

耕一　内接円と接しているのですか．図を描いてみます．接点が細かくなって少し見にくいですが，確かに接しています．傍接円と接している方が見やすいです．



3.5.1.2　九点円の証明

南海　まず先の入試問題と先生の解説を次のように九点円の定理にまとめる．先の問題の解答としてこれを証明してほしい．証明方法はいろいろあるが，問題にあわせてベクトルで示してほしい．

定理 63　△ABC の外心を O，垂心を H とし，OH の中点を D とする．3 線分 AH, BH, CH の各中点，3 辺 AB, BC, CA の各中点，3 直線 AH, BH, CH と辺 BC, CA, AB の各交点，の 9 個の点は，点 D を中心とし外接円の半径の $\dfrac{1}{2}$ を半径とする円周の上に存在する．この円を △ABC の**九点円**という．

証明　点 H′ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OH'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

で定める．外接円の半径を R とする．

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = R$$

である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OH'}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AH'} \perp \mathrm{BC}$$

同様に

$$\mathrm{BH'} \perp \mathrm{CA},\ \mathrm{CH'} \perp \mathrm{AB}$$

も成立するので，各頂点から対辺への垂線は 1 点 H′ で交わる．つまり点 H′ は △ABC の垂心である．この結果

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる．

線分 AH の中点を L，辺 BC の中点を M，直線 AH と辺 BC の交点を K とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{DL}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である．したがって

$$\mathrm{L},\ \mathrm{D},\ \mathrm{M}$$

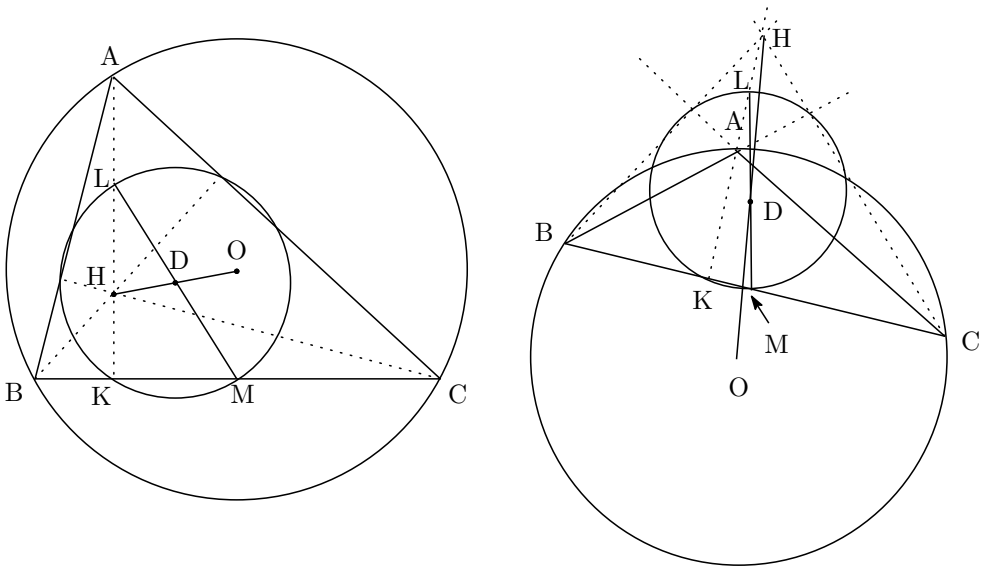
は 1 直線上にあり，かつ

$$\mathrm{DL} = \mathrm{DM} = \frac{R}{2}$$

である．ゆえに L, M は点 D を中心とし，半径が $\dfrac{R}{2}$ の円周上ある．さらに線分 LM はこの円の直径である．また，

$$\mathrm{LK} \perp \mathrm{MK}$$

なので，点 K は直径の両端とのなす角が直角となり，点 K もこの円周上にある．



この 3 点の組について示されたことは，他の 3 点ずつの 2 組についても成立する．

中心と半径はいずれも同じなので，題意の 9 個の点は，点 D を中心とする半径 $\frac{R}{2}$ の円周上に存在することが示された． □

南海　これでよい．

3.5.1.3　フォイエルバッハの定理

南海　さてこの九点円に内接円や傍接円が接するというフォイエルバッハの定理の証明に進もう．あらためてフォイエルバッハの定理をまとめる．

定理 64 (フォイエルバッハの定理)　△ABC の外心を O，内心を I とする．△ABC の九点円は△ABC の内接円と内接円を内に内接し，三つの傍接円と外接する．

フォイエルバッハが 1822 年に証明したものである．このフォイエルバッハは『キリスト教の本質』等の著者である有名なフォイエルバッハの兄弟である．欧州はフランス革命の後であり，今日に続く思想が生まれた時代である．この時代は日本でいえば江戸時代文政年間，幕藩体制の矛盾は大きくなっていたが，まだ討幕運動には至らないときであった．

今回はこの事実を三通りの方法で証明し，さらに接点を特徴づけていこう．幾何の論証はこの半世紀，高校ではあまり教えられなくなった．この分野は 19 世紀に大きく展開され，膨大な蓄積があるが，それが受け継がれなくなっていくのはたいへん惜しい．だからできるだけ最近の高校生にわかりやすくやってみたい．

3.5.2　座標の方法による証明

ここでは高校生にとりつきやすいように座標の方法で証明しよう．本来これは，複素数平面でやる方が，計算が簡明にある．数学 III で複素数平面を習ったら，以下の証明を複素数での証明に翻訳してみてほしい．

さて，垂心を座標で表すために，次の補題が必要だ．これは (　) 内の設問形式で 2007 年に京都大学で出題された．

この証明では，先に 1 点で交わることを証明してもよいし，先の定理の証明の考え方で，あとから垂心に関する問題として証明してもよい．

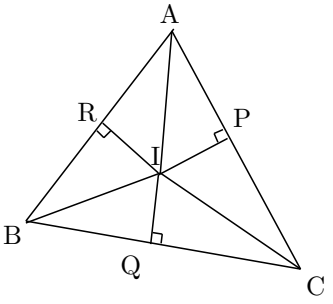
補題 9　△ABC において，∠A の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を A′ とする．同様に ∠A, ∠B の二等分線とこの外接円との交点をそれぞれ B′, C′ とする．このとき 3 直線 AA′, BB′, CC′ は 1 点 H で交わり，この点 H は三角形 A′B′C′ の垂心と一致する（ことを示せ.〔京大 2007 年理系 (甲) 問題〕）

証明 1

角の二等分線 3 本が 1 点で交わることを示す.

∠A，∠B の二等分線の交点を I，I から辺 CA, CB, AB への垂線の足を P, Q, R とする．

△AIP と △AIR は，∠IAP = ∠IAR であり，さらに 1 辺を共有する直角三角形なので合同である．この結果，IP = IR．同様に IQ = IR. よって △CIP と △CIQ は IP = IQ で 1 辺を共有する直角三角形となり合同である．この結果 ∠ICP = ∠ICQ となり直線 CI が ∠C の二等分線である．つまり 3 本の頂角の二等分線は 1 点で交わることが示され，3 直線 AA′, BB′, CC′ が 1 点 I で交わることが示された．
題意の H は H = I にとればよい.



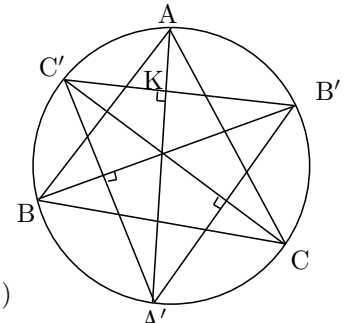
次に H が三角形 A′B′C′ の垂心であることを示す.

∠A = 2α，∠B = 2β，∠C = 2γ とする．直線 AA′ と直線 B′C′ の交点を K とする．円周角の定理を用いることにより △KB′A′ において

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{KA'B'} &= \angle \mathrm{AA'B'} = \angle \mathrm{ABB'} = \beta \\ \angle \mathrm{KB'A'} &= \angle \mathrm{C'B'B} + \angle \mathrm{BB'A'} \\ &= \angle \mathrm{C'CB} + \angle \mathrm{BAA'} = \gamma + \alpha \end{aligned}$$

$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ なので $\angle \mathrm{A'KB'} = \dfrac{\pi}{2}$．つまり

$$\mathrm{AA'} \perp \mathrm{B'C'} \tag{3.1}$$



他も同様である．したがって 3 直線 AA′, BB′, CC′ は △A′B′C′ の各頂点から対辺への垂線であることがわかる．これが 1 点 H で交わるので H は三角形 A′B′C′ の垂心である．　□

証明 2

(証明 1 の後半と同様に，先に (3.1) を示す．その後次のように，3 直線 AA′, BB′, CC′ が 1 点で交わることを示す．)

外接円の中心を O とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}} + \overrightarrow{\mathrm{OC'}}$$

とおく．$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right|$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{A'H}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B'C'}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB'}} - \overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{OB'}} + \overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB'}} - \overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right) \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right|^2 = 0
\end{aligned}
$$

つまり

$$\mathrm{A'H} \perp \mathrm{B'C'}$$

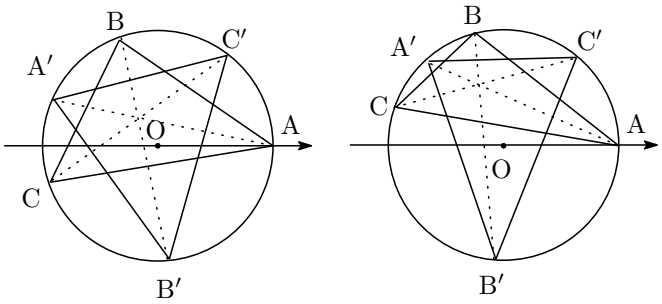
(3.1) とあわせて点 H は直線 AA′ 上にある．(3.1) と同様に

$$\mathrm{BB'} \perp \mathrm{C'A'},\ \mathrm{CC'} \perp \mathrm{A'B'},$$

もなり立つ．よって同様に点 H は直線 BB′，直線 CC′ 上にもあり 3 直線は 1 点 H で交わることが示された．この点を垂心というのは垂心の定義である． □

これを踏まえてフォイエルバッハの定理を証明しよう．

証明　定性的な性質の証明なので，△ABC の外接円の半径を 1 としてよい．△ABC の外心 O を原点とする．点 A を (1, 0) として xy 座標平面に置く．点 B, C の座標をそれぞれ $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $(\cos\beta,\ \sin\beta)$ とおく．このとき $0 < \alpha < \pi$ として一般性を失わない．



補題 9 と同様に，各頂角の二等分線と接円の交点を A′, B′, C′ とおく．この三点の座標を求める．円周角と中心角の関係を見ることにより

$$\angle\mathrm{BOA'} = 2\angle\mathrm{BAA'} = 2\angle\mathrm{A'AC} = \angle\mathrm{A'OC}$$

これから

$$\angle\mathrm{AOA'} = \frac{1}{2}\left(\angle\mathrm{AOB} + \angle\mathrm{AOC}\right)$$

等を得る．符号に注意し角を左回りを正にとる．OA′, OB′, OC′ と x 軸とのなす角はそれぞれ，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\pi + \dfrac{\beta}{2}$, $\dfrac{\alpha}{2}$ となる．これは鈍角三角形でも同じである．つまり

$$\mathrm{A'}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\ \mathrm{B'}\left(-\cos\frac{\beta}{2},\ -\sin\frac{\beta}{2}\right),\ \mathrm{C'}\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

となる．

補題 9 によって △A′B′C′ の垂心が △ABC の内心である．補題 9 の証明と同様にして，△A′B′C′ の垂心として △ABC の内心を求めると，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OI}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}} + \overrightarrow{\mathrm{OC'}} \\
&= \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$

である．一方，△ABC の九円点の中心を D とすると，補題 9 によって

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\alpha + \cos\beta,\ \sin\alpha + \sin\beta\right)$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{ID}} = \dfrac{1}{2}(X,\ Y)$ と置くと，$\overrightarrow{\mathrm{ID}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OI}}$ より

$$\begin{aligned}
X &= 1 + \cos\alpha + \cos\beta - 2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + 2\cos\frac{\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2} \\
&= \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2} - 1\right)^2 - \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)^2 \\
Y &= \sin\alpha + \sin\beta - 2\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2} \\
&= 2\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2} - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)^2\right\} \tag{3.2}$$

次に内接円の半径 r_{I} は内心 I と直線 AB との距離である．直線 AB の方程式は

$$\sin\alpha(x-1) - (\cos\alpha - 1)y = 0 \tag{3.3}$$

なので，

$$r_{\mathrm{I}} = \frac{\left|\sin\alpha\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \cos\dfrac{\beta}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2} - 1\right) - (\cos\alpha - 1)\left(\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \sin\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\right|}{\sqrt{\sin^2\alpha + (\cos\alpha - 1)^2}}$$

$$\text{分母} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

である．また内心 I は直線 AB に関して原点と同じ側にあるので，(3.3) に $(0,\ 0)$ を代入したときの符号が負となることより，内心は $\sin\alpha(x-1) - (\cos\alpha - 1)y < 0$ を満たす側にある．この二点から

$$\begin{aligned}
r_{\mathrm{I}} &= -\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} - 1\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= -\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \\
&\qquad + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} - 1 \\
&= \frac{1}{2}\left\{2\cos\frac{\alpha}{2} - 2\cos\frac{\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&&+\frac{1}{2}\left\{1-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\beta-\sin^2\beta-1\right\}\\
&=\quad\frac{1}{2}\left\{1-\left(1+2\cos\frac{\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}\right)\right.\\
&&\left.-\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\right\}\\
&=\quad\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}-1\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right|=\frac{1}{2}-r_{\mathrm{I}}$$

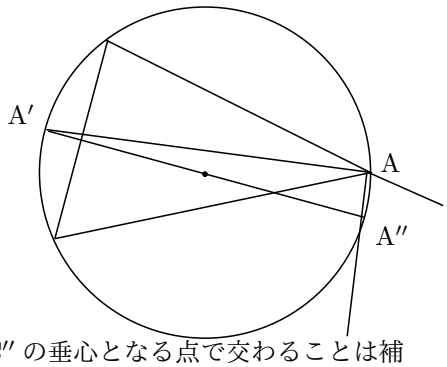
ところが九円点の半径は $\dfrac{1}{2}$ なので，この等式は九円点と内接円の中心間の距離が半径の差に等しいことを示している．よって九円点と内接円は内接円を内側にして接している．

傍接円の場合．

$\angle$B の二等分線と外接円の交点を B′，$\angle$A, C の補角の二等分線と外接円の交点を A″, C″ とする．$\angle\mathrm{A'AA''}=\dfrac{\pi}{2}$ なので，点 A″ は点 A′ の原点 O に関する対称点である．これから OA″, OC″ が x 軸の正の方向となす角はそれぞれ求めると

$$\mathrm{OA''}:\pi+\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,\quad \mathrm{OC''}:\pi+\frac{\alpha}{2}$$

となる．



頂角 $\angle$B の二等分線と $\angle$A, C の補角の二等分線が $\triangle\mathrm{A''B'C''}$ の垂心となる点で交わることは補題 9 と同様に示される．この交点が傍接円の中心である．この交点を J とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA''}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\overrightarrow{\mathrm{OC''}}$$

である．この結果

$$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\left(-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2},\ -\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

となる．同様の計算をおこなうと

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{JD}}\right|=\frac{1}{2}\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+1\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}$$

となり，さらに同様の方法で半径 r_{J} を求める．

$$r_{\mathrm{J}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+1\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}$$

この結果

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{JD}}\right|=\frac{1}{2}+r_{\mathrm{J}}$$

となり，九点円と傍接円が外接していることがわかる．他の傍接円の場合も同様に示される． □

耕一　たいへんな計算ですが，計算の方向ははっきりしています．

南海　そうなのだ．これをいくつもの補助線を引いて示すのは，職人技的な技巧が必要だ．フォイエルバッハの定理の証明は『幾何学』(長友次郎吉著) に四つ載っている．また『幾何の有名な定理』(矢野健太郎著) には複素数平面での複素数の計算による証明がある．三角関数の計算による本証明はいずれにも載っていないが，本質的には複素数の計算によるものと同じだ．

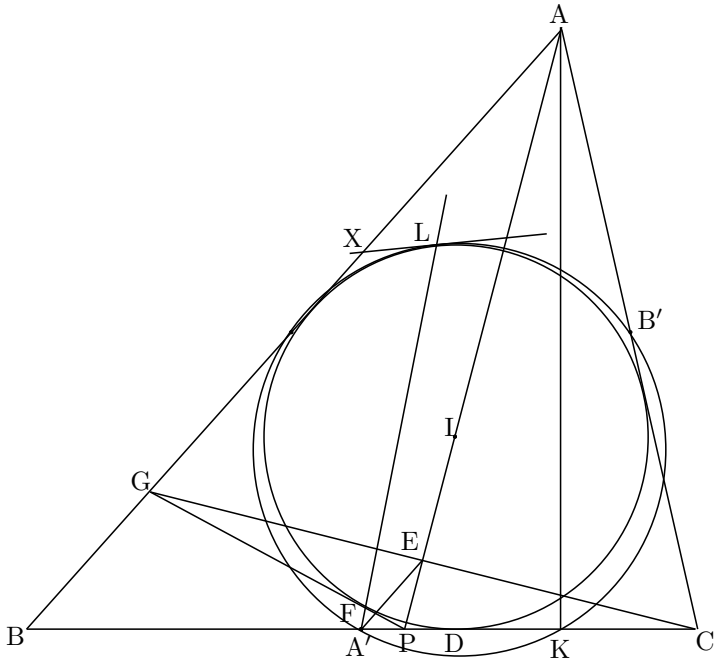
3.5.3　幾何の論証による証明

南海　古典的な平面幾何の論証による証明を紹介しよう．

図のように △ABC の内接円と辺 BC との接点を D，内心を I とし，AI と辺 BC との交点を P，また辺 BC の中点を A′，辺 AC の中点を B′ とする．頂点 A から対辺への垂線の足を K とする．

点 P から内接円に辺と異なる接線を引き，接点を F，PF と辺 AB の交点を G とする．CG と直線 AI の交点を E，直線 AF と内接円の交点を L とする．

このとき L は九点円上にあり，九点円と内接円は L で接している．



これを証明しよう．必要なら点の名前をつけ替え AB ≧ AC とする．内接円と中心と通る直線 AP に関する対称性から

$$\mathrm{CE} = \mathrm{GE},\ \mathrm{CG} \perp \mathrm{AD}$$

A′ と E が線分 BC と CG の中点であり，

$$\mathrm{A'E} \mathbin{/\!/} \mathrm{BG}$$

A，C，K，E は AC を直径とする円周上の点であるから，内接四角形 ACKE の対角とその外角の関係などより

$$\angle \mathrm{EKA'} = \angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{EAB} = \angle \mathrm{A'EP}$$

この結果，接弦定理によって，A′E は △PKE の外接円に接する．よって方べきの定理から

$$\mathrm{A'E}^2 = \mathrm{A'P} \cdot \mathrm{A'K} \tag{3.4}$$

ここで

$$\mathrm{A'E} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{AB} - \mathrm{AC})$$

であり，また内接点と辺長の関係より

$$\mathrm{A'D} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{AB} - \mathrm{AC}\right)$$

なので $\mathrm{A'E} = \mathrm{A'D}$．よって (3.4) と方べきの定理から

$$\mathrm{A'P} \cdot \mathrm{A'K} = \mathrm{A'D}^2 = \mathrm{A'F} \cdot \mathrm{A'L}$$

方べきの定理の逆から L，F，P，K は共円である．内接四角形 LFPK の対角とその外角の関係などより

$$\angle \mathrm{A'LK} = \angle \mathrm{BPG} = \angle \mathrm{AGP} - \angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C} - \angle \mathrm{B} \tag{3.5}$$

ここで △AKC は直角三角形で B′ が AC の中点であるから，$\mathrm{B'C} = \mathrm{B'K}$．よって

$$\angle \mathrm{B'CK} = \angle \mathrm{B'KC}$$

また $\angle \mathrm{B'A'C} = \angle \mathrm{B}$ なので，$\angle \mathrm{A'BK} = \angle \mathrm{C} - \angle \mathrm{B}$ である．

(3.5) とあわせて

$$\angle \mathrm{A'LK} = \angle \mathrm{A'BK}$$

である．円周角の定理から，点 L が九点円上にあることが示された．

L における内接円の接線を LX とする．L，F，P，K は共円なので

$$\angle \mathrm{XLF} = \angle \mathrm{GFL} = \angle \mathrm{LKA'}$$

これは LX が九点円にも接することを示している． □

耕一　すごいものですね．円周角の定理は強力な定理です．

3.5.4　反転法による証明

南海　『数学対話』では「反転と円環問題」で反転を用いる論証をおこなった．フォイエルバッハの定理も反転法を用いる証明がある．これは『幾何学』(長友次郎吉著) にある最後の証明法である．これをかみ砕いて紹介しよう.「反転と円環問題」が未習の場合は，先に「反転と円環問題」を読んでほしい．準備として補題をいくつか証明する．いずれも有用であるからぜひ自分で証明してみてほしい．

補題 10　△OAB がある．∠AOB の内角の二等分線と外角の二等分線は，辺 AB を OA : OB にそれぞれ内分，外分する．

耕一　内分の方はよく知っていますが，外分は知りません．

南海　証明はベクトルを用いてはどうだろうか．類似問題が 09 年の阪大にある．その解答を参考にして証明してほしい．

耕一　はい．

証明

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}, \quad \vec{b} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$$

とおく．$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$ なので，

$$\frac{(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}|} = \frac{1+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|} = \frac{(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}||\overrightarrow{b}|}$$

である．つまり $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ となす角の余弦が等しく，その結果なす角が等しい．よって $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$ は $\angle\mathrm{AOB}$ の内角の二等分の方向である．

同様に二つの外角の一方を二等分する方向として $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$ を用いることができる．

これら二等分の方向が直線 AB と交わる点を C, D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = h\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = k\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\right)$$

とおけ，この係数の和が 1 であることから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\\
\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}{-\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}{-\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OB}}
\end{aligned}$$

よって点 C, D は線分 AB をそれぞれ OA : OB に内分，外分する． □

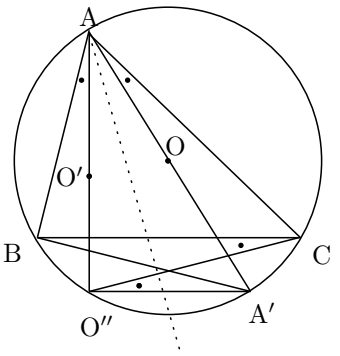
南海　線分 AB を C, D が内分，外分しているとき，一直線上の 4 点 A, B, C, D は**調和点列**であるという．「反転と円環問題」にもこの比は出てきていた．

補題 11　△ABC と外心 O がある．∠A の二等分線に関して点 O と対称な点を O′ とする．このとき

$$\mathrm{AO'}\perp\mathrm{BC}$$

である．

証明　中心に関する点 A の対称点を A′，AO′ と外接円の交点を O″ とする．



∠A の二等分線に関して直線 AB, AC が対称の位置にあり，点 O, O′ も対称の位置にあるので，

$$\angle\mathrm{BAO''} = \angle\mathrm{CAA'}$$

一方

$$\angle\mathrm{BAO''} = \angle\mathrm{BCO''},\ \angle\mathrm{CAA'} = \angle\mathrm{CO''A'}$$

である．この結果

$$\mathrm{BC}\ /\!/\ \mathrm{O''A'}$$

$\angle\mathrm{AO''A'} = \dfrac{\pi}{2}$ なので，

$$\mathrm{AO'}\perp\mathrm{BC}$$

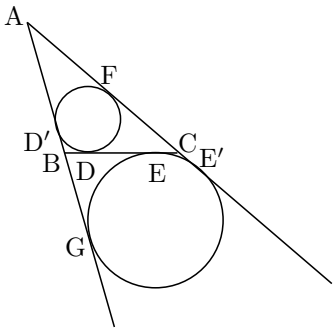
である．鈍角三角形でも同様に示される． □

南海　もう一つ，内接円と傍接円の接点に関する補題が必要だ．

補題 12　△ABC の内接円と辺 BC の接点を D，∠A の傍接円と辺 BC の接点を E とする．

$$\mathrm{BD} = \mathrm{EC}$$

である．



証明　図のように，内接円の他の辺との接点を D′, F，傍接円と他の辺との接点を E′, G とする．

円の対称性から BE = BG, EC = E′C, BE = BG なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA} &= \mathrm{AB}+\mathrm{BE}+\mathrm{EC}+\mathrm{CA}\\ &= \mathrm{AB}+\mathrm{BG}+\mathrm{E'C}+\mathrm{CA} = \mathrm{AG}+\mathrm{AE'}\end{aligned}$$

ところが AG = AE′ なので，

$$\mathrm{AG} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$

この結果

$$\begin{aligned}\mathrm{BE} &= \mathrm{BG} = \mathrm{AG}-\mathrm{AB}\\ &= \frac{1}{2}(-\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}) = \frac{1}{2}(-\mathrm{AD'}-\mathrm{D'B}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})\\ &= \frac{1}{2}\{(\mathrm{BC}-\mathrm{BD})+(\mathrm{AC}-\mathrm{AF})\} = \frac{1}{2}(\mathrm{DC}+\mathrm{FC})\end{aligned}$$

DC = FC なので，

$$\mathrm{BE} = \mathrm{DC}$$

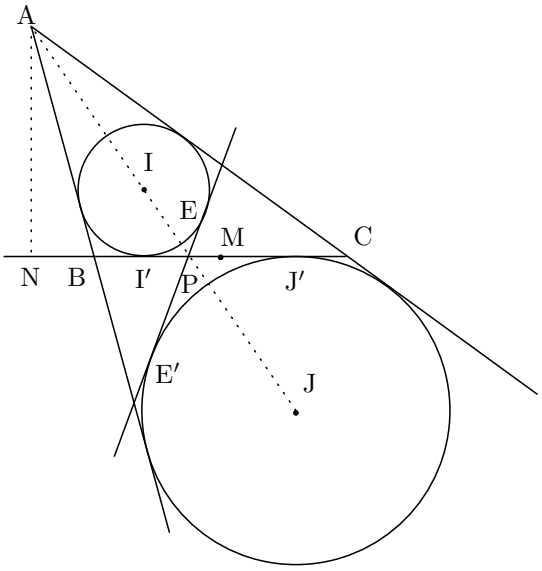
これから

$$\mathrm{BD} = \mathrm{EC}$$

である． □

南海　反転に関する準備の上で，フォイエルバッハの定理の反転法による証明を行おう．

定理 63 の点の記号はそのまま用いる．とくに O, D, M はそれぞれ，外心，九点円の中心，BC の中点とする．さらに内心 I と A に対する傍心を J とし，IJ と辺 BC の交点を P とする．点 P を通りこの内接円と傍接円に接する辺 BC と異なる共通接線を引き，その接点を E, E′ とする．さらに点 A, I, J から直線 BC への垂線の足を N, I′, J′ とする．



まず関係式

$$\mathrm{MI'}^2 = \mathrm{MJ'}^2 = \mathrm{MP}\cdot\mathrm{MN} \qquad (3.6)$$

を示す．

AN // II′ である．∠A の二等分線に関する補題 11 より AO は AN と対称で，II′ と IE も同じ二等分線に関して対称である．したがって

$$\mathrm{IE} \mathbin{/\!/} \mathrm{OA}$$

である．ところが定理 63 の証明内にあるように

$$\overrightarrow{\mathrm{DM}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

なので，

$$\mathrm{IE} \mathbin{/\!/} \mathrm{DM}$$

つまり点 E における内接円の接線と，点 M における九点円の接線は平行である．

つぎに補題 10 から，点 I と点 J は AP を BA : BP に内分，外分する．よって

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{IP}}{\mathrm{AI}} = \frac{\mathrm{JP}}{\mathrm{AJ}}$$

この結果，垂線の足での比をとることにより

$$\frac{\mathrm{I'P}}{\mathrm{NI'}} = \frac{\mathrm{J'P}}{\mathrm{NJ'}} \tag{3.7}$$

を得る．

$$\mathrm{I'P} = \mathrm{I'M} - \mathrm{PM},\ \mathrm{NI'} = \mathrm{NM} - \mathrm{MI'}$$
$$\mathrm{J'P} = \mathrm{J'M} + \mathrm{MP},\ \mathrm{NJ} = \mathrm{NM} + \mathrm{J'M}$$

なので，これらを (3.7) に代入する．補題 12 より，点 M は線分 I′J′ の中点でもある．よって $\mathrm{MI'} = \mathrm{MJ'}$ であるのでこれをもちいて整理すると

$$\mathrm{MI'}^2 = \mathrm{MJ'}^2 = \mathrm{MP} \cdot \mathrm{MN}$$

が得られる．これは鋭角三角形の場合も同様に成りたつ．

いま点 M を反転の中心とし，MI′ を反転の半径とする反転をとる．方べきの定理よりこの反転で内接円と傍接円はそれ自身に移る．また九点円は反転の中心 M を通るので，ある直線 l に反転される．M における九点円の接線は九点円と M の他に共有点はない．したがって l は M における九点円の接線と共有点がない．つまり，l は M における九点円の接線と平行である．直線 EE′ は M における九点円の接線と平行であったので，l と直線 EE′ は平行である．

ところが関係式 (3.6) は点 P と点 N はこの反転に関して互いに移ることを示している．九点円は点 N を通るので l は点 P を通る．この結果 l は直線 EE′ に一致する．

直線 EE′ は内接円，傍接円に接しているので，反転で戻した九点円は内接円，傍接円と接している．その接点は点 E, E′ とこの反転で対応する点である． □

耕一　接点も与えられるのですね．この接点の決め方と，幾何の証明での接点の決め方と，同じ点を定めるのですね．不思議な気がします．

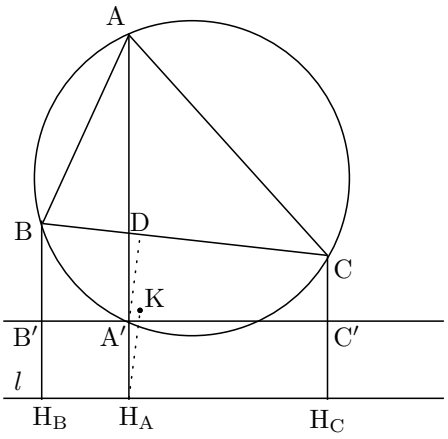
南海　それは今後の課題としよう．さらにこの接点をさらに別の面からも特徴づけることができる．そこに進もう．

3.5.5　直極点

南海　九円点はこれで終わりではない．まだまだ奥深い世界がある．この接点を特徴づけることができる．その準備として一つ新しい概念を導入しよう．

定理 65　△ABC と頂点を通らない直線 l がある．各頂点から l への垂線の足を $\mathrm{H_A}$，$\mathrm{H_B}$，$\mathrm{H_C}$ とする．点 $\mathrm{H_A}$ から直線 BC への垂線，点 $\mathrm{H_B}$ から直線 CA への垂線，点 $\mathrm{H_C}$ から直線 AB への垂線は 1 点で交わる．この点 K を直線 l の**直極点**という．

証明 1



直線 $\mathrm{AH_A}$ と △ABC の外接円の交点を $\mathrm{A'}$ とする．$\mathrm{A'}$ を通り l に平行な直線と直線 $\mathrm{BH_B}$，直線 $\mathrm{CH_C}$ との交点をそれぞれ $\mathrm{B'}$, $\mathrm{C'}$ とする．また $\mathrm{A'}$ から直線 BC への垂線の足を D とする．

直線 $\mathrm{B'D}$ と直線 AC が直交することを示す．そのためには

$$\angle\mathrm{ACD} + \angle\mathrm{BDB'} = \frac{\pi}{2}$$

を示せばよい．円周角の相等と $\mathrm{H_AA'} /\!/ \mathrm{H_BB'}$ より

$$\angle\mathrm{ACD} = \angle\mathrm{AA'B} = \angle\mathrm{A'BB'}$$

である．

また $\angle\mathrm{A'B'B} = \angle\mathrm{A'DB}$ より 4 点 $\mathrm{B'}$, $\mathrm{A'}$, D, B は同一円周上にある．よって

$$\angle\mathrm{BDB'} = \angle\mathrm{BA'B'}$$

ところが

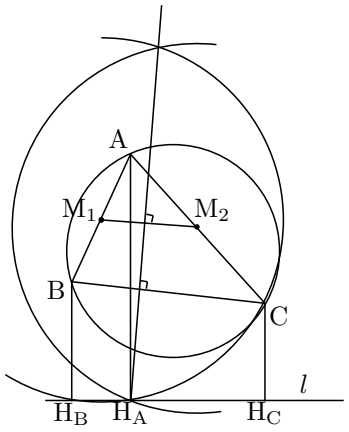
$$\angle\mathrm{BA'B'} + \angle\mathrm{A'BB'} = \frac{\pi}{2}$$

なので，直線 $\mathrm{B'D}$ と直線 AC は直交している．同様に直線 $\mathrm{C'D}$ と直線 BA も直交している．

線分 $\mathrm{A'D}$ を点 $\mathrm{A'}$ が $\mathrm{H_A}$ まで平行移動するとき点 D が異動する点を K とする．この方向と大きさの平行移動で点 $\mathrm{B'}$ は $\mathrm{H_B}$ に，点 $\mathrm{C'}$ は $\mathrm{H_C}$ に移る．直線 $\mathrm{H_BK}$ と直線 AC，直線 $\mathrm{H_CK}$ と直線 BA も直交している．

つまり，点 $\mathrm{H_A}$ から直線 BC への垂線，点 $\mathrm{H_B}$ から直線 CA への垂線，点 $\mathrm{H_C}$ から直線 AB への垂線は 1 点 K で交わる．　□

証明 2



△ABC の辺 AB と AC の中点を M_1, M_2 とする．点 M_1 を中心とし 2 点 H_A，H_C を通る円がある．また点 M_2 を中心とし 2 点 H_A，H_B を通る円がある．

この 2 円の共通直線，つまり根軸は直線 M_1M_2 と直交する．ところが M_1M_2 // BC なのでこの根軸が H_A から辺 BC への垂線に他ならない．

同様に辺 BC の中点 M_3 を中心とし 2 点 H_B，H_{BC} を通る円を考える．他の 2 円とのそれぞれの根軸は H_B から辺 CA への垂線，H_C から辺 AB への垂線となる．

3 円の方程式を，x^2 の係数を 1 にとって $f_i(x, y) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ とすると，3 本の根軸の方程式は

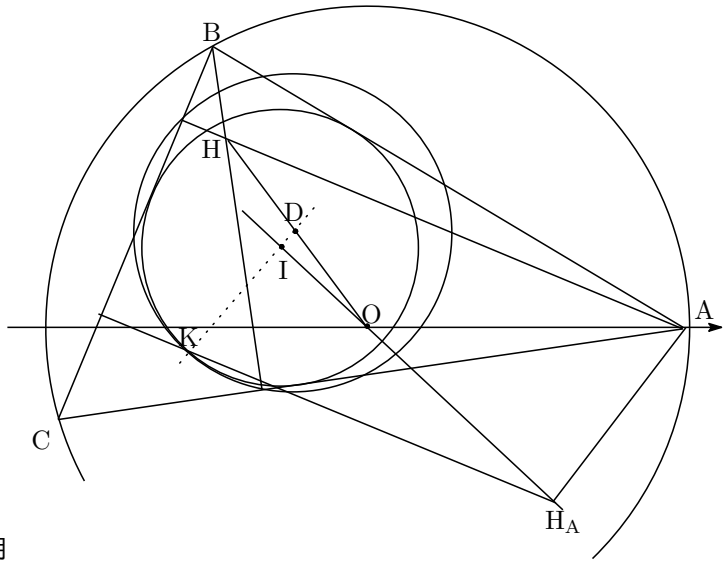
$$f_1(x, y)-f_2(x, y) = 0,\ f_2(x, y)-f_3(x, y) = 0,\ f_3(x, y)-f12(x, y) =$$

となり，これらの左辺の和は 0 であるから，3 本の根軸は 1 点で交わる．よって点 H_B から直線 CA への垂線，点 H_C から直線 AB への垂線は 1 点 K で交わる． □

南海　この準備を済ますと，九点円と内接円の接点が直線 OI の直極点であることを示すことができる．

定理 66　△ABC は正三角形でないとする．△ABC の外心を O，内心を I とする．△ABC の九点円と内接円は直線 OI の直極点で接する．

ある傍接円の傍心を J とする．△ABC の九点円とその傍接円は直線 OJ の直極点で接する．



証明

正三角形ではないので，内心は外心と異なり，九点円と内接円も異なる．定理 9 によって九点円と内接円は接する．したがってその接点はそれぞれの中心を結ぶ直線 DI と九点円の交点である．この交点を K とする．

K が直線 OI の直極点であることを示す.
そのために，頂点 A から直線 OI に下ろした垂線の足を $\mathrm{H_A}$ とするとき，

$$\mathrm{H_AK}\perp\mathrm{BC}$$

を示す．これが示されれば，他も同様であるので，K が直線 OI の直極点であることがわかる．
その証明をつぎの三段階でおこなう．

(1) ベクトルの大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right|$ と $\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|$ の関係式を求める．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH_A}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を求める．

(3) $\mathrm{H_AK}\perp\mathrm{BC}$ を示す.

(1) △ABC の外心を原点にとり定理 9 と同様に角を決める．定理 9 の証明から

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{ID}}=\frac{1}{2}\left(\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}-1\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)^2,\ 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}-1\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

である．ここで

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 &= \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\\ &= 3-2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)-2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\ &\quad +2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\\ &= 3-2\cos\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

一方，等式 (3.2) をさらに計算すると，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right| &= \frac{1}{2}\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}-1\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{3-2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)-2\cos\frac{\alpha}{2}+2\cos\frac{\beta}{2}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{3-2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}+2\cos\frac{\beta}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2\end{aligned}$$

となる．よって関係式

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 \tag{3.8}$$

を得る．

(2) 点 $\mathrm{H_A}$ は点 A の直線 OI への正射影である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_A}}=t\overrightarrow{\mathrm{OI}}$$

とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AH_A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OI}} = 0$ より $t = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OI}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2}$ となる．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_A}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OI}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OI}}$$

また点 K は直線 DI 上に D, I, K の順にあり，$\mathrm{DK} = \dfrac{1}{2}$ となるものなので，

$$\overrightarrow{\mathrm{DK}} = -\frac{1}{2\left|\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{ID}}$$

これから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{H_AK}} &= \overrightarrow{\mathrm{OK}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_A}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{DK}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_A}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \frac{1}{2\left|\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right|}\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OI}}\right) - \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OI}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OI}}\end{aligned}$$

関係式 (3.8) より

$$\overrightarrow{\mathrm{H_AK}} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2}\left\{\left(1 - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OI}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OI}} + \left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 - 1\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right\}$$

(3)　$\mathrm{H_AK} \perp \mathrm{BC}$ を示す．

$$\begin{aligned}1 - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OI}} &= 1 - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\right) \\ &= 2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{4} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\alpha-\beta}{4} \\ &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{4} + \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\right) \\ &= 4\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 - 1\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \left(2 - 2\cos\frac{\alpha}{2} - 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}} \\ &= \left(1 - \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OH}} \\ &= \left(2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{4} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OH}} \\ &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{4} + \sin\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OH}} \\ &= 4\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\end{aligned}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{H_AK}} = \frac{4\sin\dfrac{\alpha}{4}\sin\dfrac{\beta}{4}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\overrightarrow{\mathrm{OI}} + \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right)$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\overrightarrow{\mathrm{OI}} + \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \\
= \;& \sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\
& + \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\left(1+\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta\right) \\
= \;& \sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\
& + \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\left(1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\cos\beta - \cos\alpha,\ \sin\beta - \sin\alpha) \\
&= \left(-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},\ 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \\
&= -2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\ -\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{H_AK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \;& \frac{-8\sin\dfrac{\alpha}{4}\sin\dfrac{\beta}{4}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2} \\
& \times\left\{\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right. \\
& \left. + \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\left(1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right\} \\
& \cdot\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\ -\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

この内積の $\dfrac{-8\sin\dfrac{\alpha}{4}\sin\dfrac{\beta}{4}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2}$ を除く部分を成分計算する．

$$\begin{aligned}
& \sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \\
+ \;& \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\left(1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \\
- \;& \sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\
- \;& \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(-\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right.\\
&\qquad\left.+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&= \sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\beta+\alpha}{4}\sin\frac{\beta-\alpha}{4}+2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}=0
\end{aligned}
$$

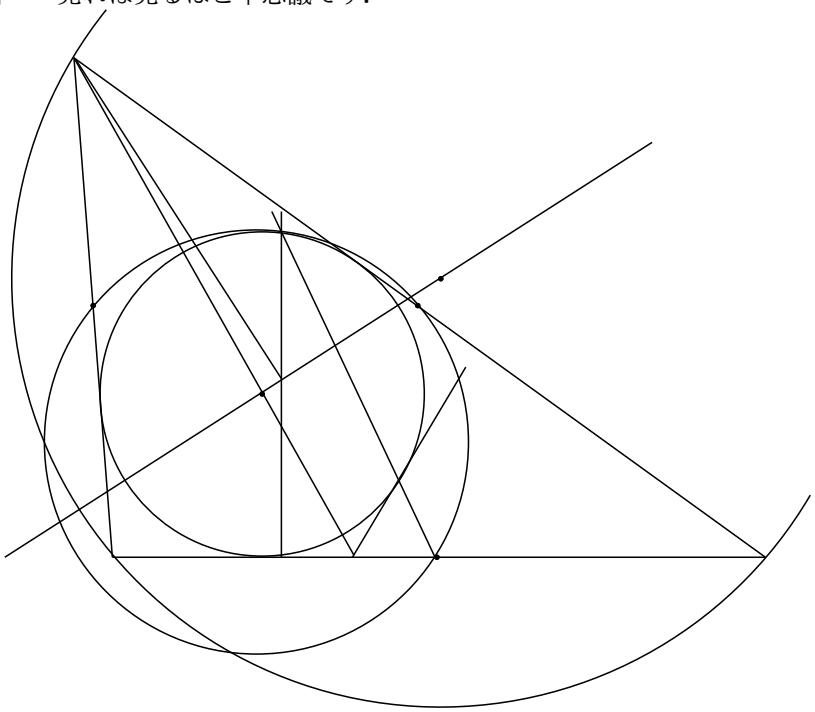
傍接円の場合の証明も同様である．この記述は略する．以上から定理は証明された． □

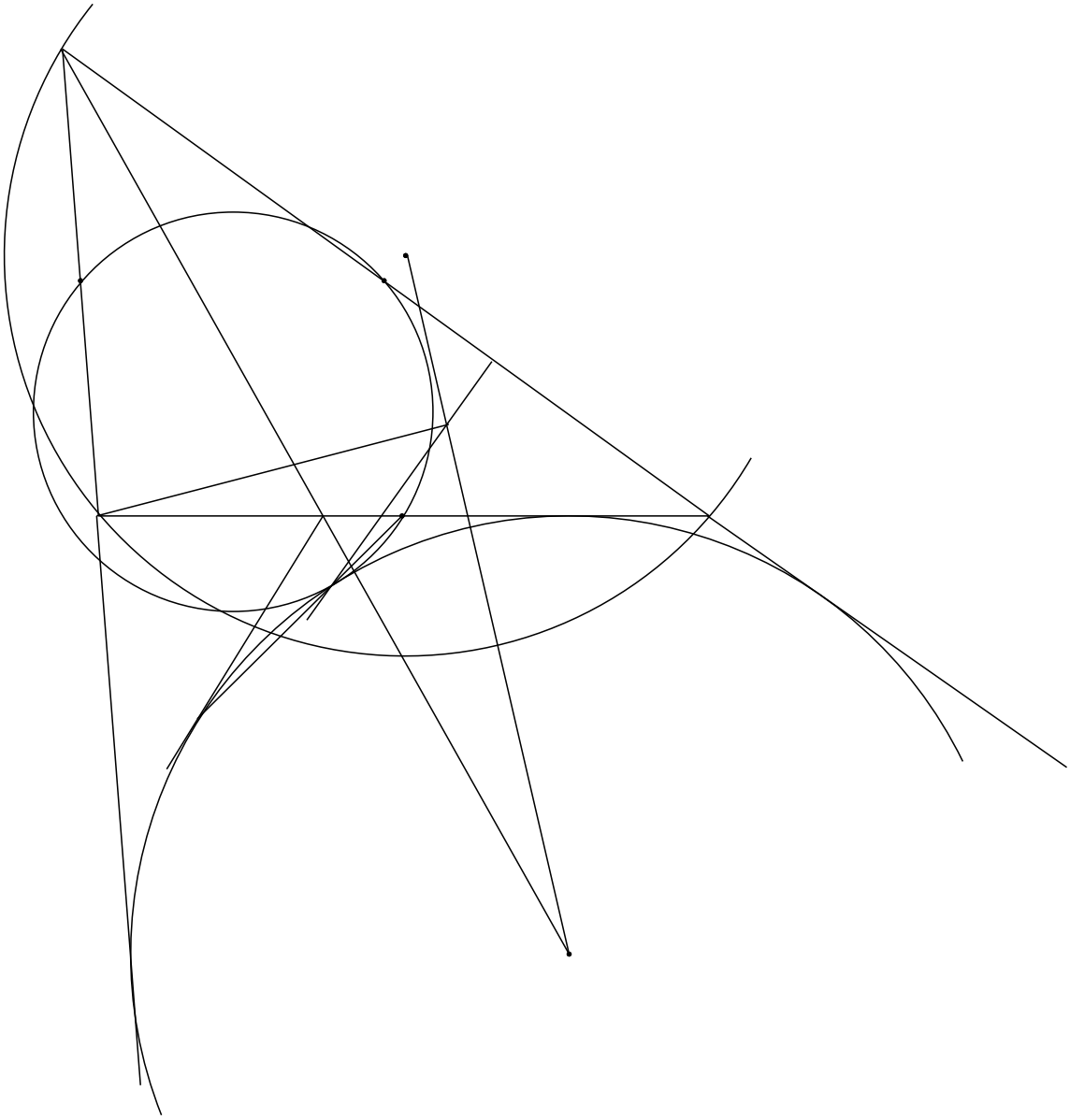
耕一　計算量は多いですが，しかしうまく組みあわせるときれいな結果になるのですね．

南海　傍接円の場合の計算は略した．代わりに図を描いておこう．

いずれにせよ九点円と内接円または傍接円は接する．その接点は外心と内心または傍心を結ぶ直線に関する直極点である．同時にまたその接点は，辺の中点を中心とし内接円または傍接円の接点までの距離を半径とする反転で，その接点の頂角の二等分線に関する対称点が移る点でもある．あえて点に記号をつけず図そのものを示すのでよく味わってほしい．

耕一　見れば見るほど不思議です．





3.5.6　参考書

- 幾何学大辞典 I，岩田至康編，槇書店，1971
- 幾何学，長友次郎吉，東京教学社，1969
- 幾何学－発見的研究法—（モノグラフ），清宮俊雄，科学新興社，1968
- 幾何の有名な定理 (数学ワンポイント双書 (36))，矢野健太郎，共立出版，1981
- 幾何のおもしろさ，小平邦彦，岩波書店，1985
- 幾何への誘い，小平邦彦，岩波書店，岩波現代文庫，2000

3.6　反転と円環問題

2009.2.25

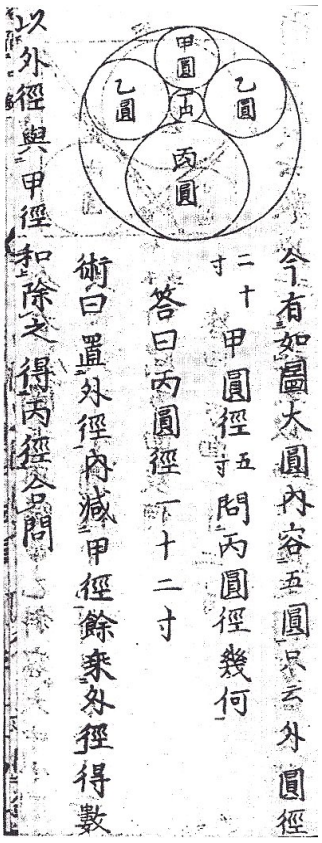
3.6.1　和算の問題

太郎　いくつかの入試問題で**反転**に出会いました．最近では 2007 年の阪大文理 3 番が反転の問題です.『別解研究』に載っているように解答がいくつもあることがわかりました．ただ入試問題としては，だいたい出てくる形は同じです．一方の点がある曲線上や領域内を動くとき，反転された点の軌跡や存在領域を求める，というものです．結局は座標で解くことが多いです．つまり，反転の位置にある二点の座標について，その関係式を導いたうえで，一方の点の条件から他方の点の条件を導くということになります．

南海　それらの入試問題は図形を反転したらどのような図形に変わるかということを問うている．その意味で反転そのものを問うている．実は反転には，反転を用いた図形問題の解法という重要な応用がある．

日本では江戸時代から数学の研究が盛んで，体系的な書物もあれば，各地の草の根の研究家が自分で考えたことを額にして奉納した算額というのもある．その研究および記述の方法は当然西洋のそれとは違う．その方法を和算という．しかしそれが同じ数学的現象を研究するものであったことは変わりない．

和算の解法は必ずしも反転を用いたものではないのだが，和算の問題には反転を用いることで比較的簡明に解けるものがある．西洋でも古くから知られてきた円環問題や，球の連鎖に関する問題に反転を応用することを考えていこう．



右の図を見てほしい．径というのは直径だ．　図は『精要算法　巻之下 』（藤田定資著）に載っている

外円径 20，甲円径 5 のとき丙円の径は？

という問題である．大きい円 (外円) と小さい円 (丁円) の間に甲円，乙円が互いに外接して並んでいる．このとき二つの円の径から他の径を求めよ，ということだ．

太郎　たくさん余弦定理を書いて連立すればできそうですが．

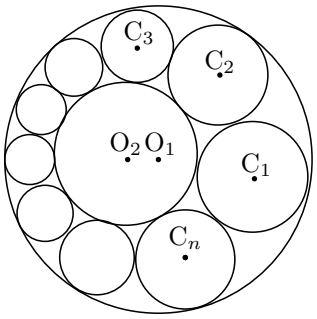
南海　上記の本ではそのようにして解かれているようだ．和算では三角比は用いない．三平方の定理を駆使する．実際にやってみれば大変なことに気づく．

この問題を一般化してとらえよう．いくつかの円が外円には内接し他の円とは外接するようにおかれている．

円 O_1 の内部に円 O_2 がある．すなわち，O_1, O_2 の半径を R, r，中心間の距離を d とすると，$R-r>d$ となっているとする．

円 C_1, C_2, $\cdots$, C_n が円 O_1 に内接，円 O_2 に外接し，さらに $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対し C_i が C_{i+1} に外接し，C_n は C_1 に外接している．

このような円の集合を**シュタイナーの円環**，略して「円環」ともいう．ヤーコブ・シュタイナー (Steiner，1796〜1863) は，スイスの幾何学・数学者である．



太郎　図を描いてみます．はじめにかいたときは最後の円は重なってしまい，この円列は円環になりません．なんとか少し大きさを変えて描きました．円 O_1, O_2, C_1, C_2, $\cdots$, C_n の中心を O_1, O_2, C_1, C_2, $\cdots$, C_n で表しています．

南海　このような状態になったとき，つまり円環が成立したとき，次のことが成り立つ．

$$d^2=(R-r)^2-4Rr\tan^2\frac{\pi}{n}$$

太郎　この等式には n 個の小円の半径は出てきません．

南海　いいところに気づいた．実は小円の半径は関係ない．次のことが成り立つ．

n 個の円環が一つできれば，最初の円 C_1 をどこにとっても順に外接させていけば，C_n は C_1 に外接する．

太郎　一つ存在すれば，どこからはじめても出来る，という形の定理を見たことがあります.「ポンスレの閉形定理」です.

南海　よく覚えている．

「ポンスレの閉形定理」は,「2 つの円の一方に内接し他方に外接する n 角形が 1 つ存在すれば，いずれかの円の任意の点を指定しても，その点を頂点の一つとする（あるいは一つの辺がその点で接する）n 角形が存在する」であった．

命題は類似している．しかし二つの定理は異なる範疇に属する．

太郎　それはどういうことですか．

南海　ポンスレの定理は射影幾何の定理であるが，シュタイナーの定理は射影幾何の定理ではない．いいかえると，ポンスレの定理は，ある 2 円で成立すれば，それを射影変換で移した 2 つの二次曲線で成立し，逆も言える．

シュタイナーの定理が成立する 2 円と n 個の円を射影変換すると，一方に内接し他方に外接し互いに接する n 個の 2 次曲線ができるが，シュタイナーの定理は，一般の二次曲線では証明されていない．つまり，一方に内接し他方に外接する任意の二次曲線で同様のことが成り立つことが示せているわけではない．

あとでシュタイナーの定理を反転によって同心円にうつして証明するが，円に関する反転は射影変換ではない．

3.6.2　反転

南海　さてこのシュタイナー円環の定理を反転を用いて証明し，さらに関連問題も考えよう．またそれを用いて先の和算の問題を解いてみよう．そのためにまず，反転について必要なことを証明していこう．

反転とはどのようなことか.

太郎　平面上の点 O を中心とする半径 ρ $(\rho > 0)$ の円がある．O から半直線上に 2 点 P, P′ をとる．

$$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OP}' = \rho^2$$

となるとき，P, P′ をこの円に関して互いに**反転**という．

南海　その通り．この円を反転の定円，O を反転の中心，ρ を反転の半径という．点 P がある図形を描くとき，それに対応して P′ もある図形を描く．それらの図形も互いに反転であるという．

太郎　反転は平面から平面への一対一の写像です.

南海　いや，厳密に言うと平面から反転の中心 O を除かなければならない.

$$X = \text{平面} - \{\mathrm{O}\}$$

とすると，X から X への一対一写像である.

太郎　そうか．O は無限の彼方に行ってしまうのだ.

南海　だから逆に無限遠点 ∞ を考え

$$Y = \text{平面} \cup \{\infty\}$$

とすると，反転は Y から Y への一対一写像と考えることもできる.

反転に関する基本事項は次のことだ．証明は 2007 年の阪大文理 3 番と同じくいろんな方法がある.

定理 67　平面上の円または直線 C が O を中心とする反転で曲線 C' になるとする．C の位置関係で C' は次のようになる.

C	C'
O を通らない円	円
O を通る円	直線
O を通らない直線	円
O を通る直線	直線

■

太郎　慣れた座標でやってみたいですが場合に分けるのがめんどうです.

南海　まとめてやるために C の方程式を

$$a(x^2 + y^2) + 2px + 2qy + b = 0$$

とおいてはどうだろう．a が 0 かどうかで円になるか直線になるかが決まる．b が 0 かどうかで原点を通るかどうかが決まる．円から円に反転される場合，中心位置関係も含めて確認してほしい.

証明　反転の中心を原点におき，反転の定円の半径を ρ とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と点 $\mathrm{P}'(X,\ Y)$ がこの円に関して反転であるとする．すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}'} \ (k > 0)$$

とおくことができる．条件から

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\right| = k \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\right|^2 = \rho^2$$

よって $k=\dfrac{\rho^2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\right|^2}$．これから成分で書いて

$$(x,\ y)=\frac{\rho^2}{X^2+Y^2}(X,\ Y)$$

を得る．また $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\right|^2=(x^2+y^2)(X^2+Y^2)=\rho^4$ も成り立つ．点 P が方程式

$$a(x^2+y^2)+2px+2qy+b=0$$

で定まる円か直線上にあるとする．ここに代入して

$$\frac{a\rho^4}{X^2+Y^2}+2p\left(\frac{\rho^2X}{X^2+Y^2}\right)+2q\left(\frac{\rho^2Y}{X^2+Y^2}\right)+b=0$$

$X^2+Y^2\neq0$ なので

$$a\rho^4+2p\rho^2X+2q\rho^2Y+b(X^2+Y^2)=0$$

この方程式から次のことがわかる．

1) $a\neq0$ で円の場合．

   (i) 円が原点を通らないときは $b\neq0$ なので $\mathrm{P'}$ の軌跡は円である．ただし $(X,\ Y)=(0,\ 0)$ を除く．この場合もとの円の中心 C は $\left(-\dfrac{p}{a},\ -\dfrac{q}{a}\right)$ にあり，反転した円の中心 $\mathrm{C'}$ は $\left(-\dfrac{p\rho^2}{b},\ -\dfrac{q\rho^2}{b}\right)$ にあるので，O, C, $\mathrm{C'}$ が同一直線上にあることも分かる．ただし C, $\mathrm{C'}$ は互いに反転ではない．

   (ii) 円が原点を通る場合は $b=0$ なので方程式が 1 次式となり $\mathrm{P'}$ の軌跡は直線である．

2) $a=0$ で直線の場合．

   (i) 直線が原点を通らないときは $b\neq0$ なので $\mathrm{P'}$ の軌跡は円である．ただし $(X,\ Y)$ を除く．

   (ii) 直線が原点を通る場合は $b=0$ なので方程式が 1 次式となり $\mathrm{P'}$ の軌跡は直線である．この場合同一の直線になる．

□

南海　それでいい．この論証は図形的にするより座標の方が簡明なのだが，しかしすべてを座標でやるのは，逆に大変なのだ．一般に円に関する論証では，円周角の関係するものを座標ですると複雑になる．そのときは図形の論証の方が見通しよい．ここからは図形的に考えていこう．

次のようなことを確認しておきたい．

定理 68　平面上の点 O を中心とし，半径 ρ の円を反転の定円とする反転がある．

1) O を通らない二円 C_1, C_2 が接していれば，それらを反転した二円も接している．

2) 二点 P, Q の反転を $\mathrm{P'}$, $\mathrm{Q'}$ とすると，この四点は同一円周上にある．

3) 点 P の反転を $\mathrm{P'}$ とする．$\mathrm{PP'}$ を通る円は反転の定円に直交する．反転の定円に直交する円は，この反転でそれ自身にうつる．

4) O を通らない二円 C_1, C_2 が点 P で交わっており，交点での接線 l_1, l_2 のなす角をこの順の方向に計った角が α とする．反転した二円と交点を ${C_1}'$, ${C_2}'$, P′ とする．交点での接線 ${l_1}'$, ${l_2}'$ のなす角をこの順の方向に計った角は $-\alpha$ である．

5) O を通らない半径 r の円 C，中心 C がある．その反転の円を C'，半径が r' で中心が C′ とする．このとき

$$\frac{r}{r'} = \frac{\rho^2}{\mathrm{OC}'^2 - r'^2}$$

が成り立つ． ■

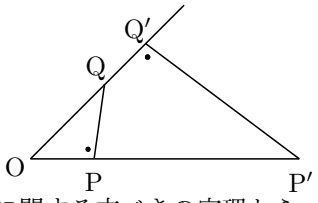
証明

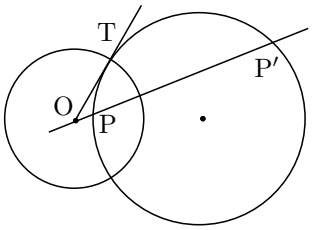
1)　二円は再び二円に反転され，反転が中心を除き一対一対応の写像なので，反転した二円の共有点も一つである．つまり接している．

2)　$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}' = \mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OQ}'$ より $\triangle\mathrm{OPQ} \backsim \triangle\mathrm{OQ'P'}$ である．
従って

$$\angle\mathrm{QQ'P'} + \angle\mathrm{QPP'} = \angle\mathrm{OPQ} + \angle\mathrm{QPP'} = \pi.$$

つまり四角形 PP′Q′Q は円に内接する．





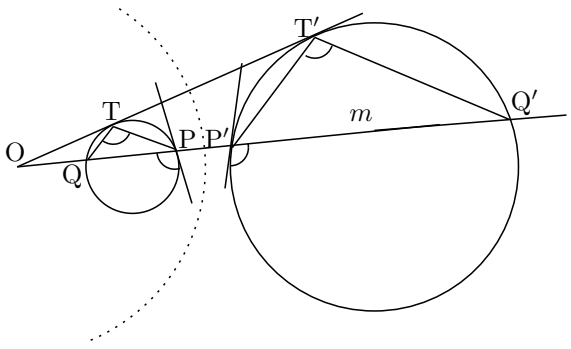
3)　PP′ を通る円と点 O に関する方べきの定理から，O からこの円への接線を OT とすると，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}' = \mathrm{OT}^2$ である．一方 $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}' = \rho^2$ なので，$\mathrm{OT} = \rho$．つまり T は反転の定円上にもあり，この二円は点 T で直交している．

逆に反転の定円に直交し，交点が T とすると，OT は円の接線である．O を通り円に割線を引き，交点を P, P′ とする．方べきの定理から $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}' = \mathrm{OT}^2 = \rho^2$ となり，P と P′ は互いに反転である．よって円は，この反転でそれ自身にうつる．

4)　円 C と C' が反転しており，反転の中心 O を通る割線 m 上の点 P, Q と P′, Q′ をとる．OT, OT′ をそれぞれ接線とする．方べきの定理から

$$\mathrm{OT}^2 = \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ},\ \mathrm{OT'}^2 = \mathrm{OP'}\cdot\mathrm{OQ'}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{OT'}^2}{\mathrm{OT}^2} = \frac{\mathrm{OQ'}}{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OQ}}$$



また反転であることから

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}' = \mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OQ}' = \rho^2$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{OQ'}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathrm{OT'}}{\mathrm{OT}}$$

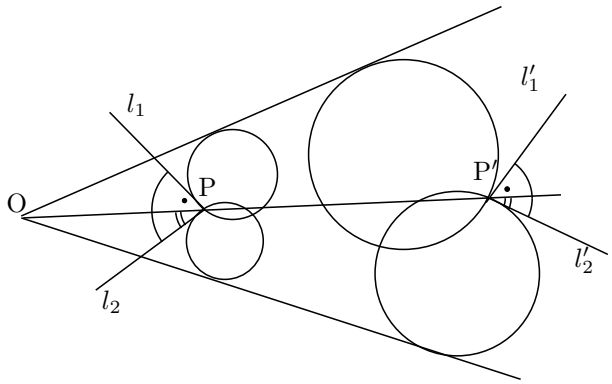
これから

$$\triangle\mathrm{OQT} \backsim \triangle\mathrm{OP'T'}, \quad \triangle\mathrm{OTP} \backsim \triangle\mathrm{OT'Q'}$$

この結果

$$\angle\mathrm{QTP} = \angle\mathrm{P'T'Q'}$$

さらにこの結果点 P と点 P′ における接線が割線 m となす角が等しい．



図より交点での接線 l_1, l_2 のなす角をこの順の方向に計った角が α とするとき，交点での接線 $l_1{}'$, $l_2{}'$ のなす角をこの順の方向に計った角は $-\alpha$ である．

5)　O から C，C' までの接線の長さがそれぞれ

$$\sqrt{\mathrm{OC}^2 - r^2},\ \sqrt{\mathrm{OC}'^2 - r'^2}$$

である．かつ接点も反転の関係なので積は ρ^2 である．よって

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sqrt{\mathrm{OC}^2 - r^2}}{\sqrt{\mathrm{OC}'^2 - r'^2}} = \frac{\rho^2}{\mathrm{OC}'^2 - r'^2}$$

□

南海　さらに，4) に追加すると，相交わる円だけではなく，円と直線，直線と直線の場合についても，交点でなす角は反転によって大きさが変わらず，向きだけ逆になる．これはそれらの直線に交点で接する円をとり，それらの図形の反転をとることによって分かる．

一点注意であるが，二つの円が反転の関係のとき，反転中心からこれら二円に共通接線が引け，接点もまた同じ反転で対応する．しかし，円の中心はこの反転で対応するものではない．

反転は複比を符号を含めて保存する．

定理 69　反転の中心を O とし一直線，または一円周上にある四点を A, B, C, D とし，複比 (AB, CD) を

$$(\mathrm{AB},\ \mathrm{CD}) = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} : \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}}$$

ただし，長さは方向を含めて考えるものとする．つまり $\mathrm{CA} = -\mathrm{AC}$ とする．四点の反転を A′, B′, C′, D′ とするとき次式が成り立つ．

$$(\mathrm{AB},\ \mathrm{CD}) = (\mathrm{A'B'},\ \mathrm{C'D'})$$

■

証明　定理 68 の 2) と同様に方向まで考えて $\triangle\mathrm{OAC} \backsim \triangle\mathrm{OC'A'}$ より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC'}}$$

同様に $\triangle\mathrm{OBC} \backsim \triangle\mathrm{OC'B'}$ より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B'C'}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC'}}$$

これら二式から

$$\frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{B'C'}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$$

まったく同様に

$$\frac{\mathrm{A'D'}}{\mathrm{B'D'}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} \cdot \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$$

が得られ，これから

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} : \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{B'C'}} : \frac{\mathrm{A'D'}}{\mathrm{B'D'}}$$

となる．複比の絶対値は等しい．反転によって円周または一直線上に並んでいる四点の順序は変化しないので，符号に変化はない．従って

$$(\mathrm{AB},\ \mathrm{CD}) = (\mathrm{A'B'},\ \mathrm{C'D'})$$

である． □

これらのことからただちに導かれるものとして，パップスの円環定理を紹介しなければならない．

太郎　パップスって,『数学対話』「パップスの定理」のパップスですか．

南海　そうだ．歴史的なことはそれを読んでもらうとして，定理そのものは別のものだ．

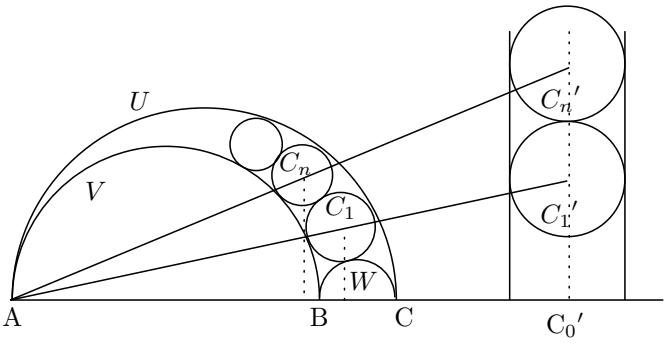
系 3 (パップスの円環定理)　直線 l 上に 3 点 A, B, C がこの順に並んでいる．

AC を直径とする半円 U を描きその中に AB, BC を直径とする半円 V, W を描く．$C_0 = W$ とし $n = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して C_{n-1} が定まったとき，U に内接し V と C_{n-1} に外接する円 C_n を描きその中心を C_n，半径を r_n，C_n と l との距離を h_n とする．

このとき $n = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$h_n = 2nr_n$$

が成り立つ． ■



証明　点 A を中心に反転する．半円 U と V は直線 AB と直交しているので，それぞれ直線 AB と直交する直線に反転され，これら二直線は平行になる．円 C_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の反転円は，すべてこの二本の平行線にはさまれて接し，互いにも接している．つまり，すべて等しい半径の円に反転される．この半径を r とする．W を反転した半円の中心を $\mathrm{C_0}'$ とする．

$$\frac{r_n}{r} = \frac{\mathrm{AC_n}}{\mathrm{AC_n}'} = \frac{h_n}{\mathrm{C_0'C_n}'} = \frac{h_n}{2nr}$$

$$\therefore \quad h_n = 2nr_n$$

□

この円 C_n の集合を「アルキメデスのアルベロス（靴屋のナイフ）円列」という．パップスはいくつかの過程を経てようやくにこれを示したといわれている．ところがこのように反転の図形的な性質を用いることで簡明に示すことができる．しかしまた座標計算も捨てがたい．次の定理は機械的な計算でできる．

定理 70　二円 $C_1,\ C_2$ がある．このときそれぞれの半径 $r_1,\ r_2$，中心間の距離 d を用いて

$$D(C_1,\ C_2) = \frac{d^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1 r_2}$$

とおく．反転の中心が $C_1,\ C_2$ 上にはない反転で二円が $C_1{}',\ C_2{}'$ となったとすると

$$D(C_1,\ C_2) = D(C_1{}',\ C_2{}')$$

である． ■

証明　反転の中心を原点にとり，反転の半径を R とする．二円を

$$C_i\colon (x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 = r_i^2 \quad (i = 1,\ 2)$$

とする．$d^2 = (p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2$ である．よって

$$D(C_1,\ C_2) = \frac{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1 r_2}$$

である．

円の方程式に $x = \dfrac{\rho^2 X}{X^2 + Y^2}$，$y = \dfrac{\rho^2 Y}{X^2 + Y^2}$ を代入し整理する．

$$x^2 + y^2 - 2p_i x - 2q_i y + {p_i}^2 + {q_i}^2 - r_i^2 = 0$$

で ${p_i}^2 + {q_i}^2 - r_i^2 \neq 0$ なので，

$$X^2 + Y^2 - \frac{2p_i\rho^2 X}{{p_i}^2 + {q_i}^2 - r_i^2} - \frac{2q_i\rho^2 Y}{{p_i}^2 + {q_i}^2 - r_i^2} + \frac{\rho^4}{{p_i}^2 + {q_i}^2 - r_i^2} = 0$$

$$\iff \quad \left(X - \frac{p_i\rho^2}{{p_i}^2 + {q_i}^2 - r_i^2}\right)^2 + \left(Y - \frac{q_i\rho^2}{{p_i}^2 + {q_i}^2 - r_i^2}\right)^2 = \frac{\rho^4 r_i^2}{({p_i}^2 + {q_i}^2 - r_i^2)^2}$$

である．これから $C_i{}'$ の半径 r_i' と中心間の距離 d' を計算する．

$$\begin{aligned} r_i' &= \frac{\rho^2 r_i}{{p_i}^2 + {q_i}^2 - r_i^2} \quad (i = 1,\ 2) \\ d'^2 &= \left(\frac{p_1\rho^2}{{p_1}^2 + {q_1}^2 - {r_1}^2} - \frac{p_2\rho^2}{{p_2}^2 + {q_2}^2 - {r_2}^2}\right)^2 + \left(\frac{q_1\rho^2}{{p_1}^2 + {q_1}^2 - {r_1}^2} - \frac{q_2\rho^2}{{p_2}^2 + {q_2}^2 - {r_2}^2}\right)^2 \end{aligned}$$

となる．

$$\begin{aligned} D(C_1{}',\ C_2{}') &= \frac{d'^2 - (r_1' - r_2')^2}{4r_1' r_2'} = \frac{\text{分子}}{4r_1 r_2({p_1}^2 + {q_1}^2 - {r_1}^2)({p_2}^2 + {q_2}^2 - {r_2}^2)} \\ \text{分子} &= \{p_1({p_2}^2 + {q_2}^2 - {r_2}^2) - p_2({p_1}^2 + {q_1}^2 - {r_1}^2)\}^2 \\ &\quad + \{q_1({p_2}^2 + {q_2}^2 - {r_2}^2) - q_2({p_1}^2 + {q_1}^2 - {r_1}^2)\}^2 \\ &\quad - \{r_1({p_2}^2 + {q_2}^2 - {r_2}^2) - r_2({p_1}^2 + {q_1}^2 - {r_1}^2)\}^2 \\ &= ({p_1}^2 + {q_1}^2 - {r_1}^2)({p_2}^2 + {q_2}^2 - {r_2}^2)^2 \\ &\quad - 2(p_1 p_2 + q_1 q_2 - r_1 r_2)({p_1}^2 + {q_1}^2 - {r_1}^2)({p_2}^2 + {q_2}^2 - {r_2}^2) \\ &\quad + ({p_1}^2 + {q_1}^2 - {r_1}^2)^2({p_2}^2 + {q_2}^2 - {r_2}^2) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} D({C_1}',\ {C_2}') &= \frac{{p_2}^2+{q_2}^2-{r_2}^2-2(p_1p_2+q_1q_2-r_1r_2)+{p_1}^2+{q_1}^2-{r_1}^2}{4r_1r_2} \\ &= \frac{(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2-(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2} = D(C_1,\ C_2) \end{aligned}$$

□

3.6.3 反転と根軸

南海　さて次に根軸について少し思いおこさなければならない.『数学対話』「根軸」で二円の根軸を定義した．どのようなことをそこで調べたか?

太郎　二円 $C,\ C'$ の方程式を $f(x,\ y)=0,\ g(x,\ y)=0$ とする．ただし円の方程式であるから $x^2,\ y^2$ の係数は 1 にとる．このとき，方程式

$$f(x,\ y)+(-1)g(x,\ y)=0$$

は一次式となる．この一次式で定まる直線を二円 $C,\ C'$ の根軸という．

$f(x,\ y)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2$ とし，$\mathrm{P}(X,\ Y)$ を円 $f(x,\ y)=0$ の外部の点とする．このとき $f(X,\ Y)$ は点 P から円に引いた接線の長さの平方になる．このことを用いて根軸の図形的な意味を考えることができる．つまり，円の外部の点 P から $C,\ C'$ に接線が引けるとき，接点を接点 T, T′ とすれば

$$\begin{aligned} & \mathrm{PT}=\mathrm{PT}' \\ \Longleftrightarrow\quad & f(X,\ Y)-g(X,\ Y)=0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \mathrm{P}(X,\ Y)\text{ が根軸上にある．} \end{aligned}$$

が成り立つ．C と C' が交わっていれば，根軸は二円の共通割線に他ならない．

k が $k\neq -1$ で，かつ方程式

$$f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$$

が円を定めるとき，これを C_k とおく．根軸上の点 P から C_k に接線が引けるとき，接点を T_k とすると

$$\mathrm{PT}=\mathrm{PT}_k$$

が成り立つ．逆にある円 O と C の根軸が C と C' の根軸と一致するとき，$O=C_k$ となる k が存在する．さらに根軸上の点を中心とする円は $C,\ C'$ と直交する．このようなことを証明しました．

南海　最後の部分は 91 年の東大後期の問題でもあるのだが，次にも使うので必要十分性の補題として証明しておいてほしい．

太郎　はい．

補題 13　平面上に二つの円 $C,\ C'$ がありその根軸を l とする．第三の円 C_0 が二円 $C,\ C'$ の両方と直交するための必要十分条件は，C_0 の中心が l (ただし円 $C,\ C'$ が交わるときは，l の二円の外部の部分) 上にあることである．

証明　円 C, C', C_0 の中心と半径をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{A}'(\alpha', \beta')$, $\mathrm{A_0}(X, Y)$, r, r', r_0 とする．また $\mathrm{A_0}$ から C, C' へ引いた接線の接点をそれぞれ T, T′ とする．

C, C' と C_0 の直交しているとする．三平方の定理より

$$\begin{cases} \mathrm{AT}^2 + \mathrm{A_0T}^2 = \mathrm{AA_0}^2 \\ \mathrm{A'T'}^2 + \mathrm{A_0T'}^2 = \mathrm{A'A_0}^2 \end{cases}$$

が成り立つ．

$$\therefore \quad \begin{cases} r^2 + {r_0}^2 = (X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 \\ {r'}^2 + {r_0}^2 = (X-\alpha')^2 + (Y-\beta')^2 \end{cases}$$

つまり

$$(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 - r^2 + (-1)\left\{(X-\alpha')^2 + (Y-\beta')^2 - {r'}^2\right\} = 0$$

この式は $\mathrm{A_0}(X, Y)$ が二円 C_1 と C_2 の根軸上にあることを示している．

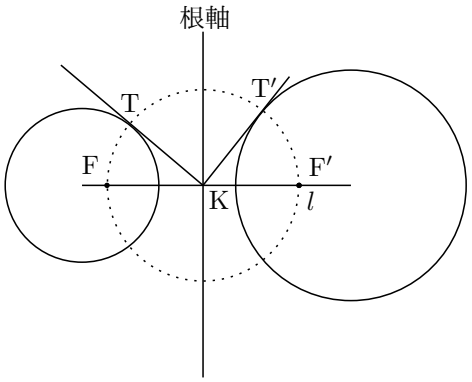
逆に根軸上の接線が引ける位置に $\mathrm{A_0}$ があれば，共有点をもつような半径 r_0 をとり，式変形を逆にたどることで C, C' と C_0 の直交性がわかる．　□

南海　円の集合があってそのどの二つの根軸をとってもすべて一致するとき，この円の集合を根軸によって定まる**円束**という．

二円 C, C' が共有点をもたないとする．この二円の根軸と二円 C, C' の中心を結ぶ直線 l との交点を K とする．K から C, C' への接線の長さ $\mathrm{KT} = \mathrm{KT'}$ に対して l 上の点で

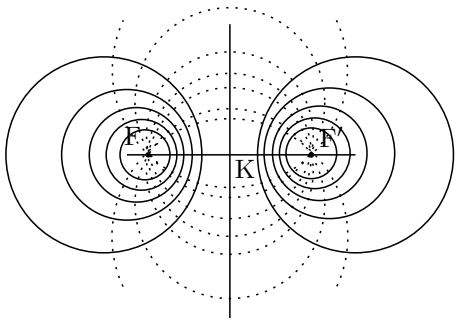
$$\mathrm{KT} = \mathrm{KF}$$

となる点は二点ある．これら F, F′ を 2 円 C, C' の**焦点**という．



太郎　どうして焦点というのですか．

南海　根軸が同じ円束をかいてみると図のように半径が小さくなると焦点に収束していく円列が得られる．また，焦点を通る円を描いてみるとこれらはすべて円束と直交している．このように二つの種類の円の集合が得られる．



この問題は今回はここでおいておくが，後日また考えたい．

定理 71　互いに交わらない二円 $C_1,\ C_2$ がある．二円の焦点 F を中心とする反転でこれら二円は同心円にうつる． ■

証明　二円の根軸と二円 $C,\ C'$ の中心を結ぶ直線 l との交点を K を中心とし，二つの焦点を通る円 S は二円 $C_1,\ C_2$ と直交している．円 S は F を通るので，F 中心とする反転で直線 m になる．一方，二円 $C_1,\ C_2$ はそれぞれ再び円 ${C_1}',\ {C_2}'$ にうつるが，これらの円は m と直交しているので，その中心は m 上にある．

一方，二円 $C_1,\ C_2$ の中心と反転の中心は二円 $C_1,\ C_2$ の焦点を結ぶ直線 l 上にあるので，円 ${C_1}',\ {C_2}'$ の中心も l 上にある．

従って円 ${C_1}',\ {C_2}'$ の中心は m 上かつ l 上にあるので，その交点に一致する．つまり円 ${C_1}',\ {C_2}'$ の中心は一致する． □

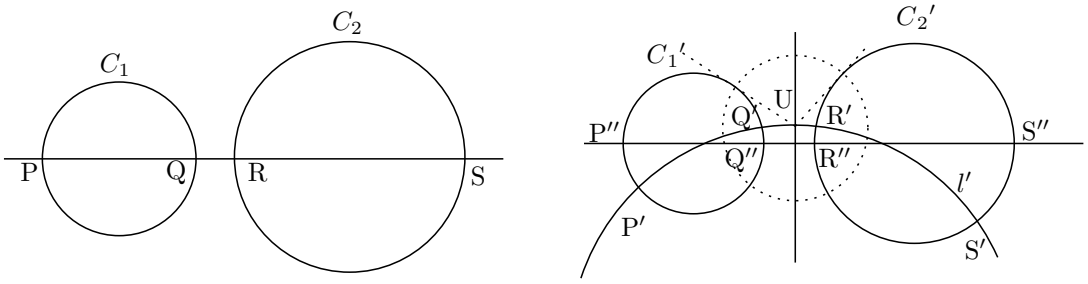
本定理は，一方の円が他方に含まれる場合も同様である．

南海　焦点による反転をもちいて定理 70 の別証明をしよう．

定理 70 の別証明　図のように二円 $C_1,\ C_2$ の中心を通る直線 l と円の交点を P, Q, R, S とする．半径 $r_1,\ r_2$，中心間の距離 d とすると

$$\begin{aligned} D(C_1,\ C_2) &= \frac{d^2-(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2} = \frac{(\mathrm{PR}-r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}{\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RS}} \\ &= \frac{\mathrm{PR}^2-\mathrm{PR}(2r_1-2r_2)}{\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RS}} = \frac{\mathrm{PR}(\mathrm{PR}-\mathrm{PQ}+\mathrm{RS})}{\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RS}} \\ &= \frac{\mathrm{PR}\cdot\mathrm{QS}}{\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RS}} = \frac{\mathrm{PR}\cdot\mathrm{SQ}}{\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{SR}} = (\mathrm{PS},\ \mathrm{RQ}) \end{aligned}$$

反転によって，${C_1}',\ {C_2}'$ P′, Q′, R′, S′ になるとする．この四点は l の反転円 l' の周上にある．l と $C_1,\ C_2$ が直交するので，l' と ${C_1}',\ {C_2}'$ は直交している．



定理 69 によって

$$(\mathrm{PS},\ \mathrm{RQ}) = (\mathrm{P'S'},\ \mathrm{R'Q'})$$

である．

次に ${C_1}',\ {C_2}'$ の根軸と l' の交点を U とする．U から ${C_1}',\ {C_2}'$ に接線を引き接点までの長さ ν をとる．U を中心とし ν を半径とする円 S に関して反転をおこなう．${C_1}',\ {C_2}'$ は S と直交しているので，この反転でそれ自身にうつる．l' は直線 l'' にうつるが l'' の ${C_1}',\ {C_2}'$ と直交しているので，これが ${C_1}',\ {C_2}'$ の中心を通る直線である．P′, Q′, R′, S′ がそれぞれ P″, Q″, R″, S″ にうつるとすると，これが l'' と ${C_1}',\ {C_2}'$ の交点である．

再び定理 69 によって

$$(\mathrm{P}'\mathrm{S}',\ \mathrm{R}'\mathrm{Q}') = (\mathrm{P}''\mathrm{S}'',\ \mathrm{R}''\mathrm{Q}'')$$

であるが，前半の変形を逆にたどることにより

$$(\mathrm{P}''\mathrm{S}'',\ \mathrm{R}''\mathrm{Q}'') = D({C_1}',\ {C_2}')$$

なので，定理 70 が示された． □

太郎　反転と根軸を組みあわせて用いることで，簡明に出来るのですね．

3.6.4　円環の諸定理

南海　それでは最初に掲げた定理を証明していこう．

定理 72　交わらない二円 O_1 と O_2 があり半径は R と r で，O_2 は O_1 の内部にある．O_1 に内接し O_2 に外接し，互いに外接する n 個の円 $C_1, \cdots, C_n$ よりなる**シュタイナーの円環**が構成できたとする．

1) 最初の円 C_1 をどこにとっても順に外接させて円を描いてゆくと C_n は C_1 に外接する．

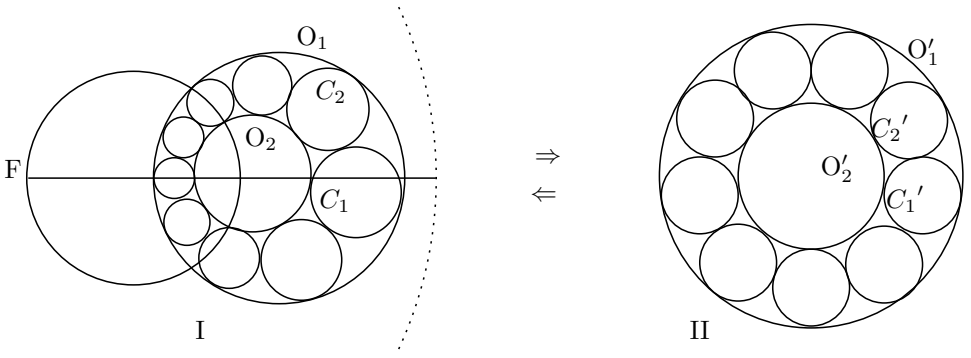
2) 二円 O_1 と O_2 の中心間の距離を d とする．

$$d^2 = (R-r)^2 - 4Rr\tan^2\frac{\pi}{n}$$

が成り立つ． ■

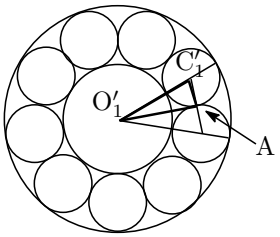
証明

1)　図のように O_1 と O_2 の焦点 F をとり，F を中心とする反転をおこなう．定理 71 によって，I の状態から II の状態に反転される．



同心円の間に n 個の円が互いに外接してはさまれるときは，半径だけが問題で，n 個の円環が一つできればどこからはじめても n 個で円環ができる．最初 O_1 と O_2 の間に C_1 をかく．その反転 ${C_1}'$ からはじめて同心円の方で n 個の円環をつくる．これを反転の逆をおこないもとに戻せば C_1 からはじまる円環ができている．

2)　O_1 と O_2 を反転した円の半径を R', r' とする．この場合 ${C_1}'$ 等の半径は $\dfrac{R'-r'}{2}$ で，${C_1}'$ と ${C_2}'$ の中心 ${\rm C_1}'$ と ${\rm C_2}'$ が ${O_1}'$ の中心 ${\rm O_1}'$ となす角が $\dfrac{2\pi}{n}$．${O_1}'$ の中心 ${\rm O_1}'$，${C_1}'$ と ${C_2}'$ の接点 A，${C_1}'$ の中心 ${\rm C_1}'$ が作る直角三角形の辺長を考えることにより



$$\tan^2\frac{\pi}{n}=\frac{\left(\dfrac{R'-r'}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{R'+r'}{2}\right)^2-\left(\dfrac{R'-r'}{2}\right)^2}=\frac{(R'-r')^2}{4R'r'}$$

ところがこの場合，中心間の距離は 0 なので，定理 70 の記号を用いると

$$D({O_1}',\ {O_2}')=\frac{0^2-(R'-r')^2}{4R'r'}=-\tan^2\frac{\pi}{n}$$

である．一方，定理 70 によって $D({O_1}',\ {O_2}')=D(O_1,\ O_2)$ であるから

$$\tan^2\frac{\pi}{n}=-D(O_1,\ O_2)=\frac{-d^2+(R-r)^2}{4Rr}$$

これから所期の等式を得る．　□

太郎　これを用いて冒頭の和算の問題を解いてみます．丁円の半径を r，丙円の半径を s とする．まず対称性から甲，丁，丙各円の中心は一直線上にある．

$$5+2r+2s=20$$

である．外円と丁円の中心間の距離 d は

$$d=10-(5+r)=5-r$$

なので，$n=4$ で定理 72 を用いると

$$\frac{-(5-r)^2+(10-r)^2}{4\cdot 10r}=\tan^2\frac{\pi}{4}=1$$

これから $r=\dfrac{3}{2}$．よって丙円の径 $2s$ は

$$2s=20-(5+3)=12\ (\text{寸})$$

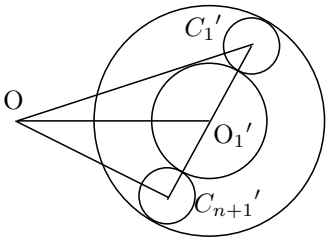
です．

南海　文献『日本の幾何』には多くの問題が載っている．シュタイナーの円環に関するその他の定理を紹介しよう．

定理 73　偶数個の円がシュタイナーの円環をなしているとき，向かい合っている円環の円の半径の逆数の和は一定である．　■

証明　まず状況を確定する．円 O_1 が円 O_2 を含んで定まり，半径が R と r とする．そして円 C_1, C_2, $\cdots$, C_{2n} が円環をなしている．

点 O を中心とする半径 ρ の反転で円 O_1，O_2 が同心円 ${O_1}'$，${O_2}'$ になりその半径が R', r' とする．${C_i}'$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n$ の半径はすべて等しいのでこれを ${r_0}'$ とする．



$$R'-r'=2{r_0}'$$

である．そして，このとき ${C_1}'$ と ${C_{n+1}}'$ の中心 $\mathrm{C_1}'$ と $\mathrm{C_{n+1}}'$ および ${O_1}'$，${O_2}'$ の中心 $\mathrm{O_1}'$ は同じ直線上にある．

定理 68 の 5) より

$$\frac{r_1}{{r_0}'}=\frac{\rho^2}{{\mathrm{OC_1}'}^2-{r_0'}^2},\ \frac{r_{n+1}}{{r_0}'}=\frac{\rho^2}{{\mathrm{OC_{n+1}}'}^2-{r_0'}^2}$$

よって中線定理を用いると

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_{n+1}} &= \frac{1}{{r_0}'\rho^2}\left({\mathrm{OC_1}'}^2+{\mathrm{OC_{n+1}}'}^2-2{r_0'}^2\right)=\frac{2}{{r_0}'\rho^2}\left({\mathrm{OO_1}'}^2+{\mathrm{O_1C_1}'}^2-{r_0'}^2\right)\\ &= \frac{2}{{r_0}'\rho^2}\left({\mathrm{OO_1}'}^2+(r'+r_0')^2-{r_0'}^2\right)=\frac{2}{{r_0}'\rho^2}\left({\mathrm{OO_1}'}^2+{r'}^2+2r'r_0'\right)\\ &= \frac{4}{(R'-r')\rho^2}\left({\mathrm{OO_1}'}^2+{r'}^2+r'(R'-r')\right)=\frac{4}{(R'-r')\rho^2}\left({\mathrm{OO_1}'}^2+r'R'\right)\end{aligned}$$

一方，定理 68 の 5) を R, r, R', r' に用いて

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{R}=\frac{{\mathrm{OO_1}'}^2-{r'}^2}{r'\rho^2}-\frac{{\mathrm{OO_1}'}^2-{R'}^2}{R'\rho^2}=\frac{(R'-r')({\mathrm{OO_1}'}^2+r'R')}{r'R'\rho^2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_{n+1}}=\frac{4r'R'\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)}{(R'-r')^2}\quad(\text{一定})$$

となる． □

南海　定理 72 より O_1, O_2 の中心間の距離を d とすれば

$$\frac{(R-r)^2-d^2}{rR}=\frac{(R'-r')^2}{r'R'}$$

これから

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_{n+1}}=\frac{4(R-r)}{(R-r)^2-d^2}$$

となる．

これは 1826 年に池田貞一が示した定理である (文献『幾何学』による)．特に $n=4$ のときは

$$\frac{(R-r)^2-d^2}{rR}=4$$

なので

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=\frac{1}{r}-\frac{1}{R}$$

である．

3.6.5　空間での反転

太郎　ここで用いた反転は，点 P に対し，半直線 OP 上の点 P′ で

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}'=\rho^2$$

となるものを対応させる変換でした．この定義は空間の点の対応にも用いることができませんか．

南海　それはいいところに気がついた．反転は平面だけではなく，一般の n 次元ユークリッド空間で定義される．そしてそれを用いて一般の空間で互いに接する球の諸性質を示すことができる．

ここでは三次元空間における反転をまとめ，その図形問題への応用を考えよう．そのために，平面の反転と根軸の部分を三次元に直してゆかなければならない．

太郎　空間の点 O を中心とする半径 ρ $(\rho>0)$ の球がある．O から半直線上に二点 P, P′ をとる．

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}'=\rho^2$$

となるとき，P, P′ をこの球に関して互いに**反転**という．この球を反転の定球，O を反転の中心，ρ を反転の半径という．点 P がある図形を描くとき，それに対応して P′ もある図形を描く．それらの図形も互いに反転であるという．

$$X=\text{空間}-\{\mathrm{O}\}$$

とすると，X から X への一対一写像である．

定理 74　空間の球または平面 S が O を中心とする反転で曲面 S' になるとする．S の位置関係で S' は次のようになる．

S	S'
O を通らない球	球
O を通る球	平面
O を通らない平面	球
O を通る平面	平面

■

証明　S の方程式を

$$a(x^2+y^2+z^2)+2px+2qy+2rz+b=0$$

とおく．a が 0 かどうかで球になるか平面になるかが決まる．b が 0 かどうかで原点を通るかどうかが決まる．

反転の中心を原点におき，反転の定円の半径を ρ とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ と点 $\mathrm{P}'(X,\ Y,\ Z)$ がこの円に関して反転であるとする．すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\ (k>0)$$

とおくことができる．条件から

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\right|=k\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=\rho^2$$

よって $k=\dfrac{\rho^2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}$．これから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\rho^2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$$

を得る．また $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\right|^2=\rho^4$ も成り立つ．点 P の方程式を，定数 $a,\ b$ と定ベクトル $\overrightarrow{n}=(p,\ q,\ r)$ を用いて

$$a\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2+2\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+b=0$$

とおく．

$$\frac{a\rho^4}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\right|^2}+2\rho^2\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP'}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\right|^2}+b=0$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\right|^2\neq 0$ なので

$$a\rho^4+2\rho^2\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+b\left|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\right|^2=0$$

この方程式から次のことがわかる．

1) $a\neq 0$ で球の場合．

(i) 球が原点を通らないときは $b\neq 0$ なので P′ の軌跡は球である．ただし $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{0}$ を除く．この場合もとの球の中心 C は $-\dfrac{1}{a}\overrightarrow{n}$ にあり，反転した球の中心 C′ は $-\dfrac{\rho^2}{b}\overrightarrow{n}$ にあるので，O, C, C′ が同一直線上にあることも分かる．

(ii) 球が原点を通る場合は $b=0$ なので方程式が 1 次式となり P′ の軌跡は平面である．

2) $a=0$ で平面の場合．

(i) 平面が原点を通らないときは $b\neq 0$ なので P′ の軌跡は球である．ただし $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{0}$ を除く．

(ii) 平面が原点を通る場合は $b=0$ なので方程式が 1 次式となり P′ の軌跡は平面である．この場合同一の平面になる．

□

南海　平面の場合の根軸に対応することも，空間の場合に確認しておかなければならない．

太郎　二球 $S_1,\ S_2$ の方程式を $f(x,\ y,\ z)=0,\ g(x,\ y,\ z)=0$ とする．ただし，x^2 の係数は 1 にとっておく．このとき，方程式

$$f(x,\ y,\ z)+(-1)g(x,\ y,\ z)=0$$

は一次式となる．

南海　この一次式で定まる平面を二球 $S_1,\ S_2$ の根面という．図形的な意味は，根面上の点 P から $S_1,\ S_2$ に接線が引けるとき，接点を接点 T, T′ とすれば

$$\mathrm{PT}=\mathrm{PT'}$$

が成り立つ．S_1 と S_2 が交わっていれば，根面は二球の共通平面である．この証明も平面の場合にさらに z 座標を加えることでまったく同様に示せる．

太郎　また，二球 S_1 と S_2 の根面上に中心をもつ球 S をとる．球 $S,\ S_1,\ S_2$ の中心が A, A_1, A_2，半径が $r,\ r_1,\ r_2$ であるとする．$A(X,\ Y,\ Z)$ とすると，$f(X,\ Y,\ Z) = g(X,\ Y,\ Z)$ は

$$AA_1{}^2 - r_1{}^2 = AA_2{}^2 - r_2{}^2$$

を意味するが，A から $S_1,\ S_2$ に接線 $AT_1,\ AT_2$ をひくと

$$AA_1{}^2 - r_1{}^2 = AT_1{}^2 = r^2, \quad AA_2{}^2 - r_2{}^2 = AT_2{}^2 = r^2$$

が成り立つ．このとき，S と S_1，S と S_2 はそれぞれ共有点における接平面が直交している，つまりそれぞれの接平面からとった二つのベクトルがつねに直交している．

南海　二球 $S,\ S'$ が共有点をもたないとする．この二球の根面と二球 $S,\ S'$ の中心を結ぶ直線 l との交点を K とする．K から $S,\ S'$ への接線の長さ $KT = KT'$ に対して l 上の点で

$$KT = KF$$

となる点は二点ある．これら F, F′ を 2 球 $S,\ S'$ の**焦点**という．

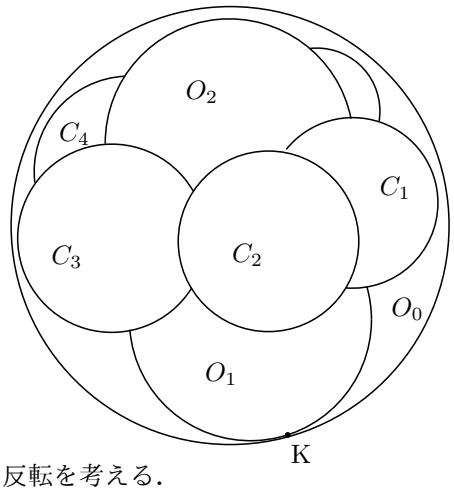
以上の概念を準備すると平面の場合の諸定理が，空間の反転と球の関連としてほぼそのまま成り立つ．すなわち，これまでに平面の反転をもとに示した次の諸定理は，円を球になおしたうえで，反転の中心と球の中心を含む平面を考えることで，半径や中心間の距離の間の諸定理はすべて成立する．共有点でのなす角のみは，一意ではないのでこのままでは意味をもたない．よって，反転の基本性質を示す定理 68 は 4) を除き成立．ただし直交する二球，直線と球の直交という直交性は，三次元の反転においても保たれる．複比の定理 69，反転に関する不変量の定理 70，はすべて成立する．また，定理 71 は，円を球になおした命題「互いに交わらない二球は，二球の焦点 F を中心とする反転で同心球にうつる.」で成立する．

3.6.6　六球連鎖

南海　以上の準備のもと，いわゆる六球連鎖の定理を反転を用いて示そう．

イギリスのノーベル化学賞受賞者 Sir Frederik Soddy（1877-1956）は雑誌 Nature（1936) において球の接触問題に関して The Hexlet（6 球連鎖）なる次の定理を発表した．

これには 4 個の互いに接する球に関する定理が使われている．発表当時は見事な定理として世界的に話題になった．ところが，この定理は，百年以上前の 1822 年，相州（現在の神奈川県）の寒川神社に掲げられた算額にすでに記されていた．これは『日本の幾何』に詳しい．

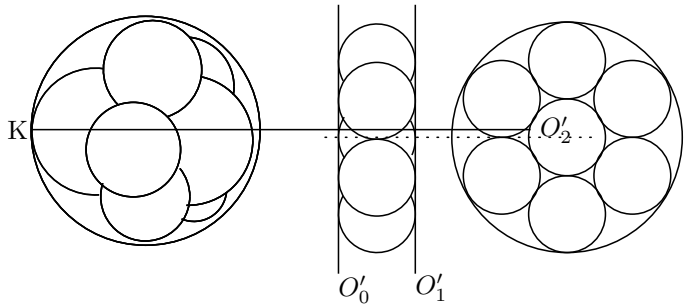


定理 75　互いに接する 3 個の球 $O_0,\ O_1,\ O_2$ のどれにも接する球の連鎖 C_i の個数は，常に 6 個となり，さらに次々の球の半径を r_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ とすれば $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_4} = \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_5}$ が成立する．

南海　方針としては，$O_0,\ O_1$ の接点を K とし，K での反転を考える．

太郎　円 O_0 と円 O_1 はいずれも K と中心を結ぶ直線と直交している．従ってその反転平面 $O_0',\ O_1'$ もこの直線に直交し，従って平行である．$O_2,\ C_1,\ C_2,\ \cdots$ はいずれもこの平行面に挟まれ，かつ

面に接しているので半径はすべて等しい．O_2' の周りに互いに半径が等しい球が互いに外接するので，それらの中心を通る平面での断面の円を考えることにより，周りの球の個数は 6 個以外にありえない．



つぎに二円 C_1'，C_4' について，これらの中心と反転の中心 K でできる平面での切断面を考えると，そこでは円の反転になっている．6 個の円に外接する円をあわせて考えることで，定理 73 の証明と同様に

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_4} \quad =\frac{4r'R'\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)}{(R'-r')^2}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_5}$$

となる．ただし R' は 6 個の円に外接する円の半径，R はその原像の円の半径，r は O_2 の半径，r' は O_2' の半径である． ■

南海　球の半径の逆数とは曲率に他ならないことにも注意しよう．和算家の証明は，反転法ではなくいわゆるデカルトの円定理，およびその一般化である三次元球の定理を用いている．円定理もまた非常に面白いので，これは次の機会に考えよう．

3.6.7　参考書

- 幾何入門，佐々木重夫，岩波書店，1960
- 幾何学，長友次郎吉，東京教学社，1969
- 幾何学大辞典 2，岩田至康，槇書店，1974
- 日本の幾何－何題解けますか?，深川英俊，ダン・ペドー，森北出版，1991
- 平面図形の幾何学，難波誠，現代数学社，2008

3.7　デカルトの円定理と一般化

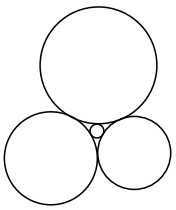
2009.4.9

3.7.1　デカルトの円定理

太郎　『反転と円環問題』で「和算家の証明は，反転法ではなくいわゆるデカルトの円定理，およびその一般化である三次元球の定理を用いている．円定理もまた非常に面白いので，これは次の機会に考えよう.」といわれました．デカルトの円定理とは何ですか.

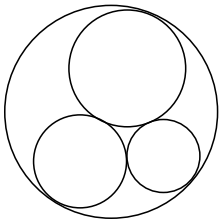
南海　それは次のような，互いに接する円の半径のあいだの関係だ.

定理 76　平面上の四つの円がある．その半径を r_1，r_2，r_3，r_4 とする．これら四円が互いに外接しているとき，これらの四円の半径の間に



$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}\right)$$

という関係が成り立つ．三円が互いに外接し，これらが第四の円に内接しているとき，これらの四つの半径の間に



$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}\right)$$

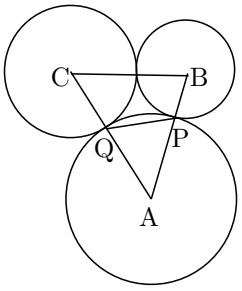
が成り立つ．■

これが円定理だ．デカルトがエリザベス王女に宛てた手紙のなかで論究している．それでデカルトの円定理といわれる．和算でもこの定理は基本定理であった.

太郎　きれいな関係式です．まずこれを証明したいです.

南海　確かに手持ちの方法で考えることは大切だ．またそれが和算家の道筋をたどっていくことにもなる．後にもっと一般的に考えるのだが，四つの円が互いに外接する場合について，まずこれ自体を示してみよう．その証明を和算家は次の補題をもとにおこなった.

補題 14　三つの円 A，B，C が互いに外接している．その半径を a，b，c とする．A と B の接点を P，A と C の接点を Q とする．このとき，



$$\mathrm{PQ}^2 = \frac{4a^2bc}{(a+b)(a+c)}$$

が成り立つ．■

証明　中心をそれぞれ A，B，C とし，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とする．△ABC と △APQ に余弦定理を適用する.

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= (a+b)^2+(a+c)^2-2(a+b)(a+c)\cos\theta\\ \mathrm{PQ}^2 &= a^2+a^2-2a^2\cos\theta = 2a^2(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}=b+c$ なので第 1 式から

$$1-\cos\theta = 1-\frac{(a+b)^2+(a+c)^2-(b+c)^2}{2(a+b)(a+c)} = \frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$$

$$\therefore \quad \mathrm{PQ}^2 = 2a^2(1-\cos\theta) = \frac{4a^2bc}{(a+b)(a+c)}$$

である．□

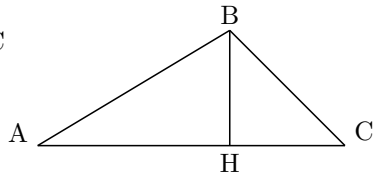
南海　それでよいのだが，実は和算には三角比がなかった．だから余弦定理はなかった．

太郎　えっ，そうなのですか．

南海　和算では △ABC の余弦定理

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC}$$

の代わりにその一つ前の段階である次の定理を用いた．点 B から AC への垂線を BH とするとき

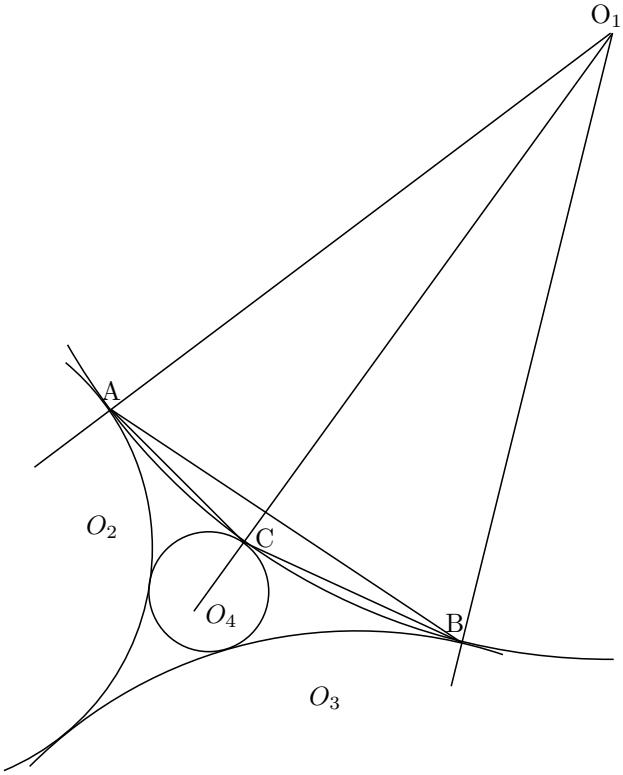


$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AH}\cdot\mathrm{AC}$$

太郎　$\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAC} = \mathrm{AH}$ なので同じことですね．

南海　というより，三平方の定理から余弦定理に至る途中で経由する等式だ．余弦定理は AB, AC に関して対称な形をしているが，AH の入る等式は対称性が見えにくいので，B, C いずれからの垂線がよいのか個別に考えなければならなかった．われわれは余弦定理をどんどん用いることにしよう．この補題を活用して定理 76 を示してほしい．

太郎　もういちど見やすく図を描いて見ます．



定理 76 の証明　円 O_1 と O_2 の接点を A，円 O_1 と O_3 の接点を B，円 O_1 と O_4 の接点を C とする．

補題より

$$\mathrm{AB}^2 = \frac{4{r_1}^2 r_2 r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)},\quad \mathrm{AC}^2 = \frac{4{r_1}^2 r_2 r_4}{(r_1+r_2)(r_1+r_4)},\quad \mathrm{BC}^2 = \frac{4{r_1}^2 r_3 r_4}{(r_1+r_3)(r_1+r_4)}$$

となる．次に $\angle\mathrm{ACB} = \theta$ とおく．$\angle\mathrm{AO_1B}$ は中心角であり，その円周角は $\angle\mathrm{ACB}$ の補角である．

$$\therefore\quad \angle\mathrm{AO_1B} = 2(\pi-\theta)$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{O_1AB}$ に余弦定理を用いる．

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{CA}^2+\mathrm{CB}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}\cos\theta\\ \mathrm{AB}^2 &= {r_1}^2+{r_1}^2-2{r_1}^2\cos 2(\pi-\theta) = 2{r_1}^2(1-\cos 2\theta) = 4{r_1}^2-4{r_1}^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

第一式を用いて $\cos^2\theta$ を半径で表す．

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \left(\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{CB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}}\right)^2\\ &= \frac{\left\{\dfrac{4{r_1}^2 r_2 r_4}{(r_1+r_2)(r_1+r_4)}+\dfrac{4{r_1}^2 r_3 r_4}{(r_1+r_3)(r_1+r_4)}-\dfrac{4{r_1}^2 r_2 r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}\right\}^2}{4\cdot\dfrac{4{r_1}^2 r_2 r_4}{(r_1+r_2)(r_1+r_4)}\cdot\dfrac{4{r_1}^2 r_3 r_4}{(r_1+r_3)(r_1+r_4)}}\\ &= \frac{(r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4-r_1r_2r_3)^2}{4r_2r_3{r_4}^2(r_1+r_2)(r_1+r_3)}\end{aligned}$$

これを第二式に代入し半径の関係式を作る．

$$\frac{4{r_1}^2 r_2 r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)} = 4{r_1}^2 - 4{r_1}^2\cdot\frac{(r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4-r_1r_2r_3)^2}{4r_2r_3{r_4}^2(r_1+r_2)(r_1+r_3)}$$

これを整理すると

$$\frac{(r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4-r_1r_2r_3)^2}{4r_2r_3{r_4}^2(r_1+r_2)(r_1+r_3)} = 1-\frac{r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)} = \frac{{r_1}^2+r_1r_2+r_1r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}$$

となり，さらに

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}\right)$$

となる．これから

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 &= \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2+\frac{4}{r_4}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\\ &= 4\sum_{i<j}\frac{1}{r_ir_j}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2+2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}\right)\\ =\ & 2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}\right)+4\sum_{i<j}\frac{1}{r_ir_j}\\ =\ & 2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2\end{aligned}$$

これから

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}\right)$$

を得る．□

太郎　助けてもらいましたが，それでも大変です．

南海　O_1, O_2, O_3 が互いに外接し，これらが O_4 に内接する場合の関係式は

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}\right)$$

であるが，それは後の方法では明らかなのでここでの証明はおいておこう．

3.7.2　一般化と線型代数の準備

3.7.2.1　球定理

南海　デカルトの円定理はまた次のような球の問題に拡張される．

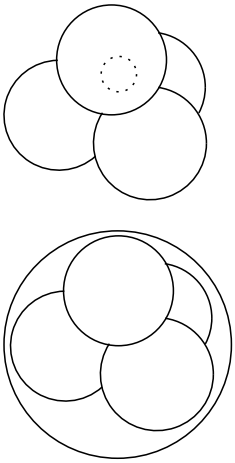
空間に五つの球がある．その半径を r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 とする．互いに外接しているとき，これらの五つの半径の間に

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}\right)^2=3\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}+\frac{1}{{r_5}^2}\right)$$

が成り立つ．四つの球が互いに外接し，これらが第五の球に内接しているとき，これらの五つの半径の間に

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_5}\right)^2=3\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}+\frac{1}{{r_5}^2}\right)$$

が成り立つ．



太郎　こうなると余弦定理でやっていくのはほとんど無理です．

南海　和算家はこのような場合も結論を得ていた．まったく驚くべきことである．

太郎　さらに一般の次元に拡張できるのですか．

南海　できる．そのために n 次元空間について，直接必要ではないことも含めてまとめておこう．

3.7.2.2　n 次元空間

南海　まず一般の n 次元ユークリッド空間を定義しておこう．実数 $\mathbb{R}$ の n 個の組 $\mathrm{P}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の集合を考える．これを $\mathbb{R}^n$ のように記す．集合 $\mathbb{R}^n$ の要素を**点**という．二点 $\mathrm{P}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\mathrm{Q}(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ に対して距離 $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ を

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

で定める．これが距離になっていること，次の内積との関連などは,「線型代数の考え方」「計量ということ」などを見てほしい．このようにして定まる距離をもつ空間を n 次元ユークリッド空間という．

n 次元ユークリッド空間はまたベクトル空間でもあり，ベクトルとしての和・差，および実数倍が定まることは，2 次元 3 次元の場合と同じである．特に点 P と原点 O$(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ を始点とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が同一視できることなども，2 次元 3 次元の場合と同じである．ベクトル空間と見るときは $\mathbb{R}^n$ の要素を $\mathbf{x}$ や $\vec{\mathbf{x}}$ のようにも表す．矢線はつけないことも多い (「線型代数の考え方」ではつけていない) が，ベクトルであることを明確にするためここでは $\vec{\mathbf{x}}$ 式の書き方をしよう．

このことに注意すると，二点 P，Q の距離 $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の大きさでもある．

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$$

内積

南海　二つのベクトル $\vec{\mathbf{x}} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$\vec{\mathbf{y}} = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ に対して内積 $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}}$ を

$$\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

で定める．内積と距離の関係は?

太郎　ベクトル $\vec{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\left\{d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})^2 + d(\mathrm{O},\ \mathrm{Q})^2 - d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})^2\right\}$$

第二の式は

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

よりわかります．

部分空間

太郎　平面はどのように定めるのですか．

南海　平面を考える前にまず $\mathbb{R}^n$ の**部分空間**を定義しなければならない．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 T が $\mathbb{R}^n$ の加法と定数倍に関してそれ自体ベクトル空間であるとき，T を $\mathbb{R}^n$ の部分空間という．

言い換えると

$$\vec{\mathbf{x}},\ \vec{\mathbf{y}} \in T \quad \text{ならば} \quad \text{任意の実数}\alpha,\ \beta\text{に対して } \alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{y}} \in T$$

が成り立つとき，T を部分空間という．

太郎　平面ベクトルにおいて原点を通る直線，空間ベクトルにおいて原点を通る直線や原点を通る平面が，このような条件を満たすのではないでしょうか．

南海　そうだ．さて部分空間 T が与えられたとき，

$$T' = \left\{\vec{\mathbf{x}} \mid \text{任意の } \vec{\mathbf{t}} \in T \text{ に対し } \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{t}} = 0\right\}$$

で定まる $\mathbb{R}^n$ の部分集合 T' は部分空間になる．T' のことを T の**直交補空間**という．

太郎　平面ベクトルで T が原点を通る直線なら T' はそれと直交し原点を通る直線になります．空間ベクトルで T が原点を通る直線なら T' はそれと直交し原点を通る平面になります．

直線と平面

南海　$\mathbb{R}^n$ において直線と平面とは，1 次元の部分空間かまたは 2 次元の部分空間を平行移動したものである．$\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ を 1 次独立なベクトルとする．また A を定点とする．このとき，

$$l = \{\mathrm{P} \mid \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\vec{\mathbf{u}},\ \ s \text{ 実数}\}$$
$$\alpha = \{\mathrm{P} \mid \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}},\ \ s,\ t \text{ 実数}\}$$

をそれぞれ定点 A を通る直線，平面という．

補空間の平行移動

南海　ベクトル $\vec{\mathbf{u}} = (m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n)$ と定点 A が与えられている．このとき

$$\alpha = \left\{\mathrm{P} \;\middle|\; \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{u} = 0\right\}$$

で定まる $\mathbb{R}^n$ の部分集合 α を，点 A を通りベクトル $\vec{\mathbf{u}}$ に垂直な超平面という．

太郎　$\mathrm{P}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ とするとこの条件は

$$m_1(x_1 - a_1) + \cdots + m_n(x_n - a_n) = 0$$

と書けます．これが超平面の方程式ですね．

南海　超平面 α をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の集合と見れば，このベクトルの加法を加法とする $n-1$ 次元のベクトル空間を点 A 通るように平行移動したものである．だから平面という概念は，n 次元空間の部分空間 (を平行移動したもの) と一般化することができる．

超球

太郎　球は次のように定義すればいいですね．定点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ と正数 r が与えられたとする．このとき

$$S = \left\{\mathrm{P} \;\middle|\; \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = r\right\}$$

で定まる $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S を，点 A を中心とし半径 r の球 (超球) という．

南海　以上の準備のもとで円定理を一般の場合に拡張する．それが次の定理だ．

定理 77　n 次元空間におかれた $n+2$ 個の球 O_1，O_2，$\cdots$，O_{n+2} があり，半径がそれぞれ r_1，r_2，$\cdots$，r_{n+2} であるとする．O_1，O_2，$\cdots$，O_{n+1} が互いに外接し，さらにこれらが O_{n+2} とも外接しているか，O_{n+2} に内接している場合，半径の間に関係式

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{r_k} \pm \frac{1}{r_{n+2}}\right)^2 = n\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{{r_k}^2}$$

が成り立つ．複合は O_{n+2} とも外接する場合が $+$，内接する場合が $-$ である．　■

太郎　とんでもなく難しいように思われます．

南海　このような円定理がどのようなところからやってくるのかを考えなおすことで，n 次元へ一般化する方法を見出そう．

3.7.2.3　行列式

南海　以下で一般の場合の行列式を用いる．といっても複雑なことではない．証明は『線型代数の考え方』を見てほしい．簡単のために 4 次で示す．

(1)　4 個のベクトル $\vec{\mathbf{x}} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$，$\vec{\mathbf{y}} = (y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$，$\vec{\mathbf{z}} = (z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$，$\vec{\mathbf{w}} = (w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$ に対し，行列 A と行列式 $|A|$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix},\ |A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

を定める．このとき

$$\vec{\mathbf{x}},\ \vec{\mathbf{y}},\ \vec{\mathbf{z}},\ \vec{\mathbf{w}}\text{が 1 次独立} \quad \Longleftrightarrow \quad |A| \neq 0$$

また

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ x_4 & y_z & z_4 & w_4 \end{vmatrix} = \left|{}^tA\right|$$

(2)　一つの行または列に対して線形性をもつ．

$$\begin{vmatrix} \alpha x_1 + \beta a_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \alpha y_1 + \beta b_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \alpha z_1 + \beta c_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \alpha w_1 + \beta d_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ b_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ c_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ d_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

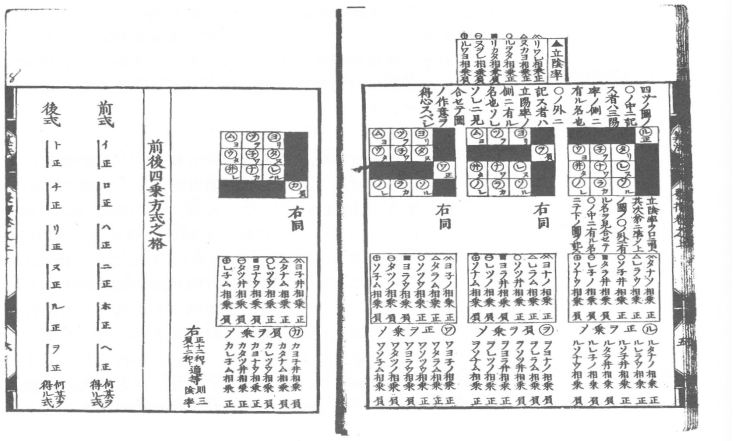
(3)　(1)，(2) から，ある行または列を定数倍して他の行または列に加えても，行列式の値は変わらない．

$$\begin{vmatrix} x_1 + kx_4 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 + ky_4 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 + kz_4 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 + kw_4 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = |A| + k \begin{vmatrix} x_4 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_4 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_4 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_4 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = |A|$$

(4)　展開公式

$$|A| = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_4 \end{vmatrix} - x_4 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

南海　このような行列式の展開を和算では使いこなしていた．図は『算法発揮』(井関知辰，1690(元禄 3) 年) である．線型代数と記法が異なるだけで，内容はまったく同じである．和算家はこれを終結式の計算に用いた．



この書は東北大学のサイト『東北大学和算ポータル』で全ページ閲覧することができる.

3.7.3 ヘロンの公式再考

太郎　ということは，定理 77 は $n=1$ でも成り立つのですね.

$n=1$ のときは次のようになります.

1 次元，つまり直線上の三つの円がある．互いに接しているとき，半径を r_1, r_2, r_3 とすると

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\pm\frac{1}{r_3}\right)^2=\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}$$

これを計算すると，

$$r_3=\mp(r_1+r_2)$$

です．半径は正なのでもとの式では $-$ の方，つまり外接する二円が他の円に内接しているときのみが起こり，そのとき $r_3=r_1+r_2$ が成り立つ.

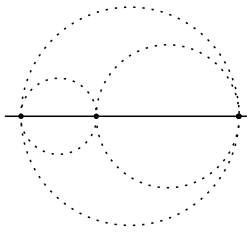
これが定理の内容です.

$n=1$ のときの等式はこのようになります.

ところで一次元の円とは何ですか?

南海　円の定義ではどうなるか.

太郎　定点からの距離が一定な点の集合です．ということは直線上では二点です．二点の組が一次元の円ですね．すると接するというのは，そのいずれかの点を共有し，中心間の距離が半径の和か差になるということです．結局，三つの円の関係が図のようになるときのみ可能です．よって $r_3=r_1+r_2$. が成り立ちます.



南海　これらの円の中心となる三点が同一直線上にあるということそのものだ．そしてそれらの点の間の距離が，対応する半径の和や差に他ならない.

一次元の場合のこの定理をどのように導くか?　一般化の可能な方法はないのか?　それを考えてみよう.

つまり中心となる三点が一直線上にあるということと，点の間の距離が半径の和や差であるということから，その関係を半径の間の関係で表せば，一次元の公式が出るのではないか.

平面上に置かれた三点は，一般には三角形を形成する．中心となる三点を A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ とする．このとき △ABC の面積 S はどのようになるか?

太郎　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1)$ なので

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

です．

南海　行列式で書くと?

太郎

$$S = \frac{1}{2}\left|\left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right|\right|$$

です．外側の縦線は絶対値記号です．

南海　面積も向きをつけて考えるのだが，今はその必要がないので，このように絶対値で考えていくことにしよう．

行列式の性質から

$$\left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right|$$

太郎　確かに．第三列に x_1 をかけて第一列から引き，第三列に y_1 をかけて第二列から引くと

$$\left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right|$$

です．

南海　△ABC の面積といえばもう一つは何か?

太郎　ヘロンの公式です．三辺の長さで面積を表すものです．

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{BC} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\ b &= \mathrm{CA} = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\ c &= \mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

とすると面積 S^2 は

$$S^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$$

となります．

南海　これを展開すると

$$\begin{aligned} 16S^2 &= \{-a^2 + (b+c)^2\}\{a^2 - (b-c)^2\} \\ &= -\{(a^2 - b^2 - c^2) - 2bc\}\{(a^2 - b^2 - c^2) + 2bc\} \\ &= -\{(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2\} \\ &= -(a^4 + b^4 + c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2) \end{aligned}$$

となる．

この先の一般化のために，ヘロン公式を三点の座標の方から作って見よう．

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha$$

とおこう．α は行列式の値としての実数値だ．$|\alpha| = 2S$ であることに注意しよう．

$$\begin{vmatrix} -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & 0 \\ -2y_1 & -2y_2 & -2y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4\alpha$$

となる．この二つの行列の積を計算してほしい．

太郎　行列式の積は，行列の積の行列式なので

$$\begin{aligned} -4\alpha^2 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & 0 \\ -2y_1 & -2y_2 & -2y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2({x_1}^2 + {y_1}^2) & -2(x_1x_2 + y_1y_2) & -2(x_1x_3 + y_1y_3) & 1 \\ -2(x_2x_1 + y_2y_1) & -2({x_2}^2 + {y_2}^2) & -2(x_2x_3 + y_2y_3) & 1 \\ -2(x_3x_1 + y_3y_1) & -2(x_3x_2 + y_3y_2) & -2({x_3}^2 + {y_3}^2) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

南海　ここで，第四列に ${x_1}^2$，${x_2}^2$，${x_3}^2$ をかけてそれぞれ第一列，第二列，第三列に加える．また第四行に ${x_1}^2$，${x_2}^2$，${x_3}^2$ をかけてそれぞれ第一行，第二行，第三行に加える．

$$-4\alpha^2 = \begin{vmatrix} -2{y_1}^2 & (x_1 - x_2)^2 - 2y_1y_2 & (x_1 - x_3)^2 - 2y_1y_3 & 1 \\ (x_1 - x_2)^2 - 2y_2y_1 & -2{y_2}^2 & (x_2 - x_3)^2 - 2y_2y_3 & 1 \\ (x_1 - x_3)^2 - 2y_3y_1 & (x_2 - x_3)^2 - 2y_3y_2 & -2{y_3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

y についても同様にすることで

$$-4\alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 & (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 & 1 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 & 0 & (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 & 1 \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 & (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

つまり

$$-4\alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

となる．最後の行列を展開してほしい．

太郎

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(a^2b^2 + a^2c^2 - a^4) + (b^4 - b^2c^2 - b^2a^2) - (c^2b^2 + c^2a^2 - c^4)$$

$$= a^4 + b^4 + c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = -16S^2$$

ヘロンの公式ができた．$\alpha^2 = 4S^2$ もわかりました．

南海　考えてみれば，面積公式もヘロンの公式も同じ $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}$ から作っているのだから，一方から他方が出ても不思議ではない．まとめると

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\|,\ -16S^2 = \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

となる．そこで 1 次元の場合の円定理を考えよう．三点 A, B, C が一直線上にあるときが，一次元の場合の円定理を導く．

太郎　そうなのですか．三点が一直線上にあるための必要十分条件はでます．三点 A, B, C が同一直線上にあるのは，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1)$ が一次従属であることですから，その行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ となるときです．つまり $\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ です．これが三点が同一直線上にあるための必要十分条件です．

南海　円が接するとき，中心間の距離は半径の和か差である．点 A, B を中心とする円が互いに外接し，点 C を中心とする円に内接しているとしよう．

三点を中心とする円の半径をそれぞれ $r_1,\ r_2,\ r_3$ とすると，

$$a = r_3 - r_2,\ b = r_3 - r_1,\ c = r_1 + r_2$$

である．これを上の式に代入して

$$\begin{vmatrix} 0 & (r_1+r_2)^2 & (r_3-r_1)^2 & 1 \\ (r_1+r_2)^2 & 0 & (r_3-r_2)^2 & 1 \\ (r_3-r_1)^2 & (r_3-r_2)^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

太郎　これから円定理の $n = 1$ の場合を導くのですね．しかし式変形の方向がわかりません．

南海　第四行に ${r_j}^2$ をかけ第 j 行から引く．第四列に ${r_j}^2$ をかけ第 j 列から引く．この結果

$$\begin{vmatrix} -2{r_1}^2 & 2r_1r_2 & -2r_1r_3 & 1 \\ 2r_1r_2 & -2{r_2}^2 & -2r_2r_3 & 1 \\ -2r_1r_3 & -2r_2r_3 & -2{r_3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

第四行，第四列に 2 をかけ，そのうえで各列を 2 で割っても 行列式 $=0$ は変わらない．

$$\begin{vmatrix} -{r_1}^2 & r_1r_2 & -r_1r_3 & 1 \\ r_1r_2 & -{r_2}^2 & -r_2r_3 & 1 \\ -r_1r_3 & -r_2r_3 & -{r_3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

そのうえで第 j 行を $\pm r_j$ で割り，第 j 列を $\pm r_j$ で割る．ただし符号は $j=1,\ 2$ のとき正，$j=3$ のとき負とする．この結果

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \frac{1}{r_1} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{r_2} \\ 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{r_3} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{r_3} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

これを展開してみてほしい．

太郎

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \frac{1}{r_1} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{r_2} \\ 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{r_3} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{r_3} & 0 \end{vmatrix} \\ = & -\frac{1}{r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{r_3} \end{vmatrix} + \frac{1}{r_2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{r_3} \end{vmatrix} + \frac{1}{r_3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{r_3} \end{vmatrix} \\ = & -\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}\right)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ & \qquad +\frac{2}{r_1r_2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \frac{2}{r_2r_3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \frac{2}{r_3r_1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = & -\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}\right)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \left(\frac{2}{r_1r_2}-\frac{2}{r_2r_3}-\frac{2}{r_3r_1}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

これから

$$\frac{2}{r_1r_2}-\frac{2}{r_2r_3}-\frac{2}{r_3r_1}=0$$

となり，両辺に $\dfrac{1}{{r_1}^2}+\dfrac{1}{{r_2}^2}+\dfrac{1}{{r_3}^2}$ を加えて

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)^2 = \frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}$$

を得ます．$n=1$ のときの円定理です．

南海　そういうことだ．

3.7.4　一般の場合の証明

南海　以上の考察はそのまま n 次元に一般化される．面積公式から考察をはじめたが，面積公式そのものは必要ない．一次独立性を判定する行列式が 0 であることのみを用いる．

太郎　ここまでのことをまとめると

(1) まず $n+1$ 次元空間におかれた $n+2$ 個の点が，n 次元空間上にある条件を座標の行列式で表す．

(2) その条件を，点間の距離の行列式で表す．

(3) 点間の距離の行列式に半径の和か差を代入する．

(4) その結果得られる半径の間の関係式が n 次元の場合の球定理である．

となります．

南海　そのとおりだ．

さて $n+1$ 次元空間で同様のことを行う．そのために，$n+1$ 次元空間の座標を $(x,\ y,\ \cdots,\ z)$ として，$\cdots$ の部分にも座標変数があり合計で $n+1$ 個であるとしよう．

太郎　$n+1$ 元空間におかれた $n+2$ 個の点を

$$\mathrm{A}_i(x_i,\ y_i,\ \cdots,\ z_i) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+2)$$

とする．これらの点が n 次元空間上にあるための必要十分条件は

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & z_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & \cdots & z_2 & 1 & 0 \\ & & \cdots & & & \\ x_{n+2} & y_{n+2} & \cdots & z_{n+2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

です．

$$\begin{vmatrix} -2x_1 & -2x_2 & \cdots & -2x_{n+2} & 0 \\ -2y_1 & -2y_2 & \cdots & -2y_{n+2} & 0 \\ & & \cdots & & \\ -2z_1 & -2z_2 & \cdots & -2z_{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2)^{n+1}\alpha$$

である．$n=1$ の場合と同様に計算する．${x_1}^2+{y_1}^2+\cdots+{z_1}^2$ や $x_1x_2+y_1y_2+\cdots+z_1z_2$ などをそれぞれ $\sum {x_1}^2$，$\sum x_1x_2$ のように表す．$n+1$ 個の座標にわたる和である．$n=1$ の場合と同様に

$$-(-2)^{n+1}\alpha^2 = \begin{vmatrix} -2\sum {x_1}^2 & -2\sum x_1x_2 & \cdots & -2\sum x_1x_{n+2} & 1 \\ -2\sum x_1x_2 & -2\sum {x_2}^2 & \cdots & -2\sum x_2x_{n+2} & 1 \\ & & \cdots & & \\ -2\sum x_1x_{n+2} & -2\sum x_2x_{n+2} & \cdots & -2\sum {x_{n+2}}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

となる．ここで，第 $n+3$ 列に ${x_1}^2$，${x_2}^2$，$\cdots$，${x_{n+2}}^2$ をかけてそれぞれ第一列，第二列，$\cdots$，第 $n+2$ 列に加える．また第 $n+3$ 行に ${x_1}^2$，${x_2}^2$，$\cdots$，${x_{n+2}}^2$ をかけてそれぞれ第一行，第二行，$\cdots$，第 $n+2$ 行に加える．各座標成分についてこれを行うことで

$$-(-2)^{n+1}\alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & \sum(x_1-x_2)^2 & \cdots & \sum(x_1-x_{n+2})^2 & 1 \\ \sum(x_1-x_2)^2 & 0 & \cdots & \sum(x_2-x_{n+2})^2 & 1 \\ & & \cdots & & \\ \sum(x_1-x_{n+2})^2 & \sum(x_2-x_{n+2})^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

を得る．ここで ${d_{ij}}^2 = \sum (x_i - x_j)^2$ とおく．$n+1$ 次元空間におかれた $n+2$ 個の点が n 次元空間上にある必要十分条件は $\alpha = 0$ であったので，等式

$$\begin{vmatrix} 0 & {d_{12}}^2 & \cdots & {d_{1(n+2)}}^2 & 1 \\ {d_{21}}^2 & 0 & \cdots & {d_{2(n+2)}}^2 & 1 \\ & & \cdots & & \\ {d_{(n+2)1}}^2 & {d_{(n+2)2}}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

が $n+1$ 次元空間におかれた $n+2$ 個の点が n 次元空間上にある条件を，点間の距離の関係式で表したものである．

南海　ここに ${d_{ij}}^2 = (r_i + r_j)^2$ を代入する．ただし $n+2$ 番目の球に他の球が内接する場合 ${d_{i(n+2)}}^2 = (r_i - r_{n+2})^2$ を代入する．この場合は r_{n+2} を負にとることにすれば，場合に分ける必要がない．

太郎

$$\begin{vmatrix} 0 & (r_1+r_2)^2 & \cdots & (r_1+r_{n+2})^2 & 1 \\ (r_2+r_1)^2 & 0 & \cdots & (r_2+r_{n+2})^2 & 1 \\ & & \cdots & & \\ (r_{n+2}+r_1)^2 & (r_{n+2}+r_2)^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

第 $n+3$ 行に ${r_j}^2$ をかけ第 j 行から引く．第 $n+3$ 列に ${r_j}^2$ をかけ第 j 列から引く．この結果

$$\begin{vmatrix} -2{r_1}^2 & 2r_1r_2 & \cdots & 2r_1r_{n+2} & 1 \\ 2r_2r_1 & -2{r_2}^2 & \cdots & 2r_2r_{n+2} & 1 \\ & & \cdots & & \\ 2r_{n+2}r_1 & 2r_{n+2}r_2 & \cdots & -2{r_{n+2}}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

第 $n+3$ 行，第 $n+3$ 列に 2 をかけ，そのうえで各列を 2 で割っても 行列式 $= 0$ は変わらない．

$$\begin{vmatrix} -{r_1}^2 & r_1r_2 & \cdots & r_1r_{n+2} & 1 \\ r_2r_1 & -{r_2}^2 & \cdots & r_2r_{n+2} & 1 \\ & & \cdots & & \\ r_{n+2}r_1 & r_{n+2}r_2 & \cdots & -{r_{n+2}}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

そのうえで第 j 行を r_j で割り，第 j 列を r_j で割る．この結果

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{r_1} \\ 1 & -1 & \cdots & 1 & \frac{1}{r_2} \\ & & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & \frac{1}{r_{n+2}} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \cdots & \frac{1}{r_{n+2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

これを展開することにより $n = 1$ の場合と同様に

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{{r_i}^2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \sum_{i<j} \frac{2}{r_i r_j} = 0 \qquad (3.9)$$

が得られるはずです.

南海　結論はその通りである．実際，次のようになる．

$$(-1)^{n+4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{r_1} \\ 1 & -1 & \cdots & 1 & \frac{1}{r_2} \\ & & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & \frac{1}{r_{n+2}} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \cdots & \frac{1}{r_{n+2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n+2}\frac{(-1)^{i-1}}{r_i}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ & & & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \cdots & \frac{1}{r_i} & \cdots & \frac{1}{r_{n+2}} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{r_i}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \cdots & \frac{1}{r_{n+2}} \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{n+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \cdots & \frac{1}{r_{n+2}} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r_i}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}+\sum_{j\neq i}\frac{(-1)^j}{r_j}\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ & & & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}\cdots j\text{ 行}$$

$$=\frac{1}{r_i}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}-\sum_{j\neq i}\frac{1}{r_j}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

この結果，等式 (3.9) が得られる．

ここで $n+1$ 次行列式 D_{n+1} と F_{n+1} を

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix},\quad F_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

とおく．等式 (3.9) は

$$D_{n+1}\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{{r_i}^2}-F_{n+1}\sum_{i<j}\frac{2}{r_ir_j}=0 \tag{3.10}$$

となる．

$$
\begin{aligned}
F_{n+1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 1 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix} = (-2)^n \\
D_{n+1} &= -D_n - F_n + \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} - \cdots \\
&= -D_n - F_n - F_n - \cdots = -D_n - nF_n \\
F_{n+1} &= \begin{vmatrix} -1+2 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = D_{n+1} + 2D_n = D_n - nF_n
\end{aligned}
$$

これから

$$(-2)^n = D_n - n(-2)^{n-1} \quad \text{つまり} \quad D_n = (-2)^{n-1}(n-2)$$

よってすべての n で

$$\frac{D_{n+1}}{F_{n+1}} = \frac{(-2)^n(n-1)}{(-2)^n} = n-1$$

等式 (3.10) より

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{{r_i}^2} = \sum_{i<j} \frac{2}{r_i r_j}$$

両辺に $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{{r_i}^2}$ を加えて

$$n\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{{r_i}^2} = \left(\sum_{i}^{n+2} \frac{1}{r_i}\right)^2$$

を得る．すでに指摘したように，$n+1$ この球が $n+2$ 番の球に内接しているときは，r_{n+2} を負とすることによって示される．以上で定理 77 が示された． □

和算では $n=3$ のときの公式を用いて，六球連鎖の問題を解いたのだ．互いに接する 3 個の球 O_0, O_1, O_2 のどれにも接する球の連鎖 C_i について，まず C_1, C_2 で球定理をつかえば C_2 の半径が決まる．これから C_3, C_4, $\cdots$ と順に決定してゆけば C_6 で終わることが示せる．これは膨大な計算になるはずだ．

3.7.5 ヘロンの公式の一般化

南海 ヘロンの公式で与えられる面積公式が値 0 になる場合は，それらの頂点が同一直線上にあるときである．このことを導きに，円定理を，頂点の位置が一般の位置にはない場合の関係式として導いた．つまりわれわれの考察の交差点にはヘロンの公式があった．

そこで，ここでヘロンの公式の空間版である四面体の体積を辺長で表す公式を導いてみよう．計算法はこれまでの行列の変形を見習いながらも，自己完結的に導く方法でやってみよう．

四面体の 4 頂点を A(0, 0, 0) B(x_1, 0, 0)，C(x_2, y_2, 0)，D(x_3, y_3, z_3)，として一般性を失わない．このとき四面体 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{6}x_1y_2z_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

となる．ここで辺長を

$$\mathrm{AB} = a,\ \mathrm{CD} = \alpha,\ \mathrm{AC} = b,\ \mathrm{DB} = \beta,\ \mathrm{AD} = c,\ \mathrm{BC} = \gamma$$

とする．V をこれらの辺長で表したものが，求める公式である．そこでこれまでの方法にならって

$$6V = x_1y_2z_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

とおく．

$$-(-2)^3 \cdot 6V = \begin{vmatrix} 0 & -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -2y_2 & -2y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

よって

$$-(-2)^3 \cdot 36V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2{x_1}^2 & -2x_1x_2 & -2x_1x_3 & 1 \\ 0 & -2x_1x_2 & -2({x_2}^2+{y_2}^2) & -2(x_2x_3+y_2y_3) & 1 \\ 0 & -2x_1x_3 & -2(x_2x_3+y_2y_3) & -2({x_3}^2+{y_3}^2+{z_3}^2) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ここで第 5 行と第 5 列に ${x_1}^2$，${x_2}^2+{y_2}^2$，${x_3}^2+{y_3}^2+{z_3}^2$ をかけ，それぞれ第 2 行，第 3 行，第 4 行，および第 2 列，第 3 列，第 4 列に加える．行列式の値は変わらない．これによって

$$\begin{aligned} & -(-2)^3 \cdot 36V^2 \\ = & \begin{vmatrix} 0 & {x_1}^2 & {x_2}^2+{y_2}^2 & {x_3}^2+{y_3}^2+{z_3}^2 & 1 \\ {x_1}^2 & 0 & (x_1-x_2)^2+{y_2}^2 & (x_1-x_3)^2+{y_3}^2+{z_3}^2 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & (x_1-x_2)^2+{y_2}^2 & 0 & (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+{z_3}^2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2+{z_3}^2 & (x_1-x_3)^2+{y_3}^2+{z_3}^2 & (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+{z_3}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & \gamma^2 & \beta^2 & 1 \\ b^2 & \gamma^2 & 0 & \alpha^2 & 1 \\ c^2 & \beta^2 & \alpha^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

を得る．これを展開する．

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a^2 & 0 & \gamma^2 & \beta^2 \\ b^2 & \gamma^2 & 0 & \alpha^2 \\ c^2 & \beta^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2 & \gamma^2 & 0 & \alpha^2 \\ c^2 & \beta^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & \gamma^2 & \beta^2 \\ c^2 & \beta^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & \gamma^2 & \beta^2 \\ b^2 & \gamma^2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= a^2 \begin{vmatrix} \gamma^2 & 0 & \alpha^2 \\ \beta^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} 0 & \gamma^2 & \beta^2 \\ \beta^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + c^2 \begin{vmatrix} 0 & \gamma^2 & \beta^2 \\ \gamma^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \gamma^2 & \beta^2 \\ \gamma^2 & 0 & \alpha^2 \\ \beta^2 & \alpha^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ a^2 \begin{vmatrix} b^2 & 0 & \alpha^2 \\ c^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} b^2 & \gamma^2 & \alpha^2 \\ c^2 & \beta^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + c^2 \begin{vmatrix} b^2 & \gamma^2 & 0 \\ c^2 & \beta^2 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&- a^2 \begin{vmatrix} a^2 & \gamma^2 & \beta^2 \\ c^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} a^2 & 0 & \beta^2 \\ c^2 & \beta^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - c^2 \begin{vmatrix} a^2 & 0 & \gamma^2 \\ c^2 & \beta^2 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&+ a^2 \begin{vmatrix} a^2 & \gamma^2 & \beta^2 \\ b^2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a^2 & 0 & \beta^2 \\ b^2 & \gamma^2 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + c^2 \begin{vmatrix} a^2 & 0 & \gamma^2 \\ b^2 & \gamma^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{，これを展開して整理する．} \\
&= 2a^2\alpha^2\left(-a^2-\alpha^2+b^2+\beta^2+c^2+\gamma^2\right) + 2b^2\beta^2\left(a^2+\alpha^2-b^2-\beta^2+c^2+\gamma^2\right) \\
&+ 2c^2\beta^2\left(a^2+\alpha^2+b^2+\beta^2-c^2-\gamma^2\right) - 2\alpha^2b^2c^2 - 2a^2\beta^2c^2 - 2a^2b^2\gamma^2 - 2\alpha^2\beta^2\gamma^2
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
144V^2 &= a^2\alpha^2\left(-a^2-\alpha^2+b^2+\beta^2+c^2+\gamma^2\right) \\
&+ b^2\beta^2\left(a^2+\alpha^2-b^2-\beta^2+c^2+\gamma^2\right) \\
&+ c^2\beta^2\left(a^2+\alpha^2+b^2+\beta^2-c^2-\gamma^2\right) \\
&- \alpha^2b^2c^2 - a^2\beta^2c^2 - a^2b^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2
\end{aligned}
$$

これが四面体の体積を辺長で表す公式であり，ヘロンの公式の三次元への拡張である．

ここで等面四面体の場合を考える．このときは $a=\alpha$，$b=\beta$，$c=\gamma$ であるから

$$
\begin{aligned}
144V^2 &= a^4\left(-2a^2+2b^2+2c^2\right) + b^4\left(2a^2-2b^2+2c^2\right) \\
&+ c^4\left(2a^2+2b^2-2c^2\right) - 4a^2b^2c^2
\end{aligned}
$$

これから

$$
\begin{aligned}
72V^2 &= -a^6 + (b^2+c^2)a^4 + (b^4+c^4-2b^2c^2)a^2 - (b^2-c^2)^2(b^2+c^2) \\
&= (b^2+c^2)\{a^4-(b^2-c^2)^2\} - a^2\{a^4-(b^2-c^2)^2\} \\
&= (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)
\end{aligned}
$$

となり，この場合は因数分解された形になる．

これは辺長が a, b, c の等面四面体が，3 辺が

$$
\sqrt{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}},\ \sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}},\ \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}
$$

の直方体に埋め込め，その直方体の体積の $\dfrac{1}{3}$ が四面体の体積であることから直接にも示される．

ヘロンの公式の一般化　$n+1$ 元空間におかれた $n+2$ 個の点を

$$\mathrm{A}_i(x_i,\ y_i,\ \cdots,\ z_i)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+2)$$

とする．頂点を結ぶ線分は ${}_{n+2}\mathrm{C}_2 = {}_{n+2}\mathrm{C}_n$ 本あり，そのうちの $n+1$ 本でできる n 次元の超平面が $n+2$ 枚できる．これらで囲まれた $n+2$ 超面体の体積 V は

$$V=\frac{1}{(n+1)!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & z_1 & 1 & 0\\ x_2 & y_2 & \cdots & z_2 & 1 & 0\\ & & \cdots & & & \\ x_{n+2} & y_{n+2} & \cdots & z_{n+2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

である．この体積公式を用いれば，

$$\begin{aligned} -(-2)^{n+1}\left\{(n+1)!V\right\}^2 &= \begin{vmatrix} 0 & \sum(x_1-x_2)^2 & \cdots & \sum(x_1-x_{n+2})^2 & 1\\ \sum(x_1-x_2)^2 & 0 & \cdots & \sum(x_2-x_{n+2})^2 & 1\\ & & \cdots & & \\ \sum(x_1-x_{n+2})^2 & \sum(x_2-x_{n+2})^2 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 0 & {d_{12}}^2 & \cdots & {d_{1(n+2)}}^2 & 1\\ {d_{21}}^2 & 0 & \cdots & {d_{2(n+2)}}^2 & 1\\ & & \cdots & & \\ {d_{(n+2)1}}^2 & {d_{(n+2)2}}^2 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

が一般の場合のヘロンの公式である．3 次元の公式もこれからも導かれるが，体積の考察を高校範囲に収めるため，先のように四面体を一般性を失わない範囲で体積がわかりやすい形で座標空間においた．

3.8　重心座標

2010.9.4

3.8.1　重心座標と三角形の五心等

3.8.1.1　重心座標

太郎　2003 年京大後期文系に次の問題があります.

例題 3.8.1　三角形 ABC と点 P に対して，次の 2 つの条件は同値であることを証明せよ.

(i) 点 P は三角形 ABC の内部 (周は除く) にある

(ii) 正の数 a，b，c があって，$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$ が成り立つ

解答　点 P が三角形 ABC の内部にあるとする．線分 AP の延長線が線分 BC (両端を除く) と交わる．この点を Q とする.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

とおく．$0<k<1$ である．点 Q は辺 BC 上にあるので，$0<t<1$ の範囲の正の実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表される．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+kt\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表される．これから

$$(1-k)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{PB}}+kt\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$

$$a=1-k,\ b=k(1-t),\ c=kt \tag{3.11}$$

とおく．$0<k,\ t<1$ なので $a,\ b,\ c>0$ である.

逆に正の数 $a,\ b,\ c$ で

$$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$

となるものが存在するとする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \tag{3.12}$$

と表される.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

これは，$\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で定まる線分 BC 上の点を Q とする．$0<\dfrac{b+c}{a+b+c}<1$ より点 P は線分 AQ を $b+c:a$ に内分するつまり点 P は 三角形 ABC の内部にある．　□

太郎　この問題の解をよく見ます．正の数の組 $(a,\ b,\ c)$ に対して等式 (3.12) で点 P が定まります．u を正数として $(ua,\ ub,\ uc)$ も同じ点を定めます．逆に △ABC 内部の点 P に対して，(3.11) で正の数の組 $(a,\ b,\ c)$ の比が定まります.

そこで △ABC は固定したうえで，$a,\ b,\ c$ が正という条件を外し実数 $x,\ y,\ z$ を用いれば，数の組 $(x,\ y,\ z)$ で平面上の点を表すことができるのではないか．数の組 $(x,\ y,\ z)$ に対して

$$x\overrightarrow{\mathrm{PA}} + y\overrightarrow{\mathrm{PB}} + z\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{O}} \tag{3.13}$$

で点 P を定める．この等式は

$$(x+y+z)\overrightarrow{\mathrm{AP}} = y\overrightarrow{\mathrm{AB}} + z\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となり $x+y+z=0$ なら点 P は定まらない．$x+y+z\neq 0$ なら点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \tag{3.14}$$

と一意に定まる．0 でない実数 u に対し $(x,\ y,\ z)$ と $(ux,\ uy,\ uz)$ は同じ点を定める．

逆に平面上の任意の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が一次独立であることより

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる s と t が一意に定まり，これから

$$(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{PA}} + s\overrightarrow{\mathrm{PB}} + t\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{O}}$$

となる．また 0 でない実数 u によって

$$x = u(1-s-t),\ y = us,\ z = ut$$

とおくと，等式 (3.13) が成り立ち

$$s = \frac{y}{x+y+z}, \quad t = \frac{z}{x+y+z}$$

となり同じ点 P を定める．この点と数の組の対応は一対一対応ではなく，比の等しい組は同じ点に対応し，同じ点を定める数の組は比が等しい．

このように $x+y+z\neq 0$ である数の組 $(x,\ y,\ z)$ と，平面上の点が対応するのだから，$(x,\ y,\ z)$ は座標ではないか，これが質問点です．

南海　まさにそうである．これは射影座標の一種と考えられる．射影座標については既出のものでは『パスカルの定理』を，また今後書かれてゆく『幾何学の精神』を参考にしてほしい．

射影平面の射影座標 $(x,\ y,\ z)$ では $z=0$ が無限遠直線となる．ユークリッド平面は，射影平面で $z\neq 0$ の部分であり，$\left(\dfrac{x}{z},\ \dfrac{y}{z}\right)$ がいわゆる xy 座標平面の座標に対応する．

等式 (3.13) で点 P を定める座標 $(x,\ y,\ z)$ では，$x+y+z=0$ がいわば無限遠直線であり，$x+y+z\neq 0$ の部分がユークリッド平面になる．

ただここでは射影幾何の問題としてこれを考えるより，19 世紀に盛んに研究された三角形幾何の一つとして考え，この方向でパスカルの定理の別証明まで行ってみよう．

任意の基準点 O をとって等式 (3.13) を書き直すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{x}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \tag{3.15}$$

となる．等式 (3.13) またはそれと同等な等式 (3.15) の $(x,\ y,\ z)$ は座標系になる．この座標系を △ABC で定まる**重心座標系**，$(x,\ y,\ z)$ を点 P の**重心座標**という．

一方

$$x_1 = \frac{x}{x+y+z},\ x_2 = \frac{y}{x+y+z},\ x_3 = \frac{z}{x+y+z}$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x_1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + x_2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + x_3\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

となる．和が 1 になるようにとった $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ を**絶対重心座標**ということもある．適宜使い分ければよい．

3.8.1.2　重心と内心

南海　三角形の五心を重心座標で表そう．
太郎　重心 G は

$$(1,\ 1,\ 1).$$

絶対重心座標では

$$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

内心 I について．△ABC の辺長を

$$a = \mathrm{BC},\ b = \mathrm{CA},\ c = \mathrm{AB}$$

と置く．ベクトル $\dfrac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は ∠BAC を二等分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{k}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{k}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とおける．同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \frac{l}{c}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \frac{l}{a}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \left(1 - \frac{l}{a} - \frac{l}{c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{l}{a}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

これより $k = \dfrac{bc}{a+b+c}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

始点を O にとって

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

また

$$a\overrightarrow{\mathrm{IA}} + b\overrightarrow{\mathrm{IB}} + c\overrightarrow{\mathrm{IC}} = \overrightarrow{\mathrm{O}}$$

内心 I の重心座標は

$$(a,\ b,\ c).$$

絶対重心座標は

$$\left(\frac{a}{a+b+c},\ \frac{b}{a+b+c},\ \frac{c}{a+b+c}\right)$$

となる．2006 年の神戸大学理系 1 番を見ると，傍心の重心座標が

$$(-a,\ b,\ c),\ (a,\ -b,\ c),\ (a,\ b,\ -c)$$

となることもわかる．

3.8.1.3　重心座標と面積

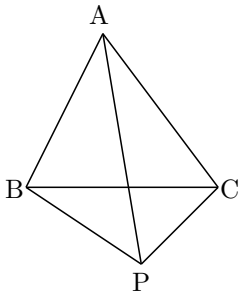
太郎　外心と垂心は難しいです.

南海　重心座標のもうひとつの意味を考えよう.

△ABC を一つ固定する．重心座標そのものは鋭角三角形を一つ固定すればよいのだが，三頂点の位置ベクトルで，外心や垂心がどのように表されるかという観点から，一般的に △ABC が鈍角三角形でもいいとする．ただし垂心を考えるときは，直角三角形ではないとする．

鈍角三角形の場合を含んで考えるために，その準備として，符号つき面積を定める．△ABC で図形としての三角形 ABC を表すが，同時にその面積も表すことにする．ただし，3 点 A, B, C が左回りに並んでいれば正の値にとり，右回りに並んでいれば負の値にとるものとする．すべて比が問題なので正負を逆にしても同じことである．さらに 3 点 A, B, C が同一直線上にあるときは 0 を表すものとする．

このように約束すると，△ABC と点 P に対してつねに



$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{PBC} + \triangle\mathrm{PCA} + \triangle\mathrm{PAB}$$

が成り立つ．図の場合符号は次のようになる．

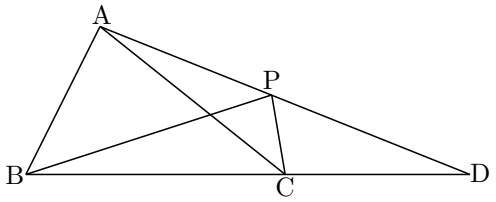
$$\triangle\mathrm{PBC} < 0,\ \triangle\mathrm{PCA} > 0,\ \triangle\mathrm{PAB} > 0$$

等式 (3.14) は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{y+z}{x+y+z}\left(\frac{y}{y+z}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{z}{y+z}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

ともなるので，直線 AP と直線 BC の交点 D は線分 BC を $z : y$ に内分または外分することがわかる．

図のような位置に P がある場合．D は外分点である．符号も入れて



$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ADC} = z : y, \quad \triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PDC} = z : y$$

これから辺々引いて次式が成りたつ．

$$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PCA} = z : y$$

始点を変えて考えることにより

$$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PCA} : \triangle\mathrm{PBC} = z : y : x$$

である．他の場合も同様に成り立つ．

太郎　つまり，重心座標はまた点 P を頂点とし，△ABC の各辺を P の対辺とする三角形の符号つき面積の値の比でもある．絶対重心座標は

$$x_1 = \frac{\triangle\,\mathrm{PBC}}{\triangle\mathrm{ABC}},\ x_2 = \frac{\triangle\,\mathrm{PCA}}{\triangle\mathrm{ABC}},\ x_3 = \frac{\triangle\,\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{ABC}}$$

になる．これを用いると内心 I については内接円の半径を r とすると

$$\triangle\mathrm{IBC} = \frac{ra}{2},\ \triangle\mathrm{ICA} = \frac{rb}{2},\ \triangle\mathrm{IAB} = \frac{rc}{2}$$

なので，その重心座標が

$$(a,\ b,\ c)$$

であることがわかる．

3.8.1.4　外心

外心は，外接円の半径を R とし，△ABC の頂角に対する中心角 $2A,\ 2B,\ 2C$ を考えることにより

$$\triangle \mathrm{OBC} = \frac{R^2}{2}\sin 2A,\ \triangle \mathrm{OCA} = \frac{R^2}{2}\sin 2B,\ \triangle \mathrm{OAB} = \frac{R^2}{2}\sin 2C$$

となる．これは △ABC が鈍角三角形で，外心 O が △ABC の外部にあるときも成り立つ．

よって外心 O の重心座標は

$$(\sin 2A,\ \sin 2B,\ \sin 2C)$$

である．正弦定理，余弦定理から

$$\frac{R^2}{2}\sin 2A = R^2 \sin A\cos A = R\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{Ra^2(-a^2+b^2+c^2)}{4abc}$$

なので，外心 O の重心座標は

$$\left(a^2(-a^2+b^2+c^2),\ b^2(a^2-b^2+c^2),\ c^2(a^2+b^2-c^2)\right)$$

でもある．これらは直角三角形でも成り立つ．

3.8.1.5　垂心

垂心 H の重心座標を求める．△ABC は直角三角形ではないとする．

$$\triangle \mathrm{HAB} : \triangle \mathrm{HCA} = c\cos B : b\cos C = 2R\sin C\cos B : 2R\sin B\cos C = \tan C : \tan B$$

これは △ABC が鈍角三角形で H が外部にあるときも成立する．これから垂心 H の重心座標は

$$(\tan A,\ \tan B,\ \tan C)$$

である．

$$\tan A = \frac{a}{2R}\cdot\frac{2bc}{-a^2+b^2+c^2}$$

なので，垂心 H の重心座標を辺長で表すと

$$\left(\frac{1}{-a^2+b^2+c^2},\ \frac{1}{a^2-b^2+c^2},\ \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)$$

である．直角三角形でないとしたが，$A=\dfrac{\pi}{2}$ のときは $\mathrm{H}=\mathrm{A}$ である．これを，比 $\left(1,\ \dfrac{\tan B}{\tan A},\ \dfrac{\tan C}{\tan A},\ \right)$ の極限で考え，$(1,\ 0,\ 0)$ を重心座標ととれば，直角三角形の場合を含めて成り立つ．

南海　三角形には五心の他にも多くの点が定まる．それらの相互関係が，この重心座標や次に紹介する三線座標を用いて研究された．それは貴重なものであり，また実地に検証しながら証明してゆける分野で，高校ではもっと取りあげてほしい．

3.8.2　三線座標

南海　重心座標と並んで三角形の幾何の研究などに用いられてきたのが三線座標である．重心座標との関係でその定義と五心の表現には触れておこう．

3.8.2.1　三線座標の定義

平面上に △ABC をとる．平面上の点 P から各辺 BC, CA, AB，またはその延長上に下ろした垂線の長さの比を $x : y : z$ とする．ただし，内心と点 P がその辺直線に関して同じ側にあるときは正，逆の側にあるときは負にとるものとする．点 P は比 $x : y$ で上にあるべき直線が決まり，その結果，比 $x : y : z$ で点 P は一意に確定する．$(x,\ y,\ z)$ を点 P の**三線座標**という．0 でない実数 u に関して，$(x,\ y,\ z)$ と $(ux,\ uy,\ uz)$ は同じ点を定める．$x,\ y,\ z$ が長さそのもののときこれを**絶対三線座標**という．

ここで △PQR の面積を三点 P, Q, R が反時計回りに配置されているとき正，一直線上にあるとき 0，逆方向にあるとき負，と定める．$(x,\ y,\ z)$ が点 P の絶対三線座標であるとき，

$$\triangle\mathrm{PBC} = \frac{ax}{2},\ \triangle\mathrm{PCA} = \frac{by}{2},\ \triangle\mathrm{PAB} = \frac{cz}{2}$$

となる．よって

$$ax + by + cz = 2 \triangle \mathrm{ABC}$$

である．

太郎　絶対三線座標では

$$\triangle\mathrm{PBC} = \frac{aX}{2},\ \triangle\mathrm{PCA} = \frac{bY}{2},\ \triangle\mathrm{PAB} = \frac{cZ}{2}$$

となる．よって

$$\frac{aX}{2} + \frac{bY}{2} + \frac{cZ}{2} = \triangle\mathrm{ABC}$$

である．

南海　また点 P の重心座標を $(x,\ y,\ z)$，三線座標を $(X,\ Y,\ Z)$ とすると，

$$(x,\ y,\ z) = (aX,\ bY,\ cZ)$$

が成り立つ．

三線座標による直線の方程式　符号も含めて

$$ax : by : cz = \triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PCA} : \triangle\mathrm{PAB}$$

が成り立つ．よって直線 AP は辺 BC を

$$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PCA} = cz : by$$

に分ける．他も同様である．この結果

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{ax + by + cz}\left(by\overrightarrow{\mathrm{AB}} + cz\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

あるいは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{ax + by + cz}\left(ax\overrightarrow{\mathrm{OA}} + by\overrightarrow{\mathrm{OB}} + cz\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

と表される．

命題 3 三線座標 $(x,\ y,\ z)$ による直線の方程式は，$x,\ y,\ z$ の斉一次式である． ■

証明 直線は通る点と方向を与えることで定まる．通る点を $\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，方向を $\gamma\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\delta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とする．直線上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t(\gamma\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\delta\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

と表される．これから

$$(1-\alpha-\beta-t\gamma-t\delta)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(\alpha+t\gamma)\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(\beta+t\delta)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$

となる．よって三線座標で点 P を $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\frac{by}{ax+by+cz}=\alpha+t\gamma,\ \frac{cz}{ax+by+cz}=\beta+t\delta$$

となる．これから t を消去して

$$\left(\frac{by}{ax+by+cz}-\alpha\right)\delta=\left(\frac{cz}{ax+by+cz}-\beta\right)\gamma$$

を得る．これを整理して

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)ax+(\alpha\delta-\beta\gamma-\delta)by+(\alpha\delta-\beta\gamma+\gamma)cz=0 \tag{3.16}$$

を得る．逆に，$x,\ y,\ z$ の斉次 1 次式

$$lax+mby+ncz=0$$

が与えられれば

$$\alpha\delta-\beta\gamma=l,\ l-\delta=m,\ l+\gamma=n$$

となるように，第 2，3 式から $\gamma,\ \delta$ を定め第 1 式から $\alpha,\ \beta$ を定まった比になるようにとれば，直線のベクトル方程式が定まる．

よって直線の方程式は $x,\ y,\ z$ の斉次 1 次式である． □

命題 4 三線座標が $(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)$，$(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)$ である二点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}z=0 \tag{3.17}$$

である． ■

証明 通る点と方向が

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}=\frac{b\beta_1}{a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c\gamma_1}{a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1}\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}-\overrightarrow{\mathrm{AP}_2}$$

なので，直線の方程式 3.18 に

$$\alpha=\frac{b\beta_1}{a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1},\ \beta=\frac{c\gamma_1}{a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1},$$
$$\gamma=\frac{b\beta_1}{a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1}-\frac{b\beta_2}{a\alpha_2+b\beta_2+c\gamma_2},\ \delta=\frac{c\gamma_1}{a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1}-\frac{c\gamma_2}{a\alpha_2+b\beta_2+c\gamma_2}$$

を代入する．代入して整理し $abc\ (\neq 0)$ で除すと

$$(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)x+(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)y+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)z=0$$

つまり方程式 (3.19) を得る． □

これはまた 3 点

$$(x,\ y,\ z),\ (\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1),\ (\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)$$

が共線である条件でもある．

三角形の五心を三線座標で表すと次のようになる．重心座標に現れた成分に対する主な計算では，

$$\frac{\sin 2A}{a}=\frac{2\sin A\cos A}{2R\sin A}=\frac{\cos A}{R},\ \frac{\tan A}{a}=\frac{\tan A}{2R\sin A}=\frac{1}{2R\cos A}=\frac{\sec A}{2R}$$

などより

重心	$\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$
外心	$(\cos A,\ \cos B,\ \cos C)$
外心	$\big(a(-a^2+b^2+c^2),\ b(a^2-b^2+c^2),\ c(a^2+b^2-c^2)\big)$
内心	$(1,\ 1,\ 1)$
傍心	$(-1,\ 1,\ 1)$ 等
垂心	$(\sec A,\ \sec B,\ \sec C)$
垂心	$\left(\frac{1}{a(-a^2+b^2+c^2)},\ \frac{1}{b(a^2-b^2+c^2)},\ \frac{1}{c(a^2+b^2-c^2)}\right)$

となる．

3.8.3 重心座標による図形の方程式

太郎　座標というからには，成分間の関係式をみたす点の集合がどのような図形になるか，ここを考えなければならないです．重心座標での方程式がわかれば三線座標での方程式もわかる．重心座標で考えます．

3.8.3.1 直線の方程式

直線は通る点と方向を与えることで定まる．通る点を $\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，方向を $\gamma\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\delta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とする．直線上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t(\gamma\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\delta\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

と表される．これから

$$(1-\alpha-\beta-t\gamma-t\delta)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(\alpha+t\gamma)\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(\beta+t\delta)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$

となる．よって重心座標で点 P を $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\frac{y}{x+y+z}=\alpha+t\gamma,\ \frac{z}{x+y+z}=\beta+t\delta$$

となる．これから t を消去して

$$\left(\frac{y}{x+y+z}-\alpha\right)\delta=\left(\frac{z}{x+y+z}-\beta\right)\gamma$$

を得る．これを整理して

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)x+(\alpha\delta-\beta\gamma-\delta)y+(\alpha\delta-\beta\gamma+\gamma)z=0 \tag{3.18}$$

を得る．逆に，$x,\ y,\ z$ の斉次 1 次式

$$lx+my+nz=0$$

が与えられれば

$$\alpha\delta-\beta\gamma=l,\ l-\delta=m,\ l+\gamma=n$$

となるように，第 2，3 式から $\gamma,\ \delta$ を定め第 1 式から $\alpha,\ \beta$ を定まった比になるようにとれば，直線のベクトル方程式が定まる．

よって直線の方程式は $x,\ y,\ z$ の斉次 1 次式である．

二点を通る直線

命題 5

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathrm{P_1A}}+\beta_1\overrightarrow{\mathrm{P_1B}}+\gamma_1\overrightarrow{\mathrm{P_1C}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$
$$\alpha_2\overrightarrow{\mathrm{P_2A}}+\beta_2\overrightarrow{\mathrm{P_2B}}+\gamma_2\overrightarrow{\mathrm{P_2C}}=\overrightarrow{\mathrm{O}}$$

で定まる二点 $\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2}$ を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} z = 0 \tag{3.19}$$

である． ■

証明　直線の方程式 3.18 に

$$\alpha=\frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1},\ \beta=\frac{\gamma_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1},$$
$$\gamma=\frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}-\frac{\beta_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2},\ \delta=\frac{\gamma_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}-\frac{\gamma_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}$$

を代入する．代入して整理すると

$$(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)x+(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)y+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)z=0$$

つまり方程式 (3.19) を得る． □

これはまた 3 点

$$(x,\ y,\ z),\ (\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1),\ (\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)$$

が共線である条件でもある．

3.8.3.2　円錐曲線の方程式

南海　円錐曲線の射影幾何での定義は，今後『幾何学の精神』でおこなう予定である．ここでは，射影平面で斉次二次式で定まる点の集合を円錐曲線と定める．いいかえると $(x_1,\ x_2,\ x_0)$ を射影座標とするとき，

$$C\ :\ p{x_1}^2+q{x_2}^2+r{x_0}^2+2lx_1x_2+2mx_1x_0+2nx_2x_0=0$$

で定まる射影平面上の点の集合を円錐曲線という．これは行列を用いて

$$(x_1,\ x_2,\ x_0)\begin{pmatrix} p & l & m \\ l & q & n \\ m & n & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix}=0$$

と表すことができる．この円錐曲線は，重心座標ではどのような方程式で表されるのか．

これを明示的に表すために，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(c_1,\ c_2)$ とする．重心座標が $(x,\ y,\ z)$ の点は直交ユークリッド座標では

$$\frac{x}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{x+y+z}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で表される．したがってこれを射影平面におくと

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$(x,\ y,\ z)$ のみたすべき方程式は

$$(x,\ y,\ z)^tA\begin{pmatrix} p & l & m \\ l & q & n \\ m & n & r \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

となり，やはり二次の斉次式である．これを整理し改めて係数を取りなおし，重心座標による円錐曲線を

$$px^2+qy^2+rz^2+2lxy+2myz+2nzx=0$$

とおく．これが△ABC の頂点を通ることを考える．頂点の重心座標は $(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ である．これらが方程式を満たすので，$p=q=r=0$ である．よって

$$lxy+myz+nzx=0$$

これが，3 頂点を通る円錐曲線である．

円の方程式

南海　これをもとに，まず △ABC の 3 頂点を通る円の方程式を重心座標で表そう．

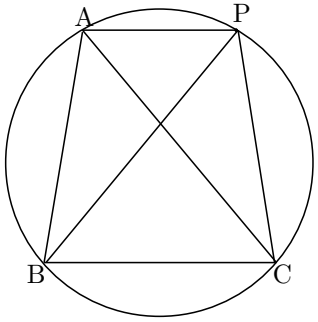
命題 6　△ABC の頂点 A, B, C の対辺の長さを a, b, c とする．△ABC の外接円の重心座標による方程式は

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0 \tag{3.20}$$

である． ■

証明　方程式 (3.20) が円錐曲線であることはわかっているので，△ABC の外接円周上の点がこの方程式を満たすことを示せば，方程式 (3.20) が外接円の方程式である．

外接円周上に点 P をとる．図のように弧 CA 上にあるとする．このとき円周角の定理から



$$x = \frac{1}{2}\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}\sin A$$
$$y = -\frac{1}{2}\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}\sin(\pi - B)$$
$$z = \frac{1}{2}\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PA}\sin C$$

である．よって外接円の半径を R とすると

$$\begin{aligned} & a^2yz + b^2zx + c^2xy \\ = \ & \frac{\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}}{2}\left(-a^2\mathrm{PA}\sin B\sin C + b^2\mathrm{PB}\sin C\sin A - c^2\mathrm{PC}\sin A\sin B\right) \\ = \ & R\cdot\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}\cdot\sin A\sin B\sin C\left(-a\mathrm{PA} + b\mathrm{PB} - c\mathrm{PC}\right) \end{aligned}$$

トレミーの定理から

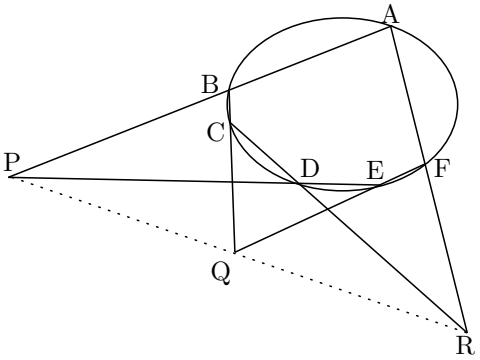
$$a\mathrm{PA} + c\mathrm{PC} = b\mathrm{PB}$$

なので，点 P の重心座標は方程式 (3.20) をみたす．円周上の他の位置にあっても同じなので，円周上の点はすべて方程式 (3.20) をみたし，この結果方程式 (3.20) が外接円の方程式である． □

3.8.4　パスカルの定理の別証明

南海　以上の準備の下でパスカルの定理を重心座標を用いて証明しよう．3 次行列の行列式は，2 次の場合と同様に考えればよい．

命題 7　円錐曲線 C の周上に 6 点，A，B，C，D，E，F がこの順に並んでいる．直線 AB と DE の交点を P，直線 BC と EF の交点を Q，直線 CD と FA の交点を R とする．このとき P, Q, R は共線である． ■



証明　△ACE の重心座標で考える．頂点の重心座標はそれぞれ

$$(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)$$

である．円錐曲線は △ACE に外接しているので，その方程式は

$$lxy + myz + nzx = 0 \tag{3.21}$$

とおける．他の 3 点 B，D，F の重心座標を

$$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \mathrm{D}(d_1,\ d_2,\ d_3),\ \mathrm{F}(f_1,\ f_2,\ f_3)$$

とおく．これらの点が方程式 (3.21) をみたすので，

$$\begin{pmatrix} b_1b_2 & b_2b_3 & b_3b_1 \\ d_1d_2 & d_2d_3 & d_3d_1 \\ f_1f_2 & f_2f_3 & f_3f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

$l,\ m,\ n$ はすべてが 0 ではないので，

$$\begin{vmatrix} b_1b_2 & b_2b_3 & b_3b_1 \\ d_1d_2 & d_2d_3 & d_3d_1 \\ f_1f_2 & f_2f_3 & f_3f_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.22}$$

である．二点 A(1, 0, 0)，B($b_1,\ b_2,\ b_3$) を通る直線の方程式と，二点 E(0, 0, 1)，D($d_1,\ d_2,\ d_3$) を通る直線の方程式は，それぞれ命題 3.18 より，

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -(b_3y - b_2z) = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = -(d_2x - d_1y) = 0$$

この交点を求める．これより

$$x : y = d_1 : d_2, \qquad y : z = b_2 : b_3$$

なので AB と DE の交点 P の重心座標は

$$\mathrm{P}(x,\ y,\ z) = (b_2d_1,\ b_2d_2,\ b_3d_2)$$

同様にして，C(0, 1, 0)，B($b_1,\ b_2,\ b_3$) を通る直線の方程式と，E(0, 0, 1)，F($f_1,\ f_2,\ f_3$) を通る直線の方程式から BC と EF の交点 Q を求めると

$$\mathrm{Q}(x,\ y,\ z) = (b_1f_1,\ b_1f_2,\ b_3f_1)$$

また C(0, 1, 0)，D($d_1,\ d_2,\ d_3$) を通る直線の方程式と，A(1, 0, 0)，F($f_1,\ f_2,\ f_3$) を通る直線の方程式から CD と AF の交点 R を求めると

$$\mathrm{R}(x,\ y,\ z) = (d_1f_3,\ d_3f_2,\ d_3f_3)$$

となる．この 3 点の共線条件を調べる．

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} b_2d_1 & b_2d_2 & b_3d_2 \\ b_1f_1 & b_1f_2 & b_3f_1 \\ d_1f_3 & d_3f_2 & d_3f_3 \end{vmatrix} = b_2d_1(b_1f_2d_3f_3 - b_3f_1d_3f_2) \\ &\quad -b_2d_2(b_1f_1d_3f_3 - b_3f_1d_1f_3) + b_3d_2(b_1f_1d_3f_2 - b_1f_2d_1f_3) \\ = \quad &-b_1b_2(d_2d_3f_1f_3 - d_3d_1f_2f_3) + b_2b_3(d_1d_2f_1f_3 - d_1d_3f_1f_2) - b_3b_1(d_1d_2f_2f_3 - d_2d_3f_1f_2) \end{aligned}$$

ところがこれは $-\begin{vmatrix} b_1b_2 & b_2b_3 & b_3b_1 \\ d_1d_2 & d_2d_3 & d_3d_1 \\ f_1f_2 & f_2f_3 & f_3f_1 \end{vmatrix}$ なので，等式 (3.22) より値は 0，つまり 3 点 P，Q，R は共線である． □

このような関係は誰が見つけたのだろうか．あるいはまた，このような関係が存在する意味についても考えなければならないということでもある．

3.9　特別な四面体

2011.12/2004.9.1/2003.4.20

3.9.1　ある入試問題

拓生　2003 年の京大入学試験で次の問題が出ました．

例 3.9.1 四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i) OA⊥BC，OB⊥AC，OC⊥AB

(ii) 4 つの面の面積がすべて等しい．

をみたしている．このとき，この四面体は正四面体であることを示せ．

この問題は面積をベクトルで表せればすぐにできます．
南海　そう．文系の方はベクトルで与えられ，理系の方は線分で与えられていた．
拓生　いずれにしてもベクトルで解くのが一番簡単なようです．
解答
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とおくと, 条件 (i) より

$$\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\right)=0,\quad \overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\right)=0,\quad \overrightarrow{c}\cdot\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}\quad \cdots①$$

また, 条件 (ii) より

$$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OCA}$$

なので

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{b}\right|^2\left|\overrightarrow{c}\right|^2-\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{c}\right|^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2-\left(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}\right)^2}$$

となるが, ① を適用すると

$$\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{b}\right|^2\left|\overrightarrow{c}\right|^2=\left|\overrightarrow{c}\right|^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2$$

$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{c}\right|$$

すなわち

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$$

条件 (i) は 3 組の対辺が互いに直交することなので，4 点 O, A, B, C に関して対称である．したがって O の代わりに A や B を始点にとることで，

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AO}$$
$$\mathrm{BC}=\mathrm{BO}=\mathrm{BA}$$

を得る．つまり

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$$

したがって, 四面体 OABC は正四面体である. □

ただ，それぞれの条件自体が意味のあることのように思われるので，各条件の意味することとその関係を考えています.

南海　なるほど．この問題を解くだけにせず，各条件はそれぞれどんな四面体になっているのかを考えることは大変いいことだし，必要なことだ.

条件 (i) を満たす四面体を**直辺四面体**，条件 (ii) を満たす四面体を**等積四面体**と呼ぼう．それぞれの性質を詳しく調べよう．そのためには，三角形と四面体の共通点と違う点を理解しなければならない.

3.9.2　四面体の重心と平行六面体への埋め込み

南海

三角形には「五心」と呼ばれる五種類の点がある.

拓生　重心，外心，内心，垂心，傍心 の五種です.

南海　そのうち，一般の四面体 ABCD にもあるのは．まず重心はどうか.

拓生　4 頂点の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ としてすぐに表せるのは重心 $\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ だけです.

南海　重心は，正確には物理学の重心であることを示さなければならないが，そのためにはモーメントの考え方が必要だ．それは数学のなかではできない．数学的にいえば，重心は頂点の位置ベクトルの平均として定まる点だ.

頂点 A と対面の三角形の重心を 3 : 1 に内分する点は

$$\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\right\}+\frac{1}{4}\vec{a}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

となる．これは 4 つの頂点に関して対称な形なので，他の頂点と対面の重心を結ぶ線分を同じ比率で内分する点も，この点になる．つまり， 頂点と対面の重心を結ぶ 4 本の線分はこの 1 点で交わる．これが重心だ．または，四面体では，相対する辺の中点を結ぶ線分は 1 点で交わる，その交点が重心である，と定義してもよい.

拓生　AB の中点と CD の中点を結ぶ線分の中点の位置ベクトルは

$$\frac{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}}{2}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

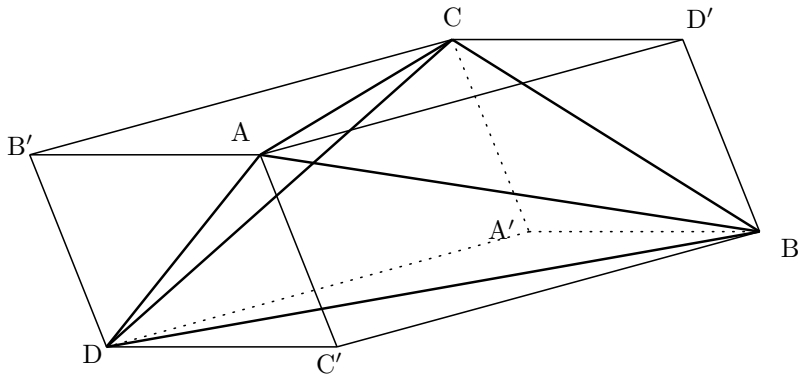
となり，これは A, B, C, D で対称なのでその他についても同様で，相対する辺の中点を結ぶ線分の中点が重心に一致する.

南海　ここで四面体 ABCD で，各頂点 A, B, C, D と，それらの重心に関する対称点を A′, B′, C′, D′ とする．これら 8 点でできる図形はどのようなものか.

拓生　基準点を重心にとり，4 頂点 A, B, C, D の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ とすると，

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$$

で，A′, B′, C′, D′ の位置ベクトルは $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$, $-\vec{d}$ となる.



平行六面体らしいので確認してみます.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AC'}} &= -\vec{c} - \vec{a} \\
\overrightarrow{\mathrm{D'B}} &= \vec{b} + \vec{d} = -\vec{c} - \vec{a} \\
\overrightarrow{\mathrm{CA'}} &= -\vec{a} - \vec{c} = -\vec{c} - \vec{a} \\
\overrightarrow{\mathrm{B'D}} &= \vec{d} + \vec{b} = -\vec{c} - \vec{a}
\end{aligned}$$

つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{AC'}} = \overrightarrow{\mathrm{D'B}} = \overrightarrow{\mathrm{CA'}} = \overrightarrow{\mathrm{B'D}}$$

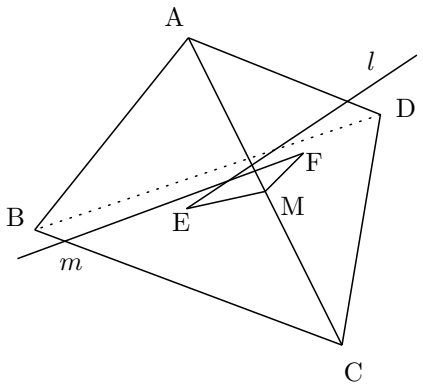
他も同様なので確かに平行六面体に埋め込まれています．四面体は重心を中心とする平行六面体に埋め込まれるのですね.

3.9.3 四面体の外心と内心

南海 外心，内心はどうだろうか.
拓生 外接球は，四面体を包む大きい球の半径をだんだんと小さくしていき，頂点にぶつかるたびに少し動かしていけば，最後に 4 頂点が乗った球が出来そうです．内接球も，四面体の中に含まれる小さい球の半径を大きくしていき，面に接するたびに少し動かしていけば，最後に 4 面に接する球が出来そうです．両方とも存在するようですが.
南海 重心のように明示的に書くのは簡単ではないが，存在そのものを図形的に示すことはできる．考えてみよう.

定理 78 四面体 ABCD には外接球と内接球が存在する.

南海 外心とは，どんなものか.
拓生 各頂点への距離が等しい点です．空間にある 2 点から距離の等しい点は，2 点を結ぶ線分の垂直二等分平面です．これをもとにすればできそうですか.
証明
2 頂点 A, C の中点を M とし，M を通り直線 AC に垂直な平面 α を考える．α は 2 点 A, C からの距離が等しい点の集合である.



△ABC の外心を E とし，E をとおり △ABC に垂直な直線を l とする．△ACD の外心を F とし，F をとおり △ACD に垂直な直線を m とする．l 上の点は 3 点 A, B, C から等距離にあるので，l は平面 α 上にある．m 上の点は 3 点 A, C, D から等距離にあるので，m は平面 α 上にある．
△ABC と △ACD 平行でないので l と m も平行でない．ゆえに l と m は平面 α 上で交わる．交点を O とすれば，O は 4 頂点から等距離にあり，四面体の外心である．

内心も同様に考えます．一般に平行でない 2 つの平面に対して，2 平面への距離が等しい点の集合は 2 つの平面になります．これは図形的にも明らかですが，座標でも示せます．つまり 2 つの平面を

$$ax+by+cz+d=0, \quad a'x+b'y+c'z+d'=0$$

とする．点と平面の距離の式から，等距離にある点は

$$\frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'z+d}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

を満たす点で，これが 2 つの平面になることは明らか．そこで △ABC と △ACD から等距離にある点からなる平面のうち四面体の内部を通るものを α，△ABC と △ADB から等距離にある点からなる平面のうち四面体の内部を通るものを β，△ABC と △BCD から等距離にある点からなる平面のうち四面体の内部を通るものを γ とする．α と β の交直線 l が平面 γ と交わる点を I とすると，確かに I は 4 つの面と等距離にある．これが内心である． □

3.9.4 直辺四面体

南海 そこで問題は垂心だ．実は四面体では垂心は存在するとはかぎらない．四面体に垂心が存在するための必要十分条件が，京大の問題の条件 (i)，つまり対辺直交なのだ．

四面体 ABCD で，各頂点から対面への 4 本の垂線が 1 点で交わるとき，その交点を四面体 ABCD の垂心という．すぐにわかるが，4 本の垂線のうち 3 本が 1 点で交われば他の 1 垂線も同じ点で交わる．これも含めて，次の問題を考えてほしい．

定理 79 次の各命題

(i) 四面体 ABCD に垂心が存在する．

(ii)

$$\mathrm{AB}\perp\mathrm{CD},\ \mathrm{AC}\perp\mathrm{BD},\ \mathrm{AD}\perp\mathrm{BC}$$

(iii)

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{DA}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2$$

(iv) 相対する辺の中点を結ぶ 3 本の線分の長さが等しい．

は同値である．■

証明

(1) (i) なら (ii) を示す．垂心を H とする．垂心の定義から

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$$

である．これから

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ =\ &\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

よって (ii) である．

(2) (ii)，(iii)，(iv) の同値性を示す．

$$\begin{aligned}\text{(iii)}\quad&\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2+\overrightarrow{\mathrm{CD}}^2=\overrightarrow{\mathrm{BC}}^2+\overrightarrow{\mathrm{DA}}^2=\overrightarrow{\mathrm{CA}}^2+\overrightarrow{\mathrm{BD}}^2\\ &\Longleftrightarrow\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\\ &\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \Longleftrightarrow\ \text{(ii)}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\text{(iv)}\quad&\Longleftrightarrow\quad \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\right|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})\right|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\right|^2\\ &\Longleftrightarrow\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &\qquad=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &\qquad=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \Longleftrightarrow\ \text{(ii)}\end{aligned}$$

(3) (ii) なら (i) を示す．四面体 ABCD に対して外心 O をとり，点 H を

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$$

で定める．このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left\{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\right\}\end{aligned}$$

対辺が直交するので $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$．また点 O は外心なので $\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$

同様に $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ も成り立ち，AH は平面 BCD と直交している．対称性から，BH が平面 ACD と直交していることなどが示され，点 H は垂心の条件を満たす．つまり四面体 ABCD に垂心が存在する．

南海　この証明の最後の部分から，直辺四面体においてはその外心を O，重心を G，垂心を H とすれば

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right),\ \overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

となり，3 点 O，G，H は一直線上にあり G は OH の中点である．この直線を四面体 ABCD の**オイラー線**という．

さて (i) と (ii) の同値性は次のように，図形の論証としても出来る．これは大切であるからここで紹介しよう．

(i) と (ii) の同値性の図形的証明

(1) (i) ならば (ii) を示す．

記号は上の証明で定めたものを使う．四面体 ABCD に垂心が存在するので頂点 A から対面への垂線と頂点 B から対面への垂線は交わる．その結果，辺 AB と頂点 A から対面への垂線および頂点 B から対面への垂線は同一平面 α 上にある．

頂点 A から対面への垂線は，△BCD に垂直なので特に CD と直交する．頂点 B から対面への垂線は，△ACD に垂直なので特に CD と直交する．ゆえに α と CD は直交する．辺 AB は平面 α 上にある．

$$\therefore\quad \mathrm{AB}\perp\mathrm{CD}$$

他も同様．よって四面体 ABCD は直辺四面体である．

(2) (ii) ならば (i) を示す．A から BCD 平面への垂線の足を H_1 とする．$AH_1\perp$平面 BCD より $AH_1\perp$CD である．AB⊥CD なので，平面 $ABH_1\perp$CD である．同様に B から ACD 平面への垂線の足を H_2 とすると，平面 $ABH_2\perp$CD である．

平面 ABH_1 と 平面 ABH_2 は直線 AB を含み，かつ CD と直交するので一致する．よって AH_1 と BH_2 は交わる．同様に C，D から対辺への垂線の足を H_3, H_4 とすると，AH_1 と CH_3，DH_4 も交わり，交点はすべて AH_1 上にある．

A を B に代えることで BH_2 と AH_1，CH_3，DH_4 も交わり，交点はすべて BH_1 上にある．

よって CH_3，DH_4 は AH_1 と BH_1 の交点を通り 4 垂線は 1 点で交わる．

系 4　直辺四面体 ABCD の垂心を H とする．

(1) 直線 AH と △BCD の交点 H_1 は △BCD の垂心である．

(2) △ACD の頂点 A から対辺 CD に降ろした垂線の足と，△BCD の頂点 B から対辺 CD に降ろした垂線の足は一致する．この足を共通垂線の足という．　■

拓生　AH は △BCD と直交するので特に CD と直交する．AB も CD と直交するので，AH は AB をとおり CD に直交する平面上にある．BH_1 もこの平面上にあるので，その結果 $BH_1\perp$CD となり，同様に $CH_1\perp$BD も示され，H_1 は △BCD の垂心である．

△ACD の頂点 A から対辺 CD に降ろした垂線も，△BCD の頂点 B から対辺 CD に降ろした垂線も，AB をとおり CD に直交する平面上にある．よってその足はこの平面と CD の交点であり，同一の点である．

系 5　直辺四面体 ABCD の外心を O とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成りたつ．■

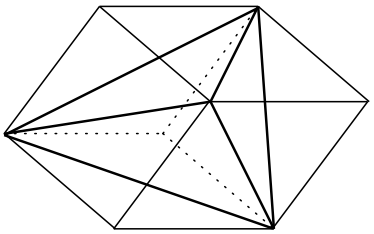
拓生　対辺直交なので

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp(\overrightarrow{\mathrm{CD}})=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\perp(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=O$$

これから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

他も同様である．



南海　直辺四面体を埋め込む平行六面体はどのようなものか．

拓生　平行六面体の対面の対角線が，四面体の対辺となりそれが直交するのだから，平行六面体の隣り合う辺の長さが等しい．これがいずれについても言えるので，その平行六面体はすべての辺の長さが等しい平行六面体 (等辺長六面体) です．

6 面が辺長の等しいひし形から出来ています．

南海　逆に，辺長の等しいひし形を，同じ形のもの 2 枚ずつ用意し，それで平行六面体を作ると，そこから直辺四面体が得られる．

3.9.5　九点円の一般化

拓生　三角形では九点円というのものがありました．

> 三角形 ABC において，各辺の中点の 3 点，各頂点から対辺への垂線の足 3 点，各頂点と垂心の中点 3 点のあわせて 9 点を通る円が存在する．これを九点円という．外接円の半径を R とすると，九点円の半径は $\dfrac{1}{2}R$ であり，中心は外心と垂心の中点である．

これは入試問題にもあります．それは『九点円の不思議』にあります．

この『九点円の不思議』に書かれていることは，垂心のある四面体，直辺四面体に拡張されるのでしょうか．

南海　そもそも九点円に対応するものがあるのかが問題だ．これについては次のことが知られている．『幾何学大辞典』第二巻 (岩田至康編，182 ページ) に載っている．

定理 80 直辺四面体 ABCD において

(i) 各辺の中点 6 点と，各頂点からの共通垂線の足 6 点の 12 点は同一球面上にある．これを**第 1 種の十二点球**という．(1881 年，Lewis，Temperley)

(ii) 各面の重心 4 点，各頂点から対面への垂線の足 4 点，頂点と垂心を 2 : 1 に内分する点 4 点の 12 点は同一球面上にある．これを**第 2 種の十二点球**という．(1863 年，Prouhet)

が成り立つ．■

南海　第 1 種の十二点球を各面で切ったものは，その面の九点円そのものであるから，それぞれの面の垂心と頂点の中点 3 点，合計 12 点も通り，24 点球ともいわれることもある．『幾何学大辞典』には図形の論証とベクトルを用いた証明の概略が載っている．

拓生　直辺四面体の定理ですね．

南海　そうだ．その証明で論証上必要なところだけを取り出せば，一般の四面体の定理にすることが出来る．滋賀県彦根東高校の高校生四人がそれを考えた．それが雑誌『初等数学』2012 年 1 月号に載っている．『幾何学大辞典』にも，「(ii) はそのまま n 次元の場合に拡張される」と書いてある．

『九点円の不思議』の最初の部分，九点円の存在証明を踏まえ，(i)，(ii) を証明しよう．その上で，n 次元の一般の四面体の場合で定理を記述し，証明しよう．

拓生　まず (i) をやってみます．この場合，12 点を通る球があるとし，四面体の外心，その球の中心，垂心の 3 点を △ABC に正射影すれば，その球の中心の射影が △ABC の九点円の中心であるはずで，それは三角形の外心と垂心の中点です．

ですから 12 点球の中心も四面体の外心と垂心の中点，つまり四面体の重心であろうと推測されます．そこで，重心と辺の中点との距離を調べました．

定理 80(i) 証明　外接球の半径を R，外心を O とし，垂心を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$ であった．さらに O と H の中点は四面体 ABCD の重心 G である．辺 AB の中点と G の距離は

$$\begin{aligned}
& \left|\overrightarrow{\mathrm{OG}} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right| = \frac{1}{4}\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right| \\
= \quad & \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}} = \frac{1}{4}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2} \\
= \quad & \frac{1}{4}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4R^2 - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)}
\end{aligned}$$

式の対称性からこれは辺 CD の中点と G の距離に等しく，系 5 によって，他の辺の中点との距離に等しい．

よってこの 6 点は G を中心とする球面上にある．この球面と △BCD で定まる平面との共通部分は △BCD の各辺の中点を通る円である．つまり △BCD の九点円である．九点円はその三角形の各頂点から対辺への垂線の足を通る．系 4 によって共通垂線の足は三角形の各頂点から対辺への垂線の足であるから，この球はこれら 6 個の共通垂線の足も通る．□

南海　この球の半径が

$$\sqrt{\frac{1}{6}(\mathrm{OH}^2 + 2R^2)}$$

で与えられることは，演習問題としておこう．

拓生　次に (ii) に進みます．九点円の場合からの推測で，頂点 A と垂心 H を 2 : 1 に内分する点と △BCD の重心との中点が球の中心ではないかと考えました．つまり次のように九点円の証明を真似ました．

定理 80(ii) 証明　頂点 A と垂心 H を 2 : 1 に内分する点 L_1 と △BCD の重心 G_1 との中点を E とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)\right\} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$$

である．E は A，B，C，D に関して対称なので，対応する他の 2 点の組に関しても中点である．そして E と 4 面の重心との距離はいずれも $\frac{1}{3}R$ で相等しいので，これら 8 点は E を中心とし，半径 $\frac{1}{3}R$ の球面上にある．

A から △BCD への垂線の足を H_1 とすると，球の直径が $\mathrm{L}_1\mathrm{G}_1$ であり，垂心の定義から $\mathrm{L}_1\mathrm{H}_1 \perp \mathrm{G}_1\mathrm{H}_1$ なので，H_1 もこの球面上にある．以上から，各 4 点ずつ 12 個の点は E を中心とする半径 $\frac{1}{3}R$ の球面上にある． □

南海　平面三角形の場合の九点円からの自然な拡張になっているのはどちらか．

拓生　証明の方法からも (ii) の方です．

南海　フォイエルバッハの定理に相等するものは成立せず，この球は内接球や傍接球には必ずしも接しないことが知られている．私はその反例を作ったわけではないし，またそのうえでもう少し緩めた何らかの定理が成り立つのかも，知らない．今後の課題としておこう．

3.9.5.1　n 次元 $n+1$ 面体

南海　(ii) を n 次元の場合に拡張してみよう．

n 次元のユークリッド空間で考えよう．実数 $\mathbb{R}$ の n 個の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ で点が定まると考えるのだ．ここに $n+1$ 個の点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1}$ があるとする．この $n+1$ 個の識別と座標成分の識別を明確にするときは，次のように書く．

$$A_i = ({a_1}^i,\ {a_2}^i,\ \cdots,\ {a_n}^i)\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$$

拓生　上につけるのですね．これら $n+1$ 個の点は，同じ平面上にあったりしてはいけないですね．

南海　これら $n+1$ 個の点のどの 3 点も同一直線上にはないとする．これを**一般の位置にある**という．

拓生　$n+1$ 面体でも重心 G は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$$

で定義される．重心は物理の概念ですから，数学としてはこれで定義する．

しかし外心の存在は明らかではないです．2011 年の京都大学で外心の存在を示せという問題が出ました．4 通りの解答を学びました．

南海　解の 3 を使うと数学的帰納法で出来ないか．

拓生　確かに．

外心の存在証明　$n \geqq 2$ とし，$n+1$ 個の点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1}$ が一般の位置にあるとする．これらの点から等距離にある点が存在することを，n に関する数学的帰納法で示す．

$n = 2$ のときは三角形の外心である．

n のとき成立とする．$n+1$ のときの成立を示す．$n+1$ 次元空間で考える．座標は先と同様とする．

数学的帰納法の仮定から，$n+2$ 個の点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1},\ \mathrm{A}_{n+2}$ のうち，$n+1$ 個の点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1}$ から等距離 r にある点は存在する．その点を $\mathrm{O}(o_1,\ o_2,\ \cdots,\ o_{n+1})$ とする．任意の実数 l に対して，点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1}$ は方程式

$$\sum_{k=1}^{n+1}(x_k - o_k)^2 - r^2 = 0$$

を満たす．また $n+1$ 個の点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1}$ で定まる $n+1$ 次元空間における n 次元の平面の方程式を $f(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})=0$ とおく．$n+1$ 個の点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1}$ は方程式

$$\sum_{k=1}^{n+1}(x_k-o_k)^2-r^2+lf(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})=0 \quad \cdots ②$$

を満たす．A_{n+2} は $f(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})=0$ を満たさない．よって $f({a_1}^1,\ \cdots,\ {a_{n+1}}^{n+2})\neq 0$ である．そこで l を

$$l=-\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}({a_k}^{n+2}-o_k)^2-r^2}{f({a_1}^1,\ \cdots,\ {a_{n+1}}^{n+2})}$$

で定める．この l に対して方程式 ② は，$n+2$ 個の点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1},\ \mathrm{A}_{n+2}$ を通る球の方程式となる．これを平方完成しなおすことにより，これらの点から等距離にある点の存在が確定する． □

n 次直辺四面体

南海　$n+1$ 面体 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{n+1}$ の外心を O とする．垂心 H とは直線 $\mathrm{A}_i\mathrm{H}$ が A_i を除く他の n 個の点で張られる部分空間と直交する，つまりそれを構成するすべてのベクトルと直交することとする．

垂心が存在すれば $n=3$ のときと同様に，すべて異なる任意の $i,\ j,\ p,\ q$ は に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_p\mathrm{A}_q}=0$$

となる．

拓生　逆にこのとき，点 H を

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$$

で定めると，番号 j と，j でなく互いに異なる p と q に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_j\mathrm{H}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_p\mathrm{A}_q}=\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}-\overrightarrow{\mathrm{OA}_j}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_q}-\overrightarrow{\mathrm{OA}_p}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{|\overrightarrow{\mathrm{OA}_q}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}_p}|^2\sum_{i,j\neq p,q}(\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_p\mathrm{A}_q})\right\}=0$$

となり，この H が垂心であることがわかります．

$3(n+1)$ 点球

拓生　すると，九点円の一般化も形式的にやれます．

南海　その前に (ii) を一般化して定式化してほしい．

拓生　はい．

---

n 次元空間に $n+1$ 面体 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{n+1}$ がある．その外心を O，外接球の半径を R とする．その垂心が存在するとし，それを H とする．$n+1$ 個の頂点から一つを除いた他の点で定まる $n-1$ 次空間を，この $n+1$ 面体の面という．

各面の重心 $n+1$ 点，各頂点から対面への垂線の足 $n+1$ 点，頂点と垂心を $n-1:1$ に内分する点 $n+1$ 点の $3(n+1)$ 点は同一球面上にある． ■

証明　頂点 A_1 と垂心 H を $n-1:1$ に内分する点 L_1 と面 $A_2\cdots A_{n+1}$ の重心 G_1 との中点を E とする．

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n}\overrightarrow{OA_1}+\frac{n-1}{n}\overrightarrow{OH}+\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n+1}}\right)\right\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{OA_i}$$

である．E は各頂点にに関して対称なので，対応する他の 2 点の組に関しても中点である．そして E と 4 面の重心との距離はいずれも $\dfrac{1}{n}R$ で相等しいので，これら $2(n+1)$ 点は E を中心とし，半径 $\dfrac{1}{n}R$ の球面上にある．

A_1 から面 $A_2\cdots A_{n+1}$ への垂線の足を H_1 とすると，球の直径が L_1G_1 であり，垂心の定義から $L_1H_1\perp G_1H_1$ なので，H_1 もこの球面上にある．以上から，各 $n+1$ 点ずつ $3(n+1)$ 個の点は E を中心とする半径 $\dfrac{1}{n}R$ の球面上にある．　□

拓生　垂心が存在しなくても，一定の定理にすることが出来るのですか．

南海　そこが彦根東高校の高校生が考えたところで，この証明で使ったところだけを引き出すと，次のようにまとめることが出来る．

---

n 次元空間に $n+1$ 面体 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ がある．その外心を O，外接球の半径を R とする．点 H を

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{OA_i}$$

で定める．各面の重心 $n+1$ 点，点 H から各面への垂線の足 $n+1$ 点，頂点と点 H を $n-1:1$ に内分する点 $n+1$ 点の $3(n+1)$ 点は同一球面上にある．　■

拓生　そうか．これで証明に使ったことは全てはいっていますね．

南海　こういうことを考えている高校生がいるということは，たいへん嬉しいことだ．

3.9.6　等面四面体

南海　次は等積四面体だ．次の事実が成り立つ．

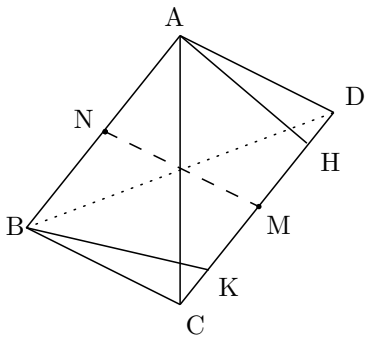
定理 81　四面体 ABCD で次の 2 つの条件は同値である．

(i)　4 つの面の面積がすべて等しい．

(ii)　4 つの面はすべて合同である．

拓生　4 面合同な四面体はこれまでにも見たことがあります．(ii) から (i) は明らかだから，(i) から (ii) を示すのですね．

南海　4 つの面が合同な四面体を**等面四面体**という．等積四面体は等面四面体である，これが定理の核心だ．証明はいろいろな方法がある．2 通りの方法で示そう．



証明

方針は次の通り．

点 A から辺 CD におろした垂線の足を H，点 B から辺 CD におろした垂線の足を K とする．△ACD と △BCD の面積が等しいので，$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{BK}}$ である．

このとき $\overline{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{CK}}$ を示す．これが示せれば三平方の定理から AD = BC となる．AC = BD，AB = CD も同様に示される．よって対辺の長さがそれぞれ等しく，4 面の三角形は対応する 3 辺の長さがそれぞれ等しくなり，合同である．

そのために線分 HK の中点 M をとる．M をとおり直線 CD に垂直な平面を α とする．α と直線 AB の交点を N とする．直線 AH は H をとおり α と平行な平面上にあり，直線 BK は K をとおり α と平行な平面上にある．M が線分 HK の中点なので，これら 2 つの平面は α から等距離にある．

したがって点 A から α への距離と，点 B から α への距離は等しい．ゆえに，点 N は線分 AB の中点である．MN は α 上の直線なので

$$\mathrm{MN} \perp \mathrm{CD}$$

さらに $\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{BK}}$ かつ $\overline{\mathrm{HM}} = \overline{\mathrm{KM}}$ より三平方の定理から $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{BM}}$．よって

$$\mathrm{MN} \perp \mathrm{AB}$$

以上の操作と同様に，点 C と D から辺 AB へ垂線をおろし，その足の中点を N′，N′ をとおり辺 AB に垂直な平面と辺 CD との交点を M′ とすると，M′N′ も AB, CD に直交する．

ねじれの位置にある 2 直線の両方に直交する直線はただ一つしかない．したがって

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}', \quad \mathrm{N} = \mathrm{N}'$$

よって M は辺 CD の中点でもある．

$$\therefore \quad \overline{\mathrm{CM}} = \overline{\mathrm{DM}},\ \overline{\mathrm{KC}} = \overline{\mathrm{HD}}$$

これから

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{DH}} &= \overline{\mathrm{DM}} - \overline{\mathrm{HM}} \\ &= \overline{\mathrm{CM}} - \overline{\mathrm{KM}} = \overline{\mathrm{CK}} \end{aligned}$$

三平方の定理から AD = BC となる．条件は各頂点に対して対称なので AC = BD，AB = CD も同様に示される．よって対辺の長さがそれぞれ等しく，4 面の三角形は対応する 3 辺の長さがそれぞれ等しくなり，合同である． □

拓生　よくわかりました．しかし巧みな証明です．ただ,「ねじれの位置にある 2 直線の両方に直交する直線はただ一つしかない」ことが，直感的には明らかですが，厳密にはどのようにすればよいのでしょうか．

南海　それは『高校数学の方法』「同値変形で問題を解きほぐす」の演習問題 2 を見てほしい．

さて考え方は同じなのだがこれを座標でやってみよう．そのために次の事実が必要だ．

空間に 2 つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a_1,\ a_2,\ a_3), \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$$

がある．このとき △OAB の面積 S を座標で表すとどうなるか．

拓生　やってみます．$\theta = \angle\mathrm{AOB}$ とします．

$$\begin{aligned} 2S &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} \\ &= \sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2} \\ &= \sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2} \end{aligned}$$

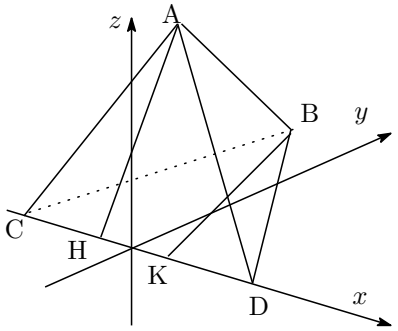
です．

別証明

四面体 ABCD を，図のように辺 CD の中点を原点に，点 B を xy 平面上に置いて，xyz 座標空間に置く．ただし，

$$\mathrm{A}(a,\ b,\ c),\ \mathrm{B}(d,\ e,\ 0),\ \mathrm{C}(-f,\ 0,\ 0),\ \mathrm{D}(f,\ 0,\ 0)$$

とする．



点 A から CD への垂線の足を H，点 B から CD への垂線の足を K とすると，その座標は

$$\mathrm{H}(a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{K}(d,\ 0,\ 0)$$

である．線分 HK の中点が線分 CD の中点，つまり原点と一致することは，座標では

$$a+d=0$$

となる．これを示す．$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{BK}}$ より

$$b^2+c^2=e^2$$

次に

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a+f,\ b,\ c) \quad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (d+f,\ e,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = (a-f,\ b,\ c) \quad \overrightarrow{\mathrm{DB}} = (d-f,\ e,\ 0)$$

となるので，△CAB の面積と △DAB の面積が等しいことから

$$\{(a+f)e-(d+f)b\}^2+\{c(d+f)\}^2+(ce)^2 = \{(a-f)e-(d-f)b\}^2+\{c(d-f)\}^2+(ce)^2$$

これから

$$(ae-bd)(e-b)f+c^2df=0$$

を得る．$c^2=e^2-b^2$ を代入して

$$(ae-bd)(e-b)f+df(e^2-b^2)=0$$

$e=b$ なら $c=0$ となり点 A も xy 平面上に来るが，四面体ではこれはあり得ない．また $f\neq 0$ も明らか．

$$\therefore \quad ae-bd+d(e+b)=0$$

$e \neq 0$ なのでこれから $a+d=0$ となる．したがって

$$\overline{\mathrm{CH}} = a+f = f-d = \overline{\mathrm{DK}}$$

となり，三平方の定理から AC = BD が示された．座標を取り替えることで同様に他の二組の対辺の長さが等しいことも示され，題意が示された． □

南海　じつはこのような位置に置かなくても，3 次行列やベクトルの外積といわれるものを使う証明方法がある．それは『線型幾何入門』の中にある．

等面四面体は四面体のなかで最も美しいものだ．この等面四面体を埋め込む平行六面体は何か．

拓生　六面体の各面は平行四辺形だが等面四面体では，対角線が等しい．対角線の長さが等しい平行四辺形は長方形なので，それは直方体です．

南海　直接的な証明などは『高校数学の方法』「存在の証明」のなかにある．これも参考にしてほしい．

最後に，最初の京大の問題だが，条件 (i) は埋め込み平行六面体が等辺長六面体であるということであり，条件 (ii) は埋め込み平行六面体が直方体であるということになった．したがって (i) かつ (ii) になるのは埋め込み平行六面体が立方体ということだ．これは正四面体だ．

拓生　別解です．

南海　この問題を解くのにこの方法はまわりくどいから別解とはいえないが，しかしこの平行六面体を考えることで問題の意義を理解することができる．

3.9.7　等面四面体の特徴付け

南海　先の問題は，等積四面体は等面四面体であることを意味している．これは等面四面体の一つの特徴付けだ．

拓生　他にもあるということですか．

南海　三角形で，重心 G，外心 O，内心 I のうち 2 つが一致すると？

拓生　正三角形です．△ABC で

(1) 重心と外心が一致するとき．

重心は頂点 A と対辺 BC の中点を結ぶ直線上にあり，外心は辺 BC の垂直二等分線上にある．これが一致すれば，頂点と対辺の中点を結ぶ直線とその辺が直交し，AB = AC の二等辺三角形．これが 2 つの頂点についても成り立つので正三角形．

(2) 重心と内心が一致するとき．

3 つの三角形 △GBC, △GCA, △GAB は面積が等しい．さらに重心と内心が一致すれば，G = I とこれら 3 つの三角形の辺 AB, BC, CA に下ろした垂線の足までの長さが等しい．つまり 3 つの三角形の高さが等しい．よって底辺が等しく AB = BC = CA が示された．

(3) 外心と内心が一致するとき．

辺 AB の中点を M とし，外接円，内接円の半径をそれぞれ R, r とする．

このとき $\mathrm{AM}^2 = R^2 - r^2$ となる．右辺は辺の選び方によらない定数なので，3 辺が相等しい．

南海　そうだ．では，四面体で重心と外心が一致すると？

拓生　正四面体ですか．

南海　ところがそうではない．ここが三角形と四面体の違うところだ．

四面体で重心と外心が一致すると，それは等面四面体なのだ．実は次のことが成り立つ．

定理 82 四面体 ABCD で次の 4 つの条件は同値である．

(i) 等面四面体である．

(ii) 重心と外心が一致する．

(iii) 外心と内心が一致する．

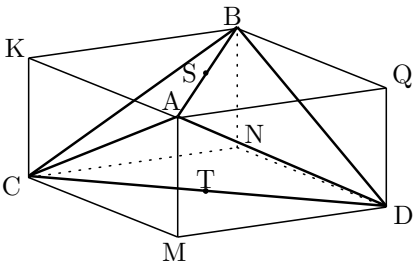
(iv) 内心と重心が一致する．

証明

以下の証明で，四面体 ABCD の重心を G, 外心を O, 内心を I とおく．

(i) まず，等面四面体では重心，外心，内心が一致することを示そう．これはいろんな方法がある．ここでは等面四面体が直方体のなかに埋め込まれることを用いよう．

先に等面四面体は直方体に埋め込まれることを示した．



辺 AB の中点を S，辺 CD の中点を T とする．線分 ST の中点が重心 G である．
S, T がそれぞれ，長方形 AQBK, CMDN の中心であるから，G はこの直方体の中心でもある．
したがって G から 4 つの頂点への長さが等しく，外心でもある．

その結果 G を一つの頂点とする 4 つの四面体 GABC, GABD, GACD, GBCD は 6 辺が相等になりすべて合同，よって G から各辺への垂線の長さも等しい．つまり G は内心でもある．

(ii) 四面体 ABCD で重心と外心が一致するとする．つまり

$$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{GB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{GC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{GD}}|$$

とする．この値つまり外接球の半径を R とし，

$$|\overrightarrow{\mathrm{DA}}| = a,\ |\overrightarrow{\mathrm{DB}}| = b,\ |\overrightarrow{\mathrm{DC}}| = c$$

とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}})$$

なので

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{GD}}|^2 &= \frac{1}{16}|\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2 \\
&= \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}) \\
|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{DA}} - \overrightarrow{\mathrm{DG}}|^2 = \frac{1}{16}|3\overrightarrow{\mathrm{DA}} - \overrightarrow{\mathrm{DB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2 \\
&= \frac{1}{16}(9a^2 + b^2 + c^2 - 6\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}} - 6\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}})
\end{aligned}$$

他も同様である．ここで

$$X = \overrightarrow{\mathrm{DA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}},\ Y = \overrightarrow{\mathrm{DB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}},\ Z = \overrightarrow{\mathrm{DC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DA}}$$

とする．

$$\begin{aligned} 16R^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2X + 2Y + 2Z \\ 16R^2 &= 9a^2 + b^2 + c^2 - 6X + 2Y - 6Z \\ 16R^2 &= a^2 + 9b^2 + c^2 - 6X - 6Y + 2Z \\ 16R^2 &= a^2 + b^2 + 9c^2 + 2X - 6Y - 6Z \end{aligned}$$

これを $16R^2,\ X,\ Y,\ Z$ の連立 1 次方程式とみて解くと，

$$\begin{cases} 16R^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ 2X = a^2 + b^2 - c^2 \\ 2Y = -a^2 + b^2 + c^2 \\ 2Z = a^2 - b^2 + c^2 \end{cases}$$

となる．$2Y = -a^2 + b^2 + c^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{DB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ から

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{DB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}} + c^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{DC}} - \overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 \end{aligned}$$

つまり

$$|\overrightarrow{\mathrm{DA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$$

他も同様に示され四面体 ABCD では対辺の長さが等しく，等面四面体であることが示された．

注　次の場合と同様に等積四面体であることを示すことも出来る．

(iii) 四面体 ABCD で重心と内心が一致するとする．重心 G は

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}})$$

で定まる．したがって点 G から △ABC 平面に下ろした垂線の長さは，頂点 D から △ABC 平面に下ろした垂線の長さの $\frac{1}{4}$ である．

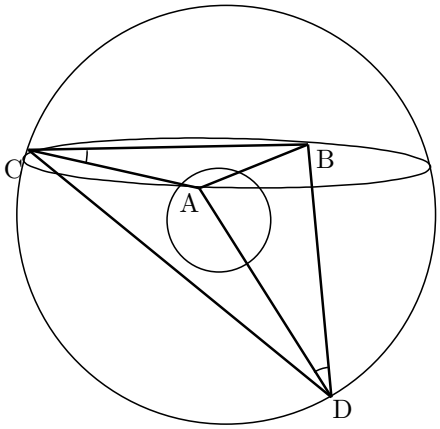
D を他の頂点にとっても同様である．よって G を一つの頂点とする 4 つの四面体 GABC, GABD, GACD, GBCD の体積は，いずれも四面体 ABCD の $\frac{1}{4}$ であり，相等しい．

一方重心 G が内心 I でもあるので，G から各面に下ろした垂線の長さは相等しい．

したがって 4 つの四面体 GABC, GABD, GACD, GBCD の，頂点 G に対する底面の面積も相等しい．

つまり四面体 ABCD は等積四面体である．等積四面体は等面四面体であるので，四面体 ABCD が等面四面体であることが示された．

(iv) 四面体 ABCD で外心と内心が一致するとする．



外心 O から △ABC に垂線 OL を引く．L は球を △ABC を含む平面で切った円の中心であり，この L が △ABC の外心になる．
O が内心でもあるので L は内接円が四面体の面 △ABC に接する点でもある．内接円の半径を r とする．外接円の半径 AL は三平方の定理から

$$\mathrm{AL}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{OL}^2 = R^2 - r^2$$

となる．
これは外接円と内接円で定まる定数である．ゆえに他の 3 つの面，△ABD, △ACD, △BCD の外接円の半径もすべて $\sqrt{R^2 - r^2}$ に等しい．すると，弦 AB に対する同じ半径の円の円周角は等しいので

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{ADB}$$

が成り立つ．その他についても同様である．12 個の角が 2 つずつ相等しい．これらを

$$\begin{aligned}
\angle \mathrm{ACB} &= \angle \mathrm{ADB} = x \\
\angle \mathrm{BAC} &= \angle \mathrm{BDC} = y \\
\angle \mathrm{CBA} &= \angle \mathrm{CDA} = z \\
\angle \mathrm{ACD} &= \angle \mathrm{ABD} = u \\
\angle \mathrm{DAC} &= \angle \mathrm{DBC} = v \\
\angle \mathrm{BAD} &= \angle \mathrm{BCD} = w
\end{aligned}$$

とおく．このとき

$$x + y + z,\ x + u + w,\ y + v + w,\ z + u + v$$

は各々三角形の内角の和なので，180° である．これから

$$y + z = u + w,\ z + x = v + w,\ x + w = z + v$$

が成立する．これから

$$x = v,\ z = w,\ y = u$$

が成立する．これはつまり 4 面の三角形について 2 角挟辺の相等が成立し 4 面はすべて合同である．

つまり四面体 ABCD は等面四面体である．

3.10　線型幾何と四面体

2018.8.31/2017.7.6/2012.10.7/2005.12.10

南海　座標平面および座標空間における直線や平面についてまとめて考えてゆこう．この分野は，ベクトル，行列や一次変換，つまり線型代数を駆使して考えると分かりやすい．高校の教科書では「ベクトルと図形」として章が立てられているが，それは**線型幾何**とも呼ぶべき分野の入り口なのだ．

2006 年の入試から京都大学では「ベクトルは直線・平面の方程式を含むもの」とされた．ベクトルで表された直線や平面を，その成分の関係式で表したものが直線・平面の方程式なのだから，「ベクトル」分野に「直線・平面の方程式を含む」のは当然なのだ．

一方，2012 年入学の学年から，行列が大学受験科目のなかからなくなる．一次変換はベクトルからベクトルへの写像であり，行列式もまた不可欠の道具である．これをなくすることには賛成できない．意欲的な高校生はぜひ行列や一次変換の入った教科書や参考書を図書館などで見つけ，基本事項を読んでほしい．数時間から数日で可能である．高校時代にいちど触れておくなら，大学での線型数学の理解がそれだけ容易になる．またそのうえでこの分野を体系的に理解するためには『線型代数の考え方』を見てほしい．

ここでは線型幾何の基本をまとめ，外積を導入し，その応用を考えよう．第一節で，平面幾何と空間幾何に関して，1 次式で表される図形とベクトルの基本事項をまとめる．ここまでが高校範囲である．そのうえで，第二節で空間に置かれたベクトルの外積を定義し，基本的な性質をまとめる．そのうえで，符号のある面積と体積を定義する．そして第三節で，四面体に関するいくつかの命題を証明する．

3.10.1　座標空間での直線と平面

3.10.1.1　平面上の直線

二つのベクトルの平行条件

南海　最初は，零ベクトルでない二つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ と $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ が平行である条件から考えよう．

耕一　平行ということは方向が同じで大きさは違ってもよいということなので，0 でない実数 t で

$$(b_1,\ b_2) = t(a_1,\ a_2)$$

となるものがあることと同値です．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行，つまり $b_1 = ta_1,\ b_2 = ta_2$ なる t があるとします．このとき

$$a_2b_1 = ta_2a_1,\ a_1b_2 = ta_1a_2$$

なので，$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ です．

逆に $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ とします．$a_1 = 0$ なら $a_2 \neq 0$ なので $b_1 = 0$ となり $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行，$a_2 = 0$ のときも同様．

$a_1a_2 \neq 0$ とする．このとき $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2}$ となる．この比の値を t とすると，

$$(b_1,\ b_2) = t(a_1,\ a_2)$$

したがって

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

が求める必要十分条件である．

これは二つのベクトル $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2)$ と $\overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2)$ から作られる行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

に対する

$$\Delta(A) = a_1b_2 - a_2b_1$$

が 0 を意味しています．

南海　逆に平行でないということは $\Delta(A) \neq 0$ であり，このとき行列 A は逆行列

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

をもつ．

耕一　任意のベクトル $\overrightarrow{c} = (c_1,\ c_2)$ に対して

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なので，A が逆行列をもてば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

と x と y が一組存在する．

つまり二つのベクトル $\overrightarrow{a}$ とベクトル $\overrightarrow{b}$ が一次独立ならば，これを用いて任意のベクトル $\overrightarrow{c}$ を表すことができる．

南海　ということなのだ．だからやはり平面ベクトルの理解も一次変換と行列までの内容を必要とする．このことはさらに 3 次元，n 次元ベクトルについても言える．

なお，行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ に対して，数 $a_1b_2 - a_2b_1$ のことを行列 A の**行列式**といい

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

とも書きあらわす．これをもとに，平面上の直線の式について考えよう．それは二つの異なる方法で定まる．

平面上の直線 (その一)

南海　まず第一の方法だ．平面上の二点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ がある．このとき直線 AB の方程式をベクトルを用いて求めよ．

耕一　直線 AB 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおく．この x と y が満たす式を求めればよいのですね．

$\mathrm{P}(x,\ y)$ が直線 AB 上にあるということは二つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2),\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x - a_1,\ y - a_2)$$

が平行ということなので，先の平行条件から

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & b_1-a_1 \\ y-a_2 & b_2-a_2 \end{vmatrix} = (b_2-a_2)(x-a_1)-(b_1-a_1)(y-a_2)=0 \tag{3.23}$$

となります，これを整理すると

$$(b_2-a_2)x-(b_1-a_1)y-(a_1b_2-a_2b_1)=0 \tag{3.24}$$

です．

南海　そうだ．これは昔どおり傾きを求めてから導く直線の式と同じだろう．$b_1 \neq a_1$，$b_2 \neq a_2$ のとき (3.23) はまた

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}$$

ともかける．これはもちろん $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から t を消去した式でもある．

これと本質的に同じだが，ほんの少し違う形で導こう．

例題 3.10.1　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が直線 AB 上の点であることは，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \tag{3.25}$$

と表すとき，$s+t=1$ となることと同値である．これから直線 AB の式を作れ．

耕一　(3.25) 式を成分で書くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1s+b_1t \\ a_2s+b_2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

です．これより

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

つまり

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{pmatrix} b_2x-b_1y \\ -a_2x+a_1y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって $s+t=1$ より

$$(b_2x-b_1y)+(-a_2x+a_1y)=a_1b_2-a_2b_1$$

あっ．先ほどの式 (3.24) と同じだ．

南海　式が同じになるのは当然なのだが, なかなかおもしろい．行列を習っていない人は，s と t を未知数として連立一次方程式を解いたと考えればよい．

平面上の直線 (その二)

南海　さて第二の直線の作り方は，ベクトルの直交条件を使うものだ．

$\overrightarrow{\mathrm{O}}$ でない二つのベクトル $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2)$ と $\overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2)$ が直交している条件は，二つのベクトルのなす角が $\dfrac{\pi}{2}$，つまり内積が 0 ということなので，

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

だ．そこで，定点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ をとおり，ベクトル $\overrightarrow{n} = (p,\ q)$ に直交する直線 l の方程式を求めよ．

耕一　これは教科書にも載っています．直線上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとる．

二つのベクトル $\overrightarrow{n} = (p,\ q)$ と $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}$ が直交するので内積が 0．$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = (x - x_0,\ y - y_0)$ なので

$$l\ :\ p(x - x_0) + q(y - y_0) = 0$$

です．このベクトル $\overrightarrow{n} = (p,\ q)$ のことを直線 l の**法線ベクトル**という．

南海　その通り．逆に直線の方程式 $ax + by + c = 0$ からはじめると，この直線とベクトル $(a,\ b)$ は平面上でたがいに直交している．なぜか．

耕一　この方程式を満たす任意の 2 点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0),\ \mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ をとる．

$$ax_0 + by_0 + c = 0,\ ax_1 + by_1 + c = 0$$

が成り立つ．辺々引いて

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$$

これは，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}$ とベクトル $(a,\ b)$ の内積が 0，つまり方程式 $ax + by + c = 0$ をみたす任意の 2 点を結ぶベクトルが，ベクトル $(a,\ b)$ と直交していることを意味している．

これは，方程式 $ax + by + c = 0$ をみたす点の集合が，点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ を通りベクトル $(a,\ b)$ と直交する直線になることを示している．

南海　二つの直線 $ax + by + c = 0,\ a'x + b'y + c' = 0$ に対して二つの法線ベクトル $(a,\ b),\ (a',\ b')$ ができるが，もとの二直線が直交または平行であるのに応じて，それぞれの法線ベクトルも直交または平行であるから，上の二直線の

$$\begin{cases} \text{直交条件}: aa' + bb' = 0 \\ \text{平行条件}: ab' - a'b = 0 \end{cases}$$

となるのだった．

3.10.1.2　空間内の平面と直線

南海　さて以上の議論を空間内の，つまりは 3 次元の場合に拡張せよ．これが問題だ．空間の場合には，平面における直線と対応するのは，空間における平面である．平面の定め方も二通りある．

耕一　第一は，同一直線上にない三点で平面が定まる．第二は，ある点をとおり，与えられたベクトルに垂直な直線の全体が一つの平面となる．

ということです．それぞれどのような式になるかを考えます．

空間内の平面 (その一)

耕一　空間に同一直線上にない 3 点，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ がある．点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ がこの三点で定まる平面上にあるための必要十分条件を $x,\ y,\ z$ の関係式で書けば, それが求める平面の方程式です．

これはベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ でかき表せることと同値です．これを

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とおき，始点を O にそろえると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となります．このことから，点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ が，3 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ で定まる平面上にあるための必要十分条件を次のようにいってもよいことがわかります．つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおくとき，点 P がこの平面上にあるための必要十分条件は

$$s+t+u=1$$

である．この条件を成分で書くと

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 s + b_1 t + c_1 u \\ a_2 s + b_2 t + c_2 u \\ a_3 s + b_3 t + c_3 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これから

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって， $s,\ t,\ u$ を $x,\ y,\ z$ で表し， $s+t+u=1$ に代入すれば，平面の方程式が得られる．

南海　高校範囲では 3×3 行列の逆行列は求まらないが，空間における平面の方程式が

$$ax+by+cz+d=0$$

という形の 1 次の等式になることはわかった．

次の 3 点をとおる平面の方程式をいろんな方法で求めてみよう．

例 3.10.1　3 点で定まる平面の方程式；

(1) $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}(1,\ 2,\ -1)$，$\mathrm{C}(2,\ -1,\ 1)$

$$x+y+z=2$$

(2) A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(3) A$(a,\ b,\ 0)$，B$(a,\ 0,\ c)$，C$(0,\ b,\ c)$

$$\frac{a-x}{a}+\frac{b-y}{b}+\frac{c-z}{c}=1$$

南海　もっとも，3 次の行列式を用いれば平面の方程式を一般的な形に書くことが出来る．

点 P$(x,\ y,\ z)$ が 3 点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，C$(c_1,\ c_2,\ c_3)$ で定まる平面上にあることと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ でかき表せること，言いかえれば，三つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が一次従属ということとが同値だ．したがってその行列式は 0，つまり

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ y-a_2 & b_2-a_2 & c_2-a_2 \\ z-a_3 & b_3-a_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0 \tag{3.26}$$

である．これが 3 点を通る平面の方程式だ．この一般論は『線型代数の考え方』を見てほしい．

耕一　これが，

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

で定まる $s,\ t,\ u$ を $s+t+u=1$ に代入した式と一致するのですか．

南海　次のように考えればよい．行列式展開の計算から (3.26) は

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ z & a_3 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & c_1 & a_1 \\ y & c_2 & a_2 \\ z & c_3 & a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

と変形される．ただし展開と考えなくても，この等式は，P$(x,\ y,\ z)$ に A，B，C の座標値を代入して成立するので，この 3 点を通る平面の方程式であることがわかる．

次に 3.27 を $s,\ t,\ u$ に関する連立 1 次方程式と見れば

$$s=\frac{\begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\ t=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & x & c_1 \\ a_2 & y & c_2 \\ a_3 & z & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\ u=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

となる．ここは『線型代数の考え方』「クラメルの公式」を見てほしい．それからさらに列を入れ替えると，$s+t+u=1$ を満たすこととの同値性が分かる．

もっとも (3.26) も (3.27) も 3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が 1 次従属になる条件の同値な変形なのだから，互いに同値な条件であること，したがって方程式も一致する．

空間内の平面 (その二)

南海　平面はもう一つの定義がある．それは線型空間では**直交補空間**といわれるのであるが，定点を通り，点と定点を結ぶ直線があたえられた方向と直交するような点の集合としての平面である．

　この立場から定点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ をとおり，ベクトル $\vec{n} = (p,\ q,\ r)$ に直交する平面 α の方程式を求めよ．

耕一　平面上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとる．二つのベクトル $\vec{n} = (p,\ q,\ r)$ と $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}$ が直交するので内積が 0．$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ なので

$$\alpha\ :\ p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

です．このベクトル $\vec{n} = (p,\ q,\ r)$ のことを平面 α の**法線ベクトル**という．

南海　逆に一次式 $px + qy + rz + s = 0$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ はどんな図形になるかも同様にわかる．

耕一　この式を満たす任意の 2 点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ をとる．

$$\begin{aligned} px_1 + qy_1 + rz_1 + s &= 0 \\ px_0 + qy_0 + rz_0 + s &= 0 \end{aligned}$$

より

$$p(x_1 - x_0) + q(y_1 - y_0) + r(z_1 - z_0) = 0$$

つまりベクトル $(p,\ q,\ r)$ と直線 $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}$ が直交している．したがって求める図形は点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ をとおりベクトル $(p,\ q,\ r)$ と直交する直線の集合，平面になる．

　空間の点と平面の距離の公式も，点と直線の場合と同様に求められる．

例題 3.10.2　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ の距離 l を求めよ．

耕一　点 P から平面 α への垂線の足を $\mathrm{H}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ は平面 α と直交するので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = k(a,\ b,\ c)$$

これから

$$(x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1) = (ka,\ kb,\ kc)$$

つまり

$$x_0 = x_1 + ka,\ y_0 = y_1 + kb,\ z_0 = z_1 + kc$$

点 H は平面 α 上にあるので

$$a(x_1 + ka) + b(y_1 + kb) + c(z_1 + kc) + d = 0$$

$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ なので

$$k = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

である．一方

$$l^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2 = k^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

であるから

$$l^2 = \left(-\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

となる．よって

$$l = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

である．

空間内の直線

耕一　では空間内の直線はどのように表されるのでしょうか．

南海　空間における直線は二つの平行でない平面の交わりによって定まる．だから方程式としては，二つの一次式の連立で表される．

例えば

$$\begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

なども二平面の交わりとして何らかの直線を表す．しかしそれがどのような直線かはこのままではわからない．

耕一　点 P_0 をとおりベクトル $\vec{u} = (l,\ m,\ n)$ に平行な直線は動点を P とすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + t\vec{u}$$

と表されます．

南海　それを座標で書くとどうなるか．

耕一

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

です．そうすると

$$x - x_0 = tl,\ y - y_0 = tm,\ z - z_0 = tn$$

ですから t を消去すると

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{3.29}$$

ですか．確かに等号が二つある．

南海　この考え方でいくと (3.28) はどんな直線なのか．

耕一　二式を加えると $x = -z$．これから $y + 1 = x$ ．これを (3.29) の形に書くと

$$x = -z = y + 1$$

するとこれは定点 $(0,\ -1,\ 0)$ をとおりベクトル $(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線なんだ．ベクトルを用いて書けば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ということです．

例 3.10.2　平面で定まる直線の方向；

(1) 直線 $6x - 2y + 2z - 7 = 0,\ 12x - y - 2z + 1 = 0$ は $(1,\ 6,\ 3)$ に平行．

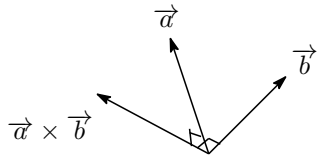
(2) 直線 $x = 2y + 3,\ z = 1$ は $(2,\ 1,\ 0)$ に平行．

3.10.2　外積と図形

南海　空間では，**外積**というベクトルの積が定義される．

3.10.2.1　外積の定義と基本性質

南海　二つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ がある．ベクトル $\overrightarrow{a}$ からベクトル $\overrightarrow{b}$ へ右ネジを回転させたとき，ネジの進む方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{k}$ とおく．また $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおく．



このときベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の外積を次式で定める．

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta)\overrightarrow{k}$$

耕一　内積の時と同様に，$\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ と $\overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ に対して $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ を成分で表してみます．

大きさは

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta &= |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2} \\
&= \sqrt{(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2} \\
&= \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)^2 + (a_2b_3 - b_2a_3)^2}
\end{aligned}$$

です．これは，二つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ でできる平行四辺形の面積です．しかしこの大きさをもつベクトルで，方向が右ネジの進む方向になるものをどのように作ればよいのか．

南海　結論的にいうと

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= (a_2b_3 - b_2a_3,\ a_3b_1 - b_3a_1,\ a_1b_2 - b_1a_2) \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}$$

とすればよい．

耕一　確かに大きさは $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$ になります．また

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{a} = (a_2b_3 - b_2a_3)a_1 + (a_3b_1 - b_3a_1)a_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)a_3 = 0$$

ですから $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{a}$，同様に $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{b}$ も成り立ちます．

でも，右ネジの進む方向というのはどのように確認すればよいのかわかりません．

南海　後は方向の問題だけなので，二つのベクトルをその間の角をかえないように回転しそれらのベクトルが

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} &= (a,\ 0,\ 0)\ (a > 0) \\
\overrightarrow{b} &= (b\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0) \quad (b > 0,\ 0 < \theta < \pi)
\end{aligned}$$

となるようにしてみる．これはかならずできる．このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0,\ 0,\ ab\sin\theta)$$

となり，確かに $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ネジを回したときの進む方向になっている．

したがって外積は次のような計算法則を満たす．

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \\
&\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \\
&\vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})\ (k : \text{は実数}) \\
&\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}
\end{aligned}$$

耕一　外積は二つのベクトルに直交するベクトルを作るのに便利です．

$\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$ と $\vec{a} = (3,\ -2,\ 1)$ に直交する方向が知りたければ連立方程式

$$\begin{cases} 1s + 2t + 3u = 0 \\ 3s - 2t + u = 0 \end{cases}$$

を解かねばなりません．この連立方程式はすぐ解けます．が，一般には外積を使う方が簡単です．

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2 \cdot 1 - (-2) \cdot 3,\ -(1 \cdot 1 - 3 \cdot 3),\ 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 2) = (8,\ 8,\ -8)$$

が得られます．

南海　次の補題は後で図形問題に応用するため必要だ．

補題 15　内積，外積に関して次のことが成り立つ．

(1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

(2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

(3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

証明

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3),\ \vec{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3),\ \vec{d} = (d_1,\ d_2,\ d_3)$$

とする．

(1)

$$\begin{aligned}
& (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) \\
= \ & (a_2b_3 - b_2a_3)(c_2d_3 - d_2c_3) + (a_3b_1 - b_3a_1)(c_3d_1 - d_3c_1) \\
& \quad +(a_1b_2 - b_1a_2)(c_1d_2 - d_1c_2) \\
= \ & (a_2c_2b_3d_3 + a_3c_3b_2d_2) - (a_3d_3b_2c_2 + a_2d_2b_3c_3) \\
& \quad +(a_3c_3b_1d_1 + a_1c_1b_3d_3) - (a_1d_1b_3c_3 + a_3d_3b_1c_1) \\
& \quad\quad +(a_1c_1b_2d_2 + a_2c_2b_1d_1) - (a_2d_2b_1c_1 + a_1d_1b_2c_2) \\
= \ & (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) \\
& \quad -(a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)(b_1c_1 + b_2c_2 + b_cd_3) \\
= \ & (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})
\end{aligned}$$

(2)

$$\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ 0),\ \vec{e}_2 = (0,\ 1,\ 0),\ \vec{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)$$

とし，

$$\vec{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3) = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

とする．

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} &= c_1(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{e}_1 + c_2(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{e}_2 + c_3(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{e}_3\\ (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} &= c_1(\vec{a}\cdot\vec{e}_1)\vec{b} - c_1(\vec{b}\cdot\vec{e}_1)\vec{a} + c_2(\vec{a}\cdot\vec{e}_2)\vec{b} - c_2(\vec{b}\cdot\vec{e}_2)\vec{a}\\ &\quad + c_3(\vec{a}\cdot\vec{e}_3)\vec{b} - c_3(\vec{b}\cdot\vec{e}_3)\vec{a}\end{aligned}$$

ここで，左辺の c_1 のかかるベクトル

$$\begin{aligned}&(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{e}_1\\ =\ &\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right)\times(1,\ 0,\ 0)\\ =\ &\left(0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\right)\end{aligned}$$

一方，右辺の c_1 のかかるベクトルは

$$\begin{aligned}&(\vec{a}\cdot\vec{e}_1)\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{e}_1)\vec{a}\\ =\ &a_1\vec{b} - b_1\vec{a} = (0,\ a_1b_2 - b_1a_2,\ a_1b_3 - b_1a_3)\end{aligned}$$

で等しい．$c_2,\ c_3$ についても同様に成り立つ．したがって (2) が成立する．

(3) (2) と同様に c_1 にかかる係数について $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{e}_1) = \vec{b}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{a}) = \vec{e_1}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{e}_1) &= \vec{a}\cdot(0,\ b_3,\ b_2) = a_2b_3 - b_2a_3\\ \vec{b}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{a}) &= \vec{b}\cdot(0,\ -a_3,\ a_2) = -b_2a_3 + a_2b_3\end{aligned}$$

これが $\vec{e_1}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ に一致するのは明らか．よって (3) が示された． □

南海　(3) の等式の値は，3 次行列式を用いると

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

に一致する．

耕一　確認します．

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} &= \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right)\cdot(c_1,\ c_2,\ c_3)\\ &= \begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

これは (3) の別証明になっています．つまり同様にして $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ も $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$ も $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ に一致することが示されるからです．

したがってこれはベクトル $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ から作られる行列式そのものである．

南海

$$[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

とおき，スカラー 3 重積という．

$$[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}] = [\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a}] = [\vec{c},\ \vec{a},\ \vec{b}] = -[\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b}]$$

が成り立つ．

3.10.2.2　符号のある面積

南海　外積や行列式は面積や体積と関係する．面積や体積は負でない実数値をとるものであるが，一々絶対値を考えるより，次のように自然な符号をつけて考える方が，さまざまの関係式が簡明になる．

まず面積について復習し，符号付き面積 (有向面積) を定義しよう．

符号付き面積

耕一　原点 O と 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ があるとき，その面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\,|a_1b_2 - b_1a_2|$$

です．

南海　これの根拠となった面積の式は？

耕一　$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$ です．

南海　この角 θ は大きさを表すのだが，これを OA から OB への符号つきの角とし，左回りを正としよう．つまり 3 点 O，A，B が反時計回りに廻っているとき，△OAB の面積を正とし，逆回りのとき負とする．

このとき上の絶対値はどのようにはずすことができるか．

耕一　OA から OB への符号つきの角を θ とします．OA から OB へは回転と拡大なので

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

です．そこで試しに計算してみます．

$$\begin{aligned} a_1b_2 - b_1a_2 &= ra_1(a_1\cos\theta + a_2\sin\theta) - ra_2(a_1\cos\theta - a_2\sin\theta) \\ &= r({a_1}^2 + {a_2}^2)\sin\theta = r\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\sin\theta = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta \end{aligned}$$

となります．ですから上記のように面積に符号をつけるとき，

$$S = \frac{1}{2}(a_1b_2 - b_1a_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

となります.

南海　このように符号まで考えた三角形の面積を $S(\mathrm{OAB})$ と書こう．それでは $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 $S(\mathrm{ABC})$ はこの面積公式はどのようになるか.

耕一　点 A を基準点にするので，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ への面積です．だから

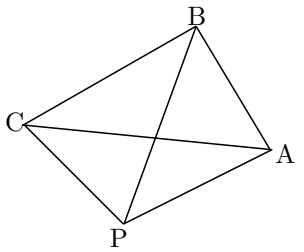
$$\begin{aligned} S(\mathrm{ABC}) &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ b_2-a_2 & c_2-a_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= S(\mathrm{OBC}) - S(\mathrm{OAC}) + S(\mathrm{OAB}) \\ &= S(\mathrm{OBC}) + S(\mathrm{AOC}) + S(\mathrm{ABO}) \end{aligned} \tag{3.30}$$

です．これは図のようになっていて，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OBC}$ の面積の和から $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積，ただし符号を除いた絶対値での話しですが，これを引いたものが $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積なるので，よくわかる等式です.

南海　この関係は点 O の代わりに $\triangle\mathrm{ABC}$ と点 P についてもいえる．つまり

$$S(\mathrm{ABC}) = S(\mathrm{PBC}) + S(\mathrm{APC}) + S(\mathrm{ABP})$$

が成り立つ.



　このように，平面に置かれた三角形の面積は正負をつけることで，統一的にあつかうことができる.

　後で，外積を定義する．それによって，空間におかれた三角形について，面積ベクトルがが定義される.

3.10.2.3　四面体とベクトル

南海　三角形の面積に関する関係式 (3.30) が四面体の体積についても成り立つ．そのためにまず符号付きの四面体の体積を定義しよう.

符号付き体積　原点 O と 3 点 A，B，C が同一平面上にないとする．このとき四面体 OABC の体積 V を A，B，C の座標成分を用いて

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

で定める.

耕一　これは実際に四面体の体積になっているか確認します.

　$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2} \\ = \ &\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2} \end{aligned}$$

となります．一方，△OBC のある平面の方程式は，平面上の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ が OB，OC に一次従属するので，

$$\begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z = 0$$

です．この結果，点 A とこの平面との距離は

$$\frac{\left\| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{\left| \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right|^2}}$$

です．ですから，これまでの方法での体積は次のようになります．

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \sqrt{\left| \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right|^2} \\ &\quad \times \frac{\left\| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{\left| \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right|^2}} = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right\| \end{aligned}$$

これは，上記の定義に絶対値がついたものです．

この符号はどのようになるのですか．

南海　$a_1 = b_2 = c_3 = 1$，他の成分は 0 としたとき正になる．いいかえると A，B，C が O を基準に右手の法則，つまり親指が OA，人差し指が OB，中指が OC となる順に並んでいるときこの体積は正になる．

この値は先ほど定義したスカラー 3 重積である．つまり，

$$V = \frac{1}{6}[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]$$

である．

次に，四面体 ABCD で頂点の位置ベクトルを $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ とする．このとき体積 $V(\mathrm{ABCD})$ を

$$V(\mathrm{ABCD}) = \frac{1}{6}[\vec{a} - \vec{d},\ \vec{b} - \vec{d},\ \vec{c} - \vec{d}]$$

で定める．位置ベクトルの基準点を O とすると

$$\begin{aligned} 6V(\mathrm{ABCD}) &= [\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}] - [\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d}] + [\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d}] - [\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}] \\ &= 6V(\mathrm{ABCO}) - 6V(\mathrm{ABDO}) + 6V(\mathrm{ACDO}) - 6V(\mathrm{BCDO}) \\ &= 6V(\mathrm{ABCO}) + 6V(\mathrm{ABOD}) + 6V(\mathrm{AOCD}) + 6V(\mathrm{OBCD}) \end{aligned}$$

と，D，C，B，A を順に O に入れ替えた体積の和となる．これが面積のときの等式 (3.30) に対応する体積の等式である．

ここで点と位置ベクトルを同一視するなら次のようなことも導かれる．

点 $\vec{a}$ なりが原点の場合にはすでに用いたことであるが，点 $\vec{d}$ が，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で定まる平面上の点であることと，面積が 0 であることが同値なので，点 $\vec{d}$ を動点 $\vec{u}$ にかえることにより，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で定まる平面の方程式が

$$\begin{aligned} & [\vec{u}-\vec{a},\ \vec{u}-\vec{b},\ \vec{u}-\vec{c}] \\ = \ & [\vec{u},\ \vec{a},\ \vec{b}]+[\vec{u},\ \vec{b},\ \vec{c}]+[\vec{u},\ \vec{c},\ \vec{a}]-[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]=0 \end{aligned}$$

と表される．

耕一　これは，3 つのベクトル

$$\vec{u}-\vec{a},\ \vec{u}-\vec{b},\ \vec{u}-\vec{c}$$

が一次従属なので，その行列式が 0 ということですね．

南海　そうだ．

さて，平面の三角形の面積は，正負の符号がついた．空間の三角形 ABC に対しては，次のように面積ベクトルを定める．

面積ベクトル

$$\begin{aligned} \vec{S}(\mathrm{ABC}) &= \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right) \end{aligned}$$

耕一　$\vec{S}(\mathrm{ABC})$ の大きさは △ABC の面積の大きさと同じで，方向は，△ABC の面積が正のとき，つまり A，B，C が左回りのとき，手前に ABC 平面と直交する方向になります．

南海　四面体 ABCD に対し，

$$\begin{aligned} & \vec{S}(\mathrm{ABC})+\vec{S}(\mathrm{ACD}) \\ = \ & \frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{d}+\vec{d}\times\vec{a}\right) \\ & \vec{S}(\mathrm{ABD})+\vec{S}(\mathrm{BCD}) \\ = \ & \frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{d}+\vec{d}\times\vec{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{d}+\vec{d}\times\vec{b}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．

さらに次の等式も確認できる．

$$\begin{aligned} 2\vec{S}(\mathrm{BCD})\cdot\vec{a} &= [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]+[\vec{c}\ \vec{d}\ \vec{a}]+[\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{a}] \\ &= 6V(\mathrm{ABCO})+6V(\mathrm{AOCD})+6V(\mathrm{ABOD}) \\ 2\vec{S}(\mathrm{BCD})\cdot\vec{b} &= [\vec{c}\ \vec{d}\ \vec{b}]=-6V(\mathrm{OBCD}) \\ 2\vec{S}(\mathrm{ACD})\cdot\vec{a} &= -[\vec{c}\ \vec{d}\ \vec{a}]=-6V(\mathrm{AOCD}) \\ 2\vec{S}(\mathrm{ACD})\cdot\vec{b} &= -[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]+-[\vec{c}\ \vec{d}\ \vec{b}]+-[\vec{d}\ \vec{a}\ \vec{b}] \\ &= 6V(\mathrm{ABCO})+6V(\mathrm{OBCD})+6V(\mathrm{ABOD}) \end{aligned}$$

他も同様である．

南海　以上の準備をすると，四面体 ABCD の外接球の方程式を記述することが出来る．

外接球の方程式　$\overrightarrow{u}$ を変数ベクトルとする．ベクトル方程式

$$\begin{aligned}
&6V(\mathrm{ABCD})\,|\overrightarrow{u}|^2\\
&\quad -2\left\{|\overrightarrow{a}|^2\,\overrightarrow{S}(\mathrm{BCD})+\left|\overrightarrow{b}\right|^2\overrightarrow{S}(\mathrm{ACD})+|\overrightarrow{c}|^2\,\overrightarrow{S}(\mathrm{ABD})+\left|\overrightarrow{d}\right|^2\overrightarrow{S}(\mathrm{ABC})\right\}\cdot\overrightarrow{u}\\
&\quad -|\overrightarrow{a}|^2\,6V(\mathrm{OBCD})-\left|\overrightarrow{b}\right|^2 6V(\mathrm{AOCD})-|\overrightarrow{c}|^2\,6V(\mathrm{ABOD})-\left|\overrightarrow{d}\right|^2 6V(\mathrm{ABCO})=0
\end{aligned}$$

の表す図形は四面体 ABCD の外接球である．

耕一　これは明らかに球の方程式です．ですから 4 点 A，B，C，D を通ることを確認すればよい．また A，B，C，D に関して対称です．だから A を通ること，つまり $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}$ がこのベクトル方程式を満たすことを確認すればよい．やってみます．

$$\begin{aligned}
&2\left\{|\overrightarrow{a}|^2\,\overrightarrow{S}(\mathrm{BCD})\cdot\overrightarrow{a}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2\overrightarrow{S}(\mathrm{ACD})\cdot\overrightarrow{a}+|\overrightarrow{c}|^2\,\overrightarrow{S}(\mathrm{ABD})\cdot\overrightarrow{a}+\left|\overrightarrow{d}\right|^2\overrightarrow{S}(\mathrm{ABC})\cdot\overrightarrow{a}\right\}\\
&\quad +|\overrightarrow{a}|^2\,6V(\mathrm{OBCD})+\left|\overrightarrow{b}\right|^2 6V(\mathrm{AOCD})+|\overrightarrow{c}|^2\,6V(\mathrm{ABOD})+\left|\overrightarrow{d}\right|^2 6V(\mathrm{ABCO})\\
=\;& |\overrightarrow{a}|^2\,(6V(\mathrm{ABCO})+6V(\mathrm{AOCD})+6V(\mathrm{ABOD}))\\
&\quad +\left|\overrightarrow{b}\right|^2(-6V(\mathrm{AOCD}))+|\overrightarrow{c}|^2\,(-6V(\mathrm{ABOD}))+\left|\overrightarrow{d}\right|^2(-6V(\mathrm{ABCO}))\\
&\quad +|\overrightarrow{a}|^2\,6V(\mathrm{OBCD})+\left|\overrightarrow{b}\right|^2 6V(\mathrm{AOCD})+|\overrightarrow{c}|^2\,6V(\mathrm{ABOD})+\left|\overrightarrow{d}\right|^2 6V(\mathrm{ABCO})\\
=\;& |\overrightarrow{a}|^2\,(6V(\mathrm{ABCO})+6V(\mathrm{AOCD})+6V(\mathrm{ABOD})+6V(\mathrm{OBCD}))=6V(\mathrm{ABCD})\,|\overrightarrow{a}|^2
\end{aligned}$$

であるから，確かにベクトル方程式を満たす．

計算は面倒そうですが，4 頂点の座標から外接球の方程式が得られる．

南海　行列式を使えば書き出すことも出来る．またこれは「四面体には外心が存在することを示せ」という 2011 年の京大入試問題**??**の別解になっている．

3.10.3　四面体の諸命題

3.10.3.1　空間でのチャップル型定理

南海　平面図形の定理に「チャップルの定理」とか「オイラーの定理」といわれるものがある．二人が独立に発見したようだが，時間的にはチャップルの方が早いようだ．ここでは「チャップルの定理」ということにする．それは

> △ABC の内心を I とし，内接円の半径を r とする．また，外心を O とし，外接円の半径を R とすると，$\mathrm{OI}^2=R^2-2Rr$ である．

というものだ．四面体にも外心と内心がある．ここにはどのような関係が成り立つのだろうか．これに関する定理を「空間でのチャップル型定理」と言おう．これについて次の命題が成立する．これは『幾何学大辞典』の第 4 巻にあり，辞典の著者である岩田至康さんによる命題である．

命題 8　四面体 ABCD がある．その外心を O，外接球の半径を R とし，内心を I，内接球の半径を r とする．

頂点 A と内心 I を交換した四面体 IBCD の外心を $\mathrm{O_A}$ とし，他も同様に定める．このとき四面体 $\mathrm{O_AO_BO_CO_D}$ の外心は O に一致し，外接球の半径を R' とおくと $\mathrm{OI}^2=R^2-2R'r$ である．■

証明　以下位置ベクトルの基準点は四面体 ABCD の外心 O とする．$\mathrm{OO_A}$ が A によらないことを示す．

$|\overrightarrow{u}|^2-R^2=0$ は四面体 ABCD の各頂点を通る球の方程式であり，$[\overrightarrow{u}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{d}]=0$ は，3 点 B，C，D を通る平面の方程式である．よって，

$$|\overrightarrow{u}|^2-R^2+k\left\{[\overrightarrow{u}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{d}]\right\}=0$$

は，3 点 B，C，D を通る球面の方程式である．これが内心 I を通るように k を定める．$\overrightarrow{u}$ に $\overrightarrow{i}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を代入して，

$$\mathrm{OI}^2-R^2+k\left\{[\overrightarrow{i}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{d}]\right\}=0$$

よって

$$k=-\frac{\mathrm{OI}^2-R^2}{[\overrightarrow{i}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{d}]}$$

のとき点 I を通る．つまり

$$|\overrightarrow{u}|^2-R^2-\frac{\mathrm{OI}^2-R^2}{[\overrightarrow{i}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{d}]}\left\{[\overrightarrow{u}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{d}]\right\}=0$$

は四面体 IBCD の外接球となる．

$$\begin{aligned}&[\overrightarrow{u}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{d}]\\ =\ &[\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}]+[\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d}]+[\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{d},\ \overrightarrow{b}]-[\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d}]\\ =\ &\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}+\overrightarrow{d}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{u}-[\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d}]\end{aligned}$$

なので，その中心 $\mathrm{O_A}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OO_A}}=\frac{\mathrm{OI}^2-R^2}{[\overrightarrow{i}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{d}]}\left(\frac{\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}+\overrightarrow{d}\times\overrightarrow{b}}{2}\right)$$

である．ここで，$\dfrac{1}{6}[\overrightarrow{i}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{d}]$ が，四面体 IBCD の体積である．これは，内接円の半径を高さとし，△BCD を底面とする四面体なので，

$$\left|[\overrightarrow{i}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{d}]\right|=\frac{6}{3}r\left|\overrightarrow{S}(\mathrm{BCD})\right|$$

である．面積ベクトルの展開式から，

$$\left|\frac{\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}+\overrightarrow{d}\times\overrightarrow{b}}{2}\right|=\left|\overrightarrow{S}(\mathrm{BCD})\right|$$

である．これより

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OO_A}}\right|=\frac{(R^2-\mathrm{OI}^2)\left|\overrightarrow{S}(\mathrm{BCD})\right|}{\dfrac{6}{3}r\left|\overrightarrow{S}(\mathrm{BCD})\right|}=\frac{R^2-\mathrm{OI}^2}{2r}$$

これは，A，B，C，D によらない一定の値である．この値を R' としたので，

$$R^2-\mathrm{OI}^2=2rR'$$

である．よって，$\mathrm{OI}^2=R^2-2R'r$ が示された．　□

耕一　これは平面の場合のチャップルの定理の拡張なのですか．平面の場合のチャップルの定理は，円周角の定理まで用いたはずですが，四面体の場合は線型代数だけでできました．

南海　平面の場合は $R = R'$ となる．その証明に円周角の定理がいる．そこに平面の場合の難しさがあった．これについては 2009 年の京大の入試問題乙 2 番**??** を見てほしい．

四面体のこの命題は線型代数の範囲の命題であり，ここまでなら n 次元の場合にも拡張できるだろう．それは今はおくが，試みてほしい．

例 3.10.3 (等面四面体の場合) 等面四面体の場合に，この空間でのチャップル型定理がどのようになるか，確認しよう．

等面四面体では外心と内心が一致するので，命題 8 は，

$$R^2 = 2R'r$$

である．これを示そう．

証明　$a,\ b,\ c$ を $a^2+b^2+c^2=1$ を満たす正の定数とし，xyz 空間上の四面体 ABCD を $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$，$\mathrm{D}(a,\ b,\ c)$ で定める．このとき，四面体 ABCD の各面は，

$$\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{b^2+c^2},\ \sqrt{c^2+a^2}$$

を 3 辺の長さとする合同な三角形である．

球

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+\left(z-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

は四面体の各頂点を通り，これが外接球である．その半径 R は $R=\dfrac{1}{2}$ である．

r は，四面体の中心である内心と ABC 平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

との距離なので，

$$r=\frac{\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$$

である．

次に，3 点 A，B，C と中心 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$ を通る球を

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+\left(z-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+k\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)=0$$

とおく．これが中心を通るので

$$-\frac{1}{4}+k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)=0$$

つまり，$k=\dfrac{1}{2}$ である．このとき，この球の中心は

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4a},\ \frac{b}{2}-\frac{1}{4b},\ \frac{c}{2}-\frac{1}{4c}\right)$$

である．よって

$$R' = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

この結果，

$$2R'r = \frac{1}{4} = R^2$$

が成立している．

コーシー・シュワルツの不等式から

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\\ \geqq\ &\left(a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}\right)^2 = 9\end{aligned}$$

が成り立ち，$a^2+b^2+c^2=1$ なので，

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq 9$$

よって，

$$r \leqq \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}R$$

である。ここで等号成立は，

$$a:b:c = \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

つまり $a=b=c$ のとき．$a^2+b^2+c^2=1$ より

$$a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

のときである．

これは平面の場合のチャップル型定理と同様のものである．

これがどのように一般化されるかは，未解決である．

3.10.3.2　等面四面体への応用

南海　以下に述べることは，故栗田稔先生の『初等数学 15 講』(1990 年 3 月，自費出版) に教えられたことである．

補題 16　$[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}]>0$ とする．また

$$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}=\overrightarrow{y},\ \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{z}$$

とおく．このとき

$$[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z}] = [\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}]^2$$

であり．

$$\overrightarrow{a}=\frac{1}{\sqrt{[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z}]}}\overrightarrow{y}\times\overrightarrow{z},\ \overrightarrow{b}=\frac{1}{\sqrt{[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z}]}}\overrightarrow{z}\times\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{c}=\frac{1}{\sqrt{[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z}]}}\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{y}$$

が成り立つ．■

証明　補題 (15) より

$$\begin{aligned}\vec{y}\times\vec{z} &= \vec{c}\times\vec{a}\times\vec{z}\\ &= (\vec{c}\cdot\vec{z})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{z})\vec{c}\\ &= \{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\}\vec{a}-\{\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\}\vec{c}\\ &= \{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\}\vec{a}\\ &= [\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]\vec{a}\end{aligned}$$

したがって

$$\vec{a}=\frac{1}{[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]}\vec{y}\times\vec{z}$$

同様に

$$\vec{b}=\frac{1}{[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]}\vec{z}\times\vec{x},\ \vec{c}=\frac{1}{[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]}\vec{x}\times\vec{y}$$

ところが

$$\begin{aligned}|\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}| &= \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})\\ &= \left\{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot([\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]\vec{a})\right\}\\ &= [\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]\left\{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\right\}\\ &= [\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]^2\end{aligned}$$

$[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]>0$ なので

$$\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{[\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}]}}\vec{y}\times\vec{z},\ \vec{b}=\frac{1}{\sqrt{[\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}]}}\vec{z}\times\vec{x},\ \vec{c}=\frac{1}{\sqrt{[\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}]}}\vec{x}\times\vec{y}$$

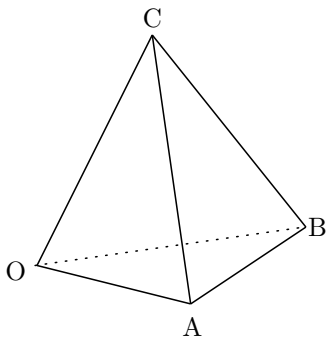
が成立する．□

この補題を用いると，空間図形のいろんな性質が簡明に示される．いくつか例示する．

命題 9　4 つの面の面積が等しい四面体 (等積四面体) は，各面が合同な四面体 (等面四面体) である．■

南海　これは『数学対話』－「等積四面体と等面四面体」で証明したことである．その別証明を外積を用いておこなう．

証明



四面体 OABC で

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とし，

$$\vec{x}=\vec{b}\times\vec{c},\ \vec{y}=\vec{c}\times\vec{a},\ \vec{z}=\vec{a}\times\vec{b}$$

とおく．さらに

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}}\times\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= (\vec{c}-\vec{a})\times(\vec{b}-\vec{a})\end{aligned}$$

とする．

このとき

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (\vec{c}-\vec{a})\times(\vec{b}-\vec{a})\\ &= \vec{c}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}\\ &= -\vec{x}-\vec{y}-\vec{z}\end{aligned}$$

つまり

$$\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}+\vec{u}=0$$

である．

注意 3.10.1　これは一般の四面体で成立する．

四面体 OABC の 4 つの面の面積が

$$\frac{1}{2}|\vec{x}|,\ \frac{1}{2}|\vec{y}|,\ \frac{1}{2}|\vec{z}|,\ \frac{1}{2}|\vec{u}|$$

であるから，等積四面体では

$$|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|=|\vec{u}|$$

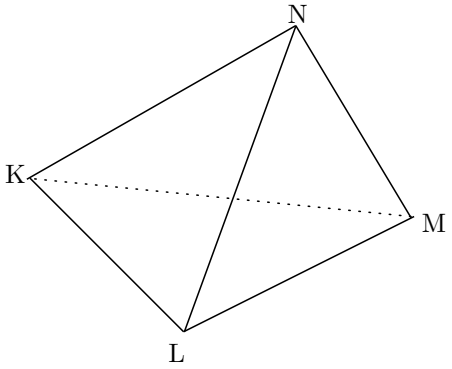
が成り立つ．任意の点 K に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{KL}}=\vec{x},\ \overrightarrow{\mathrm{LM}}=\vec{y},\ \overrightarrow{\mathrm{MN}}=\vec{z}$$

で点 L, M, N を定めると，$\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}+\vec{u}=0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{NK}}=\vec{u}$$

となる．



この四面体は 4 辺の長さが等しく正四面体である．したがって 4 つの面の面積も等しい．つまり

$$|\vec{x}\times\vec{y}|=|\vec{y}\times\vec{z}|=|\vec{z}\times\vec{u}|=|\vec{u}\times\vec{x}|$$

ここで補題 (16) より

$$\vec{y}\times\vec{z}=[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]\vec{a}$$

また

$$\begin{aligned}\vec{x}\times\vec{u} &= \vec{x}\times(-\vec{x}-\vec{y}-\vec{z})\\ &= -\vec{x}\times\vec{y}-\vec{x}\times\vec{z}\\ &= -[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]\vec{c}+[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]\vec{b}\\ &= [\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}](\vec{b}-\vec{c})\end{aligned}$$

この結果

$$|\vec{a}|=|\vec{b}-\vec{c}|$$

つまり

$$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}$$

同様に

$$\mathrm{OB} = \mathrm{CA},\ \mathrm{OC} = \mathrm{AB}$$

となり，四面体 OABC は等面四面体である． □

3.10.3.3 直辺四面体

命題 10 4 つの面の面積が与えられた四面体で体積が最大のものは，対辺が直交する四面体 (直辺四面体) である． ■

証明 この四面体を OABC とし，記号は同様に定める．

四面体の体積を V とする．面 OAB と辺 OC のなす角の正弦と，ベクトル $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と辺 OC のなす角の余弦とは絶対値が等しい．したがって

$$\begin{aligned} V &= \pm\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} \\ &= \pm\frac{1}{6}[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}] \end{aligned}$$

である．ところが

$$[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z}] = [\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}]^2$$

なので．

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z}]}$$

である．

また四面体 KLMN の体積を V' とすると同様に

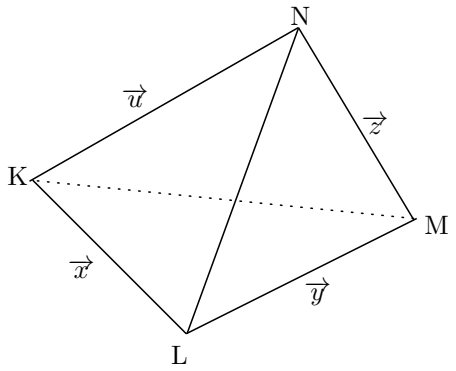
$$\begin{aligned} V' &= \pm\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{\mathrm{KL}},\ \overrightarrow{\mathrm{KM}},\ \overrightarrow{\mathrm{KN}}\right] \\ &= \pm\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{x}+\overrightarrow{y},\ \overrightarrow{u}\right] \\ &= \pm\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{x}+\overrightarrow{y},\ -\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}-\overrightarrow{z}\right] \\ &= \pm\frac{1}{6}[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z}] \end{aligned}$$

$[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z}] > 0$ なので

$$V' = \frac{1}{6}[\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z}]$$

これから V が値を最大になるのは，V' の値が最大になるということである．

四面体 OABC の 4 つの面の面積が与えられるということは，四面体 KLMN の 4 つの辺 KL, LM, MN, NK の長さが与えられるということである．
そこで △KLM を固定し △KNL を動かす．V' が最大になるのは 2 つの三角形が直交するときである．つまり V' が最大になるときは，この 2 つの三角形に直交する 2 つのベクトル $\vec{x}\times\vec{y}$ と $\vec{z}\times\vec{u}$ が直交している．



$$(\vec{x}\times\vec{y})\cdot(\vec{z}\times\vec{u})=0$$

で $\vec{u}=-\vec{x}-\vec{y}-\vec{z}$ だから，

$$(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\{\vec{y}\times\vec{z})-\vec{z}\times\vec{x})=0$$

となる．これは

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

を意味する．つまり

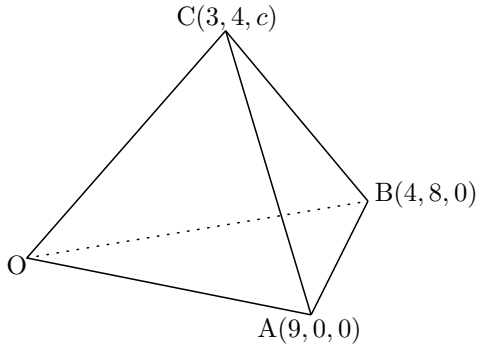
$$\mathrm{OC}\perp\mathrm{AC}$$

である．他も同様．したがって 4 つの面の面積が与えられた四面体で体積が最大のものは，直辺四面体である． □

3.10.3.4　モンジュ点

耕一　2020 年信州大学教育学部の問題です．

> c を正の実数とする．空間において，原点 O および 3 点 A$(9,0,0)$，B$(4,8,0)$，C$(3,4,c)$ を頂点とする四面体 OABC がある。辺 OA の中点 L を通り直線 BC に直交する平面を α，辺 OC の中点 M を通り直線 AB に直交する平面を β，辺 AB の中点 N を通り直線 OC に直交する平面を γ とする。次の問いに答えなさい。
>
> (1) 平面 α，β，γ の交点を X とする。点 X の座標を求めなさい。
>
> (2) 辺 OB の中点を通り，直線 AC に直交する平面上に点 X はあるか。理由を述べて答えなさい。
>
> (3) 点 X が四面体 OABC の表面および内部にあるような c の値の範囲を求めなさい。



解答です.

(1)　辺 OA の中点 L を通り直線 BC に直交する平面とは，辺 OA の中点 L を通り $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を法線方向とする平面である．よって $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-1,\ -4,\ c)$ より，その方程式は，

$$-\left(x - \frac{9}{2}\right) - 4y + cz = 0$$

同様に，β，γ の方程式は

$$-5\left(x - \frac{3}{2}\right) + 8(y-2) = 0$$
$$3\left(x - \frac{13}{2}\right) + 4(y-4) + cz = 0$$

である．つまり，

$$\begin{cases} x + 4y - cz = \dfrac{9}{2} \\ 5x - 8y = \dfrac{17}{2} \\ 3x + 4y + cz = \dfrac{71}{2} \end{cases}$$

これを解いて，点 X の座標は

$$(x,\ y,\ z) = \left(\frac{7}{2},\ \frac{13}{4},\ \frac{12}{c}\right)$$

である．

(2)　同様に，辺 OB の中点を通り，直線 AC に直交する平面の方程式は，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-6,\ 4,\ c)$ より，

$$-6(x-2) + 4(y-4) + cz = 0$$

ここに点 X の座標を代入すると，

$$-6\left(\frac{7}{2} - 2\right) + 4\left(\frac{13}{4} - 4\right) + c \cdot \frac{12}{c} = -9 - 3 + 12 = 0$$

より，この平面上に点 X はある．

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

で点 P を定めるとき，点 P が四面体 OABC の表面および内部にある条件は，

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \geqq 0,\ \alpha + \beta + \gamma \leqq 1$$

である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \left(\frac{7}{2},\ \frac{13}{4},\ \frac{12}{c}\right) = \left(\frac{5}{24} - \frac{4}{3c^2}\right)(9,0,0) + \left(\frac{13}{32} - \frac{6}{c^2}\right)(4,8,0) + \frac{12}{c^2}(3,4,c)$$

なので，

$$\frac{13}{32} - \frac{6}{c^2} \geqq 0, \quad \frac{5}{24} - \frac{4}{3c^2} + \frac{13}{32} - \frac{6}{c^2} + \frac{12}{c^2} \leqq 1$$

$c > 0$ なので，これより $\dfrac{8\sqrt{39}}{13} \leqq c$ を得る．

南海　これを一般化しておこう．

※　一般に，次のことが成り立つ．

四面体の各辺の中点を通り，対辺と垂直な 6 平面は，1 点を共有する．

この点をモンジュ点という．

証明 1　1 頂点を原点にとり，他の 3 頂点を

$$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3),\quad \mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\quad \mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$$

とする．各辺の中点を通り，対辺の方向ベクトルを法線方向とする 6 平面の方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&(c_1-b_1)\left(x-\frac{a_1}{2}\right)+(c_2-b_2)\left(y-\frac{a_2}{2}\right)+(c_3-b_3)\left(z-\frac{a_3}{2}\right)=0 &&\cdots①\\
&(a_1-c_1)\left(x-\frac{b_1}{2}\right)+(a_2-c_2)\left(y-\frac{b_2}{2}\right)+(a_3-c_3)\left(z-\frac{b_3}{2}\right)=0 &&\cdots②\\
&(b_1-a_1)\left(x-\frac{c_1}{2}\right)+(b_2-a_2)\left(y-\frac{c_2}{2}\right)+(b_3-a_3)\left(z-\frac{c_3}{2}\right)=0 &&\cdots③\\
&c_1\left(x-\frac{a_1+b_1}{2}\right)+c_2\left(y-\frac{a_2+b_2}{2}\right)+c_3\left(z-\frac{a_3+b_3}{2}\right)=0 &&\cdots④\\
&b_1\left(x-\frac{c_1+a_1}{2}\right)+b_2\left(y-\frac{c_2+a_2}{2}\right)+b_3\left(z-\frac{c_3+a_3}{2}\right)=0 &&\cdots⑤\\
&a_1\left(x-\frac{b_1+c_1}{2}\right)+a_2\left(y-\frac{b_2+c_2}{2}\right)+a_3\left(z-\frac{b_3+c_3}{2}\right)=0 &&\cdots⑥
\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}
&(c_1-b_1)x+(c_2-b_2)y+(c_3-b_3)z=\frac{a_1(c_1-b_1)}{2}+\frac{a_2(c_2-b_2)}{2}+\frac{a_3(c_3-b_3)}{2} &&\cdots①\\
&(a_1-c_1)x+(a_2-c_2)y+(a_3-c_3)z=\frac{b_1(a_1-c_1)}{2}+\frac{b_2(a_2-c_2)}{2}+\frac{b_3(a_3-c_3)}{2} &&\cdots②\\
&(b_1-a_1)x+(b_2-a_2)y+(b_3-a_3)z=\frac{c_1(b_1-a_1)}{2}+\frac{c_2(b_2-a_2)}{2}+\frac{c_3(b_3-a_3)}{2} &&\cdots③\\
&c_1x+c_2y+c_3z=\frac{c_1(a_1+b_1)}{2}+\frac{c_2(a_2+b_2)}{2}+\frac{c_3(a_3+b_3)}{2} &&\cdots④\\
&b_1x+b_2y+c_3z=\frac{b_1(c_1+a_1)}{2}+\frac{b_2(c_2+a_2)}{2}+\frac{b_3(c_3+a_3)}{2} &&\cdots⑤\\
&a_1x+a_2y+a_3z=\frac{a_1(b_1+c_1)}{2}+\frac{a_2(b_2+c_2)}{2}+\frac{a_3(b_3+c_3)}{2} &&\cdots⑥
\end{aligned}$$

となる．

④ 式 − ⑤ 式 = ① 式，⑥ 式 − ④ 式 = ② 式，⑤ 式 − ⑥ 式 = ③ 式 なので，④ ，⑤ ，⑥ を満たす $x,\ y,\ z$ は ① ，② ，③ も満たす．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立なので，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

である．よって，連立方程式 ④ ，⑤ ，⑥ は 1 つの解をもつ．この点が 6 平面で共有される点である．

証明 2　四面体 ABCD の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とする．$\vec{x}=(x,\ y,\ z)$ とする．

各辺の中点を通り，対辺の方向ベクトルを法線方向とする 6 平面のベクトル方程式は次のようになる．

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)=0,\quad (\vec{a}-\vec{c})\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\right)=0,$$
$$\left(\vec{a}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)=0,\quad \left(\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}\right)=0,$$
$$\left(\vec{b}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right)=0,\quad \left(\vec{c}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$$
$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$$

なので，

$$\vec{x}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$$

は，この 6 式を満たす．つまり 6 平面は 1 点を共有する．

※　垂心が存在する四面体，これを直辺四面体という．

直辺四面体については『数学対話』「特別な四面体」「直辺四面体」を参照のこと．その定理 2 にあるように，直辺四面体の垂心 H は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$$

となる．これから直辺四面体では，モンジュ点は垂心に一致する．

上記定理 2 によらず，直接示すこともできる．

ここで改めて四面体を OABC とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

直辺四面体では，3 組の対辺がそれぞれ直交する．すなわち

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0,\quad \vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0,\quad \vec{c}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$$

すなわち，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

である．この値を A とおくと，6 平面の方程式は

$$\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\vec{x}=0\cdots①\quad (\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{x}=0\cdots②\quad \left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\vec{x}=0\cdots③$$
$$\vec{c}\cdot\vec{x}=A\cdots④\quad \vec{b}\cdot\vec{x}=A\cdots⑤\quad \vec{a}\cdot\vec{x}=A\cdots⑥$$

で，第 ④ 式は

$$\vec{c}\cdot(\vec{x}-\vec{a})=0,\quad \vec{c}\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$$

を意味し，他の式も合わせると，各頂点と $\vec{x}$ で定まる点を結ぶ直線が対面と直交すること示している．

よって，モンジュ点は垂心である．

3.10.3.5　その他の命題

命題 11　四面体 ABCD で

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC},\ \angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}$$

が成り立つなら，

$$\mathrm{AB}=\mathrm{CD},\ \mathrm{AD}=\mathrm{BC}$$

である． ■

南海　逆は △ABC と △ADC が合同になるなどするので，明らかである．

4 辺 AB, BC, CD, DA の長さを $p,\ q,\ r,\ s$ とし，

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{e}_2=\frac{1}{\mathrm{BC}}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \vec{e}_3=\frac{1}{\mathrm{CD}}\overrightarrow{\mathrm{CD}},\ \vec{e}_4=\frac{1}{\mathrm{DA}}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$$

とおく．すると

$$p\vec{e}_1+q\vec{e}_2+r\vec{e}_3+s\vec{e}_4=0\quad\cdots⑥$$

であり，角の条件から

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_3\cdot\vec{e}_4,\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=\vec{e}_4\cdot\vec{e}_1$$

である．⑥ の左辺とベクトル $\vec{e}_2\times\vec{e}_4$ の内積をとると

$$p[\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_4]-r[\vec{e}_1,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4]=0$$

ここで，$[\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_4]$ は 3 つのベクトル $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_4$ が作る平行六面体の体積であり，$[\vec{e}_1,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4]$ は 3 つのベクトル $\vec{e}_1,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4$ が作る平行六面体の体積である．

ところが 2 つずつの辺で作る角がそれぞれ等しく，辺の長さも 1 で等しいので，底面積と高さが等しい，つまり体積は等しい．ゆえに

$$p=r$$

である．同様にして

$$q=s$$

である． □

3.10.3.6　関連入試問題

1) 20 世紀まで

演習 57 (80 京大理系)　解答 55

空間の 3 点 A，B，C の組で，次の条件を満たすものを考える．

① A，B，C は平面 $x+y+z=1$ 上にある．

② A の座標が (l,m,n) であれば，B，C の座標はそれぞれ (m,n,l)，(n,l,m) である．

③ ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交する (ただし，$\mathrm{O}=(0,0,0)$)．

このとき，そのような A，B，C のとり方に関せず，次の三つが成り立つことを示せ．

(1) A，B，C は定円上にある．

(2) 四面体 OABC の体積は一定である．

(3) BC，CA，AB，OA，OB，OC の中点をそれぞれ L，M，N，P，Q，R とすれば 6 点 L，M，N，P，Q，R は定球面上にある

演習 58 (86 京大文理系)　解答 56

座標空間において，平面 $z=1$ 上に一辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある．点 A，B，C から平面 $z=0$ におろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とする．動点 P は A から B の方向へ出発し，一定の速さで △ABC の周を一周する．動点 Q は同時に E から F の方向へ出発し，P と同じ一定の速さで △DEF の周を一周する．線分 PQ が通過してできる曲面と △ABC，△DEF によって囲まれる立体を V とする．

(1)　平面 $z=a$ （$0 \leqq a \leqq 1$）による V の切り口はどのような図形か．

(2)　V の体積を求めよ．

演習 59 (87 京大理系)　解答 57

空間において，平面 $ax+y+z+a-2=0$（a は定数）を考える．

(1)　この平面上の点のうち原点に一番近いものの座標を求めよ．

(2)　原点を中心とする半径 3 の球体がこの平面で分けられる二つの部分のうち，体積の大きくない方の体積を $V(a)$ とする．a をいろいろ変えたとき，$V(a)$ が最小になる a と，そのときの $V(a)$ の値を求めよ．

演習 60 (92 京大理系)　解答 58

空間内の 6 つの点 $\mathrm{A}(1,0,0)$，$\mathrm{B}(0,1,0)$，$\mathrm{C}(-1,0,0)$，$\mathrm{D}(0,-1,0)$，$\mathrm{E}(0,0,1)$，$\mathrm{F}(0,0,-1)$ を頂点とする正八面体を，平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$ で切るとき，切り口の多角形の頂点の座標を求めよ．ただし，a，b，c は正の定数とする．

1) 21 世紀
02 京大理系
06 京大理系後期
08 京大理系
09 京大理系
11 京大理系 6 番
12 宮崎大
18 東北大

3.11　十二点球と一般化

2020.8.20/2020.8.9

3.11.1　一般化について

太郎　『数学対話』の「九点円の不思議」,「特別な四面体」や「線型幾何と四面体」を読みました．
半径 R の円に内接する三角形では，

頂点と垂心の中点 3 点，　各辺の中点 3 点，　頂点から対辺へ下ろした垂線の足 3 点

この 9 点が，外心と垂心の中点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}R$ の円周上にある．これについては「九点円の不思議」にあります．
次に 3 次元の四面体の場合です．対辺が直交する直辺四面体 ABCD では次のことが成り立ちます．

(i) 各辺の中点 6 点と，各頂点からの共通垂線の足 6 点の 12 点は同一球面上にある．これを第 1 種の十二点球という．(1881 年，Lewis，Temperley)

(ii) 各面の重心 4 点，各頂点から対面への垂線の足 4 点，頂点と垂心を 2 : 1 に内分する点 4 点の 12 点は同一球面上にある．これを第 2 種の十二点球という．(1863 年，Prouhet)

直辺四面体でないときを考えました．(i) は，2 頂点から他の 2 頂点で定まる辺への垂線の足が一致するとはかぎらないので，一般の四面体では成り立ちません．
南海　それに対して，(ii) は垂心がない四面体の場合，垂心に代えて次に定義するモンジュ点に変えると成立することがあり得る．それは一般の次元でも成り立つことが期待できる．
これを考えてゆこう．

3.11.2　モンジュ点

南海　n 次元のユークリッド空間を基礎としよう．これは距離空間であるから，ある定点からの距離が等しい点の集合として球が定まる．これを超球といおう．
太郎　それでゆくと，n 次元空間で，1 つの 1 次方程式で定まる領域を超平面といい，$n+1$ 個の互いに平行でない超平面で定まる立体を $n+1$ 面体ということに統一すればいいです．これはまた，超面体ともいえます．
南海　1 次方程式の定数以外の係数でできるベクトルが，それが定める超平面の法線方向となる．つまり超平面に直交する方向が定まる．したがって，逆に外部の点を通りその超平面に直交する法線が定まる．
これらを確認したうえで,「特別な四面体」にある命題を，一般の $n+1$ 面体の命題として取りあげよう．$n+1$ 個の頂点を A_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$ としよう．
O を超面体の外心とする．外心の存在証明は,「特別な四面体」の中にある．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$$

で定まる点をモンジュ点という．

太郎　$n=2$ のときはまさに三角形の垂心ですね．

また，$n=3$ のときは，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$$

で，垂心のある四面体の場合は，これが垂心となります．「特別な四面体」にあります．

ところで，モンジュ点の特徴づけは，

四面体の辺の中点を通り，対辺と直交する 6 面はモンジュ点を共有する．

でした．この証明は「線型幾何と四面体」にあります．次のように簡明に示せます．

四面体 ABCD の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とする．$\vec{x}=(x,\,y,\,z)$ とする．各辺の中点を通り，対辺の方向ベクトルを法線方向とする 6 平面のベクトル方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)=0,\quad (\vec{a}-\vec{c})\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\right)=0,\\
&\left(\vec{a}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)=0,\quad \left(\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}\right)=0,\\
&\left(\vec{b}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right)=0,\quad \left(\vec{c}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0
\end{aligned}$$

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$$

なので，この四面体のモンジュ点

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$$

は，この 6 式をすべて満たす．つまり 6 平面はモンジュ点を共有する．

n 次元となった場合，この特徴づけはどのようになるのでしょうか．

南海　これは次のようになるだろう．

n 次元空間内の $n+1$ 面体から 2 個の頂点 A_i，A_j をとる．この 2 点を除く $n-1$ 個の頂点で定まる $n-1$ 面体の重心を通り，辺 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ と直交する n 次元の超平面は，1 点を共有する．

外心を O として，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}=\vec{a}_i$ のように書けば，方程式は

$$(\vec{a_i}-\vec{a_j})\cdot\left(\vec{x}-\frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i,\,j}\vec{a_k}\right)=0$$

となり，モンジュ点 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ はこの方程式を満たす．

3.11.3　いくつかの命題

南海　このモンジュ点に関して次の命題が成り立つ．

命題 12　n 次元空間に $n+1$ 面体 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{n+1}$ がある．その外心を O，モンジュ点を M，外接球の半径を R とする．

1) 頂点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1}$ から 1 点を除いた他の n 個の頂点で定まる $n-1$ 次空間内にある n 面体（超面体）の重心 G_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$,

2) 線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{M}$ をそれぞれ $n-1:1$ に内分する E_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$,

3) 点 M から 1) で定めた n 面体への垂線の足 H_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$,

の $3(n+1)$ 点は半径 $\dfrac{1}{2}R$ の球面上にある． ■

証明　E_1 と面 $\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{n+1}$ の重心 G_1 との中点を E とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + \frac{n-1}{n}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}}\right)\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$$

である．E は各頂点にに関して対称なので，A_i と対応する重心 G_i に関しても 2 点の中点である．そして E と各重心との距離はいずれも $\dfrac{1}{n}R$ で相等しい．

E を中心とする半径 $\dfrac{1}{n}R$ の球面を S_1 とする．これら $2(n+1)$ 点は S_1 上にある．$\mathrm{E}_i\mathrm{G}_i$ は球 S_1 の直径であり，$\mathrm{E}_i\mathrm{H}_i \perp \mathrm{G}_i\mathrm{H}_i$ なので，H_i も S_1 上にある．t

以上から，各 $n+1$ 点ずつ $3(n+1)$ 個の点は E を中心とする半径 $\dfrac{1}{n}R$ の球面 S_1 上にある． □

これが「特別な四面体」にある第 2 種の十二点球の一般化である．

太郎　n 次元にしたという意味で一般化であり，さらに直辺四面体ではなく一般の $n+1$ 面体で成り立つという意味でも一般化です．

また，$n=2$ のときは，M は垂心で，2 面体とは辺で，その重心は中点となるので，9 点円そのものです．

南海　$n=3$ のときでいえば，垂心をモンジュ点に置きかえることで一般の四面体で成り立つことが重要だ．

次の命題はかたつむりさんが $n=3$ の場合について，掲示板に投稿されたものである．これを，n 次元にして紹介する．

命題 13　$n+1$ 面体の頂点を A_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$ とする．その外心を O，外接球の半径を R，モンジュ点を M とする．このとき，

1) 頂点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n+1}$ から 1 点を除いた他の n 個の頂点で定まる $n-1$ 次空間内にある n 面体（超面体）の重心 G_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$,

2) 線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{M}$ をそれぞれ $n-1:1$ に内分する点 E_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$

3) 2) の E_i から，$k=i$ をのぞく n 個の頂点 A_k $(1 \leqq k \leqq n+1,\ k \neq i)$ からなる n 面体に下ろした垂線の足 K_i,

からなる $3(n+1)$ 個の点は半径 $\dfrac{1}{n}R$ の球面上にある． ■

証明　OM を $n-1:1$ に内分する点を Q とする．点 Q を中心とする半径 $\dfrac{1}{n}R$ の球面を S_2 とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{n-1}{n}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$$

である．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}_i} = \frac{1}{n}\sum_{k\neq i}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\frac{1}{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$$

より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \frac{1}{n}R$ となり，超面体の各面の重心は S_2 上にある．次に，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}_i} = \frac{1}{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i} + \frac{n-1}{n}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$$

より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OE}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \frac{1}{n}R$ となり，超面体の各面の重心は S_2 上にある．

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$$

より，$\mathrm{E}_i\mathrm{G}_i$ は S の直径であり，G_i と E_i は $k = i$ をのぞく n 個の頂点 A_k $(1 \leqq k \leqq n+1,\ k \neq i)$ からなる n 面体にあり，

$$\mathrm{E}_i\mathrm{K}_i \perp \mathrm{G}_i\mathrm{K}_i$$

より，K_i も S_2 上にある． □

※　四面体と球に関して何かさらにわかれば追記してゆきたい．

3.12　円錐曲線・二次曲線

2018.10.29/2015.2.5/2006.1.17

3.12.1　はじめに

耕一　今日は二次曲線について教えてください.

楕円や放物線，そして双曲線が円錐から得られということは習いました．円錐を平面で切った断面が楕円や放物線，双曲線になるということですが，その曲線が本当に楕円や放物線，そして双曲線になっているのか，その証明からしてよくわかりません.

南海　確かに．教科書では「二次曲線は，空間における円錐を，その頂点を通らない平面で切った切り口の曲線として現れることが知られている」と書かれてはいるが，なぜかという理由は述べられていない．ある旧課程の教科書では表紙見開きの図で簡単な説明がなされているが，証明はなされていない．円錐曲線として考えることは，高校数学では重視されていないようだ.

耕一　難しいのですか.

南海　いや，むしろ円錐曲線として考えることによって，二次曲線がよくわかる．また，歴史的にも二次曲線は，円錐を切った断面に現れる曲線，つまり円錐曲線として発見され研究された.

そこで今日は，歴史的な過程をたどりながら，次のような内容を一緒に考え，まとめていこう.

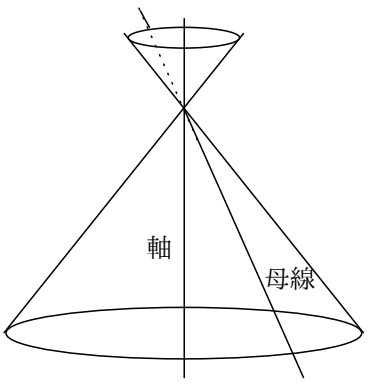
円錐曲線の定義と離心率
平面曲線としての円錐曲線
平面曲線としての統一的把握
二次曲線としての円錐曲線
二次曲線の局所的性質
極座標による表現
包絡線としての二次曲線

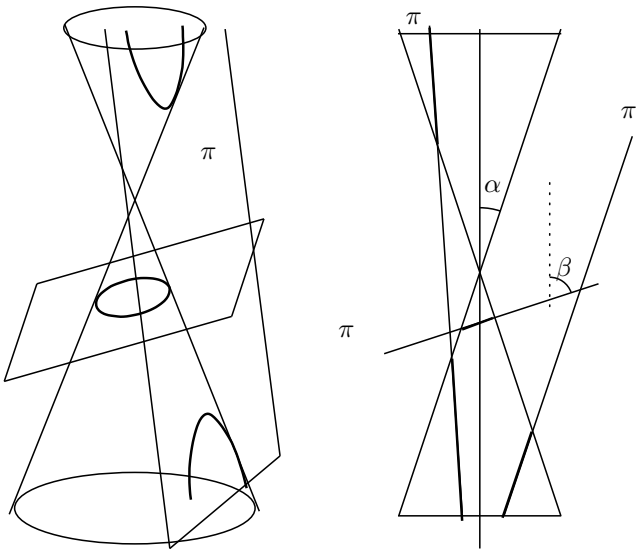
また，私もまだ考えていないところがいくつかあるので，そういうところは今後の研究課題として，述べていきたい.

3.12.2　円錐曲線の定義と離心率

南海　円錐曲線の研究はギリシアにはじまった．円錐曲線を系統的に研究した最初の人は，プラトンの友人であったメナイクモス (Menaechmus,B.C.350 頃) であろうといわれている．円錐とは何か．また円錐曲線とは何か.

耕一　円錐というのは，軸といわれる直線があって，これに交わるもう一つの直線を軸の周りに回転させたとき，その直線が通過してできる曲面です．この直線を**母線**といいます．軸と母線の交点を頂点といいます.





円錐曲線とは，円錐をある平面 π で切ったとき，切り口として得られる曲線です．

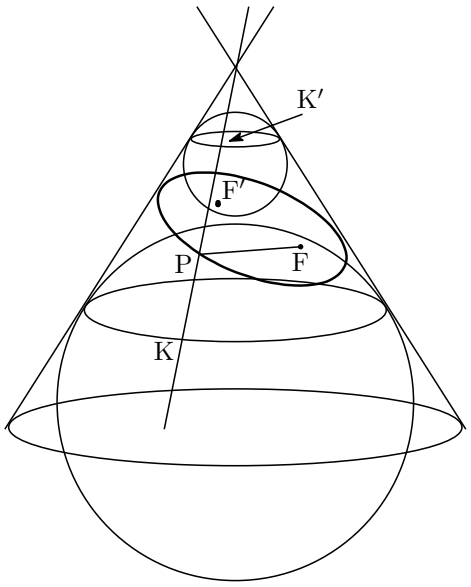
南海　左図のうち右側の図は軸と直交する方向から見たものだが，図のように，軸と母線のなす角を α，平面 π と軸のなす角を β とする．

定義 20 平面 π と円錐の共有部分の曲線を，$\alpha < \beta < \pi$ のとき楕円と呼び，$\alpha > \beta$ なら双曲線，$\alpha = \beta$ なら放物線，$\beta = \dfrac{\pi}{2}$ なら円と呼ぶ．

その主な性質を調べていこう．

3.12.2.1　楕円

円錐を平面 π で切り，図の太線のような切り口になるとする．このとき円錐に内接しかつこの平面 π に接する球が 2 個確定する．この球と平面 π との接点を F, F′ とする．また切り口の図形上の点 P をとる．円錐の頂点と点 P を結ぶ直線が，2 個の球と接する点を K, K′ とする．この接点は球と円錐が共有する円周上にある．



2 つの直線 PF と PK は球の外部の点 P から，この球に引いた 2 本の接線であるから

$$\mathrm{PF} = \mathrm{PK}$$

である．同様に

$$\mathrm{PF}' = \mathrm{PK}'$$

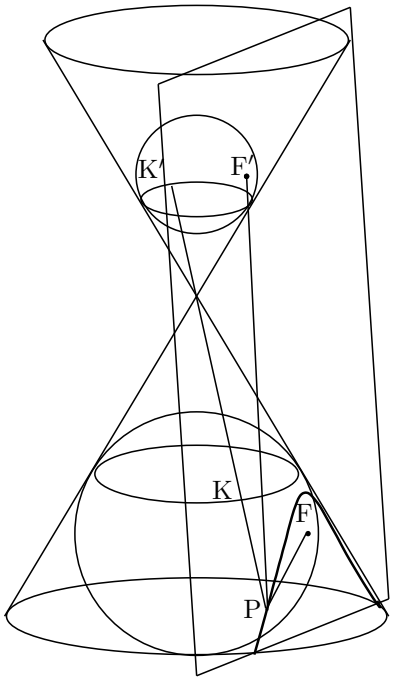
である．したがって

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = \mathrm{PK} + \mathrm{PK}' = \mathrm{KK}' \text{ (一定)}$$

となる．

2 つの球と平面 π との接点 F, F′ をこの楕円の**焦点**という．

3.12.2.2　双曲線



耕一　なるほど, よくわかります．双曲線でやってみます．点の名称は楕円の場合と同様です．
2 つの直線 PF と PK は球の外部の点 P から，この球に引いた 2 本の接線であるから

$$\mathrm{PF} = \mathrm{PK}$$

である．同様に

$$\mathrm{PF}' = \mathrm{PK}'$$

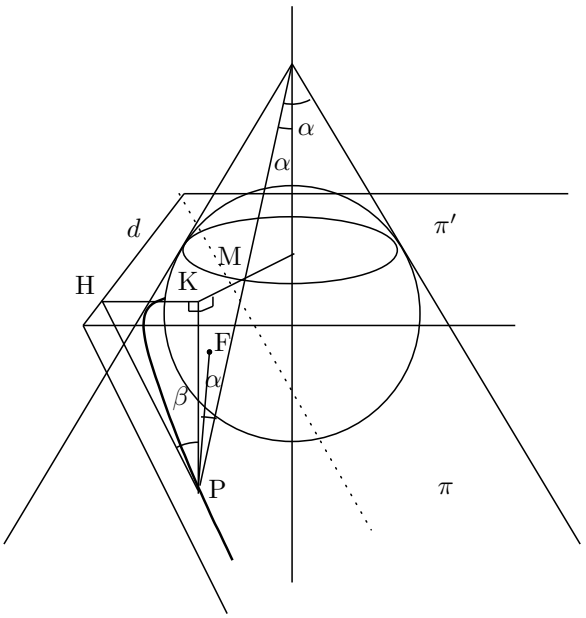
である．したがって

$$\mathrm{PF}' - \mathrm{PF} = \mathrm{PK}' - \mathrm{PK} = \mathrm{KK}' \text{ (一定)}$$

となる．楕円の場合と同様に 2 点 F, F′ をこの双曲線の焦点という．

3.12.2.3　放物線

南海　ところが放物線は，同じようにはいかない．焦点のみで放物線を定義することはできず，準線が必要になる．後で，楕円や双曲線の準線や離心率を円錐曲線として考えるための準備として，放物線の場合を考えてみよう．切断平面 π に点 F で接し，かつ円錐にも接している球の，円錐との共有円を含む平面を π' とする．平面 π と平面 π' との交線を d とする．曲線上の点 P をとる．点 P から直線 d への垂線の足を点 H，点 P から平面 π' への垂線の足を点 K とする．点 M は平面 π' 上にあり，直線 PM は円錐の頂点を通り，直線 KM は円錐の軸と交わるものとする．$\angle$KPH は平面 π と軸のなす角であり，これが β であった．$\angle\mathrm{KPH} = \beta$ である．$\angle$KPM は直線 PM が軸となす角であり，これは母線が軸となす角 α と等しい．



平面 π が母線と平行なので，

$$\alpha = \beta$$

である．この結果，2 つの直描く三角形のあいだの合同

$$\triangle\mathrm{PKH} \equiv \triangle\mathrm{PKM}$$

が成り立ち，

$$\mathrm{PH} = \mathrm{PM}$$

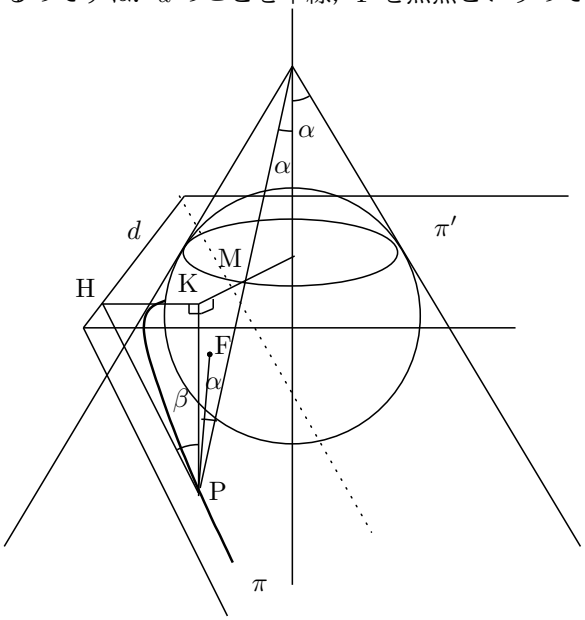
が成立する．2 直線 PM と PF はともに点 P から同一の球への接線なので

$$\mathrm{PM} = \mathrm{PF}$$

である．

$$\therefore \quad \mathrm{PH} = \mathrm{PF}$$

耕一　つまり平面 π と円錐の交わりの曲線上の点 P は，直線 d と点 F からの距離が等しい点であるのですね．d のことを準線，F を焦点というのでした．



南海　放物線の場合の考察に導かれて，楕円，双曲線，放物線の**離心率**を定義しよう．ここでの話は『直観幾何学』(ダーヴィト・ヒルベルト；S. コーン・フォッセン，芹沢正三訳，みすず書店，1966）に教えられたことだ．この本は 2005 年に復刊された．ぜひ意欲的な高校生が挑戦してみてほしい．
円錐曲線としての放物線を考えたときと同様に，切断平面 π と，π に接する球が円錐と接する円の乗っている平面 π' の交わる直線を d とする．図は放物線のときの図を借用する．図のように角 β は軸が母線となす角 α とは異なる．

定義 21 次の比を**離心率**といい，普通は e で表す．

$$e = \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$$

$$\mathrm{PH}\cos\beta = \mathrm{PK} = \mathrm{PF}\cos\alpha$$

であるから

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

と余弦でも表される．

耕一　平面 π が定まれば，平面 π' は平面 π に接する球から定まる．角 β は π と π' のなす角から定まる．よって比 $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ は点 P によらず一定なのですね．
南海　そう．それを確認することが大切なのだ．
耕一　$\alpha < \beta$ なら楕円ですが，このときは $\cos\alpha > \cos\beta$ なので $0 < e < 1$ です．
　$\alpha > \beta$ なら双曲線ですが，このときは $\cos\alpha < \cos\beta$ なので $1 < e$ です．また $\alpha = \beta$ なら放物線ですが，このときは $\cos\alpha = \cos\beta$ なので $e = 1$ です．放物線のときは先にやりました．

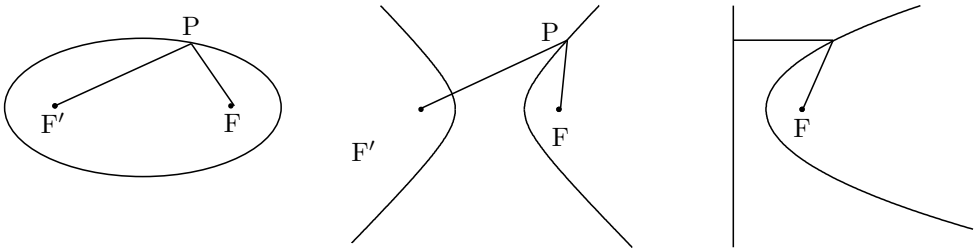
3.12.3　平面曲線としての円錐曲線

南海　メナイクモスはもちろん，その後長い間ギリシア人は円錐曲線を調べるのに，円錐をえがき，それを平面で切って考えてきた．しかし考えればこれはすべて平面 π 上のことではないか．いちいち円錐をかかなくても，平面幾何の問題として考えることはできないのか．

小アジアの都市ベルガのアポロニウス (Apollonios，B.C.260〜200 頃) は平面曲線として楕円，双曲線，楕円を定義した．

耕一　それが，次の定義です．

定義 22　2 点 F, F′ からの距離の和が一定な点 P の全体を楕円，2 点 F, F′ からの距離の差が一定な点 P の全体を双曲線，定直線 d と定点 F からの距離が等しい点 P の全体を放物線という．

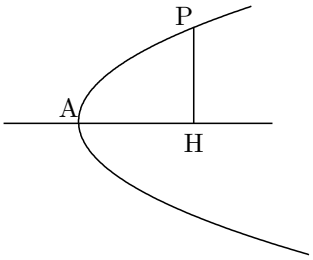


南海　実は，アポロニウスは放物線をこのようにはとらえなかった．

放物線上の点 P から放物線の軸に垂線 PH を引く．また放物線の頂点を A とする．このとき

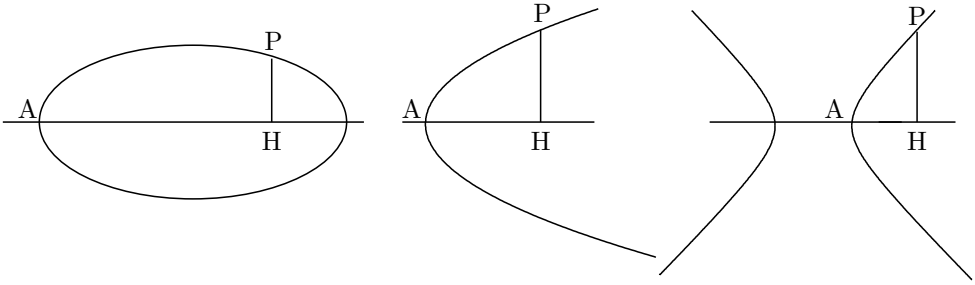
$$\frac{\mathrm{PH}^2}{\mathrm{AH}}$$

が一定であることを示し，これによって放物線を定義したのだ．いずれにせよ，これで円錐曲線は平面上の曲線として考えればよいことがわかった．



アポロニウスはまた,「ellipes(楕円)」,「parabola(放物線)」,「hyperbola(双曲線)」を命名した人である．ellipes，parabola，hyperbola　はそれぞれ「不足する」,「一致する」,「過剰である」を意味する．このような呼び名はどこから来たのか．

楕円，双曲線では 2 つの焦点を結ぶ直線を軸といい，放物線では焦点を通り準線に直交する直線を軸という．曲線上の点 P から軸に垂線 PH を引く．軸と曲線の交点の一つを A とする．



$x = \mathrm{PA}$，$y = \mathrm{PH}$ とおく．

放物線のときは $\dfrac{y^2}{x}$ は一定であった．この比を a とすると $y^2 = ax$ と等号が成立する．これと同

様にある定数 a を適当にとると

$$\frac{y^2}{ax} < 1 \quad : \text{楕円}$$
$$\frac{y^2}{ax} = 1 \quad : \text{放物線}$$
$$\frac{y^2}{ax} > 1 \quad : \text{双曲線}$$

となる．アポロニウスは「円錐曲線」全 8 巻を後世に残した．これは 16 世紀までこの方面のまさに古典であった．

耕一　なるほど．2 点からの距離の比が一定な点の軌跡は円になるという**アポロニウスの円**もこの本にあるのですね．

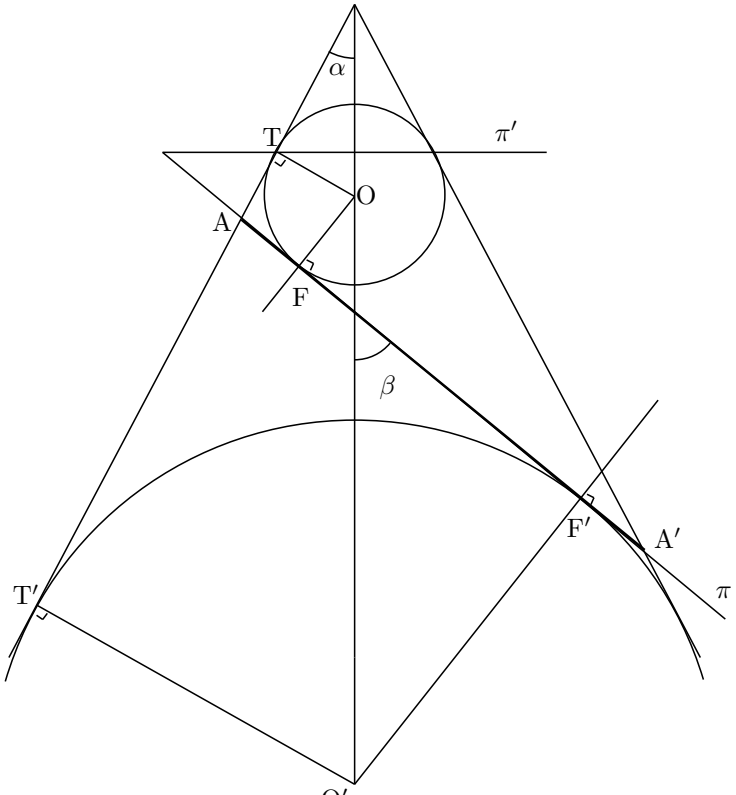
南海　そうだ．しかしだ．アポロニウスの定義では，円錐曲線をそれぞればらばらにとらえていて，何ら統一的な理解はできない．もともと円錐曲線は円錐を平面で切った切り口であるという統一的な把握からはじまったのに，である．

平面曲線としての統一的な把握はできないのか．放物線があまりにも他の二つとかけはなれている．アポロニウスから 500 年後，エジプトのアレクサンドリアのパッポス (Pappos,A.D.390 頃) は大著『数学集成』を編纂，そのなかでうまい定義を見いだしている．それは次のようなものである．

定義 23 円錐曲線とは，一定点と一定直線よりの距離の比が一定であるような点からなる図形である．その比が 1 より大きいとき双曲線，1 のとき放物線，1 より小さいとき楕円という．この定点を焦点，この直線を準線という．

耕一　少し教科書にも載っています．

南海　これはおそらく次のような考察から得られたのではないかと思われる．円錐を，切断平面 π と直交し円錐の軸をとおる平面で切った断面 γ を考えよう．双曲線の場合も同じことなので楕円で考える．



図の太線の部分が楕円を断面 γ に投影したものだ．π と円錐に接する 2 つの円の中心を O, O′ とする．2 円と切断平面 π との接点を F, F′ とする．この 2 接点が楕円の焦点である．平面 γ 上の 2 円と円錐との接点をそれぞれ T, T′ とする．平面 γ 上の円錐と平面 π の交点をそれぞれ A, A′ とする．

$$\mathrm{AA'} = 2a,\ \mathrm{FF'} = 2c$$

とおけばこれは定数である．もちろんこの記号は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

としたとき長軸が $2a$，焦点の座標が $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ なることを背景にしている．今大切なことは，円錐と切断平面で定まる定数ということである．ここでこれらの長さと角 α, β の間のどのような関係があるか．

耕一　まず，

$$\mathrm{FF'} = \mathrm{OO'}\cos\beta$$

です．一方

$$\mathrm{TT'} = \mathrm{OO'}\cos\alpha$$

です．これから

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{FF'}}{\mathrm{TT'}}$$

です．TT′ を AA′ と関連づければよいのですね．

A からの 2 つの接線なので

$$\mathrm{AF'} = \mathrm{AT'}$$

です．また

$$\mathrm{AT} = \mathrm{AF}$$

も成り立ちます．

南海　楕円であることはわかっているのだから

$$\mathrm{FA} + \mathrm{F'A} = \mathrm{FA'} + \mathrm{F'A'}$$

耕一　これから

$$\mathrm{AF} = \mathrm{F'A'}$$

すると

$$\begin{aligned} \mathrm{TT'} &= \mathrm{TA} + \mathrm{AT'} \\ &= \mathrm{TA} + \mathrm{AF'} = \mathrm{AF} + \mathrm{AF'} \\ &= \mathrm{A'F'} + \mathrm{AF'} = \mathrm{AA'} = 2a \end{aligned}$$

すると

$$e = \frac{\mathrm{FF'}}{\mathrm{TT'}} = \frac{\mathrm{FF'}}{\mathrm{AA'}} = \frac{c}{a} \tag{3.31}$$

となりました．

南海　パッポスはこのような考察から，逆に先述のような定義に至ったと思われる．いったんこの定義に至れば，それを座標平面において座標平面上の問題として考えることもできる．

耕一　このような定義で円はどのように考えればよいのでしょうか．

南海　円は円錐を平面 π で切断したという観点に立てば，π が軸に直交している場合であり，楕円の一種としてよい．ところが，準線で考えると，円錐では平面 π と π' が平行になり準線が存在しない．この場合準線は無限のところに移行し，準線との距離が無限，したがってその比としての離心率は 0 と考えなければならない．楕円の極限として得られるともいえる．この意味で**退化した円錐曲線**と考えてもよい．

切断平面 π は頂点を通らないとしたが，頂点を通るときは 2 直線か 1 直線か，1 点になる．この場合も，π は頂点を通る位置に近づいた極限としてとらえることができ，退化した円錐曲線と考えることができる．

3.12.4　円錐曲線の座標表現

南海　さて，アポロニウスの定義から千数百年，デカルトによって座標の考え方が導かれた．アポロニウスの定義を座標で表現するとどのようになるか．

耕一　楕円でやってみます．

焦点を $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ とし，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とします．楕円の定義から

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

です．これから

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

として 2 回平方し整理すると

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$a > c > 0$ なので $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ とおくと

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

となる．

南海　パッポスの定義との関連を見るために

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{3.32}$$

の両辺に

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

を乗じてみてほしい．ただしこれは，$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ が正となるところに P があるときだ．

耕一

$$(x+c)^2 + y^2 - \{(x-c)^2 + y^2\} = 2a(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})$$

これから

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{2c}{a}x$$

となりました．

南海　(3.32) と辺々引いて 2 で割ると

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

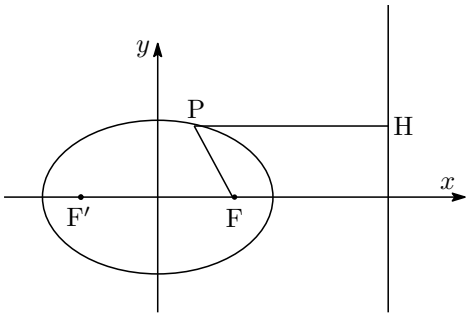
となる．

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \mathrm{PF}$$

である．そこで直線 d を

$$x = \frac{a^2}{c}$$

とし，点 P から直線 d へ垂線 PH を引くと，



$$\mathrm{PH} = \frac{a^2}{c} - x$$

である．このとき

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}} = \frac{a - \dfrac{c}{a}x}{\dfrac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a}$$

となり P によらず一定である．この結果が (3.31) と一致している．$e = \dfrac{c}{a}$ なので，準線は

$$x = \frac{a}{e}$$

となる．

この式変形を逆にたどることで，パッポスによる定義で定まる曲線がアポロニウスの定義をみたすことが示され，二つの定義が同等であることがわかる．

双曲線の場合，放物線の場合にもまったく同様な関係が成り立つ．双曲線と放物線の場合にも，アポロニウスの定義とパッポスの定義が同等であることを確認しておいてほしい．

南海　まとめると次のようになるはずだ．これを確認することを演習でやってほしい．

xy 座標の標準形	離心率	焦点	準線
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\mathrm{F}(\pm ae,\ 0)$	$d:x=\pm\dfrac{a}{e}$
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$\mathrm{F}(\pm ae,\ 0)$	$d:x=\pm\dfrac{a}{e}$
$y^2=4ax$	$e=1$	$\mathrm{F}(a,\ 0)$	$d:x=-a$

3.12.5　二次曲線としての円錐曲線

楕円や双曲線，放物線が**二次曲線**といわれるのはなぜか．

耕一　曲線を定義する方程式が

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ x^2=4py$$

のように，二次式になるからです．

南海　しかし二次式ということになると他にいくらもある．

耕一　『数学対話』－「パスカルの定理」のなかにあるように，x と y の二次式の一般形は

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0 \tag{3.33}$$

です．これをみたす点 $(x,\ y)$ の全体が，方程式 (3.33) で定まる図形ということになります．

『数学対話』－「シュタイナー楕円」のなかに，$h^2-ab\neq 0$ のときには，この方程式で定まる図形を平行移動したり，一次変換で移動すると，標準形で表された二次曲線の方程式が得られることが書かれています．

南海　よく勉強している．その内容を整理して再掲しよう．

最も一般的な考え方は『数学対話』－「線型代数の考え方」－「内積と直交変換」－「内積の対角型行列表示」にある．この対話の最後の演習問題にもあるのだが，ここでは，数学 C の範囲内で，この二次曲線を移動して標準形で表されるようにする手順を考えよう．方程式 (3.33) で定まる図形を回転と平行移動して標準形にするのである．

平行移動は先にしても後からしてもいいのだが，ここでは後からすることにし，まず xy という項を消すために回転しよう．A を回転行列 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とし，二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$$

上の点 $(x,\ y)$ が A で定まる一次変換 f_A で点 $(X,\ Y)$ に移るとする．

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

である．これを逆に解くと

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

である．この x と y をもとの方程式に代入し，得られる X と Y の方程式において XY という項の係数を 0 にできればよい．

耕一　$ax^2+2hxy+by^2$ の部分で考えればよいです．

$$\begin{aligned}
& ax^2+2hxy+by^2 \\
= \ & (x,\ y)\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
= \ & (X,\ Y)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
= \ & (X,\ Y)\begin{pmatrix} a\cos^2\theta - h\sin 2\theta + b\sin^2\theta & -(b-a)\sin\theta\cos\theta + h\cos 2\theta \\ -(b-a)\sin\theta\cos\theta + h\cos 2\theta & a\sin^2\theta + h\sin 2\theta + b\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
= \ & (X,\ Y)\begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

とします．

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\theta - h\sin 2\theta \\
B &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\cos 2\theta + h\sin 2\theta \\
H &= -\frac{b-a}{2}\sin 2\theta + h\cos 2\theta
\end{aligned}$$

です．

南海　$A+B=a+b,\ AB-H^2=ab-h^2$ が成り立つはずだ．

耕一

$$\begin{aligned}
A+B &= a+b \\
AB-H^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\cos 2\theta - h\sin 2\theta\right)^2 \\
&\qquad - \left(-\frac{b-a}{2}\sin 2\theta + h\cos 2\theta\right)^2 \\
&= \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} - h^2 = ab-h^2
\end{aligned}$$

です．$AB-H^2=ab-h^2$ の方は

$$\begin{aligned}
AB-H^2 &= \Delta\begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix} \\
&= \Delta\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) \\
&= \Delta\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} = ab-h^2
\end{aligned}$$

からもわかります．そこで，$a=b$ ならば $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ にとり，$a\neq b$ ならば $\tan 2\theta = \dfrac{2h}{b-a}$ となる θ をとれば $H=0$ になります．

南海　回転，一般的には一次変換で $fx+gy+c$ の部分は X と Y の一次式になることはまちがいない．回転角を適当にとることで (3.33) が

$$AX^2+BY^2+2FX+2GY+C=0 \tag{3.34}$$

と変形されることがわかった．

耕一　一次の項は平行移動で消せる．また，$H=0$ にしたときは $AB=ab-h^2$ なので，$ab-h^2>0$ か $ab-h^2<0$ に応じて楕円か双曲線になります．

南海　とはかぎらない．(3.34) が因数分解されるときがある．

耕一　そうか．因数分解できるということは，図形が 2 直線になるということですね．

南海　そうだ．回転して 2 直線になるということは，もともと 2 直線だから，このときは (3.33) がすでに因数分解される．

耕一　では $ab-h^2=0$ のときは，どのようになるのですか．

南海　$a=b$ ならば $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ にとり，$a\neq b$ ならば $\tan 2\theta=\dfrac{2h}{b-a}$ となる θ をとれば，$H=0$ とできることは同様だ．さらに $ab-h^2=0$ の場合は $AB=H^2$ となる．したがって $H=0$ にしたとき $AB=0$ となるのだ．

耕一　$A=0$ か $B=0$ ならそれぞれ X 軸または Y 軸に平行な放物線です．$A=B=0$ なら，必然的に $a=b=0$ で，このときは $h=0$ も成り立ち (3.33) が二次式でなくなります．

南海　さらに，

$$X^2+Y^2=0$$

が 1 点 $(0,\ 0)$ 以外に条件をみたす点がない場合もある．この場合も結局は (3.33) が

$$(x-1)^2+(y-2)^2=0$$

のようになって 1 点しか表さない．

以上から (3.33) で定まる図形は

楕円，双曲線，放物線
円
2 直線，1 直線
1 点，空集合

のいずれかになる．

ところで，方程式 (3.33) は 3 次対称行列を用いると

$$(x,\ y,1)\begin{pmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

と表される．この対称行列の対角化の問題と考えることができる．次のように 2 つの行列の行列式を $D_0,\ D$ とする．

$$D_0=\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix},\ D=\begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix}$$

とおく．このとき

(i) $D_0 \neq 0,\ D \neq 0$ なら，空集合かまたは楕円か双曲線.

(ii) $D_0 = 0,\ D \neq 0$ なら，放物線.

(iii) $D = 0,\ D_0 > 0$ なら，1 点.

(iv) $D = 0,\ D_0 < 0$ なら，平行でない 2 直線.

(v) $D = 0,\ D_0 = 0$ なら，空集合か 1 直線か平行 2 直線.

となる．これについては『数学対話』−「線型代数の考え方」−「内積と直交変換」−「内積の対角型行列表示」を参考に考えてほしい.

演習 61 解答 62

次の曲線を回転と平行移動で標準形にせよ.

(1) $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 16$

(2) $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 6x + 42y - 27 = 0$

(3) $x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$

3.12.6 二次曲線と接線

南海 方程式 (3.33) が楕円，双曲線，放物線，円のいずれかを定めているとする．この曲線を C とする．C 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における C の接線は『数学対話』−「パスカルの定理」で導いたところだが，もう一度確認してほしい.

耕一 方程式 (3.33) の両辺を x で微分すると

$$2ax + 2hy + 2hx\frac{dy}{dx} + 2by\frac{dy}{dx} + 2f + 2g\frac{dy}{dx} = 0$$

つまり，$(hx + by + g)\dfrac{dy}{dx} = -(ax + hy + f)$．したがって, 点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(hx_1 + by_1 + g)(y - y_1) = -(ax_1 + hy_1 + f)(x - x_1)$$

これは $hx_1 + by_1 + g = 0$ のときも成立する．ここで，$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + c = 0$ を用いて整理すると，

$$axx_1 + h(yx_1 + xy_1) + byy_1 + f(x_1 + x) + g(y_1 + y) + c = 0$$

です.

南海 したがってとくに

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x^2 = 4py$$

上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1,\ \frac{x_1}{a^2}x - \frac{y_1}{b^2}y = 1,\ x_1x = 2p(y + y_1)$$

となる.

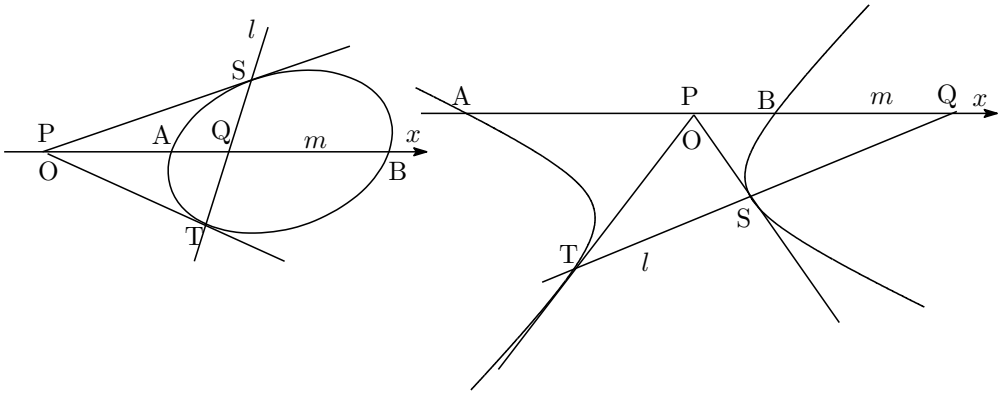
二次曲線の射影幾何的な基本性質をまず証明しよう．二次曲線 C がある．点 P から C に 2 本の接線が引けるときそれらの接点を通る直線を点 P の極線という.

定理 83　二次曲線 C と点 P，および点 P その極線 l がある．点 P を通る直線 m と C との交点を A，B，m と l の交点を Q とする．このとき

$$\frac{1}{\mathrm{AP}}+\frac{1}{\mathrm{BP}}=\frac{2}{\mathrm{PQ}}$$

が成り立つ．■

証明　点 P を原点，m を x 軸にとり，交点が x 軸の正の部分に来るように座標平面におく．



このとき C の方程式を

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$$

とする．曲線 l の 2 接点を $\mathrm{S}(x_1,\ y_1),\ \mathrm{T}(x_2,\ y_2)$ とすると，点 S での接線は

$$axx_1+h(yx_1+xy_1)+byy_1+f(x_1+x)+g(y_1+y)+c=0$$

となる．これが点 P を通るので

$$fx_1+gy_1+c=0$$

点 T についても同様の等式が成り立つ．これより，直線 $fx+gy+c=0$ が点 S と T を通る．これから極線 l の方程式が

$$fx+gy+c=0$$

であることがわかる．この結果点 Q の座標は

$$\mathrm{Q}\left(-\frac{c}{f},\ 0\right)$$

である．次に，二次曲線 C と x 軸の交点の x 座標は，二次方程式

$$ax^2+2fx+c=0$$

の二根である．点 A，B の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とする．このとき

$$\alpha+\beta=-\frac{2f}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

となる．さて点 P，Q，A，B は同一直線上にあるので，x 座標に関して同様の関係が成り立つことを示せばよい．つまり

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{2}{-\dfrac{c}{f}}=-\frac{2f}{c}$$

ところが

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{2f}{c}$$

なので，成立している． □

耕一　これは円の場合などによく問題にありますが，このように一般的に成り立つのですね．

南海　この関係はすぐにわかるように

$$\mathrm{PA}:\mathrm{AQ}=\mathrm{PB}:\mathrm{BQ}$$

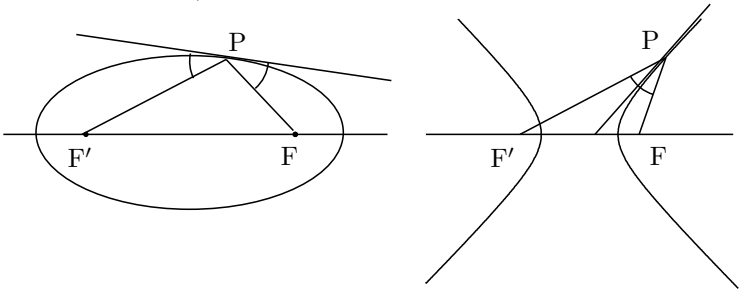
と同値である．これは，点 A，B が PQ を内分する比と外分する比が等しいことを意味し，この四点が**調和点列**をなすということ意味している．

このあたりが射影幾何での二次曲線の研究の始まりであった．またこの定理はより図形的な別の証明がある．

これらについては『幾何学の精神』のなかの「諸定義とその関係」や「円錐曲線」を参考にしてほしい．

さて，次にもう一つ，楕円，双曲線の基本性質を示す．．証明法はいろいろある．最も基礎的な座標の方法で示そう．

定理 84 楕円，または双曲線を C とし，2 つの焦点を F, F′ とする．C 上の点 P における接線 l と直線 PF がなす角と，接線 l と直線 PF′ がなす角はつねに等しい．



証明

C の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$$

とする．以下，楕円か双曲線で複号を同順にとることとし，

$$c=\sqrt{a^2\mp b^2}$$

とする．焦点は

$$\mathrm{F}(c,\ 0),\ \mathrm{F}'(-c,\ 0)$$

となる．C 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ での接線 l を

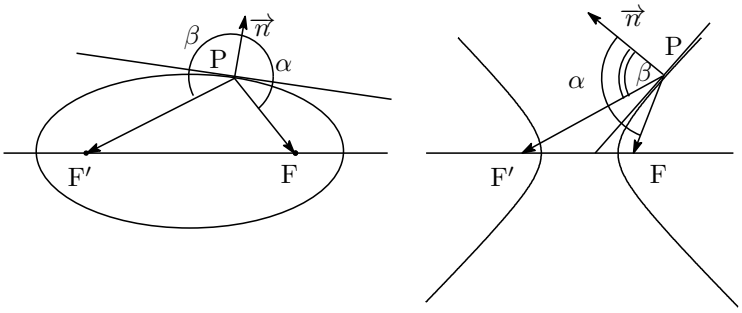
$$\frac{x_1}{a^2}x\pm\frac{y_1}{b^2}y=1$$

とする．したがってベクトル

$$\vec{n}=\left(\frac{x_1}{a^2},\ \pm\frac{y_1}{b^2}\right)$$

が，点 P における l の法線方向である．

定理の証明を，ベクトル $\vec{n}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PF}}$ となす角 α の余弦と，ベクトル $\vec{n}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PF'}}$ となす角 β の余弦を比較することでおこなう．



楕円の場合 $\alpha = \beta$ を示せばよい．，それはつまり

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PF}} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{PF}}||\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PF'}} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{PF'}}||\vec{n}|}$$

を示すことである．

双曲線の場合の場合 $\alpha - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \beta$ を示せばよい．，それはつまり

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PF}} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{PF}}||\vec{n}|} = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{PF'}} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{PF'}}||\vec{n}|}$$

を示すことである．

$$\overrightarrow{\mathrm{PF}} = (c - x_1,\ -y_1),\ \overrightarrow{\mathrm{PF'}} = (-c - x_1,\ -y_1)$$

である．

$$y_1{}^2 = \pm b^2 \left(1 - \frac{x_1{}^2}{a^2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PF}}| &= \sqrt{(c - x_1)^2 + y_1{}^2} \\
&= \sqrt{c^2 - 2cx_1 + x_1{}^2 \pm b^2 \mp \frac{b^2}{a^2} x_1{}^2} \\
&= \sqrt{a^2 \mp b^2 - 2cx_1 \pm b^2 + \frac{a^2 \mp b^2}{a^2} x_1{}^2} \\
&= \sqrt{a^2 - 2cx_1 + \frac{c^2}{a^2} x_1{}^2} \\
&= \left|a - \frac{c}{a} x_1\right| = \frac{|a^2 - cx_1|}{a}
\end{aligned}$$

同様に

$$|\overrightarrow{\mathrm{PF'}}| = \frac{|a^2 + cx_1|}{a}$$

一方

$$\overrightarrow{\mathrm{PF}} \cdot \vec{n} = \frac{(c - x_1)x_1}{a^2} \mp \frac{y_1{}^2}{b^2}$$

$$= \frac{(c-x_1)x_1}{a^2} - \left(1 - \frac{{x_1}^2}{a^2}\right)$$
$$= \frac{cx_1}{a^2} - 1 = \frac{cx_1 - a^2}{a^2}$$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{PF'}} \cdot \overrightarrow{n} = -\frac{cx_1 + a^2}{a^2}$$

対称性から点 P は第一象限にあるとしてよい．よって

楕円の場合，$a^2 > cx_1$ なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{PF}}| = \frac{a^2 - cx_1}{a}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{PF'}}| = \frac{a^2 + cx_1}{a}$$

したがって

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PF}} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{PF}}||\overrightarrow{n}|} = -\frac{1}{a|\overrightarrow{n}|}$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PF'}} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{PF'}}||\overrightarrow{n}|} = -\frac{1}{a|\overrightarrow{n}|}$$

双曲線の場合，$a^2 < cx_1$ なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{PF}}| = \frac{cx_1 - a^2}{a}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{PF'}}| = \frac{cx_1 + a^2}{a}$$

したがって

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PF}} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{PF}}||\overrightarrow{n}|} = \frac{1}{a|\overrightarrow{n}|}$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PF'}} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{PF'}}||\overrightarrow{n}|} = -\frac{1}{a|\overrightarrow{n}|}$$

いずれの場合も証明すべきことが成立している． □

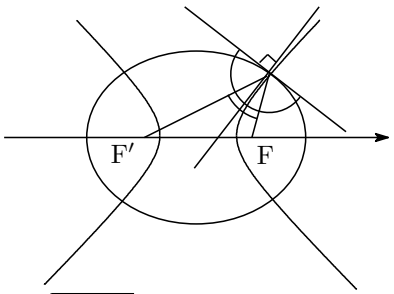
南海　定理 (84) から，次のことがわかる．

> 同一平面上の楕円と双曲線の 2 つの焦点がそれぞれ一致しているとき，その楕円と双曲線は互いに直交している．ただし，楕円と双曲線が直交しているとは，楕円と双曲線の各共有点におけるそれぞれの接線がその点で直交していることをいう．

耕一　図をかいてみますと，…．一目瞭然です．

南海　直交性は直接示すこともできる．

耕一　やってみます．



$a,\ b,\ p,\ q$ を $a > b$ である正の定数として，楕円と双曲線の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$$

とします．それぞれの焦点は $(\pm\sqrt{a^2 - b^2},\ 0)$ と $(\pm\sqrt{p^2 + q^2},\ 0)$ である．焦点が一致するので

$$a^2 - b^2 = p^2 + q^2 \tag{3.35}$$

が成立している．楕円と双曲線の共有点を $(x_0,\ y_0)$ とする．$(x_0,\ y_0)$ での接線の方程式は

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$$
$$\frac{x_0}{p^2}x - \frac{y_0}{q^2}y = 1$$

楕円と双曲線の共有点 $(x_0,\ y_0)$ なので

$$\begin{cases} \dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{{x_0}^2}{p^2} - \dfrac{{y_0}^2}{q^2} = 1 \end{cases}$$

をみたす．これを ${x_0}^2$ と ${y_0}^2$ の連立一次方程式として解く．

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{b^2} \\ \dfrac{1}{p^2} & -\dfrac{1}{q^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {x_0}^2 \\ {y_0}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {x_0}^2 \\ {y_0}^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\left(-\dfrac{1}{a^2q^2} - \dfrac{1}{b^2p^2}\right)} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{q^2} & -\dfrac{1}{b^2} \\ -\dfrac{1}{p^2} & \dfrac{1}{a^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2q^2 + b^2p^2} \begin{pmatrix} a^2p^2(b^2+q^2) \\ b^2q^2(a^2-p^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

直交条件を調べる．

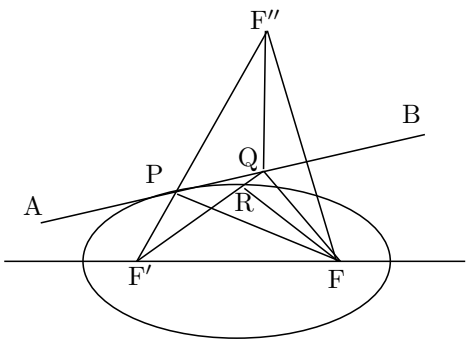
$$\frac{x_0}{a^2} \cdot \frac{x_0}{p^2} + \frac{y_0}{b^2} \cdot \left(-\frac{y_0}{q^2}\right) = \frac{{x_0}^2}{a^2p^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2q^2}$$
$$= \frac{1}{a^2q^2 + b^2p^2} \left\{(b^2+q^2) - (a^2-p^2)\right\}$$

(3.35) から

$$(b^2+q^2) - (a^2-p^2) = (p^2+q^2) - (a^2-b^2) = 0$$

よって楕円と双曲線は互いに直交していることが示せた． □

南海　定理 (84) の楕円の部分は次のように図形的に示すことができる．



図のように接線 AB 上の動点 Q をとる．直線 F′Q と楕円の交点を R とする．すると楕円の定義と三角形の辺の不等式から

$$\mathrm{F'P} + \mathrm{FP} = \mathrm{F'R} + \mathrm{FR} \leqq \mathrm{F'Q} + \mathrm{FQ}$$

である．等号が成立するのは Q = P のときである．つまり点 P は点 Q が接線上を動くとき

$$\mathrm{F'Q} + \mathrm{FQ}$$

を最小にする点である．

このような点の作図方法は？

耕一　接線に関して点 F と対称な点を F″ とする．

$$\mathrm{F'Q} + \mathrm{QF} = \mathrm{F'Q} + \mathrm{QF''} \geqq \mathrm{F'F''}$$

で，等号が成立するときは，F′, P, F″ が一直線になるときでる．つまり直線 F′F″ と接線の交点が P です．

接線に関して点 F と対称な点が F″ なので

$$\angle \mathrm{FPB} = \angle \mathrm{F''PB}$$

対頂角の相等から

$$\angle \mathrm{F'PA} = \angle \mathrm{F''PB}$$

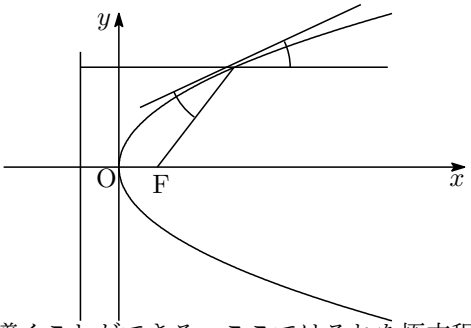
よって

$$\angle \mathrm{F'PA} = \angle \mathrm{FPB}$$

が成立する．

南海　この図形的性質と，定理 (84) とは独立に示された，焦点共有な楕円と双曲線は直交するという事実から定理 (84) の双曲線の部分を導くことができる．

耕一　放物線の場合は，次の図のように接線が焦点となす角と，接線が軸となす角が等しいのですね．

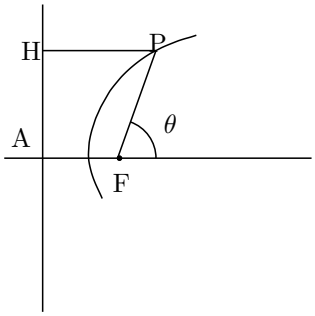


南海　その通りなのだ．が，前に離心率を考えたときと同様に，放物線の場合は楕円や双曲線とは少し異なる方向に一般化される．それが後で示す定理 (85) だ．

この定理は上と同様に xy 座標系の方程式から導くことができる．ここではそれを極方程式を用いる方法で示そう．

3.12.7　接線の極方程式表示と応用

南海　定義 (23) を極座標で表すとどのようになるか．その場合焦点を極にとり，準線と直交する方向に極線をとろう．



耕一　条件をみたす点を P とし，PH を準線への垂線とします．さらに，$r = \mathrm{FP}$ とし準線と焦点の距離を a とします．また離心率を e とします．定義から

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}} = e$$

これから

$$\frac{r}{rcos\theta + a} = e$$

これを解いて

$$r = \frac{ea}{1 - e\cos\theta}$$

となります．

南海　そういうことなのだ．このようにして，xy 座標で標準形で表されるものを，極方程式に表すと次のようになる．先にいちど掲げた表に極方程式を追加しよう．

xy 座標の標準形	離心率	焦点	準線	極方程式
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\mathrm{F}(\pm ae,\ 0)$	$d: x=\pm\dfrac{a}{e}$	$r=\dfrac{l}{1\pm e\cos\theta},\ l=\dfrac{b^2}{a}$
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$\mathrm{F}(\pm ae,\ 0)$	$d: x=\pm\dfrac{a}{e}$	$r=\dfrac{l}{1\mp e\cos\theta},\ l=\dfrac{b^2}{a}$
$y^2=4ax$	$e=1$	$\mathrm{F}(a,\ 0)$	$d: x=-a$	$r=\dfrac{l}{1-\cos\theta},\ l=2a$

南海　極方程式で表された曲線の接線を考えることが必要だ．

耕一　xy 座標で $y=f(x)$ で表された曲線上の点 $(t,\ f(t))$ での接線は，$f'(t)$ が存在するとき xy 座標では

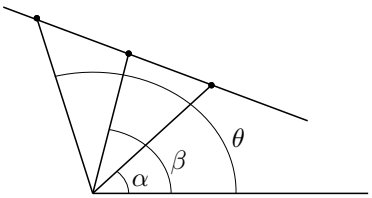
$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

で表されます．

　すると，極座標 $(r,\ \theta)$ で極方程式 $r=f(\theta)$ によって表される曲線上の点 $(f(\alpha),\ \alpha)$ での接線はどのようになるのか，という問題ですね．

南海　それを考えよう．

極形式で表された曲線 $r=f(\theta)$ 上の 2 点 $(f(\alpha),\ \alpha)$ $(f(\beta),\ \beta)$ を通る直線の式を極座標で表わすとどうなるか．



耕一　極座標を xy 座標に直しつつ考えないとうまくできません．求める接線上の点を $(r,\ \theta)$ とします．

　2 点 $(f(\alpha),\ \alpha)$ $(f(\beta),\ \beta)$ を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{f(\alpha)\sin\alpha-f(\beta)\sin\beta}{f(\alpha)\cos\alpha-f(\beta)\cos\beta}$$

ここで，$\beta\to\alpha$ の極限をとります．これは，分子分母がそれぞれ関数 $f(\theta)\sin\theta$，$f(\theta)\cos\theta$ の $\theta=\alpha$ での微分係数になるので

$$\frac{f'(\alpha)\sin\alpha+f(\alpha)\cos\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha-f(\alpha)\sin\alpha}$$

です．したがって接線上の点 $(r,\ \theta)$ がみたすべき関係式は

$$\frac{r\sin\theta-f(\alpha)\sin\alpha}{r\cos\theta-f(\alpha)\cos\alpha}=\frac{f'(\alpha)\sin\alpha+f(\alpha)\cos\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha-f(\alpha)\sin\alpha}$$

です．これより，

$$r\{f'(\alpha)\sin(\theta-\alpha)-f(\alpha)\cos(\theta-\alpha)\}=-f^2(\alpha)$$

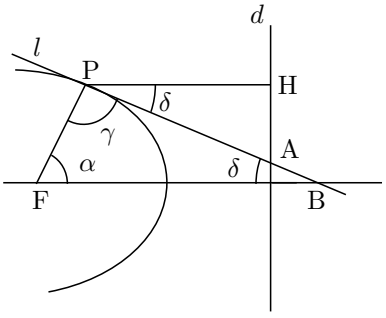
を得ます．

南海　それが求める接線の式である．これをもとに二次曲線の接線に関する基本定理を導こう．

定理 85 楕円, 放物線, 双曲線 C の焦点, 準線, 離心率をそれぞれ F , d , e とし C 上の任意の点 P における接線 l と d との交点を A , P から d に下した垂線の足を H とする．このとき

$$\frac{\cos\angle\mathrm{APF}}{\cos\angle\mathrm{APH}}=e$$

が成り立つ．



証明

F を極とする極座標では楕円, 放物線, 双曲線は

$$r = \frac{l}{1 \pm e\cos\theta}$$

と表される. まずこの上の点 $(f(\alpha),\ \alpha)$ での接線を求める.

$$\frac{d}{d\theta}r = \frac{\pm le\sin\theta}{(1 \pm e\cos\theta)^2}$$

よって

$$r\left\{\frac{\pm le\sin\alpha}{(1 \pm e\cos\alpha)^2}\sin(\alpha-\theta) + \frac{l}{1 \pm e\cos\alpha}\cos(\alpha-\theta)\right\} = \frac{l^2}{(1 \pm e\cos\alpha)^2}$$

$$\therefore \quad r\{\pm e\sin\alpha\sin(\alpha-\theta) + (1 \pm e\cos\alpha)\cos(\alpha-\theta)\} = l$$

つまり

$$r\left\{\pm e\cos\theta + \cos(\alpha-\theta)\right\} = l$$

図のように点 $\mathrm{P}(f(\alpha),\ \alpha)$ での接線と FP のなす角を γ, PH とのなす角を δ とする.

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\delta} = e$$

を示す.

P での接線と x 軸との交点を B とする. まず FP を求める. 接線の式に $\theta = \alpha$ を代入して

$$\mathrm{FP} = f(\alpha) = \frac{l}{1 \pm e\cos\alpha}$$

次に FB を求める.

(1) $+e(0 < e < 1)$, つまり楕円のとき.

$\theta = 0$ を代入して

$$\mathrm{FB} = \frac{l}{e + \cos\alpha}$$

このとき $\alpha + \gamma + \delta = \pi$ である. よって,

$$\cos\alpha = -\cos(\gamma + \delta)$$

(2) $-e(1 \leqq e)$, つまり放物線, 双曲線のとき.

$\theta = \pi$ を代入して

$$\mathrm{FB} = \frac{l}{e - \cos\alpha}$$

このとき $\alpha = \gamma + \delta$ である. よって,

$$\cos\alpha = \cos(\gamma + \delta)$$

よっていずれの場合も

$$\mathrm{FP} = \frac{l}{1 - e\cos(\gamma+\delta)},\ \mathrm{FB} = \frac{l}{e - \cos(\gamma+\delta)}$$

正弦定理より

$$\frac{\mathrm{FB}}{\sin\gamma} = \frac{\mathrm{FP}}{\sin\delta}$$

これから

$$\sin\gamma\,\{e - \cos(\gamma+\delta)\} = \sin\delta\,\{1 - e\cos(\gamma+\delta)\}$$

$$e\,\{\sin\gamma + \sin\delta\cos(\gamma+\delta)\} = \sin\delta + \sin\gamma\cos(\gamma+\delta)$$

$$e\cos\delta\sin(\delta+\gamma) = \cos\gamma\sin(\delta+\gamma)$$

$$\therefore \quad e = \frac{\cos\gamma}{\cos\delta}$$

□

南海　放物線の場合は，$e = 1$ なので

$$\cos\gamma = \cos\delta$$

となる．

3.12.8　包絡線としての円錐曲線

南海　楕円と双曲線を円と直線から構成するもう一つの方法がある．それが，包絡線による方法だ．

xy 平面上の円 C を

$$x^2 + y^2 = a^2$$

で定める．また，x 軸上の点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ がある．図形は y 軸で対称なので c は正とする．さらに $c \neq a$ とする．点 F から円 C に直線 FP を引き，その交点 P をとおり直線 FP と直交する直線を l_{P} とする．P が円 C 上を動くとき，直線 l_{P} の通過する領域を求めてみよう．

耕一　点 P を $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とします．

$$\overrightarrow{\mathrm{FP}} = (a\cos\theta - c,\ a\sin\theta)$$

です．直線 l_{P} は点 P を通り，法線ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{FP}}$ の直線ですから，その方程式は

$$(a\cos\theta - c)(x - a\cos\theta) + a\sin\theta(y - a\sin\theta) = 0$$

つまり直線 l_{P} の方程式は

$$(a\cos\theta - c)x + (a\sin\theta)y = a^2 - ac\cos\theta \tag{3.36}$$

となります．

角 θ がすべての値をとるとき，点 $(x,\ y)$ が直線 l_{P} の通過する領域に存在することと，方程式 (3.36) をみたす θ が存在することが同値です．方程式 (3.36) を θ で整理すると

$$a(x+c)\cos\theta + ay\sin\theta = a^2 + cx$$

これを合成すると

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,\sin(\theta+\alpha) = a^2 + cx$$

となります．これをみたす θ が存在する必要十分条件は

$$\left|\frac{a^2 + cx}{a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}\right| \leqq 1$$

つまり

$$(a^2+cx)^2 \leqq a^2\{(x+c)^2+y^2\}$$

これを整理して

$$a^2(a^2-c^2) \leqq (a^2-c^2)x^2+a^2y^2$$

です.

$a^2-c^2>0$ つまり点 F が円 C の内部にあれば

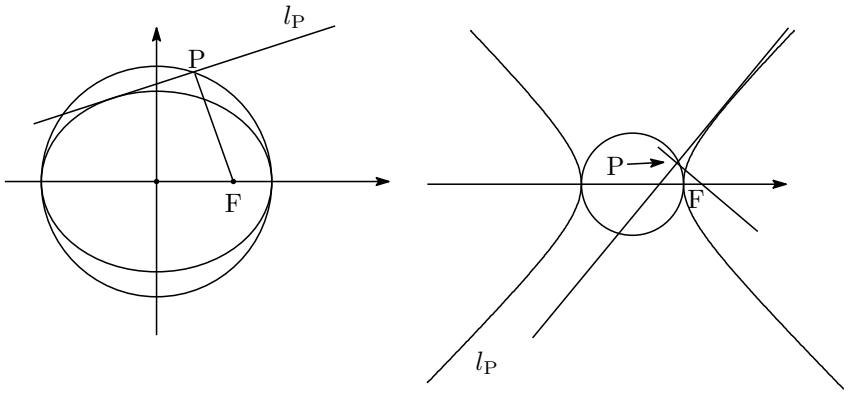
$$1 \leqq \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}$$

より楕円の外部.

$a^2-c^2<0$ つまり点 F が円 C の外部にあれば

$$1 \geqq \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}$$

より双曲線の原点のある側です. その境界を図示します.



南海　この通過領域の境界がいわゆる直線 l_{P} の**包絡線**だ.

包絡線は，方程式 (3.36) を θ で微分した式と式 (3.36) を連立させて求めることもできる.

3.13　パスカルの定理

＞ 2000.8

3.13.1　無限遠点，射影直線，射影平面

秀樹　軌跡の問題でまた除外点を見落とした．

拓生　どんな問題ですか．

秀樹　いちばんはっきりしている例でいうと，t が実数全体を動くとき，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

で定まる点の軌跡を求める問題です．点 $x^2+y^2=1$ を満たすことはいろんなやり方でわかりますが，$(-1,\ 0)$ だけにはなれず，円からこの点を除外しなければならないのです．x 座標は $x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ と変形できるから，確かに $x=-1$ にはなり得ないのだけれど何かわざとらしい変形で，よく見落とします．

南海　除外点とはどんな点なんだろう．

秀樹　どんな点といわれても除外されて無い点なんですが．

拓生　でも $(-1,\ 0)$って次のように $t\to\infty$ のときの極限です．

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-t^2}{1+t^2} = \lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{1}{t^2}-1}{\dfrac{1}{t^2}+1} = -1$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{1+t^2} = \lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{2}{t}}{\dfrac{1}{t^2}+1} = 0$$

だからこの除外点は t が無限になるときです．

秀樹　無限の点なんてあるのかなあ．

南海　たとえば中学生に「二乗して負になる数は」と聞いたら「あるはずない」というだろうけれど，複素数を習えばちゃんとあるわけだから，この場合も何かある可能性がある．

拓生　複素数のときは $i^2=-1$ とはじめは無理に作ったようですが，実際は複素数の方が自然で広い世界だった…．この場合も無限遠点を作ってしまえばいい．t が実数 全体と無限遠点を動くとき，軌跡は円全体になる…．

秀樹　作るといってもそんな勝手にできるのだろうか．

南海　少なくとも数学的に式でとらえることができて，これまでの実数と一体になったものでなければならない．結局は，計算できるものとしてとらえることができたとき，現実にそれは存在するといえる．

拓生　どうするのでしょうか．

南海　それのヒントになることは，実はすでに君たちはよく知っているのだよ．あるやり方では「無限」の場合がとらえられないが，あるやり方では「無限」の場合を含めて統一的にやれることがあっただろう．

秀樹　直線を $y=mx+n$ と表せば，y 軸に平行な $x=k$ の型の直線は傾きが無限のときになり，別に扱わなければならないが，直線を $ax+by+c=0$ と表せば，y 軸に平行な場合を含めて一つの式で表せる．

拓生　直線を $ax+by+c=0$ と三つの数の組 $(a,\ b,\ c)$ (ただし $(a,\ b,\ c)\neq(0,\ 0,\ 0)$) で表すと，

(1) $b\neq 0$ のときは $y=mx+n$ 型の直線を表し，$b=0$ のときは $x=k$ の型の直線を表す．

(2) $a:b:c=a':b':c'$ なら $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$ は同じ直線を表す．

ということですね．

南海　そう．

拓生　無限遠点をとらえるためには，$(0,\ 0)$ でない数の組 $(t_0,\ t_1)$ を考える．$t_0:t_1=x_0':x_1'$ なら $(t_0,\ t_1)$ と $(x_0',\ x_1')$ は同じ点を表すとする．すると，$t_0\neq 0$ なら $(t_0,\ t_1)$ と $(1,\ \dfrac{t_1}{t_0})$ は同じ点だから，$t_0\neq 0$ である全体は $t=\dfrac{t_1}{t_0}$ と対応させれば実数全体と一致する．$t_0=0$ の点は結局 $(0,\ 1)$ で定まる 1 点で，これが無限遠点です．

秀樹　軌跡の式とうまくあうかな．$t=\dfrac{t_1}{t_0}$ を代入して分母を整理すると，

$$\mathrm{P}\left(\frac{{t_0}^2-{t_1}^2}{{t_0}^2+{t_1}^2},\ \frac{2t_0t_1}{{t_0}^2+{t_1}^2}\right)$$

となります．確かにこれは比が同じなら同じものを表している．そして $t_0=0$ のときは $(-1,\ 0)$ になる ！

南海　このやり方で実数全体と無限遠点をあわせたものを「**射影直線**」という．

秀樹　媒介変数 $(t_0,\ t_1)$ が射影直線の全体を動くとき，軌跡が円全体になるのか．この方がずっとすっきりする．

拓生　でも直線上の点が二つの数の組 $(t_0,\ t_1)$ で表されるのなら，平面上の点 P も三つの数の組

$$\mathrm{P}\left({t_0}^2+{t_1}^2,\ {t_0}^2-{t_1}^2,\ 2t_0t_1\right)$$

と考えた方が…．そうかこれが「**射影平面**」ですね，つまり $(0,\ 0,\ 0)$ でない数の組 $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ を考える．$x_0:x_1:x_2=x_0':x_1':x_2'$ なら $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ と $(x_0',\ x_1',\ x_2')$ は同じ点を表すとする．すると，$x_0\neq 0$ なら $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ と $\left(1,\ \dfrac{x_1}{x_0},\ \dfrac{x_2}{x_0}\right)$ は同じ点だから，$x_0\neq 0$ である全体は普通の平面になる．$x_0=0$ のときは $(0,\ x_1,\ x_2)$ になる …，これは何だ，あっ，そうか射影直線になる．

この場合は無限遠直線ということですね．

秀樹　どのみち ${t_0}^2+{t_1}^2\neq 0$ だから同じことだと思うけど．

拓生　この場合はね．

秀樹　平行な二直線は無限遠点で交わるということになるのでしょうか．

拓生　やってみましょう．平行な二直線を

$$ax+by+c=0,\ ax+by+d=0\,(c\neq d)$$

とする．射影平面の座標を $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ とする．$x_0\neq 0$ のときは $\left(1,\ \dfrac{x_1}{x_0},\ \dfrac{x_2}{x_0}\right)$ でこれが今までの平面になる．だから，直線の式を射影平面の式にするために，$x=\dfrac{x_1}{x_0},\ y=\dfrac{x_2}{x_0}$ を代入して分母を払うと，

$$ax_1+bx_2+cx_0=0,\ ax_1+bx_2+dx_0=0$$

になる．ここで，$x_0 = 0$ とすると，$ax_1 + bx_2 = 0$．これは $x_1 : x_2 = -b : a$ ということだからこの二直線は $(0,\ -b,\ a)$ という無限遠点で交わるのです！

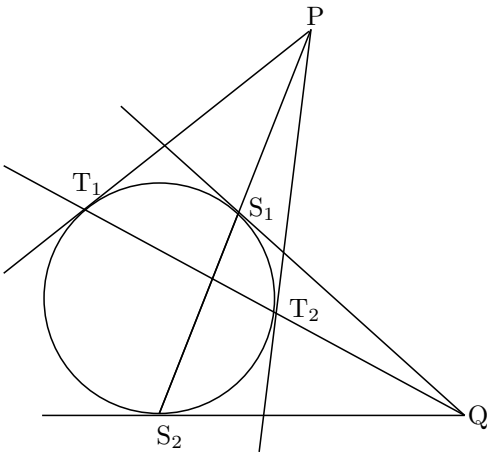
南海　話はつきないようであったが，射影平面が定義されたので，とりあえずもう一つの話をしなければならない．

3.13.2　二次曲線の接線

秀樹　円の接線についてのおもしろい性質が演習で出てきたがどうもふにおちない．

拓生　どういうこと．

秀樹　図と問題を見て下さい．



例題 3.13.1 P から二本の接線を引く．接点を $T_1,\ T_2$ とする．直線 T_1T_2 上の任意の点 Q をとる．Q から二本の接線を引く．接点を $S_1,\ S_2$ とする．すると P は再び直線 S_1S_2 の上にある．

証明
円の方程式を $x^2 + y^2 = 1$ として一般性を失わない．P と Q の座標を $(p_1,\ p_2),\ (q_1,\ q_2)$ とする．

(1) 直線 T_1T_2 の方程式を求める．接点の座標をそれぞれ，$(t_1,\ u_1),\ (t_2,\ u_2)$ とする．接線の方程式は

$$\begin{aligned} t_1x + u_1y &= 1 \\ t_2x + u_2y &= 1 \end{aligned}$$

これらが P を通るので，

$$\begin{aligned} t_1p_1 + u_1p_2 &= 1 \\ t_2p_1 + u_2p_2 &= 1 \end{aligned}$$

である．ところがこれは，直線 $p_1x + p_2y = 1$ が $T_1,\ T_2$ を通ることを示している．つまり直線 T_1T_2 の方程式は $p_1x + p_2y = 1$ である．

(2) 同様に直線 S_1S_2 の式は $q_1x + q_2y = 1$ である．

Q が直線 T_1T_2 の上にあるので，$p_1q_1 + p_2q_2 = 1$ である．ところがこの式は P が $q_1x + q_2y = 1$ の上にあることを示している．　□

拓生　何がふにおちないのですか．

秀樹　(1) でも (2) でも係数と変数の位置が入れ替わっています．たまたまうまくいっただけではないのか，と思うのです．

拓生　だ円や双曲線，放物線の接線の式は？

秀樹　だ円，双曲線，放物線

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y^2 = 4px$$

の上の点 (x_1, y_1) での接線は，

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,\ \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1,\ y_1y=2p(x_1+x)$$

です．

拓生　これらの式は，$(x_1,\ y_1),\ (x,\ y)$ に関して対称です．

秀樹　そうか，たまたまではなく，二次曲線の性質なのか．

拓生　二次曲線は一般には

$$ax^2+2hxy+by^2+2lx+2my+c=0$$

という形をしている．このときの接線の式は…．

秀樹　数 III の微分で習ったことを用いて計算する．

まず $ax^2+2hxy+by^2+2lx+2my+c=0$ の両辺を x で微分すると

$$2ax+2hy+2hx\frac{dy}{dx}+2by\frac{dy}{dx}+2l+2m\frac{dy}{dx}=0$$

つまり，$(hx+by+m)\dfrac{dy}{dx}=-(ax+hy+l)$．したがって, 点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(hx_1+by_1+m)(y-y_1)=-(ax_1+hy_1+l)(x-x_1)$$

これは $hx_1+by_1+m=0$ のときも成立する．ここで，$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2lx_1+2my_1+c=0$ を用いて整理すると，

$$axx_1+h(yx_1+xy_1)+byy_1+l(x_1+x)+m(y_1+y)+c=0$$

になる．ああ，やはり対称だ．すると，先の円についての演習問題【 P から二本の接線を引く．接点を $T_1,\ T_2$ とする．直線 T_1T_2 上の任意の点 Q をとる． Q から二本の接線を引く．接点を $S_1,\ S_2$ とする．すると P は再び直線 S_1S_2 の上にある 】 は任意の二次曲線で成り立つのか！

拓生　でも二次曲線を一般的に考えると，二本の接線が平行になることもある．そのときも射影平面で考えると無限遠点で交点はある！

3.13.3　パスカルの定理

南海　一般化するためには，射影平面で考える方が自然なのだ．今までの議論を射影平面の二次曲線として統合しよう．$(x_0,\ x_1,\ x_2)$ を射影座標とする．このとき，

$$C:ax_1{}^2+bx_2{}^2+cx_0{}^2+2hx_1x_2+2lx_1x_0+2mx_2x_0=0$$

で定まる射影平面上の点の集合を考える．

もちろん，普通の平面の場合と同様，これが因数分解されて二つの直線などになる場合もある．どのようなときにだ円になったりするのかという**二次曲線の分類**は『数学対話』「三角形に辺の中点で内接する楕円 (シュタイナー楕円)」を参考にしてもらいたい．

さて，この式が何かの二次曲線を表しているとする．曲線上の点 $T(t_0,\ t_1,\ t_2)$ に対して

$$l:at_1x_1+bt_2x_2+ct_0x_0+h(t_2x_1+t_1x_2)+l(t_0x_1+t_1x_0)+m(t_0x_2+t_2x_0)=0$$

を，曲線 C の T での接線，という．

拓生　いちいち $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ で書くのは大変ですね．

南海　拓生さんの言うように大変だ．何とか簡単にしたいというのは大切なことだ．そこで，$X = (x_0,\ x_1,\ x_2)$ とし，C の式を $f(X) = 0$ と書こう．また接線の式を $L(X,\ T) = 0$ とおこう．

拓生　ずいぶん簡単ですね．すると接線の対称性は

$$L(X,\ T) = L(T,\ X)$$

となるのですね．

秀樹　先の問題の証明は次のようになるのですね．

(1) 接点の座標をそれぞれ，$T_1,\ T_2$ とする．接線の方程式は

$$L(T_1,\ X) = 0,\ \ L(T_2,\ X) = 0$$

になる．これらが P を通るので，

$$L(T_1, P) = 0,\ \ L(T_2, P) = 0$$

である．ところがこれは，直線 $L(X, P) = 0$ が $T_1,\ T_2$ を通ることを示している．つまり T_1T_2 の方程式は

$$L(X, P) = 0$$

である．

(2) 同様に直線 S_1S_2 の式は

$$L(X, Q) = 0$$

である． Q が直線 T_1T_2 の上にあるので，$L(Q, P) = 0$ である．ところがこの式は P が

$$L(Q,\ X) = 0$$

の上にあることを示している．

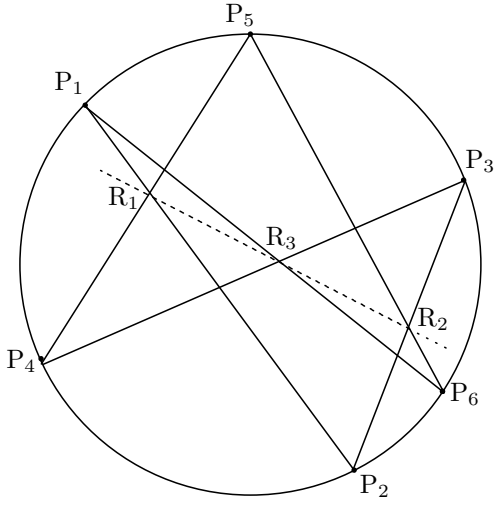
これが一般の二次曲線についての証明です．

南海　点 P のことを**極**，直線 $L(X, P) = 0$ のことを**極線**といいます．

秀樹　でもこれだけだと何かたいそうなだけですね．ここから導かれる性質があれば教えて下さい．

南海　パスカルの定理を証明してみよう．

拓生　パスカルの定理って聞いたことがあります．



円上の 6 点を定め番号を打つ．各点から，一つ手前とひとつ後の番号の点を結ぶ．

$$1 \bigcirc 2 \triangle 3 \diamondsuit 4 \bigcirc 5 \triangle 6 \diamondsuit 1$$

のように同じ記号のところの直線の交点をとる．この 3 交点は同一直線上にある．

南海　そう，これがパスカルの定理だ．点の番号の付け方は任意だ．この図は 3 交点が円の中に来る場合だ．この証明は，パスカルが 16 歳のときに発見したもので大変美しい定理だ．そしてその後の射影幾何学の始まりとなるものだ．ぜひ証明を考えてほしい．

これは一般の二次曲線で成立する．

その準備として，次の補題を確認する．

補題 17

$$f(X) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_0^2 + 2hx_1x_2 + 2lx_1x_0 + 2mx_2x_0$$

とし，$f(X) = 0$ で二次曲線 C が定まっているとする．

二次曲線 $f(X) = 0$ 上の点 P での接線 l を $L(\mathrm{P},\ X) = 0$ とおく．

(1)

$$\begin{aligned} & L(\mathrm{P},\ X) \\ = \quad & ap_1x_1 + bp_2x_2 + cp_0x_0 + h(p_2x_1 + p_1x_2) + l(p_0x_1 + p_1x_0) + m(p_0x_2 + p_2x_0) \end{aligned}$$

である．

(2) 式の形より

(i) $L(\mathrm{P},\ X) = L(X, \mathrm{P})$

(ii) $L(\mathrm{P}, \alpha X + \beta Y) = \alpha L(\mathrm{P},\ X) + \beta L(\mathrm{P}, Y)$

が成り立つ．

(3) さらに，どの三つも同一直線上に無い 5 点が与えられれば，この 5 点を通る二次曲線がただ一つ定まる．

(1)(2) は済んでいる．(3) は $f(X) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_0^2 + 2hx_1x_2 + 2lx_1x_0 + 2mx_2x_0$ と係数が 5 個あり，同一直線上にない 5 点が $f(X) = 0$ を満たせば係数の比が確定することからわかる．厳密な論述は連立一次方程式と行列論が必要である．

なお、パスカルの定理については『パップスの定理』の最後にもう一度示す．そこでは，２次曲線の接線を微分を使わずに示している．

パップスの定理は，パスカルの定理の特別な場合になる．

定理 86 (パスカルの定理)　二次曲線 $C : f(X) = 0$ 上に異なる 6 点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4,\ \mathrm{P}_5,\ \mathrm{P}_6$ を取る．

(1) 直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ と直線 $\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の交点を R_1，直線 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ と直線 $\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6$ の交点を R_2，直線 $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ と直線 $\mathrm{P}_6\mathrm{P}_1$ の交点を R_3 とする．$\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3$ は同一直線上にある．

(2) P_i での接線 $L(\mathrm{P}_i,\ X)=0$ と P_j での接線 $L(\mathrm{P}_j,\ X)=0$ の交点を Q_{ij} とおく．このとき，直線 $\mathrm{Q}_{12}\mathrm{Q}_{45}$ ，直線 $\mathrm{Q}_{23}\mathrm{Q}_{56}$ ，直線 $\mathrm{Q}_{34}\mathrm{Q}_{61}$ は 1 点で交わる．

証明

(1) 直線 $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j$ の式が

$$L(\mathrm{Q}_{ij},\ X)=0$$

である．そこで，二次曲線

$$C' : L(\mathrm{Q}_{12},\ X)L(\mathrm{Q}_{34},\ X)-\alpha L(\mathrm{Q}_{23},\ X)L(\mathrm{Q}_{14},\ X)=0$$

を考える．これは $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4,$ を通る．ここで，

$$\alpha=\frac{L(\mathrm{Q}_{12},\mathrm{P}_5)L(\mathrm{Q}_{34},\mathrm{P}_5)}{L(\mathrm{Q}_{23},\mathrm{P}_5)L(\mathrm{Q}_{14},\mathrm{P}_5)}$$

とおく． α をこのようにとると C' は P_5 も通る．従って， C' は C と一致する．

同様に二次曲線

$$C'' : L(\mathrm{Q}_{45},\ X)L(\mathrm{Q}_{16},\ X)-\alpha L(\mathrm{Q}_{56},\ X)L(\mathrm{Q}_{14},\ X)=0$$

を考える．これは $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_4,\ \mathrm{P}_5,\ \mathrm{P}_6,$ を通る．ここで，

$$\beta=\frac{L(\mathrm{Q}_{45},\mathrm{P}_2)L(\mathrm{Q}_{16},\mathrm{P}_2)}{L(\mathrm{Q}_{56},\mathrm{P}_2)L(\mathrm{Q}_{14},\mathrm{P}_2)}$$

とおく． β をこのようにとると C'' は P_2 も通る．従って， C'' は C と一致する．

二つの二次曲線の式は定数倍を除いて一致する．

$$\begin{aligned} & L(\mathrm{Q}_{12},\ X)L(\mathrm{Q}_{34},\ X)-\alpha L(\mathrm{Q}_{23},\ X)L(\mathrm{Q}_{14},\ X) \\ = \quad & k\{L(\mathrm{Q}_{45},\ X)L(\mathrm{Q}_{16},\ X)-\beta L(\mathrm{Q}_{56},\ X)L(\mathrm{Q}_{14},\ X)\} \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} & L(\mathrm{Q}_{12},\ X)L(\mathrm{Q}_{34},\ X)-kL(\mathrm{Q}_{45},\ X)L(\mathrm{Q}_{16},\ X) \\ = \quad & L(\mathrm{Q}_{14},\ X)\{\alpha L(\mathrm{Q}_{23},\ X)-k\beta L(\mathrm{Q}_{56},\ X)\} \end{aligned}$$

この両辺の二次式を考える．

左辺に $\mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_3$ を代入すると 0 になるので，右辺も満たす．そして $\mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_3$ は $L(\mathrm{Q}_{14},\ X)=0$ 上にはない．よって，

$$\alpha L(\mathrm{Q}_{23},\ X)-k\beta L(\mathrm{Q}_{56},\ X)=0$$

の上にある． R_2 は明らかにこの式を満たす．

ここで，$\mathrm{M}=\alpha\mathrm{Q}_{23}-k\beta\mathrm{Q}_{56}$ と置くとこの式は

$$\begin{aligned} \alpha L(\mathrm{Q}_{23},\ X)-k\beta L(\mathrm{Q}_{56},\ X) &= L(\alpha\mathrm{Q}_{23}-k\beta\mathrm{Q}_{56},\ X) \\ &= L(\mathrm{M},\ X) \end{aligned}$$

と表される．つまり $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3$ はすべて $L(\mathrm{M},\ X)=0$ の上にある．

(2) 極線 $\mathrm{P_1P_2}$ の極が $\mathrm{Q_{12}}$ であり，$\mathrm{R_1}$ は極線 $\mathrm{P_1P_2}$ 上の点である．よって，点 $\mathrm{Q_{12}}$ は直線 $L(\mathrm{R_1},\ X)=0$ 上にある．同様に点 $\mathrm{Q_{45}}$ も直線 $L(\mathrm{R_1},\ X)=0$ 上にある．

つまり，直線 $L(\mathrm{R_1},\ X)=0$ は直線 $\mathrm{Q_{12}Q_{45}}$ と一致する．

同様に，直線 $L(\mathrm{R_2},\ X)=0$ は直線 $\mathrm{Q_{23}Q_{56}}$ と一致し，直線 $L(\mathrm{R_3},\ X)=0$ は直線 $\mathrm{Q_{34}Q_{61}}$ と一致する．

(1) より

$$L(\mathrm{M},\mathrm{R_1})=0,\ L(\mathrm{M},\mathrm{R_2})=0,\ L(\mathrm{M},\mathrm{R_3})=0$$

である．ところがこれは，3 直線

$$L(\mathrm{R_1},\ X)=0,\ L(\mathrm{R_2},\ X)=0,\ L(\mathrm{R_3},\ X)=0$$

が一点 M で交わることを示している． □

3.13.4 特別な場合の演習問題

この定理を理解するために 6 点を二つずつ接近させて重ねた場合を，高校範囲で解こう．
最初の問題はすでに計算を済ませているが，学校での演習用にここで再掲する．

演習 62 解答 63
$\mathrm{X}=(x,\ y)$ に対し $x,\ y$ の二変数の多項式を $f(\mathrm{X})$ のように表す．

$$f(\mathrm{X})=ax^2+2hxy+by^2+2lx+2my+c$$

を実数係数の二次式とする．$f(\mathrm{X})=0$ で二次曲線 C が定まっているとする．

(1) C 上の点 $\mathrm{X_0}=(x_0,\ y_0)$ での C の接線の方程式のうち，x の係数が ax_0+hy_0+l となるものを

$$L(\mathrm{X},\ \mathrm{X_0})=0$$

とする．$L(\mathrm{X},\ \mathrm{X_0})$ を求め

$$L(\mathrm{X},\ \mathrm{X_0})=L(\mathrm{X_0},\ \mathrm{X})$$

を示せ．

(2) 曲線の外の点 $\mathrm{P}\ (p,\ q)$ から曲線に 2 本の接線が引けるとする．このとき，2 接点を結ぶ直線 l は，

$$l:L(X,P)=0$$

と書けることを示せ．

(3) l 上の点 Q からも曲線に 2 本の接線が引けるとする．このとき，2 接点を結ぶ直線 m は P を通ることを示せ．

演習 63 解答 64
前問を前提に次の問いに答えよ．

(1) 一般に平行でない 2 つの直線 $F(\mathrm{X}) = 0$ と $G(\mathrm{X}) = 0$ に対し，この 2 直線の交点とこれらの直線上にない他の点 X_0 を通る直線は

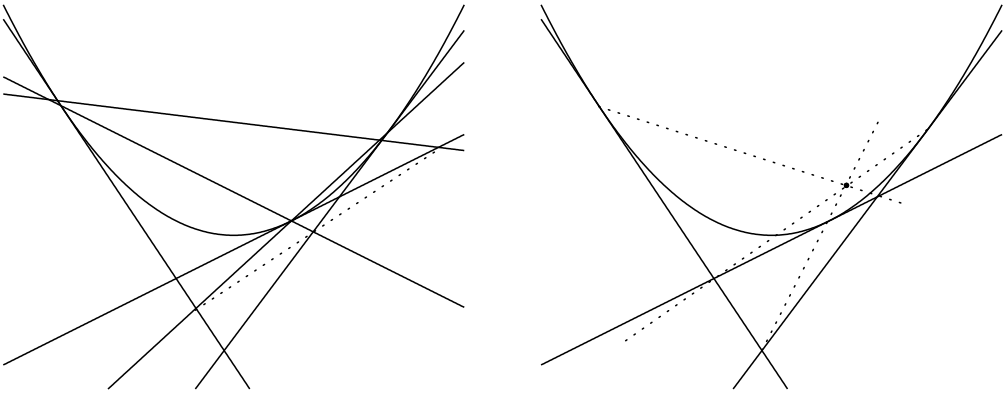
$$G(\mathrm{X}_0)F(\mathrm{X}) - F(\mathrm{X}_0)G(\mathrm{X}) = 0$$

と表されることを示せ．

(2) A，B，C を $f(\mathrm{X}) = 0$ の上の 3 点とする．点 A，B，C での $f(\mathrm{X}) = 0$ の接線を L_{A}，L_{B}，L_{C} とし，それらが互いに交点をもつとき，L_{A} と L_{B} の交点を P_{AB}，L_{B} L_{C} の交点を P_{BC}，L_{C} と L_{A} の交点を P_{CA} とする．

3 直線 $\mathrm{P}_{\mathrm{AB}}\mathrm{C}$，$\mathrm{P}_{\mathrm{BC}}\mathrm{A}$，$\mathrm{P}_{\mathrm{CA}}\mathrm{B}$ が互いに交わるならば，これらは 1 点で交わることを示せ．

(3) さらに，L_{A} と直線 BC，L_{B} と直線 CA，L_{C} と直線 AB がそれぞれ交わるならば，これらの 3 点は一直線上にあることを示せ．



3.14　パップスの定理

2006.12.6

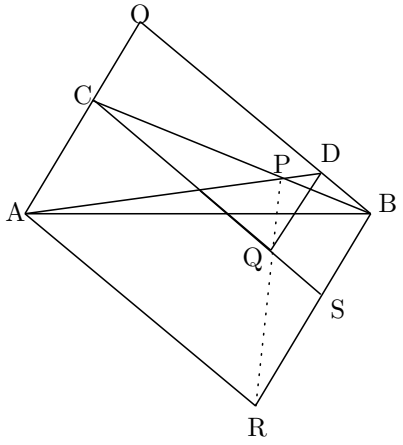
3.14.1　ある図形問題の解法

伍郎　最近，次の問題をしました．私の解答をあわせて，書きます．

例題 3.14.1 △OAB の辺 OA, OB 上にそれぞれ点 C, D をとり AD と BC の交点を P とする．また，2 点 Q, R を四角形 OCQD，四角形 OARB がそれぞれ平行四辺形となるようにとる．このとき，3 点 P, Q, R は一直線上にあることを示せ．

解答

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = l\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \ (0 < k,\ l < 1)$$



とおく．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\cdot\frac{1}{l}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

点 P が AD 上にあるので

$$\alpha + \frac{\beta}{l} = 1$$

同様に

$$\frac{\alpha}{k} + \beta = 1$$

これから

$$\alpha = \frac{k-kl}{1-kl},\ \beta = \frac{l-kl}{1-kl}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{1-kl}\left\{(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-l)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}\\ \overrightarrow{\mathrm{QR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-l)\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1-kl)\overrightarrow{\mathrm{PR}}\end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ が平行となり，3 点 P, Q, R は一直線上にある．　□

これはベクトルの威力がわかる証明です．

質問は 2 点あって，

(1) 図形的な証明はどのようにすればよいのか.

(2) どのような一般化があるのか.

ということです.

南海　うん，このようなことを考えるのは大変いいことだ.

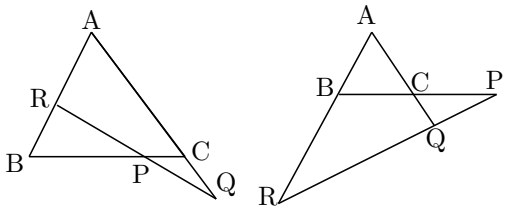
まず図形的な証明だが．メネラウスの定理を使えばできる.

念のためにメネラウスの定理を示しておこう.

定理 87 (メネラウスの定理) △ABC の頂点 A, B, C に対し，点 A, C の対辺上に 2 点 P, R と点 B 対辺の延長線上に 1 点 Q をとるか，またはそれぞれの対辺の延長線上に 3 点 P, Q, R をとる．いずれの場合も，

(1) 3 点 P, Q, R が一直線上にあれば $\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=1$ となる.

(2) $\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=1$ なら 3 点 P, Q, R は一直線上にある.



(1) を**メネラウスの定理**といい，(2) を**メネラウスの定理の逆**という．要するに条件

$$\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}\cdot\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=1$$

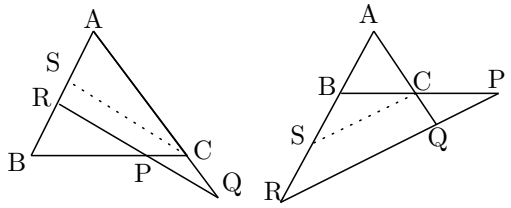
と 3 点が 1 直線上にあることが同値であるということである.

証明

(1) 点 C から $\mathrm{B_1A_2}$ に平行な直線 CS を引く.

$$\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{BR}},\ \frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=\frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{SR}}$$

となる.



$$\therefore\quad \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}\cdot\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{SR}}\cdot\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=1$$

(2) 直線 $\mathrm{B_1A_2}$ と直線 BC の交点を $\mathrm{P'}$ とする．このとき

$$\frac{\mathrm{P'C}}{\mathrm{BP'}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}\cdot\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=1$$

となる．一方，$\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=1$ なので

$$\frac{\mathrm{P'C}}{\mathrm{BP'}}=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}$$

となり，$\mathrm{P'}=\mathrm{P}$ である．つまり，3 点 P, Q, R は一直線上にあることが示された.　□

南海　これを用いて先の演習問題の図形的な証明を考えよう.

CQ と BR の交点を S とおこう．これを先の図に書き込む.

方針は，△CBS と，辺または辺の延長上の 3 点 P, Q, R に関して，メネラウスの定理の逆を用いて，この 3 点が一直線上にあることをいいたい.

伍郎　そのためには，

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{SQ}}=1 \quad \cdots ①$$

がいえればよい．

南海　△OCB と直線 AD に関してメネラウスの定理を用いると何が得られるか．

伍郎

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}=1 \quad \cdots ②$$

です．あっ，OB と CS は平行，OA と $\mathrm{C_1A_2}$ も平行だから

$$\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{SQ}},\ \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{BR}}$$

これを ② に代入すれば ① そのものだ．　□

わかりました．意外に簡単なのですね．

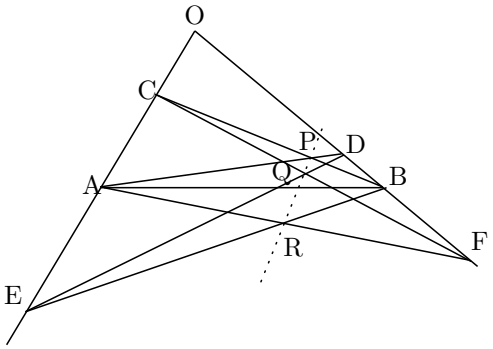
3.14.2　パップスの定理

南海　では，この問題からいろいろ一般化したりして，考えを広げてみよう．

伍郎　まず次のように考えました．平行ということは,『パスカルの定理』で学びましたが，射影幾何的には無限遠で交わるということです．

無限遠はその意味では特別な点です．これを一般の点にするとどうなるかと考えました．．つまり，CQ や DQ，AR や BR を辺と平行にとるのは，特殊な場合のように見えるので，平行でない引き方をしました．

南海　なるほど．それは後で示すが，必ずしも一般化したことにはならないのだが，やってみることは大切だ．



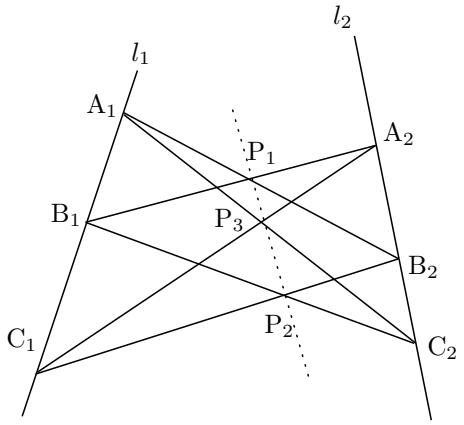
伍郎　図のように，D を通る直線と OA の交点を E，C を通る直線と OB の交点を F とし，CF と DE の交点を Q，AF と BE の交点を R とする．
正確に図をかくとやはりこの場合も 3 点 P，Q，R は一直線上にありました．
これも先の証明と同様にできそうです．

南海　その証明は，あとでやってみよう．

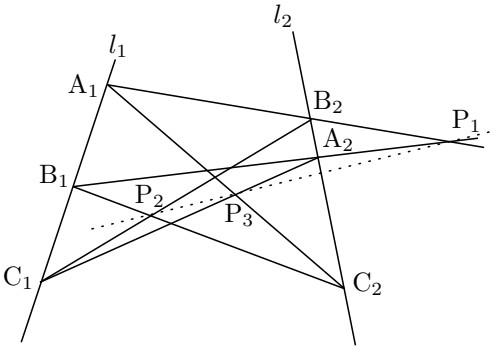
さて，これをもう一度定理としてまとめよう．これは，**パップスの定理**といわれるものだ．

定理 88 (パップスの定理)

$i = 1,\ 2$ とする．平面上に 2 直線 l_i がある．l_i 上に点 $\mathrm{A}_i,\ \mathrm{B}_i,\ \mathrm{C}_i$ がこの順に並んでいる．
直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ と直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1$ の交点を P_1，直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3$ と直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2$ の交点を P_2，直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1$ と直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3$ の交点を P_3 とする．
このとき 3 点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$ は一直線上にある．



南海　パップスの定理は点の順番も関係ない．
伍郎　試してみます．確かに一直線上にあります．
南海　点を同じ順にとった方が，平行で交わらない場合がないことと，3 点の乗っている直線が $l_1,\ l_2$ の間に来る方がが場所をとらないので，それを用いるが，以下の論証はすべて，他の順の場合も成り立つ．
もちろんユークリッド平面で考えるときは交点がなければならないが．パップスの定理は，長さや大きさといった量に関する内容は全くなく，ただ点と直線の相互関係のみに関する定理であることをおさえよう．



南海　パップス (Pappus:320 年頃) はアレキサンドリアの人だ．
伍郎　確かユークリッドもアレキサンドリアの人．
南海　いちどブログに書いたことがあるが，ユークリッドはアレキサンドリア初期の人，かのアレクサンドロス大王の同時代人だ．

> アレキサンダー大王は，紀元前 356 年 7 月?〜紀元前 323 年 6 月 10 日，在位前 336 年〜前 323 年）の人です．ユークリッド (エウクレイデス) は 紀元前 365 年?〜紀元前 275 年?なので，ユークリッドの方が先に生まれて長生きしたのです．ユークリッドは，エジプトのアレクサンドリアの人です．アレクサンドリアは紀元前 332 年に建設されたまし．アレクサンドロス (アレキサンダー大王) の死後は，その部下だったプトレマイオス 1 世がエジプトを支配し，アレクサンドリアは古代エジプト最後の王朝であるプトレマイオス朝の都として発展したのです．ユークリッドが活動したのはその時代なので，文化的にはユークリッドの方が後に活躍したのです．

パップスは，ユークリッドから 600 年以上後の人だ．ちなみに，メネラウスもアレクサンドリア出身の紀元前 1 世紀の人である．ちょうどユークリッドとパップスの間にいる人だ．パップスの頃，アレキサンドリアの数学はずいぶん衰退していたらしい．パップスはメネラウスら前世代の数学を復興させようと，当時散逸しつつあった文献を集め，注釈を加え,『数学集成』8 巻を残した．

3.14.3　パップスの定理のユークリッド平面上での座標的証明

南海　パップスの定理をいろんな観点から証明しよう．

伍郎　いろんな観点というと，ベクトル，座標，図形の論証，などですか．

南海　これは実は前に考えた「パスカルの定理」からの帰結でもある．これも紹介しよう．

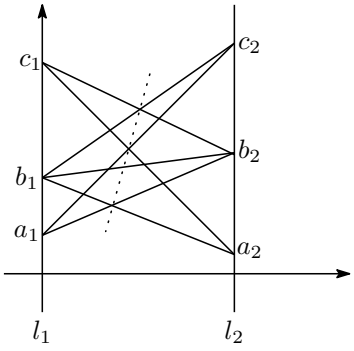
まず，普通にユークリッド平面，つまり高校生が毎日見ている xy 平面などで，考えていこう．

ベクトルでやるのと，座標でやるのは本質的には同じことだ．ただ，ユークリッド平面で考える以上，$l_1,\ _2$ が平行な場合は別に考えなければならない．

$l_1,\ _2$ が平行な場合，座標ではどのようになるか．

伍郎　図のように xy 平面においてよい．相似な拡大や縮小をしても一般性は失われないので，$l_1,\ _2$ の間の距離は 1 とする．
l_i 上に点 $\mathrm{A}_i,\ \mathrm{B}_i,\ \mathrm{C}_i$ の座標を，

$$\mathrm{A}_1(0,\ a_1),\ \mathrm{B}_1(0,\ b_1),\ \mathrm{C}_1(0,\ c_1)$$
$$0 < a_1 < b_1 < c_1$$
$$\mathrm{A}_2(1,\ a_2),\ \mathrm{B}_1(1,\ b_2),\ \mathrm{C}_2(1,\ c_2)$$
$$0 < a_2 < b_2 < c_2$$



とする．直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ と直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1$ の交点を P_1，直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3$ と直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2$ の交点を P_2，直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1$ と直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3$ の交点を P_3 とする．
このとき 3 点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$ は一直線上にある．

そこで，$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$，$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1$ の交点 P_1 を $(X,\ Y)$ とおく．$\mathrm{A}_1,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{B}_2$，$\mathrm{A}_2,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{B}_1$ がともに一直線上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{P}_1} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2}$ である．平行条件を成分で書いて

$$(b_2 - a_1)X = Y - a_1$$
$$(a_2 - b_1)X = Y - b_1$$

を得る．これから

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2 + b_1 - a_1},\ \frac{b_1b_2 - a_1a_2}{b_2 - a_2 + b_1 - a_1}\right)$$

同様に

$$\mathrm{P}_2\left(\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2 + c_1 - b_1},\ \frac{c_1c_2 - b_1b_2}{c_2 - b_2 + c_1 - b_1}\right)$$
$$\mathrm{P}_3\left(\frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2 + a_1 - c_1},\ \frac{a_1a_2 - c_1c_2}{a_2 - c_2 + a_1 - c_1}\right)$$

である．

伍郎　これを計算するのですか．

南海　もうひとがんばり

伍郎　したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \;=\; & \frac{1}{(b_2 - a_2 + b_1 - a_1)(c_2 - b_2 + c_1 - b_1)} \\ & \times\Big((c_1 - b_1)(b_2 - a_2 + b_1 - a_1) - (b_1 - a_1)(c_2 - b_2 + c_1 - b_1), \\ & (c_1c_2 - b_1b_2)(b_2 - a_2 + b_1 - a_1) - (b_1b_2 - a_1a_2)(c_2 - b_2 + c_1 - b_1)\Big)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(b_2-a_2+b_1-a_1)(c_2-b_2+c_1-b_1)} \times\Big((a_1b_2-a_2b_1)+(b_1c_2-b_2c_1)+(c_2a_1-c_1a_2),\ a_1a_2(c_1+c_2)+b_1b_2(a_1+a_2)+c_1c_2(b_1+b_2) -\{a_1a_2(b_1+b_2)+b_1b_2(c_1+c_2)+c_1c_2(a_1+a_2)\}\Big)$$

南海　$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ において

$$a \quad\to\quad b \quad\to\quad c \quad\to\quad a$$

と順に置きかえたものになる．

伍郎　あっ，そうか．

$$(a_1b_2-a_2b_1)+(b_1c_2-b_2c_1)+(c_2a_1-c_1a_2)$$
$$a_1a_2(c_1+c_2)+b_1b_2(a_1+a_2)+c_1c_2(b_1+b_2) -\{a_1a_2(b_1+b_2)+b_1b_2(c_1+c_2)+c_1c_2(a_1+a_2)\}$$

はいずれもこの変換で不変である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}} = \frac{1}{(c_2-b_2+c_1-b_1)(a_2-c_2+a_1-c_1)} \times\Big((a_1b_2-a_2b_1)+(b_1c_2-b_2c_1)+(c_2a_1-c_1a_2),\ a_1a_2(c_1+c_2)+b_1b_2(a_1+a_2)+c_1c_2(b_1+b_2) -\{a_1a_2(b_1+b_2)+b_1b_2(c_1+c_2)+c_1c_2(a_1+a_2)\}\Big)$$
$$= \frac{b_2-a_2+b_1-a_1}{a_2-c_2+a_1-c_1}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$$

南海　というわけだ．

l_1, l_2 が平行でない場合，これを参考にベクトルでやってみよう．l_1, l_2 の交点を O とし，$i=1,\ 2$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$ 方向の長さ 1 のベクトルを $\overrightarrow{e_i}$ とする．また

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_i} = a_i\overrightarrow{e_i}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}_i} = b_i\overrightarrow{e_i}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}_i} = c_i\overrightarrow{e_i}$$

とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \alpha\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2}$$

とおく．

伍郎　ここからは私のはじめのやり方でと先の座標の場合をあわせると，できそうです．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \frac{\alpha}{a_1}\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\frac{\beta}{b_2}\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}$$

P_1 は直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ 上にあるので

$$\frac{\alpha}{a_1}+\frac{\beta}{b_2}=1$$

同様に

$$\frac{\alpha}{b_1}+\frac{\beta}{a_2}=1$$

これを解いて

$$\alpha=\frac{a_1b_1(b_2-a_2)}{b_1b_2-a_1a_2},\ \beta=\frac{a_2b_2(b_1-a_1)}{b_1b_2-a_1a_2}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\frac{a_1b_1(b_2-a_2)}{b_1b_2-a_1a_2}\overrightarrow{e}_1+\frac{a_2b_2(b_1-a_1)}{b_1b_2-a_1a_2}\overrightarrow{e}_2$$

後は文字を $a\to b\to c\to a$ の順に置きかえることで，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} &= \frac{a_1b_1(b_2-a_2)}{b_1b_2-a_1a_2}\overrightarrow{e}_1+\frac{a_2b_2(b_1-a_1)}{b_1b_2-a_1a_2}\overrightarrow{e}_2\\
\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} &= \frac{b_1c_1(c_2-b_2)}{c_1c_2-b_1b_2}\overrightarrow{e}_1+\frac{b_2c_2(c_1-b_1)}{c_1c_2-b_1b_2}\overrightarrow{e}_2\\
\overrightarrow{\mathrm{OP}_3} &= \frac{c_1a_1(a_2-c_2)}{a_1a_2-c_1c_2}\overrightarrow{e}_1+\frac{c_2a_2(a_1-c_1)}{a_1a_2-c_1c_2}\overrightarrow{e}_2
\end{aligned}$$

が得られる．これから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} &= \frac{b_1b_2}{(b_1b_2-a_1a_2)(c_1c_2-b_1b_2)}\times\Big\{b_1c_1c_2+c_1a_1a_2+a_1b_1b_2-(b_1b_2c_1+c_1c_2a_1+a_1a_2b_1)\}\overrightarrow{e_1}\\
&\qquad +\{c_1c_2b_2+a_1a_2c_2+b_1b_2a_2-(b_1b_2c_2+c_1c_2a_2+a_1a_2b_2)\}\overrightarrow{e_2}\Big\}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}$ はこの式において，文字を $a\to b\to c\to a$ の順に置きかえたものである．

ところが $b_1c_1c_2+c_1a_1a_2+a_1b_1b_2$，$b_1b_2c_1+c_1c_2a_1+a_1a_2b_1$，$c_1c_2b_2+a_1a_2c_2+b_1b_2a_2$，$b_1b_2c_2+c_1c_2a_2+a_1a_2b_2$ は，いずれもこの置きかえで不変である．

よって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} &= \frac{c_1c_2}{(c_1c_2-b_1b_2)(a_1a_2-c1c_2)}\times\Big\{b_1c_1c_2+c_1a_1a_2+a_1b_1b_2-(b_1b_2c_1+c_1c_2a_1+a_1a_2b_1)\}\overrightarrow{e_1}\\
&\qquad +\{c_1c_2b_2+a_1a_2c_2+b_1b_2a_2-(b_1b_2c_2+c_1c_2a_2+a_1a_2b_2)\}\overrightarrow{e_2}\Big\}\\
&= \frac{c_1c_2(b_1b_2-a_1a_2)}{b_1b_2(a_1a_2-c1c_2)}\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}
\end{aligned}$$

よって，3 点 P_1，P_2，P_3 は同一直線上にある．

南海　そう．それでベクトルによる証明が出来た．

伍郎　l_1 と l_2 が平行な場合と式はそんなに変わりません．むしろベクトルを使った場合の方が簡単です．

南海　ベクトルで位置を表すのは，斜交座標と考えれば，座標の複雑さでいえば，直交座標の x 軸上と y 軸上にそれぞれ 3 点が並んでいるようなものだから，それほど複雑にはならない．

伍郎　そうか．ベクトルのいいところですね．

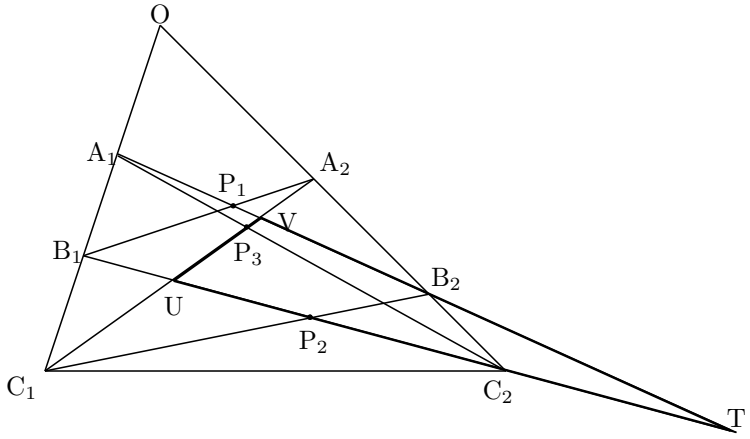
3.14.4　パップスの定理のユークリッド平面上での図形的証明

伍郎　さて，私の最初の問題でも，メネラウスの定理による証明がありました．このパップスの定理もメネラウスの定理による証明は出来るのでしょうか．

南海　これは先に l_1 と l_2 が点 O で交わる場合を考えよう．直線 A_1B_2 と直線 B_1C_2，直線 B_1A_2 と直線 C_1B_2 がいずれも平行ならそれほど難しくはない．

これらのなかに平行でないものがあるとして，直線 A_1B_2 と直線 B_1C_2，が平行でないとする．直線 A_1B_2 と直線 B_1C_2 の交点を T，C_1A_2 と B_1C_2 の交点を U，A_1B_2 と C_1A_2 の交点を V とする．

△TUV とその辺の延長と交わる直線についてメネラウスの定理を用いる．



直線 C_1B_2，A_1C_2，B_1A_2 に関してメネラウスの定理を用いる．次の関係式を得る．

$$\begin{aligned} C_1B_2: &\quad \frac{P_2U}{TP_2}\cdot\frac{C_1V}{UC_1}\cdot\frac{B_2T}{VB_2}=1 \\ A_1C_2: &\quad \frac{A_1T}{VA_1}\cdot\frac{C_2U}{TC_2}\cdot\frac{P_3V}{UP_3}=1 \qquad \cdots ③ \\ B_1A_2: &\quad \frac{B_1U}{TB_1}\cdot\frac{A_2V}{UA_2}\cdot\frac{P_1T}{VP_1}=1 \end{aligned}$$

また直線 OC_1，OC_2 に関してメネラウスの定理を用いる．次の関係式を得る．

$$\begin{aligned} OC_1: &\quad \frac{B_1U}{TB_1}\cdot\frac{C_1V}{UC_1}\cdot\frac{A_1T}{VA_1}=1 \qquad \cdots ④ \\ OC_2: &\quad \frac{C_2U}{TC_2}\cdot\frac{A_2V}{UA_2}\cdot\frac{B_2T}{VB_2}=1 \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} \frac{B_1U}{TB_1}&=\frac{UC_1}{C_1V}\cdot\frac{VA_1}{A_1T} \\ \frac{B_2T}{VB_2}&=\frac{TC_2}{C_2U}\cdot\frac{UA_2}{A_2V} \end{aligned}$$

を得る．

伍郎　わかりました．

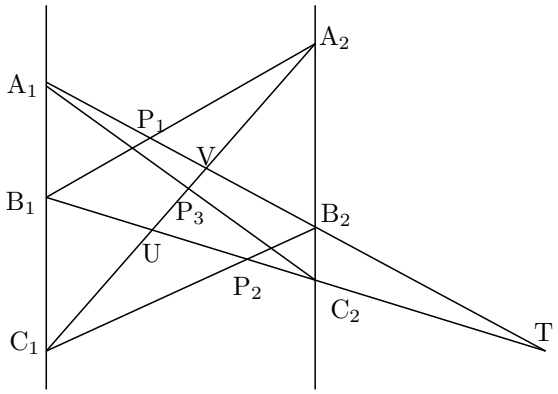
③ の 3 式をすべてかけあわせ，④ を代入することにより

$$\frac{P_2U}{TP_2}\cdot\frac{VP_3}{P_3V}\cdot\frac{P_1T}{VP_1}=1$$

を得る．これは，メネラウスの定理の逆により 3 点 P_1，P_2，P_3 が 1 直線上にあることを示している．

南海　ということだ．

伍郎　$l_1,\ l_2$ が平行なとき，図を書いてみます．



同じようにやると，点の名前も同様につけられます．△TUV とその辺の延長と交わる直線についてメネラウスの定理を用いると，l_1 と l_2 が交わる場合の証明がすべてそのまま使えます..

南海　そうなのだ．l_1 と l_2 が交わる場合の証明で「OC_1，OC_2 に関してメネラウスの定理を用いる」というところを，「l_1 と l_2 に関してメネラウスの定理を用いる」とかえれば，その他は同じなのだ．l_1 と l_2 が交わることは何も使っていない．

3.14.5　射影平面と双対原理

南海　パップスの定理を射影平面で考えてみよう．

伍郎　射影平面で成り立つ図形の射影幾何学的な性質とはどのようなことですか．

南海　直線が 2 点を通るとか、2 直線が交わるとか，3 点が一直線上にあるとか，3 直線が 1 点で交わるとか，点や直線から成り立つ平面上の図形の性質で，その図形をある点光源から他の平面に射影した影においても，同じ性質が成立するような，図形の性質だ．

伍郎　平行光線ではなく点光源なのですね．

南海　そうなのだ．普通の平面図形というのは**ユークリッド平面**，それに対して，無限遠点を加えた平面が**射影平面**だ．点光源からの射影ということと，無限遠点との関係については，参考文献などを読んでみてほしい．射影平面では次のことが成り立つ．

1) 相異なる 2 点は，一つのそしてただ一つの直線を決定する．

2) 相異なる 2 直線は，一つのそしてただ一つの点を決定する．

射影幾何学は点と直線 (そして三次元では平面)，およびそれらの間の関係のみを基本的なものとする，幾何学である．つまり上の二項から組み立てられる体系である．だから，これを**射影平面の公理**という．距離のような量関係からは自由である．だから無限遠も，関係ない．このような射影平面を座標で実現するには次のようにするのだった．これは，射影平面の座標による定義でもあり，また射影平面の公理を満たすモデルの提示でもある．

定義 24 (射影平面) $(0,\ 0,\ 0)$ でない 3 数の組 $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ の集合において，$x_0 : x_1 : x_2 = x_0' : x_1' : x_2'$ なら $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ と $(x_0',\ x_1',\ x_2')$ を同一視する．このようにして得られる対象を，**射影平面**という．P^2 と書き表す．

射影平面の座標を $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ とする．$x_0 \neq 0$ のときはこの点は $\left(1,\ \dfrac{x_1}{x_0},\ \dfrac{x_2}{x_0}\right)$ と同一視される．これは 2 つの座標の空間，つまり平面と同じものである．今までの平面 (ユークリッド平面，xy 平面) は，射影平面のうち $x_0 \neq 0$ の部分である．

伍郎　もとの 3 次元空間で，無限平面上の点 $(0,\ 1,\ 2)$ で交わる 2 直線を，方向を適当にとって

$$l_1 : (0,\ 1,\ 2) + s(2,\ 1,\ 2) = (2s,\ 1+s,\ 2+2s)$$
$$l_2 : (0,\ 1,\ 2) + t(1,\ 2,\ 3) = (t,\ 1+2t,\ 2+3t)$$

とします．この直線上の点で，上の同一視で同一視して $x_0 = 1$ であるものを考えると，それぞれ

$$\left(1,\ \frac{1+s}{2s},\ \frac{2+2s}{2s}\right),\ \left(1,\ \frac{1+2t}{t},\ \frac{2+3t}{t}\right)$$

となります．最初の方で $X = \dfrac{1+s}{2s},\ Y = \dfrac{2+2s}{2s}$ とおくと，方程式は $Y = 2X$ です．後の方で $X = \dfrac{1+2t}{t},\ Y = \dfrac{2+3t}{t}$ とおくと，方程式は $Y = 2X - 1$ です．たしかに無限遠点で交わる 2 直線は，ユークリッド平面では平行 2 直線になります．

南海　それを直線方程式の方でも確認しよう．xy 平面での直線の方程式 $ax + by + c = 0$ を射影平面の方程式にするために，$x = \dfrac{x_1}{x_0},\ y = \dfrac{x_2}{x_0}$ を代入して分母を払う．

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$$

となる．

伍郎　平行 2 直線 $ax + by + c = 0$ と $ax + by + d = 0$ $(d \neq c)$ は射影平面で方程式を表すと，

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0,\ ax_1 + bx_2 + dx_0 = 0$$

になる．ここで，$x_0 = 0$ とすると，$ax_1 + bx_2 = 0$．これは $x_1 : x_2 = -b : a$ ということだからこの二直線は $(0,\ -b,\ a)$ という無限遠点で交わる．

これは『パスカルの定理』にありました．

南海　ユークリッド平面の幾何学のどのような定理が射影幾何の定理に移るのかということはしっかりと考えなければならない．あるいは射影平面で考えることで，どのような一般化ができるのかもよく考えなければならない．射影平面で考えるときは平行な場合を分ける必要がなくなる．

さて射影幾何では次のようなことができる．

2 つの射影平面を用意する．P^2 と $\overline{P^2}$ とする．P^2 の直線 $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ に対して $\overline{P^2}$ の点 $(a,\ b,\ c)$ を対応させる．P^2 の点 $(a,\ b,\ c)$ に対して $\overline{P^2}$ の直線 $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ を対応させる．比が同じなら点も直線も同一なので，この対応はうまく定義される．

P^2 の 2 直線 $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$，$a'x_0 + b'x_1 + c'x_2 = 0$ が，点 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ で交わるということは

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,\ a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0 \quad \cdots ⑤$$

が成り立つということだ．このとき対応する $\overline{P^2}$ では何が成り立っているか．

伍郎　対応するものは $\overline{P^2}$ の 2 点 $(a,\ b,\ c)$，$(a',\ b',\ c')$ と，直線 $\alpha X_0 + \beta X_1 + \gamma X_2 = 0$ です．

だから，⑤ は $\overline{P^2}$ の 2 点 $(a,\ b,\ c)$，$(a',\ b',\ c')$ が直線 $\alpha X_0 + \beta X_1 + \gamma X_2 = 0$ 上にあるということを示しています．

ということは P^2 の 2 点が同じ直線上にあれば，$\overline{P^2}$ での対応物は，2 直線が 1 点で交わる，ということになります．

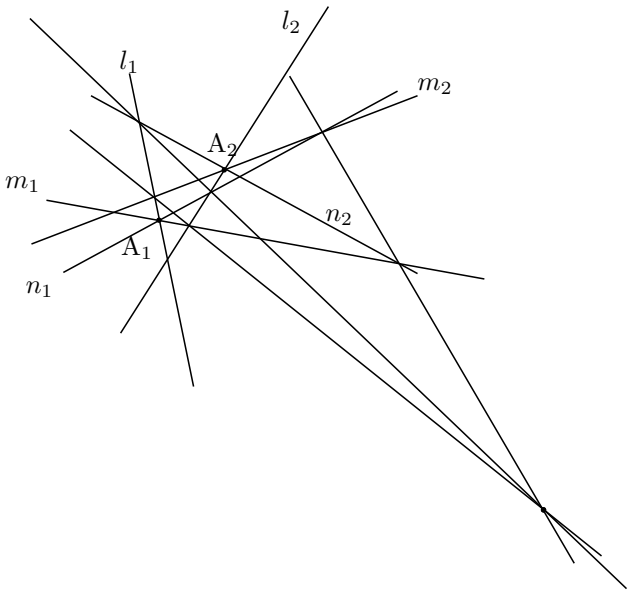
南海　だから，射影的なある性質が P^2 で成り立てば，点と直線を入れ替え，そのとき，「1 直線上にある 2 点」を「1 点で交わる 2 直線」に入れ替え，「2 直線の交点」を「2 点を通る直線」の入れ替えて作った $\overline{P^2}$ での命題も成り立つのだ．証明もすべて対応する置きかえを作っていけばよい．

そして，P^2 も $\overline{P^2}$ もいずれも射影平面であることは変わらない．だから，射影平面である定理が証明できれば，点と直線を入れ替え，そのとき，「1 直線上にある 2 点」を「1 点で交わる 2 直線」に入れ替え，「2 直線の交点」を「2 点を通る直線」の入れ替えて作った命題も成立する．

これを双対原理といい，このようにして作られた命題をもとの命題の双対命題という．

パップスの定理の双対命題は何か．

伍郎　次のようになります．



定理 89 (パップスの定理の双対命題)
2 点 A_1, A_2 がある．それぞれの点を通る直線 l_1, m_1, n_1 と l_2, m_2, n_2 がある．このとき，l_1 と m_2 の交点と l_2 と m_1 の交点を結ぶ直線 p_1，m_1 と n_2 の交点と m_2 と n_1 の交点を結ぶ直線 p_2，n_1 と l_2 の交点と n_2 と l_1 の交点を結ぶ直線 p_2 は 1 点で交わる．

図をかいてみると確かに成り立っています．

3.14.6　射影変換

南海　xy 平面では，合同変換や相似変換，1 次変換など，いろんな変換があった．

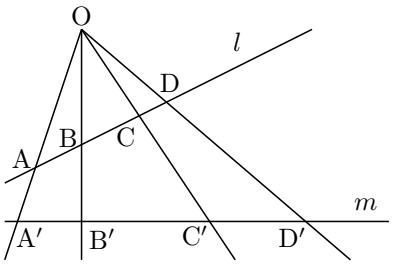
射影幾何学の基本的な要素と関係を保つような変換を射影変換という．座標で表すと点 $(x_0,\, x_1,\, x_2)$ を

$$\begin{aligned} X_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ X_1 &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ X_2 &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

のように，一次式で定義される変換が，そのようなものになる．これは 2 直線を交点とともに 2 直線に移す．2 点を通る直線を 2 点とともに直線に移す．

逆にこのような変換はすべて上のように書ける．

射影変換を図形的に見ると，変換ごとに図のように 1 点 O があって，点 O を通る直線上の点を同じ直線上に移し，そのとき直線 l 上にある点は，再び別の直線 m 上にあるように移る．



このような変換で直線 l が直線 m に移り，l 上の 4 点 A, B, C, D が m 上の 4 点 A′, B′, C′, D′ に移ったとすると，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} : \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{C'B'}} : \frac{\mathrm{A'D'}}{\mathrm{D'B'}}$$

が成り立つ．

この比のことを，4 点の**複比**という．射影変換で，複比は不変である．複比の不変性を用いてパップスの定理を証明することもできる．射影変換と複比に関するこれらのことはここでは示さない．いくつかの参考書を見てほしい．

3.14.7　射影幾何的証明

伍郎　3 直線が 1 点交わるとか，いうことは射影変換しても変わらないから，適当な射影変換で移して示しても一般性は失われないのですね．

南海　そういうことなのだ．そこで，パップスの定理を射影幾何的に証明してみよう．

2 つの直線 l_1 と l_2 のうち一方を無限直線と見なすのだ．この場合に示せれば，適当な射影変換をして，無限遠からこちらにもってくれば一般の場合に成立することがわかる．

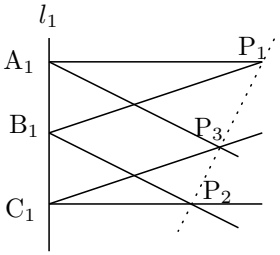
伍郎　待ってください．無限直線上で交わるということは，実は平行ということなのだから，l_2 を無限直線とすれば，

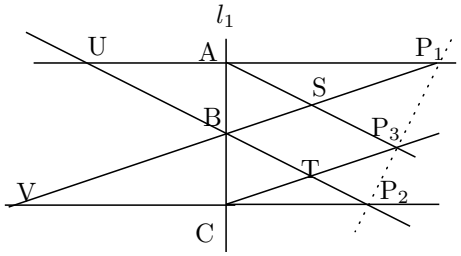
$$\mathrm{A_1B_2} \mathbin{/\!/} \mathrm{C_1B_2},\ \mathrm{A_1B_2} \mathbin{/\!/} \mathrm{C_1B_2},\ \mathrm{A_1C_2} \mathbin{/\!/} \mathrm{C_1C_2},$$

のもとで示せばよいのですか．

南海　実はそうなのだ．

伍郎





この左図ではどう考えればよいのでしょうか．

南海　右のように延長して交点に名前をつけよう．

$\triangle \mathrm{P_1VP_2}$ に注目して，

$$\mathrm{P_1B} : \mathrm{P_1S} = \mathrm{P_2B} : \mathrm{SP_3}$$

を示せば，平行 2 直線と比の対応から，$\mathrm{P_3}$ が $\mathrm{P_1P_2}$ 上のにあることがわかる．

伍郎　平行線による比の移動を見ていくと

$$\mathrm{P_1B} : \mathrm{P_1S} = \mathrm{P_1U} : \mathrm{P_1A} = \mathrm{VR} : \mathrm{VC} = \mathrm{P_2B} : \mathrm{BT} = \mathrm{P_2B} : \mathrm{SP_3}$$

です．しかし，ということは，私のはじめの問題も，あれで実はパップスの定理の一般的な証明だったのではないですか．

南海　そうなんだ．パップスの定理での，辺と交わる図 3.14.2 において，直線 EF を無限直線にした場合なのだ．あの最初の状態で証明しておいて，直線 EF を有限の場所に射影変換で移せば，それが一般の場合のパップスの定理になるのだ．

伍郎　これって，すごい世界ですね．射影幾何をもっと勉強したくなりました．

3.14.8　パップスの定理はパスカルの定理の特別な場合

南海　今度は，パップスの定理をパスカルの定理の特別な場合として示そう．そのためにいくつかの準備が必要だ．

$(x_0,\ x_1,\ x_2)$ を射影座標とする．このとき，

$$C\ :\ a{x_1}^2 + b{x_2}^2 + c{x_0}^2 + 2hx_1x_2 + 2lx_1x_0 + 2mx_2x_0 = 0$$

で定まる射影平面上の点の集合を考える．もちろん，普通の平面の場合と同様，これが因数分解されて二つの直線などになる場合もある．

このとき，曲線上の点 $\mathrm{P}(p_0,\ p_1,\ p_2)$ に対して

$$l\ :\ ap_1x_1+bp_2x_2+cp_0x_0+h(p_2x_1+p_1x_2)+l(p_0x_1+p_1x_0)+m(t_0x_2+t_2x_0)=0$$

を，曲線 C の P での接線，という．

この接線を『パスカルの定理』では微分で考えたので，ここでは少し違う形で考えよう．$x_0\neq 0$ のとき，$X=\dfrac{x_1}{x_0}$，$Y=\dfrac{x_2}{x_0}$ とおくと，曲線 C の方程式は

$$C\ :\ aX^2+bY^2+c+2hXY+2lX+2mY=0$$

となる．またこれに対応して，C 上の点 P は $\mathrm{P}(p,\ q)=\mathrm{P}\left(\dfrac{p_1}{p_0},\ \dfrac{p_2}{p_0}\right)$ となるものとする．

$\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る直線の方向が $(\alpha,\ \beta)$ のものを，媒介変数 u を用いて

$$X=\alpha u+p,\ Y=\beta u+q$$

とおく．この直線と C の交点は，方程式

$$a(\alpha u+p)^2+b(\beta u+q)^2+c+2h(\alpha u+p)(\beta u+q)+2l(\alpha u+p)+2m(\beta u+q)=0$$

で与えられる．P は C 上の点なので

$$ap^2+bq^2+c+2hpq+2lp+2mq=0$$

である．これを用いて u の 2 次方程式を整理すると，

$$\begin{aligned}&(a\alpha^2+b\beta^2+2h\alpha\beta)u^2\\&+2\{(ap+hq+l)\alpha+(bq+hp+m)\beta\}u=0\end{aligned}$$

$(\alpha,\ \beta)$ が接線の方向となるということは，この方程式が $u=0$ を重解にもつときなので

$$(ap+hq+l)\alpha+(bq+hp+m)\beta=0$$

である．つまり

$$(\alpha,\ \beta)=(bq+hp+m,\ -(ap+hq+l))$$

とすればよい．このベクトルと直交する方向，つまり接線の法線方向は

$$(ap+hq+l,\ bq+hp+m)$$

であるから，$\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る接線は

$$(ap+hq+l)(X-p)+(bq+hp+m)(Y-q)=0$$

である．これを再度整理して

$$\begin{aligned}&apX+bqY-(ap^2+bq^2+2hpq+2lp+2mq)+h(qX+pY)+l(X+p)+m(Y+q)\\=\ \ &apX+bqY-c+h(qX+pY)+l(X+p)+m(Y+q)=0\end{aligned}$$

となる．

ここに，$X = \dfrac{x_1}{x_0}$，$Y = \dfrac{y_2}{y_0}$，$p = \dfrac{p_1}{p_0}$，$q = \dfrac{p_2}{p_0}$ を代入して分母を払うと先の l の方程式が得られる．

伍郎　いちいち $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ で書くのは大変ですね．

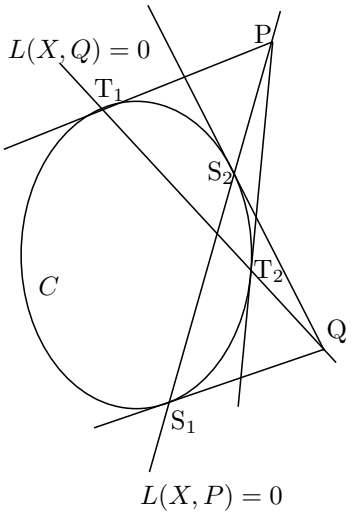
南海　そこで，$X = (x_0,\ x_1,\ x_2)$ とし，C の式を $f(X) = 0$ と書こう．また接線の式を $L(X,\ P) = 0$ とおくのだった．

伍郎　『パスカルの定理』にあるように $L(X,\ P)$ は X と P に関して対称で，

$$L(X,\ P) = L(P,\ X)$$

が成立し，極と極線に関する次の定理が成り立つのでした．

定理 90 (極と極線) P から二本の接線を引く．接点を $T_1,\ T_2$ とする．直線 T_1T_2 上の任意の点 Q をとる．Q から二本の接線を引く．接点を $S_1,\ S_2$ とする．
すると 直線 S_1S_2 は P を通る．



証明
接点の座標をそれぞれ，$T_1,\ T_2$ とする．接線の方程式は

$$L(T_1,\ X) = 0,\ \ L(T_2,\ X) = 0$$

になる．

これらが P を通るので，

$$L(T_1, P) = 0,\ \ L(T_2, P) = 0$$

である．ところがこれは，直線 $L(X, P) = 0$ が $T_1,\ T_2$ を通ることを示している．つまり T_1T_2 の方程式は

$$L(X, P) = 0$$

である．同様に直線 S_1S_2 の式は

$$L(X, Q) = 0$$

である．Q が直線 T_1T_2 の上にあるので，$L(Q, P) = 0$ である．ところがこの式は P が

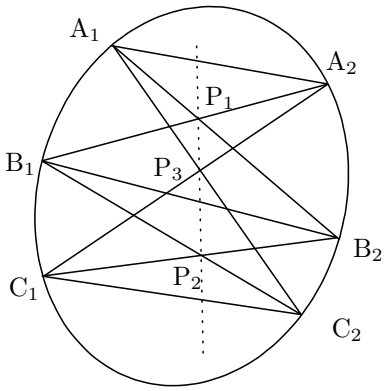
$$L(Q,\ X) = 0$$

の上にあることを示している．　□

点 P のことを**極**，直線 $L(X, P) = 0$ のことを**極線**といいます．

南海　さて．パスカルの定理だ．

定理 91 (パスカルの定理) 2 次の斉次式で定まる曲線 $C : f(X) = 0$ の上に異なる 6 点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{C}_1$ と $\mathrm{A}_2,\ \mathrm{B}_2,\ \mathrm{C}_2$ を取る．
直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ と直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1$ の交点を P_1，直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3$ と直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2$ の交点を P_2，直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1$ と直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3$ の交点を P_3 とする．
このとき 3 点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$ は一直線上にある．



南海　この証明のために，補題が必要だ．

補題 18 P^2 上に，任意の 5 点を与えるとき，これらすべてを通る 2 次曲線 C が存在する．これらの 5 点のうち，少なくとも 4 点が 1 直線上にないかぎり，C はただ一つに定まる．

この証明は代数的な準備が必要で，ここでは出来ない．参考文献『代数曲線の幾何学』などを見てほしい．2 次の斉次式は 6 個の定数でできているが，5 個の通る点が与えられれば，係数の比が定まるところまでは，何とかいけるが，一意性の証明はもう少し準備がいる．

それを今後の勉強の課題としておいて，パスカルの定理を証明しよう．

証明

点 A_1 での接線と B_2 での接線の交点を $\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2}$ とかくと，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ は

$$L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X) = 0$$

と表せる．$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ 上の点はこの方程式を満たす．

以下同様に記号を定める．そこで，次の二次式を満たす曲線

$$C' : L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - \alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) = 0$$

を考える．これは $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{C}_2$ を通る．ここで，

$$\alpha = \frac{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{A}_2}, \mathrm{B}_2)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{C}_2}, \mathrm{B}_2)}{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2}, \mathrm{B}_2)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2}, \mathrm{B}_2)}$$

とおく．α をこのようにとると C' は B_2 も通る．

補題 18 から，C と C' は同一の曲線となる．

同様に次の二次式を満たす曲線

$$C'' : L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) - \beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) = 0$$

を考える．これは $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{C}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{B}_2$ を通る．ここで，

$$\beta = \frac{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2}, \mathrm{B}_1)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{A}_2}, \mathrm{B}_1)}{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2}, \mathrm{B}_1)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2}, \mathrm{B}_1)}$$

とおく．β をこのようにとると C'' は B_1 も通る．従って，同様の理由で C'' は C と一致する．

二つの二次曲線の式は定数倍を除いて一致する．

$$\begin{aligned} & L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - \alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) \\ = \quad & k\{L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) - \beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)\} \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} & L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - kL(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) \\ = \quad & L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X)\{\alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - k\beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X)\} \end{aligned}$$

この両辺の二次式を考える．

左辺に $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_3$ を代入すると 0 になるので，右辺も満たす．そして $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_3$ は $L(\mathrm{Q}_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2},\ X) = 0$ 上にはない．よって，

$$\alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - k\beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X) = 0$$

の上にある． P_2 は明らかにこの式を満たす．

ここで，$\mathrm{M} = \alpha\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2} - k\beta\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2}$ と置くとこの式は

$$\begin{aligned} \alpha L(\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2},\ X) - k\beta L(\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X) &= L(\alpha\mathrm{Q}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{C}_2} - k\beta\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_1}^{\mathrm{B}_2},\ X) \\ &= L(\mathrm{M},\ X) \end{aligned}$$

と表される．つまり $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ はすべて 直線 $L(\mathrm{M},\ X) = 0$ の上にある． □

伍郎　これでパップスの定理も示せているのですか．

南海　実はこの 2 次曲線は既約でなくてもいいのだ．だから C として l_1 と l_2 の方程式の積で定まる曲線でいいのだ．そのことをはっきりさせるために，パップスの定理型に再編してみてほしい．

伍郎　直線 $l_1,\ l_2$ の方程式を $L_1 = 0,\ L_2 = 0$ とし，2 次式 $L_1 \cdot L_2$ を考える．

$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ を通る直線の方程式を $F = 0$ とする．以下同様に次のように定める．

$$\begin{aligned} & \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 : F = 0, \quad \mathrm{B}_2\mathrm{C}_1 : G = 0, \quad \mathrm{C}_1\mathrm{A}_2 : H = 0 \\ & \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 : \overline{F} = 0, \quad \mathrm{B}_1\mathrm{C}_2 : \overline{G} = 0, \quad \mathrm{C}_2\mathrm{A}_1 : \overline{H} = 0 \end{aligned}$$

また，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の方程式を $M = 0$ とする．方程式

$$\overline{F} \cdot \overline{H} = 0,\ \overline{G} \cdot M = 0$$

で定まる図形は，いずれも $\mathrm{B}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{C}_2$ を通る．したがって式 $\overline{F} \cdot \overline{H}$ と式 $\overline{G} \cdot M$ に B_2 の座標を代入したものの比を α とすると，方程式

$$\overline{F} \cdot \overline{H} - \alpha\overline{G} \cdot M = 0$$

は，この 4 点に加えて B_2 も通る．5 点のうちどの 4 点も同じ直線上にはない．

ところが $L_1 \cdot L_2 = 0$ のこの 5 点を通るので，補題 18 から 2 つの 2 次式 $\overline{F} \cdot \overline{H} - \alpha\overline{G} \cdot M$ と $L_1 \cdot L_2$ は定数倍しか違わない．同様に $F \cdot H = 0,\ G \cdot M = 0$ は $\mathrm{B}_2,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{C}_1$ を通る．定数 β を選ぶと

$$F \cdot H - \beta G \cdot M = 0$$

は，この 4 点に加えて B_1 も通る．5 点のうちどの 4 点も同じ直線上にはない．同じ理由から，2 つの 2 次式 $F \cdot H - \beta G \cdot M$ と $L_1 \cdot L_2$ は定数倍しか違わない．

よって 2 つの 2 次式 $F \cdot H - \beta G \cdot M$ と $\overline{F} \cdot \overline{H} - \alpha\overline{G} \cdot M$ は定数倍しか違わない．$F \cdot H - \beta G \cdot M$ の各 1 次式にその定数をかけ，それを改めてその 1 次式にとりなおすことで，2 つの 2 次式 $F \cdot H - \beta G \cdot M$ と $\overline{F} \cdot \overline{H} - \alpha\overline{G} \cdot M$ は一致するようにできる．

$$\overline{F} \cdot \overline{H} - \alpha\overline{G} \cdot M = F \cdot H - \beta G \cdot M$$

から

$$\overline{F} \cdot \overline{H} - F \cdot H = M(\alpha \overline{G} - \beta G)$$

左辺の式では P_1 と P_3 がこの等式を満たすことを示している．この 2 点は $M = 0$ は満たさない．よってこの 2 点は 1 次方程式

$$\alpha \overline{G} - \beta G = 0$$

を満たす．P_2 も満たすので，これで 3 点が同じ 1 次方程式を満たし，同一直線上にあることが示された．

3.14.9 参考文献

『代数曲線の幾何学』(難波誠，現代数学社，1992)

『代数学講義 (改訂新版)』(高木貞治，共立出版，1948)

『直観幾何学』(ダーヴィト・ヒルベルト ; S. コーン・フォッセン，芹沢正三訳，みすず書店，1966)

『遠近法から射影幾何へ』(砂田利一，明治大学) http://www.math.meiji.ac.jp/files/active/0/ao2004lec.pdf

『射影幾何学入門』(丹羽敏雄，実教出版，2001)

3.15　デザルグの定理

2011.1.10/2010.1.11

3.15.1　メネラウスの定理再考

3.15.1.1　古い入試問題

太郎　最近授業で次の 1966 年の京都大学の入試問題をやりました．この問題とその解に関して質問があります．まず問題といくつかの解答を書きます．

例題 3.15.1

平地に 3 本のテレビ塔がある．ひとりの男がこの平地の異なる 3 地点 A，B，C に立って，その先端を眺めたところ，どの地点でもそのうち 2 本の先端が重なって見えた．このとき A，B，C は一直線上になければならない．この理由を述べよ．

南海　今なら「ひとりの人」というところだが,「ひとりの男」と言うところにも問題の古さが現れている．これについては三通りの解法を『別解研究』の「空間図形のとらえ方」に「共線を示す [66 年京大]」として紹介した.「共線」とは点が直線を共にするということで,「3 点が共線である」とは 3 点が同じ直線上にあるという意味である．また「共点」とは 3 本以上の直線が点を共有する，つまりその点で交わるという意味である．

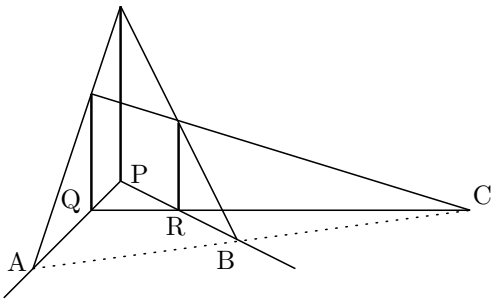
太郎　私は,「3 点が一直線上にある」，つまり 3 点が共線であることを示す証明問題なので，ベクトルを用いて解きました．そのうえで『別解研究』の別解を授業でも聞きました．

そこでの**解 2** と**解 3** は大変明快です．もういちどここに書きます．

解 2　地表からテレビ塔の先端が重なって見えたので，3 本とも長さが違う．3 本の長さを $l > m > n$ とし，テレビ塔と地表の交点を P，Q，R とする．△PQR と，辺 PQ，PR，QR の延長線上の点 A, B, C に関してメネラウスの定理を用いる．

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{PA}} \cdot \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{QC}} \cdot \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{RB}} = \frac{m}{l} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{l}{n} = 1$$

よって 3 点 A，B，C 同一直線上にある．　□



太郎　これは簡明ですが平面ベクトルを用いる解答と同様に平面内の問題として考えています．しかし次の問題は空間図形を用います．

解 3　テレビ塔の先端の 3 点が定める平面を α とする．3 点 A，B，C は α 上にある．一方，3 点 A，B，C は地表という平面上にもある．ゆえに 3 点 A，B，C は α と地表の交わりの直線上にある．　□

南海　この問題は私が大学を受験したときの問題だ．私は**解 2** とは異なり，メネラウスの定理を△PAB と直線 QR に関して用いて解いた．直線が三角形の外部にあるときのメネラウスの定理をよく知らなかったのだ．直線 AB と直線 QR の交点を C′ として，条件から C′ = C となることを示して解いたような気がする．少し面倒だったがとにかく解けた．

ところが同じ高校から受験した友だちと試験が終わってから話していると，彼は「三行で済んだ」というのだ．それが**解 3** だ．その解を聞いて驚いた．大変印象が深くてそれで今も覚えている．

3.15.1.2　メネラウスの定理の空間図形による証明

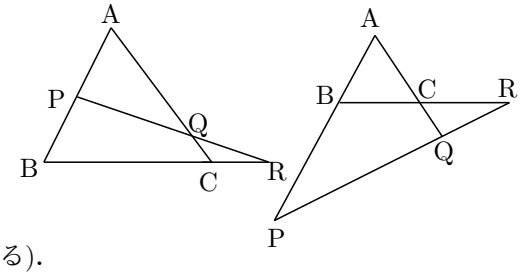
南海　さて質問というのは何か?

太郎　**解 2** と**解 3** はいずれも簡明です．**解 2** はほとんどメネラウスの定理と同じ内容です．とすると，この二つをつないで，メネラウスの定理を空間図形から証明することはできないのかと考えました．

南海　それはいい着眼だ．どこまでできたのか．まずメネラウスの定理を書き，証明の出来たところまでやってみてほしい．

太郎　普通は，メネラウスの定理とメネラウスの定理の逆とに分けます．それを一つにまとめると次のようになります．京大の問題とは点の名称の系列が逆になります．

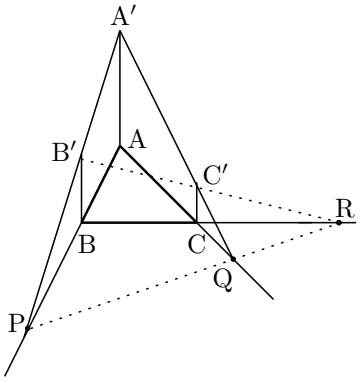
定理 92　△ABC の辺 AB と AC の上に点 P, Q をとり辺 BC の延長線上に点 R をとるか，または辺 AB，AC と辺 BC の延長線上にそれぞれ点 P, Q, R をとる．いずれの場合も，3 点 P, Q, R に関する次の二つの条件は同値である．



(1) 3 点 P, Q, R は共線である (同一直線上にある).

(2) $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}\cdot\dfrac{\mathrm{RC}}{\mathrm{BR}}\cdot\dfrac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=1$ が成り立つ.

南海　これはよいまとめ方だ．多くの参考書ではメネラウスの定理とその逆定理という二つの部分に分けている．しかし，メネラウスの定理は 3 点 P, Q, R に関する二つの条件が同値であることを言うものなのだ．



太郎　京大の問題を参考に，3 点 P, Q, R が △ABC の外部にある場合が示せました．

証明 1　点 A′ を AA′ と △ABC が直交するように適当にとる．同様に点 B, C から △ABC に直交する直線を引いておく．それらの直線と，直線 A′P, A′Q との交点をそれぞれ B′, C′ とおく．このとき

$$\frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{AA'}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}},\quad \frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{AA'}}=\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}$$

である．この前提のもとで，次の二つの同値が成り立つ．

(i) $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}\cdot\dfrac{\mathrm{RC}}{\mathrm{BR}}\cdot\dfrac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=1$ が成り立つことと，3 点 B′，C′，R が共線であること．

(ii) 3 点 B′，C′，R が共線であることと，3 点 P，Q，R が共線であること．

(i) は次にように同値変形だけです．

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=1 \iff \frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{AA'}}\cdot\frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{CC'}}=1$$
$$\iff \mathrm{BB'}:\mathrm{CC'}=\mathrm{BR}:\mathrm{CR} \iff \mathrm{B'},\ \mathrm{C'},\ \mathrm{R}\ \text{が共線である.}$$

(ii) は次のように必要性と十分性の証明を分けました．

- 3 点 B′, C′, R が共線なら，点 R も A′B′C′ 平面上にあり，この平面が ABC 平面と交わる直線上に R もある．つまり 3 点 P, Q, R は共線である．
- 逆に，3 点 P, Q, R が共線なら，点 A′ と直線 PR で定まる平面上に B′, C′, R があり，かつこの 3 点は B, B′, C, C′ で定まる平面上にもある．よって 3 点 B′, C′, R は共線である．

(i) と (ii) をつないで 3 点 P, Q, R が △ABC の外部にある場合に定理の同値性が証明できた．□

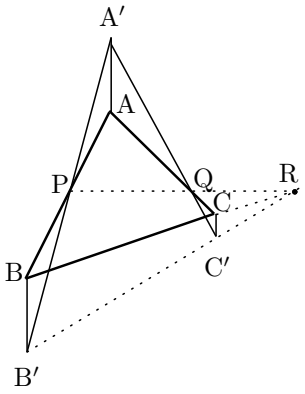
南海　メネラウスの定理を二つの構成部分に分解し，それぞれで同値性を示すというのは大変いい方針だ．

太郎　ところが 2 点 P, Q が △ABC の辺上にある場合がうまく示せません．

南海　それは簡単だ．図のように逆の方向にとればよい．

太郎　そうか．点 B を通り △ABC と直交する直線と，直線 A′P との交点を B′ とすれば，まったく同様なのだ．証明も先の証明そのままです．ということは，これでメネラウスの定理を空間図形で証明することができました．

京大の問題を参考にしたので，点 A′ を AA′ と △ABC が直交するように適当にとりました．しかしここは比率と 4 点 B, B′, C, C′ が同一平面上にあることだけを用いているので，AA′，BB′，CC′ が平行であればよいです．

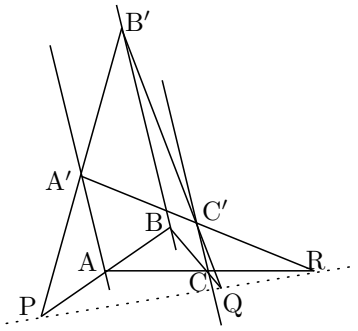


3.15.1.3　射影の方法

南海　逆に京大の問題を平面図形の問題にすることもできる．いま平行であればよいことに気づいたので，それを踏まえると次の命題が成り立つ．

命題 14　平行な三直線 AA′，BB′，CC′ がある．

直線 AB と A′B′，直線 BC と B′C′，直線 CA と C′A′ がそれぞれ P, Q, R で交わるなら，P, Q, R は共線である．



太郎　図を描いてみます．これを平面図形で証明するのはメネラウスの定理です．

しかしこの図を空間におかれた図と見れば，3 点 P, Q, R は，平面 ABC と平面 A′B′C′ の交わる直線上にあるのは明らかです．

南海　今「明らか」といったことが**射影の方法**だ．平面図形を空間におかれた図形の射影と見るのだ．

空間に図形，つまり空間における点の集合 K があるとする．空間に一点 O と平面 α をとる．点 O と K の各点を結ぶ直線と α の交点を α 上にとることにより，平面図形 H が得られる．

逆に平面図形 H に対して，空間に点 O をとり，点 O を H の各点を結ぶ直線上の O と異なる点をとる．空間図形 K が得られる．H が点と直線でできた図形のときは，まず指定された点に対して K での点を決める．直線は直線上の 2 点に対応する点をとり，その 2 点を結ぶことで K での位置を定める．

図形 H は図形 K の平面 α への射影であるという．このような対応を射影変換という．

この変換で，H において交わる 2 直線は，K においても交わる 2 直線になる．H において 2 点を通る直線は，K においても対応する 2 点を通る直線になる．

従って，H において 2 直線が交わること，2 点が定める直線上に第 3 の点が乗っていること等，H における点と直線の結合関係は，K で同じ結合関係を満たすこと同値になる．

太郎　私は先ほど「空間におかれた図と見れば」といいましたが，見ている目の位置が点 O なのですね．この方法では平行な直線は必ずしも平行にはなりません．また長さも変化します．線分の比も変わります．このような性質はこの射影による対応では保たれないのですね．

南海　今いったことで，長さが保たれないというのはその通りなのだ．平行という条件は一点で交わるという条件と同じだ．それはなぜか．このような問題を考えるときに，平面は射影平面で考える．射影平面は「パスカルの定理」「パップスの定理」で定義した．普通の xy 平面にさらに無限直線を付け加える．無限直線上の点を無限遠点という．平行な二直線は無限遠点で交わるとするのだ．こうすることで平行と交わるは空間におかれた 2 直線に関して同じ条件になる．

太郎　平行も交わるも，空間の直線としては同一平面上にあるというひとつの条件として表されます．

南海　射影変換によって変わらない図形の性質を研究するのが**射影幾何学**なのだ．

メネラウスの定理の証明で，(i) と (ii) の二つの同値性に分けた．(i) は長さが関係している部分．これは比例の関係から相似であることを導き，同一直線上にあることを示した．(ii) は射影変換で変わらない部分である．

太郎　自分ではそのようにわかって二つの構成部分に分けたのではありませんが，なるほど．それぞれ異なる原理で論証したのですね．

3.15.2　デザルグの定理

3.15.2.1　入試問題の逆命題

太郎　もう一つ質問があります．それは京大 1966 年の問題の逆問題は何か．またそれは成り立つのか，ということです．

南海　ある問題が解けたときに，その逆について考えるのはすばらしい．京大の問題は空間におかれた直線に関するものだ．

太郎　はい．空間図形の問題として考えました．しかし 3 点 P, Q, R は共線である，という結論に対する仮定は何なのか．それが分かりませんでした．

先ほどの命題 14 で少し見えてきました．これは平面図形の問題ですが，ここから類推すると，逆を考えるときの仮定にあたるのは，三直線 AA′，BB′，CC′ が平行という条件ではないか．先の命題を次のように空間図形の命題にいいかえます．

命題 15　空間に三直線 AA′，BB′，CC′ がある．さらに，直線 AB と A′B′，直線 BC と B′C′，直線 CA と C′A′ がそれぞれ P, Q, R で交わるとする．これを前提にする．

三直線 AA′，BB′，CC′ が平行であるなら，P, Q, R は共線である．

これが先の命題 14 を空間図形にいいかえたものです．

南海　そうだろうか．平行という条件を仮定と見ぬいたのは，その通りなのだが，直線 AB と A′B′，直線 BC と B′C′，直線 CA と C′A′ がそれぞれ P, Q, R で交わるとする，を前提にしてよいか．

もしこの三つの直線の組がそれぞれ交わるのなら，ABC 平面と A′B′C′ 平面の交わる直線上に P, Q, R があるので共線は明らかだ．

太郎　確かに．すると先の命題の本質的な部分は次のようにしなければなりません．

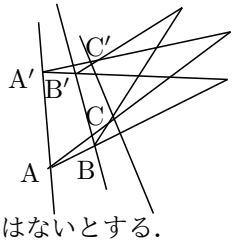
命題 16　空間に三直線 AA′，BB′，CC′ がある．
三直線 AA′，BB′，CC′ が平行で，直線 AB と A′B′，直線 BC と B′C′ が交わるなら，直線 CA と C′A′ も交わる．

この逆は成り立つのでしょうか．つまり次の命題は成立するのでしょうか．

命題 17　空間に三直線 AA′，BB′，CC′ がある．
直線 AB と A′B′，直線 BC と B′C′, 直線 CA と C′A′ がそれぞれ交わるなら，三直線 AA′，BB′，CC′ は平行である．

南海　成り立つかどうかは，論証を進めて起こりうる場合を調べれば分かる．
空間の二直線は，一般的にはねじれの位置にある．ところが三組の直線がいずれもねじれの位置にはなく交わるというのだから，この命題の仮定は非常に強い条件であることが分かる．

太郎　直線 AB と A′B′ が交わるので AA′，BB′ は同一平面上にある．他も同様である．つまり BB′，CC′ および CC′，AA′ も同一平面上にある．



直線 AB，A′B′，BC，B′C′，CA，C′A′ がすべて同一平面上にあれば，AA′，BB′，CC′ も同一平面上にある．
直線 AB，A′B′，BC，B′C′，CA，C′A′ がすべて同一平面上にあることはないとする．
AA′，BB′ が交わるとき他の一組 BB′，CC′ も交わる．必然的に AA′，CC′ も交わり，三直線は 1 点で交わる．
逆に 2 本が平行なら他の 1 本もこれらに平行である．
よって 3 直線が同一平面にあるか，1 点で交わるか，平行かのいずれかになる．

用いたことは二直線の組が同一平面上なるということなので，結論とあわせて命題は次のようにいいかえなければなりませんでした．

命題 18　三直線 AA′，BB′，CC′ がある．
直線 AB と A′B′，直線 BC と B′C′, 直線 CA と C′A′ がそれぞれ同一平面上にあれば，
三直線 AA′，BB′，CC′ のどの二本もそれぞれ同一平面上にある．

太郎　これが京大の問題の逆でした．

3.15.2.2　デザルグの定理

太郎　この形に定式化すればこの命題の逆が成り立つことも明らかです．つまり

命題 19　三直線 AA′，BB′，CC′ がある．
このとき，三直線 AA′，BB′，CC′ のどの二本もそれぞれ同一平面上にあるならば，直線 AB と A′B′，直線 BC と B′C′, 直線 CA と C′A′ がそれぞれ同一平面上にある．

南海　命題 18 と命題 19 の同値性が，**デザルグの定理**といわれる定理の最も本質的なところだ．これを補題としてまとめておこう．

補題 19 空間におかれた異なる 6 点，A, A′，B, B′，C, C′ がある．次の二つの条件は同値である．

(i) 直線 AB と A′B′，直線 BC と B′C′, 直線 CA と C′A′ がそれぞれ同一平面上にある．

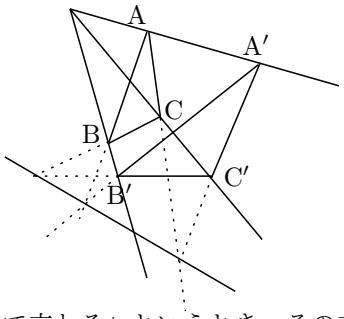
(ii) 三直線 AA′，BB′，CC′ のどの二本の組もそれぞれ同一平面上にある．

南海　デザルグの定理は射影平面の定理として次の形でのべられる．

定理 93 射影平面におかれた △ABC と △A′B′C′ がある．次の二つの条件は同値である．

(i) 三直線 AA′，BB′，CC′ が共点である (一点で交わる)．

(ii) 三つの直線の組 AB と A′B′ の交点，BC と B′C′ の交点，CA と C′A′ の交点の 3 点が共線である．



太郎　平行な場合が抜けると思いますが．いや．そうか,「一点で交わる」というとき，その交点が無限遠点の場合を含む，つまり三直線が平行であることがここに含まれているのですね．しかしそうすると AB と A′B′ の交点などが無限遠点である場合もあるのですね．

そうか．それでも空間においたとき同一平面上にあるからいいのだ．二直線が射影平面上で一点で交わることと，その二直線を空間においたとき，同一の平面上にあることが同じことなのだ．

また，(ii) は，三つの直線の組がそれぞれ交点をもつことが核心で，そのとき共線であることはすぐに分かるわけです．

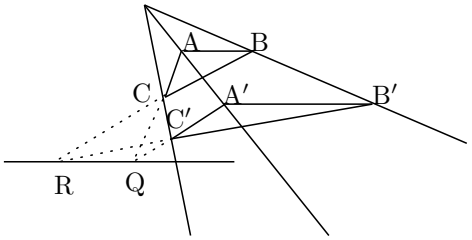
定理 93 の証明　△ABC と △A′B′C′ のおかれた平面に対して，この平面にない空間の点 O をとり，空間図形の射影が △ABC と △A′B′C′ であるようにする．

対応する空間の点も同じ記号で表す．このとき，3 直線 AA′，BB′，CC′ が一つの平面にのると，3 点 A, B, C がすべて △ABC のある平面と，この平面の両方にあることになり，共線となって三角形の辺であることに反する．よって 3 直線 AA′，BB′，CC′ が一つの平面上にあることはない．

補題 19 の (i) で 2 直線の三組が同一平面上にあることと，(ii) で 3 直線が同一平面上にあることが同値である．定理 93 はこの場合を除いた場合なので，その同値性は補題 19 の同値性の直接の帰結である．□

南海　射影平面で考え平行であることを無限遠点で交わることとして，別に考えなかった．それは問題を単純化し明快にするのであるが，一方，あくまでこれまで通りの平面で考え，平行な場合を場合に分けて見ていくことも面白い．

例えば，AB と A′B′ が平行な場合．BC と B′C′ の交点 Q と，CA と C′A′ の交点 R とこの無限遠点が共線ということは，QR が AB と平行であることを意味する．実際これを描いてみると図のようになる．



この他いろいろな場合についても考えてみてほしい．

3.15.3　双対原理

南海　『数学対話』の「パップスの定理」の中でのべたように，

> 射影平面である命題が成立すれば，その命題のなかの点と直線を入れ替え,「点が直線の上にある」を「直線が点を通る」に入れ替えて作った命題も成立する．

が成り立つ．これを双対原理といい，このようにして作られた命題をもとの命題の双対命題という．ではデザルグの定理の双対命題は何だろうか．

デザルグの定理で同値が示された二つの条件をもういちどよく見てみよう．デザルグの定理 93 は射影平面上の 6 点 A, A′, B, B′, C, C′ からはじめた．

これを 6 直線 l, l', m, m', n, n' からはじめよう．

直線 AA′ は「点 A, A′ を通る直線」なので，その双対は「l, l' の交点」である．同様に考えデザルグの定理の二つの条件の双対条件をつくってほしい．

太郎　条件

(i) 三直線 AA′，BB′，CC′ が共点である．

の双対条件は

(i') l, l' の交点 P，m, m' の交点 Q，n, n' の交点 R は共線である．

となる．また条件

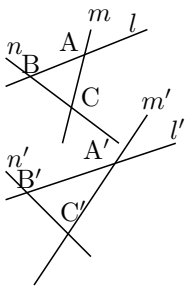
(ii) AB と A′B′ の交点，BC と B′C′ の交点，CA と C′A′ の交点の 3 点が共線である．

の双対条件は

(ii') l, m の交点と l', m' の交点を通る直線，m, n の交点と m', n' の交点を通る直線，n, l の交点と n', l' の交点を通る直線の 3 直線が共点である．

となる．

ところがここで次の図を見れば分かるように，「l, m の交点と l', m' の交点を通る直線」とは直線 AA′ に他ならず，このように見てゆくと (i) と (ii')，(ii) と (i') は実は同じこと言っていることがわかる．デザルグの定理の双対定理を作ると二つの同値な条件が入れ替わるだけである．



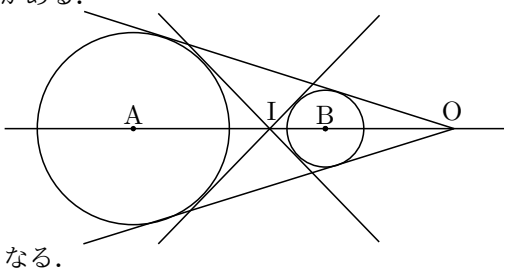
したがって二つの条件の同値性を主張するデザルグの定理そのものである．このようにデザルグの定理は**自己双対**である．

3.15.4　モンジュの定理

南海　折角メネラウスの定理やデザルグの定理を学んだので，もう一つモンジュの定理を紹介しよう．これは平面におかれた三つの円に関するものだ．

互いに外部にある，中心を A, B とする二つの円がある．

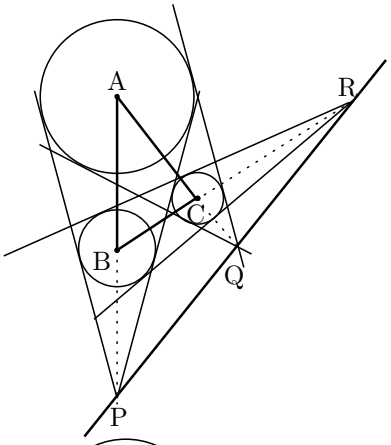
4 本の共通接線が引ける．その 6 個の交点のうち相似の中心となるものが 2 個ある．線分 AB の外分点となるものを**外相似点**，内分点となるものを**内相似点**という．これらが線分 AB を半径の比に外分する点と内分する点であることはただちにわかる．



この用語を用いるとモンジュの定理は次のようになる．

定理 94 互いに外部にある 3 円がある．2 円の外相似点が 3 個できるがそれらは共線である．

南海　3 円の中心を A, B, C とし，△ABC と三つの外相似点に関してメネラウスの定理を用いることにより，これを示してほしい．



太郎　三つの外相似点を P, Q, R とし，3 円の半径を r_1, r_2, r_3 とする．このとき

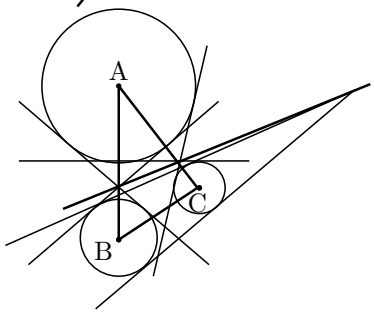
$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}=\frac{r_2}{r_1},\ \frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{BR}}=\frac{r_3}{r_2},\ \frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=\frac{r_1}{r_3}$$

であるから

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=1$$

従って 3 点 P, Q, R は共線である．　□

太郎　すると比率は同じことなので，二つの内相似点と一つの外相似点も共線ではありませんか．



南海　その通り．さて今回の平面図形を空間図形で示すという観点から，三つの外相似点共線であることの別解を示そう．

図は描きにくいのだが，これを自分の頭の中で描いてほしい．

別解　3 点 A, B, C を中心とし，半径が r_1, r_2, r_3 の三つの球を考える．これらは中心の乗っている平面 α に関して対称である．

3 球に接する平面が 2 枚できる．対称性からその交線 l は α 上にある．

一方点 P は A と B を中心とする 2 球の相似の中心なので，2 球の共通接平面は点 P を通る．よって点 P は l 上にある．Q, R も l 上にある．つまりこの 3 点は直線 l 上にある．

太郎　確かに．

南海　『数学対話』では「パスカルの定理」「パップスの定理」とそして今回の「デザルグの定理」と，射影幾何に関係する話題が 3 題になった．それぞれ具体的な問題から入っているので，射影座標は「パスカルの定理」にでているが双対原理は「パップスの定理」で出てくる，という具合で体系的にはなっていない．いずれこれらをまとめてもう少し体系的に整理したいと思う．今日はここまでとしよう．

3.16　ポンスレの定理

2011.921/2002.1.25

南海　この「ポンスレの定理」は，私が 1996〜7 年頃いろいろ計算したものが基礎になっている．その計算などをもとに「ポンスレの定理」を青空学園に上げてからずいぶん時間が経った．その後，二回増訂している．円の場合を一般的に示したもの，それから一般の二次曲線で代数的に証明した部分である．これを書いたのは五，六年前ではないかと思う．

こうして，入試問題からはじめて，その文字定数を一般的において解いてゆくと，必ずしも実数解とならない 4 次方程式が現れる．その正体を調べると，$n=3$ のとき虚な共通接線が関係している．また除外点がないようにしようとすると，必然的に射影直線，射影平面が必要になる．こうして入試問題を解明しようとすると，複素射影平面が導入される．

『幾何学の精神』を準備してきて，再びポンスレの定理を取りあげることになる．その準備のためにこの「ポンスレの定理」を読みかえしていると，一，二論証が不十分なところが見つかった．とりあえず，楕円曲線に踏み込まない範囲でこれをまとめ直しておくことにした．楕円曲線にかかわらない範囲でポンスレの定理を取りあげるならば，これで十分であると思う．

『幾何学の精神』では，ここでの論を一般化し，古典的で射影幾何的なポンスレの定理の証明，あるいは逆に楕円曲線の考察をふまえ，代数幾何的にポンスレの定理の意味を深めること，これらをおこなう予定である．(2011.9.21)

3.16.1　三つの入試問題の分析

拓生　最近，三つのよく似た問題に出会いました．まず問題を見て下さい．

例題 3.16.1　［88 名大］

放物線 $y=x^2-2$ 上に相異なる三点，$\mathrm{P}(a,\ a^2-2)$，$\mathrm{Q}(b,\ b^2-2)$，$\mathrm{R}(c,\ c^2-2)$ がある．原点を中心とする半径 1 の円を S とし，直線 PQ，直線 PR はそれぞれ S に接するとする．このとき，直線 QR もまた S に接することを証明せよ．

例題 3.16.2　［90 京大前期理系］

円 $C:x^2+y^2=1$ を内部に含む楕円 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ がある．D 上の一点 $\mathrm{P}(0,\ b)$ から C にひとつの接線をひき，その延長が再び D と交わる点を Q とする. Q から C に PQ とは異なる接線をひき，その延長が再び D と交わる点を R とする. R から C に QR とは異なる接線をひき，その延長が再び D と交わる点を S とすると $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となった．このとき a を b の関数として表わせ．

例題 3.16.3　［90 東大前期理系］

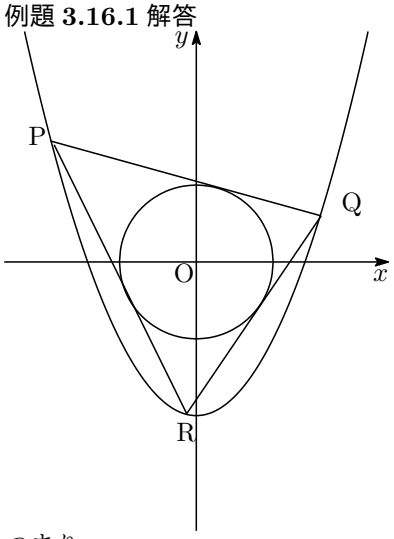
円 $x^2+y^2=1$ を C_0，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ を C_1 とする．C_1 上のどんな点 P に対しても，P を頂点にもち，C_0 に外接して C_1 に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を $a,\ b$ で表せ．

南海　とりあえず三つの問題自身はできたか．

拓生　はい．名古屋大，京大の問題は難しくありません．東大のも何とかなりました．

南海　拓生君は次のような解答を示した．

例題 3.16.1 解答



直線 PQ の式は，

$$(a-b)(y-b^2+2)=(a^2-2-b^2+2)(x-b)$$

より，$a-b\neq 0$ に注意すれば，

$$(a+b)x-y-ab-2=0$$

これが円に接するので，

$$\frac{|-ab-2|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=1$$

つまり，

$$(ab+2)^2=(a+b)^2+1$$

同様に

$$(ac+2)^2=(a+c)^2+1$$

従って，b と C は

$$(at+2)^2=(a+t)^2+1$$

の二つの解である．t について整理すると，

$$(a^2-1)t^2+2at-a^2+3=0$$

解と係数の関係より，

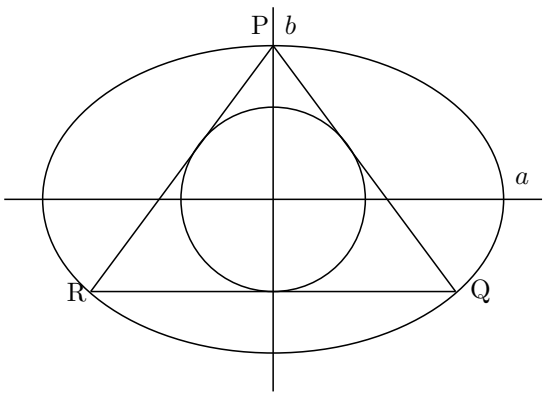
$$b+c=-\frac{2a}{a^2-1},\quad bc=\frac{-a^2+3}{a^2-1}$$

ここで，

$$\begin{aligned}(b+c)^2+1 &= \left(-\frac{2a}{a^2-1}\right)^2+1=\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)^2\\ &= \left(\frac{-a^2+3}{a^2-1}+2\right)^2=(bc+2)^2\end{aligned}$$

これは，直線 QR もまた S に接することを示している． □

例題 3.16.2 解答



S = P となるということは，P から円に二つの接線を引き，楕円との交点を Q，R とするとき，直線 QR が再び円に接する，ということである．P が y 軸上の点であり，円も楕円も y 軸対称の位置にあるので，直線 QR が再び円に接するのは，Q と R の y 座標が -1 のときである．

従って題意をみたすQとRはあるとすれば一組のみであるから，QとRをそのy座標が-1の楕円上の点とするとき，PQ, PRが円と接することがS = Pとなるための条件である．$\mathrm{P}(0,b)$，$\mathrm{Q},\mathrm{R}\left(\pm a\sqrt{1-\dfrac{1}{b^2}},-1\right)$である．PQ，PRの式は，

$$\frac{-1-b}{\pm a\sqrt{1-\dfrac{1}{b^2}}}x-y+b=0$$

これが$x^2+y^2=1$と接するので，

$$\frac{|b|}{\sqrt{\dfrac{(b+1)^2}{a^2\left(1-\dfrac{1}{b^2}\right)}+1}}=1$$

これから，

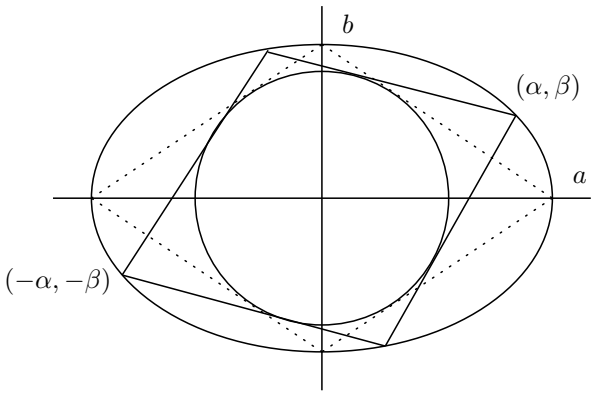
$$a=\frac{b}{b-1}$$

を得る．これは

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

でもある． □

例題 3.16.3 解答



［**必要条件**］Pを$(0,b)$とし，$\mathrm{Q}(a,0)$とする．Pを頂点の一つとする平行四辺形が存在するためには，円と楕円がともにx軸，y軸に関して対称であるから，PQが円に接しなければならない．

$$\mathrm{PQ}:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

であるから，

$$\frac{|-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}=1$$

つまり，

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

が必要である．

［**十分条件**］$\mathrm{P}(\alpha,\beta)$とする．$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$のとき，題意をみたす平行四辺形が存在することを示せばよい．Pを頂点とし，$\mathrm{R}(-\alpha,-\beta)$を向かい合う頂点とする．P，およびRを通る直線を

$$y=m(x\mp\alpha)\pm\beta\quad(\text{複号同順})$$

とする．これが円に接する条件は

$$\frac{|\alpha m-\beta|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

である．つまり，

$$(\alpha^2-1)m^2-2\alpha\beta m+\beta^2-1=0$$

この二解を m_1, m_2 とする．解と係数の関係から，

$$m_1+m_2=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-1},\quad m_1m_2=\frac{\beta^2-1}{\alpha^2-1}$$

P を通る傾き m_1 の直線と，R を通る傾き m_2 の直線を

$$y=m_1(x-\alpha)+\beta,\quad y=m_2(x+\alpha)-\beta$$

とする．P と R を頂点とする平行四辺形が存在するためには，この二直線の交点が再び楕円上にあればよい．

交点は

$$\begin{aligned} x &= \frac{(m_1+m_2)\alpha-2\beta}{m_1-m_2}=\frac{2\beta}{(m_1-m_2)(\alpha^2-1)} \\ y &= \frac{2m_1m_2\alpha-(m_1+m_2)\beta}{m_1-m_2}=\frac{-2\alpha}{(m_1-m_2)(\alpha^2-1)} \end{aligned}$$

ここで $(m_1-m_2)^2=\dfrac{4(\alpha^2+\beta^2-1)}{(\alpha^2-1)^2}$ に注意して，この交点を楕円の式に代入する．

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2-1}\left(\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\alpha^2}{b^2}\right)=1$$

が成り立てばよい．ところが $\beta^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2)$ であるから，これを代入して整理すると，

$$(a^2+b^2-a^2b^2)\{a^2b^2+(a^2-b^2)\alpha^2\}=0$$

となる．

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

より，$a^2+b^2-a^2b^2=0$．つまり $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ は十分条件である． □

南海　東大の問題は，円に外接する平行四辺形は菱形であることを使えばもっと簡単にできる．しかしそれは受験数学的な方法でポンスレの定理に対する個別の対応になる．上のように一般的に考えて解くことは大切なことだ．

拓生　P → Q → R → S と順にとって S = P になるのと，P から二つの接線 PQ と PR を引いたとき，QR もまた円に接することとは同値です．それは，外部の点から円への接線がちょうど 2 本引けることからわかります．

そこで，京大の問題は，P を特別な点としたとき S = P となる条件を求めよというものです．一方，名大の問題は三点が一般的に文字で与えられているのですから，P をどこにとっても，S = P となるというのです．また東大の問題は 4 点について，二つの問題の中間を主張していて，平行四辺形という条件にしぼれば，常に同様のことが成り立つ，と主張しています．ある 4 点を頂点とする平行四辺形が存在することから必要条件を求め，そのときつねに指定された点を頂点とする平行四辺形が存在することを示すのですから．

それぞれ類似のことを証明させようとしていますが，また同時に少しずつ違っていて，どのようなことが成り立つのか，背景にどのような事実があるのか，はっきりわかりません．

南海　問題とされていることがそれぞれ違うのは，入試問題としての難易を調節するためである．こういうときにいちばんいいのは,「できるだけ一般的にとらえ，具体的に考える」ことだ．

拓生　東大の問題も必ずしも平行四辺形でなくても四辺形で成り立つ，のですか．

南海　いや，東大の問題では次のことに注意すれば結局は菱形しかないことがわかる．

> 同心の円と楕円があり，円が楕円の内部にあるとする．円に外接し楕円に内接する四角形は結局のところ平行四辺形しかない．

円に外接する四角形の隣りあう辺の長さは等しい．一方円も楕円も原点に関して対称なので，必ずひし形になる．

拓生　なるほど．すると一般に，

> 円と二次曲線で，ある点 P から順に接線を引いて，3 回目 (ないしは 4 回目) の点 S についてS = P になれば，P をどこにとっても常に S = P となる．

が成り立つということでしょうか．

南海　その通り．放物線と楕円が出てきたので，そこを「二次曲線」ととらえたのも大変よろしい．

南海　しかしさらに一般化すれば，中の円も「二次曲線」にしたくなる．また，3 および 4 で成り立つのだから，これを一般に n にしたくなる．二つの二次曲線が置かれた位置関係も制限が必要ない．一般に二つの二次曲線 C_0, C_1 と 3 以上の自然数 n に関して，

> C_1 上のある点を頂点の一つとし，C_0 に外接し C_1 に内接する n 角形が少なくとも一つ存在すれば，任意の点についてそれを頂点の一つとする同様の n 角形が存在する．

ことが成り立つと推測される．これは，**ポンスレの閉形定理**，あるいは略して**ポンスレの定理**とよばれている．一般の場合，複素射影幾何の場で証明される．これは後に考えたい．まず，上の三つの入試問題をそれぞれ一般的に考えよう．

3.16.2　特別な場合に閉形定理を計算で示す

南海　C_0 を円 $x^2+y^2=1$ とし，C_1 を

(i) 放物線 $y=ax^2-b$ で $n=3$ の場合．

(ii) 円 $(x-a)^2+y^2=r^2$ で $n=3$ の場合．

(iii) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で $n=3$ の場合．

(iv) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で $n=4$ の場合．

に分けて，計算で示してみよう．

3.16.2.1　放物線と円，$n=3$ の場合

南海　これをできるだけ問題の形にまとめるので，それぞれ計算していってほしい．解法は 2 通りありうる．

方法 A： 特定の点 P で成立するための定数に関する必要条件を求め，それが任意の点で成立するための十分条件でもあることを示す方法.

方法 B： C_1 上の点から多角形ができるために満たすべき方程式を求め，少なくとも一つ成立する点があればそれが恒等式とならねばならず，そのための定数に関する条件が定まり，そのとき，恒等式であるので任意の点で成立することを示す方法.

の両方でやってみよう.

例題 3.16.4　C_0 を円 $x^2+y^2=1$ とし，C_1 を放物線 $C_1 : y=ax^2-b$ を考える．ここで定数は条件 $a>0,\ a+\dfrac{1}{4a}<b$ を満たしているとする.

x 座標が ±1 と異なる C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2-b)$ から C_0 にひとつの接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を $\mathrm{Q}(s,\ as^2-b)$ とする．Q から C_0 に PQ とは異なる接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を R とする．R から C_0 に QR とは異なる接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を S とする.

(1) C_0 と C_1 は共有点をもたないことを示し，C_1 上の二点 P，Q に対し，直線 PQ が C_0 と接するための t と s に関する条件を求めよ.

(2) $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となるために t が満たすべき必要条件を求めよ.

(3) ［**方法 A**］P を $(0,-b)$ として，$\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となる定数に関する必要条件を求め，この条件が成立するとき，x 座標が ±1 と異なる C_1 上の任意の点 P に対して，常に $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となることを示せ.

(4) ［**方法 B**］ある点 P で $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となれば，(2) の方程式が恒等式になることを示し．そのための定数に関する条件を求め，そのとき任意の点 P で $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となることを示せ.

拓生　やってみます.

解答

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=ax^2-b \end{cases}$ において x^2 を消去する.

$$\frac{y+b}{a}+y^2=1$$

この判別式について

$$D=\frac{1}{a^2}-\frac{4b}{a}+4$$

ゆえに条件 $a+\dfrac{1}{4a}<b$ のときは $D<0$ である．C_0 と C_1 は共有点をもたない.

$\mathrm{P}(t,\ at^2-b),\ \mathrm{Q}(s,\ as^2-b)$ とする．直線 PQ の式は

$$(s-t)(y-at^2+b)=(as^2-at^2)(x-t)$$

である．$s\neq t$ なので両辺 $s-t$ で約して整理すると，

$$a(s+t)x-y-ast-b=0$$

となる．この PQ が C_0 に接する条件を求める．

$$\frac{|-ast-b|}{\sqrt{a^2(s+t)^2+1}}=1$$

つまり

$$(ast+b)^2-a^2(s+t)^2-1=0$$

これが求める条件である．

(2)　点 $\mathrm{P}(t,\ at^2-b)$ とする．

$$T(s,\,t)=(ast+b)^2-a^2(s+t)^2-1$$

とおく．$T(s,\,t)=0$ を s の二次方程式とみる．その解 s_1,s_2 に対して，$\mathrm{Q}(s_1,\ a{s_1}^2-b)$，$\mathrm{R}(s_2,\ a{s_2}^2-b)$ とする．この 2 点は，点 P を通り C_0 に接する直線を 2 本引いたとき，その接線の C_1 との交点である．S = P となることは，QR が再び C_0 と接すること，すなわち

$$T(s_1,\,s_2)=0$$

と同値である．

$$T(s,\,t)=a^2(t^2-1)s^2+2a(b-a)ts+b^2-a^2t^2-1$$

で，$t\neq\pm1$ であるから

$$s_1+s_2=\frac{-2a(b-a)t}{a^2(t^2-1)},\quad s_1s_2=\frac{b^2-a^2t^2-1}{a^2(t^2-1)}$$

$$\begin{aligned}T(s_1,\,s_2)&=\left(\frac{b^2-a^2t^2-1}{a(t^2-1)}+b\right)^2-\frac{4a^2(b-a)^2t^2}{a^2(t^2-1)^2}-1\\&=\frac{\{a(b-a)t^2+b(b-a)-1\}^2-4a^2(b-a)^2t^2-a^2(t^2-1)^2}{a^2(t^2-1)^2}\end{aligned}$$

したがって S = P となるための $\mathrm{P}(t,\ at^2-b)$ に関する必要十分条件は

$$\{a(b-a)t^2+b(b-a)-1\}^2-4a^2(b-a)^2t^2-a^2(t^2-1)^2=0$$

である．以下このように t に関する条件を示す式を $H(t)$ とおこう．

$$H(t)=\{a(b-a)t^2+b(b-a)-1\}^2-4a^2(b-a)^2t^2-a^2(t^2-1)^2$$

(3)　対称性から S = P となるために点 Q の y 座標は 1 でなければならない．$\mathrm{Q}\left(\sqrt{\dfrac{b+1}{a}},\ 1\right)$ とする．直線 PQ が円 C_0 に接すればよい．PQ の傾きは

$$\frac{b+1}{\sqrt{\dfrac{b+1}{a}}}=\sqrt{a(b+1)}$$

であるから

$$\mathrm{PQ}:\ y=\sqrt{a(b+1)}x-b$$

これが C_0 と接するので，中心との距離が半径に一致する．

$$\frac{|b|}{\sqrt{a(b+1)+1}}=1$$

これから $b^2=a(b+1)+1$，つまり $b^2-1=a(b+1)$．条件から $b>0$ なので，$b+1\neq 0$.

$$b-a=1$$

南海　名古屋大学の問題は確かにこの条件を満たしてる．
拓生　はい．$b-a=1$ のとき (2) の条件は

$$(at^2+a)^2-4a^2t^2-a^2(t^2-1)^2=0$$

となり，左辺は恒等的に 0 なので，任意の t で成立する．つまり任意の点 P で，P = S が成立し，条件 $b-a=1$ が十分条件であることが示された．
(4)
(2) の条件式 $H(t)$ を変形する．

$$\begin{aligned}H(t) &= a^2\{(b-a)^2-1\}t^4+2[ab(b-a)^2-a(b-a)-2a^2(a-b)^2+a^2]t^2\\ &\quad +\{b(b-a)-1\}^2-a^2\end{aligned}$$

ここで t^2 の係数の [　] 内は

$$\begin{aligned}&ab(b-a)^2-a(b-a)-2a^2(a-b)^2+a^2\\ =\ &a^3(b-2a)-2a^2b(b-2a)+ab^2(b-2a)-a(b-2a)\\ =\ &a(b-2a)(b^2-2ab+a^2-1)=a(b-2a)(b-a-1)(b-a+1)\end{aligned}$$

また定数項は

$$\begin{aligned}&\{b(b-a)-1\}^2-a^2\\ =\ &\{b^2-ab-1-a\}\{b^2-ab-1+a\}\\ =\ &(b+1)(b-a-1)(b-1)(b-a+1)\end{aligned}$$

ゆえに

$$H(t)=(b-a-1)(b-a+1)\{a^2t^4+2a(b-2a)t^2+b^2-1\}$$

となる．ここで t の複二次式 $H(t)$ の判別式をとると

$$\begin{aligned}D/4 &= a^2(b-2a)^2-a^2(b^2-1)\\ &= a^2(4a^2-4ab+1)\end{aligned}$$

$a+\dfrac{1}{4a}<b$ より，$D<0$ である．つまり (2) の条件式は実数解をもたない．ところが少なくとも一つ S = P となる点 P が存在した．つまり (2) の条件式に実数解が存在する．(2) の条件式は 4 次式で，少なくとも 5 つの解をもつので恒等的に 0 で係数はすべて 0 となり，$(b-a-1)(b-a+1)=0$ である．$a+\dfrac{1}{4a}<b$ なので $b=a+1$ である．このとき任意の点 P に対して (2) の条件式が成立し，S = P となる．　□

3.16.2.2　円と円の場合

拓生　結局**方法 B** でやればいいのですね.
南海　その通り．円と円の場合も次のように考えよう.

例題 3.16.5　$r,\ a$ は $0 < a < r-1$ を満たす正の定数とする．xy 平面の二つの円 $C_0\ :\ x^2+y^2=1,\ C_1\ :\ (x-a)^2+y^2=r^2$ がある.

C_1 上の一点 P から C_0 にひとつの接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を Q とする． Q から C_0 に PQ とは異なる接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を R とする． R から C_0 に QR とは異なる接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を S とする.

(1) C_1 上の点 P は，$(-r+a,\ 0)$ を除き $\left(\dfrac{r(1-t^2)}{1+t^2}+a,\ \dfrac{2rt}{1+t^2}\right)$ と媒介変数表示できることを示せ．また，$\mathrm{P}\left(\dfrac{r(1-t^2)}{1+t^2}+a,\ \dfrac{2rt}{1+t^2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{r(1-s^2)}{1+s^2}+a,\ \dfrac{2rs}{1+s^2}\right)$ とするとき，直線 PQ が C_0 と接するための t と s に関する条件を求めよ.

(2) $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となるために t が満たすべき必要条件を求めよ.

(3) (2) の方程式は少なくとも一つの実数解をもてば恒等式になることを示し．ある点 P で $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となれば，任意の点 P で $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となることを示せ.

拓生　やってみます.
解答
(1)

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin\theta &= 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot 2\tan\frac{\theta}{2}\\ &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

である．$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ によって $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ と表される．すべての実数に対して，$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\neq -1$ なので，円 C_1 上の点は $(-r+a,\ 0)$ を除いて $\left(\dfrac{r(1-t^2)}{1+t^2}+a,\ \dfrac{2rt}{1+t^2}\right)$ と表される.

$\mathrm{P}\left(\dfrac{r(1-t^2)}{1+t^2}+a,\ \dfrac{2rt}{1+t^2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{r(1-s^2)}{1+s^2}+a,\ \dfrac{2rs}{1+s^2}\right)$ のとき直線 PQ の方程式は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2rs}{1+s^2}-\frac{2rt}{1+t^2}\right)\left\{x-a-\frac{r(1-t^2)}{1+t^2}\right\}\\ &\quad-\left\{\frac{r(1-s^2)}{1+s^2}-\frac{r(1-t^2)}{1+t^2}\right\}\left(y-\frac{2rt}{1+t^2}\right)=0\end{aligned}$$

つまり

$$(st-1)(x-a)-(s+t)y+r(st+1)=0$$

したがって直線 PQ が円 C_1 に接するための条件は

$$\frac{|(r-a)st+r+a|}{\sqrt{(st-1)^2+(s+t)^2}}=1$$

ゆえに求める $s,\ t$ の条件は

$$\{(r-a)st+r+a\}^2-(st-1)^2-(s+t)^2=0$$

(2)

$$T(s,\,t)=\{(r-a)st+r+a\}^2-(st-1)^2-(s+t)^2$$

とおく.

$$\begin{aligned}T(s,\,t) &= \{(r-a)st+r+a\}^2-(st-1)^2-(s+t)^2\\ &= [\{(r-a)^2-1\}t^2-1]s^2+2(r^2-a^2)ts+(r+a)^2-t^2-1\end{aligned}$$

となる.

拓生　s^2 の係数が 0 でないことが確認できません.

南海　ここを厳密にやるには，s や t そのものを射影直線上の媒介変数としなければならない．ここでは，P，Q が一般の位置にあるとして計算し，そのあと極限をとるという考え方でゆこう.

拓生　続けます．$T(s,\,t)=0$ を s の 2 次方程式と見たときその 2 解 $s_1,\ s_2$ は,

$$s_1+s_2=\frac{-2(r^2-a^2)t}{\{(r-a)^2-1\}t^2-1},\ s_1s_2=\frac{(r+a)^2-t^2-1}{\{(r-a)^2-1\}t^2-1}$$

である．このとき

$$s_1s_2-1=\frac{(r+a)^2-t^2-1-\{(r-a)^2-1\}t^2+1}{\{(r-a)^2-1\}t^2-1}=\frac{(r+a)^2-(r-a)^2t^2}{\{(r-a)^2-1\}t^2-1}$$

なので

$$\begin{aligned}(s_1+s_2)^2+(s_1s_2-1)^2 &= \frac{4(r^2-a^2)^2t^2+\{(r+a)^2-(r-a)^2t^2\}^2}{[\{(r-a)^2-1\}t^2-1]^2}\\ &= \frac{\{(r+a)^2+(r-a)^2t^2\}^2}{[\{(r-a)^2-1\}t^2-1]^2}\end{aligned}$$

したがって

$$T(s_1,\,s_2)=0$$

より

$$\begin{aligned}H(t) &= <(r-a)\{(r+a)^2-t^2-1\}+(r+a)[\{(r-a)^2-1\}t^2-1]>^2\\ &\quad -\{(r+a)^2+(r-a)^2t^2\}^2\end{aligned}$$

である．$H(t)=0$ が $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となるために t が満たすべき必要条件である.

(3)　$H(t)$ を整理する.

$$\begin{aligned}H(t) &= <(r-a)\{(r+a)^2-t^2-1\}+(r+a)[\{(r-a)^2-1\}t^2-1]\\ &\quad +\{(r+a)^2+(r-a)^2t^2\}>\\ &\quad \times <(r-a)\{(r+a)^2-t^2-1\}+(r+a)[\{(r-a)^2-1\}t^2-1]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\{(r+a)^2+(r-a)^2t^2\} > \\
= \quad & \left[\left\{-(r-a)+(r+a)(r-a)^2-(r+a)+(r-a)^2\right\}t^2\right. \\
& \qquad \left.+(r-a)(r+a)^2-(r-a)-(r+a)+(r+a)^2\right] \\
& \times\left[\left\{-(r-a)+(r+a)(r-a)^2-(r+a)-(r-a)^2\right\}t^2\right. \\
& \qquad \left.+(r-a)(r+a)^2-(r-a)-(r+a)-(r+a)^2\right] \\
= \quad & \{(r+a)(r-a)+(r+a)+(r-a)\}\{(r+a)(r-a)-(r+a)-(r-a)\} \\
& \qquad \times\{(r-a+1)t^2+r+a+1\}\{(r-a-1)t^2+r+a-1\} \\
= \quad & \{(r^2-a^2)^2-4r^2\}\{(r-a+1)t^2+r+a+1\}\{(r-a-1)t^2+r+a-1\}
\end{aligned}
$$

ところが $0<r-a-1$ のもとでは

$$
r-a+1>0,\ r+a+1>0,\ r-a-1>0,\ r+a-1>0
$$

なので,

$$
\{(r-a+1)t^2+r+a+1\}\{(r-a-1)t^2+r+a-1\}=0
$$

は実数解をもたない．ところが少なくとも一つ $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となる点 P が存在した．ゆえに (2) の条件式は恒等式であり，$\{(r+a)(r-a)-(r+a)-(r-a)\}\{(r+a)(r-a)+(r+a)+(r-a)\}=0$ である．$(r+a)(r-a)+(r+a)+(r-a)>0$ なので

$$
(r+a)(r-a)-(r+a)-(r-a)=0
$$

である．この条件は

$$
\frac{1}{r+a}+\frac{1}{r-a}=1
$$

あるいは

$$
2r=r^2-a^2
$$

とも書ける．このとき $(-r+a,\ 0)$ を除く任意の点 P に対して (2) の条件式が成立し，$\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となる．P が連続的に変化すれば S も連続的に変化する．ゆえに $(-r+a,\ 0)$ を除く任意の点 P に対して $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となるなら，P が $(-r+a,\ 0)$ のときも $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となる． □

南海　これは，ポンスレの定理の起源となる場合である．

拓生　a は外接円と内接円の中心間の距離で，外接円の半径 r と内接円の半径 1 の間に成り立つ関係です．一般的に，外接円の半径を R，内接円の半径を r とし，外心，内心を O, I とすると，

$$
\mathrm{OI}^2=R^2-2Rr
$$

が成り立ちます．これは 2012 年の宮崎大に出題され，京大でも，2002 年，2006 年，そして 2017 年に関連問題が出題，2018 年には東北大学でも出題されています．

チャップルの定理というのではないでしょうか．

南海　チャップルは三角形に内接する円と外接する円の，中心間と半径の相互関係として，上記定理を導いたのだろう．

しかしこの関係式は円の相互関係のみで記されており，三角形は関与していない．

拓生　確かにそうです．

南海　ポンスレはこのことから，この関係式を満たす 2 円に対して，つねに一方に外接し一方に内接する三角形が存在すること，そしてさらに，三角形の頂点の一つが任意の選べることに至ったのではないかと思われる．

さらにそれを 2 つの 2 次曲線，3 に変えて n と一般化していったのではないか．

拓生　そう考えると，これは確かにポンスレの定理の起源になるのですね．

3.16.2.3　中心の一致する楕円と円，$n=3$ の場合

南海　それでは次に円と楕円の場合に進もう．東大の過去問もあるので $n=3$ の場合だけではなく $n=4$ の場合も考えたい．$n=3$ の場合は基本的には円と円の場合と同様だ．

例題 3.16.6　xy 平面の円と楕円 $C_0 : x^2+y^2=1$, $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ がある．

定数は条件 $1<a$, $1<b$ を満たしているとする．

C_1 上の一点 P から C_0 にひとつの接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を Q とする． Q から C_0 に PQ とは異なる接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を R とする． R から C_0 に QR とは異なる接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を S とする．

(1) C_1 上の点 P は $(-a,\ 0)$ を除き $\left(\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2},\ \dfrac{2bt}{1+t^2}\right)$ と媒介変数表示できることを示せ．

また，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2},\ \dfrac{2bt}{1+t^2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a(1-s^2)}{1+s^2},\ \dfrac{2bs}{1+s^2}\right)$ とするとき，直線 PQ が C_0 と接するための t と s に関する条件を求めよ．

(2) $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となるために t が満たすべき必要条件を求めよ．

(3) (2) の方程式は少なくとも一つの実数解をもてば恒等式になることを示し．ある点 P で $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となれば，任意の点 P で $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となることを示せ．

拓生　これもできそうです．

解答

(1)　楕円 C_1 上の点の座標は $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と表されるので，これを t で表すと，

$$\left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\ \frac{2bt}{1+t^2}\right)$$

となる．ただし，$\theta=\pi$ に対応する点，すなわち $(-a,\ 0)$ は表し得ない．

$$\mathrm{P}\left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\ \frac{2bt}{1+t^2}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{a(1-s^2)}{1+s^2},\ \frac{2bs}{1+s^2}\right)\quad (t\neq s)$$

とおくと，直線 PQ の方程式は，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2bs}{1+s^2}-\frac{2bt}{1+t^2}\right)\left\{x-\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}\right\}\\ =\ &\left\{\frac{a(1-s^2)}{1+s^2}-\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}\right\}\left(y-\frac{2bt}{1+t^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &2b\{s(1+t^2)-t(1+s^2)\}\{(1+t^2)x-a(1-t^2)\}\\ &-a\{(1-s^2)(1+t^2)-(1-t^2)(1+s^2)\}\{(1+t^2)y-2bt\}=0\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} & s(1+t^2)-t(1+s^2) \\ = \quad & (s-t)-st(s-t)=(s-t)(1-st) \\ & (1-s^2)(1+t^2)-(1-t^2)(1+s^2) \\ = \quad & -2(s^2-t^2)=-2(s-t)(s+t) \end{aligned}$$

であり，$s \neq t$ であるから,

$$\mathrm{PQ}:\ b(1-st)\{(1+t^2)x-a(1-t^2)\}+a(s+t)\{(1+t^2)y-2bt\}=0$$

この定数項を計算すると,

$$\begin{aligned} & -ab(1-st)(1-t^2)-2ab(s+t)t \\ = \quad & -ab(1+st+t^2+st^3)=-ab(1+st)(1+t^2) \end{aligned}$$

となるので,

$$\mathrm{PQ}:\ b(1-st)x+a(s+t)y-ab(1+st)=0$$

これが円 C_0 と接するための必要十分条件は，原点とこの直線との距離が 1 になることであるから，求める必要十分条件は

$$\frac{|\,ab(1+st)\,|}{\sqrt{b^2(1-st)^2+a^2(s+t)^2}}=1$$

$$b^2(1-st)^2+a^2(s+t)^2-a^2b^2(1+st)^2=0$$

が求める条件である．

(2)

$$T(t,\ s)=a^2(s+t)^2+b^2(1-st)^2-a^2b^2(1+st)^2=0$$

とおく．これを s について整理する．

$$T(t,\ s)=(a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2)s^2+2(a^2-b^2-a^2b^2)ts+(a^2t^2+b^2-a^2b^2)$$

で，$T(t,\ s)=0$ は $t,\ s$ の両方に関する二次以下の方程式である．ある実数 t に対して，この方程式を s についての方程式とみたときの解 s が，$\mathrm{P}(t)$ から円 C_0 に引いた接線が C_1 と交わったときの C_1 上の点 Q を与える．

ここでも $a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2 \neq 0$ とする．このとき $T(t,\ s)=0$ は s の二次方程式で，$s_1,\ s_2$ がその 2 解となるので，解と係数の関係より,

$$s_1+s_2=\frac{-2(a^2-b^2-a^2b^2)t}{a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2},\quad s_1s_2=\frac{a^2t^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2}$$

P が満たすべき条件は円と円の場合と同様に

$$T(s_1,\ s_2)=0$$

となることである．ところで,

$$T(s_1,\ s_2) \quad = \quad a^2\left\{\frac{-2t(a^2-b^2-a^2b^2)}{a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2}\right\}^2+b^2\left(1-\frac{a^2t^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
& -a^2b^2\left(1+\frac{a^2t^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2}\right)^2 \\
= \quad & \frac{1}{(a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2)^2}\times\{4a^2t^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2 \\
& \quad +b^2(a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2-a^2t^2-b^2+a^2b^2)^2 \\
& \quad -a^2b^2(a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2+a^2t^2+b^2-a^2b^2)^2\}
\end{aligned}
$$

そこで，この { } 内を $H(t)$ とおく．これを t の式として整理すると，

$$
\begin{aligned}
H(t) \quad = \quad & \{b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2-a^2b^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2\}t^4 \\
& +2\{2a^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2-b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2 \\
& \quad -a^2b^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2\}t^2 \\
& +b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2-a^2b^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2
\end{aligned}
$$

となる．この各項の係数を因数分解する．t^4 の係数と定数係数は同一で，

$$
\begin{aligned}
& b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2-a^2b^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2 \\
= \quad & (a^2b-b^3+a^2b^3+a^3b+ab^3-a^3b^3) \\
& \times \qquad (a^2b-b^3+a^2b^3-a^3b-ab^3+a^3b^3) \\
= \quad & b(a+1)(a+ab-b)(a-ab+b)\cdot b(a-1)(ab+b+a)(ab+b-a) \\
= \quad & b^2(1+a)(1-a)(ab+a+b)(ab+a-b)(ab-a+b)(ab-a-b)
\end{aligned}
$$

また，t^2 の係数について，

$$
\begin{aligned}
& 2a^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2-b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2-a^2b^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2 \\
= \quad & 2\{a^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2-b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2\} \\
& \quad +b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2-a^2b^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
& a^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2-b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2 \\
= \quad & (a^3-ab^2-a^3b^2+a^2b-b^3+a^2b^3) \\
& \quad \times(a^3-ab^2-a^3b^2-a^2b+b^3-a^2b^3) \\
= \quad & (a-b)(a+b+ab)(a+b-ab)\cdot(a+b)(a-b+ab)(a-b-ab) \\
= \quad & (a+b)(a-b)(ab+a+b)(ab+a-b)(ab-a+b)(ab-a-b)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
& 2a^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2-b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2-a^2b^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2 \\
= \quad & 2(a+b)(a-b)(ab+a+b)(ab+a-b)(ab-a+b)(ab-a-b) \\
& \quad +b^2(1+a)(1-a)(ab+a+b)(ab+a-b)(ab-a+b)(ab-a-b) \\
= \quad & (ab+a+b)(ab+a-b)(ab-a+b)(ab-a-b) \\
& \quad \times\{2(a^2-b^2)+b^2(1-a^2)\} \\
= \quad & (ab+a+b)(ab+a-b)(ab-a+b)(ab-a-b)(2a^2-b^2-a^2b^2)
\end{aligned}
$$

したがって

$$\begin{aligned} H(t) &= (ab+a+b)(ab+a-b)(ab-a+b)(ab-a-b) \\ &\quad \times\{b^2(1-a^2)t^4+2(2a^2-b^2-a^2b^2)t^2+b^2(1-a^2)\} \end{aligned}$$

条件は $H(t)=0$ である．

(3)

$$b^2(1-a^2)t^4+2(2a^2-b^2-a^2b^2)t^2+b^2(1-a^2)=0$$

の判別式をとると

$$D/4=(2a^2-b^2-a^2b^2)^2-b^4(1-a^2)^2=4a^2(a^2-b^2)(1-b^2)$$

$1<b$ なので，$a>b$ なら $D<0$ である．

$a \leqq b$ のとき，$H(t)$ を t^2 の二次式と見たときの軸は

$$-\frac{2a^2-b^2-a^2b^2}{b^2(1-a^2)}=-\frac{a^2-b^2+a^2(1-b^2)}{b^2(1-a^2)}<0$$

となる．(2) の条件式は t^4 の係数が 0 でないので，t^2 の二次方程式となる．その二次方程式の 2 解の積は 1 なので，この場合 t^2 の二次方程式は負の 2 解をもつ．つまり (2) の条件式は t の四次方程式として実数解をもたない．ところが少なくとも一つ $\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となる点 P が存在した．ゆえに (2) の条件式は恒等的に 0 でなければならず，

$$(ab+a+b)(ab+a-b)(ab-a+b)(ab-a-b)=0$$

である．$a>1,\ b>1$ だから，

$$\begin{aligned} &ab+a+b>0 \\ &ab+a-b=b(a-1)+a>0 \\ &ab-a+b=a(b-1)+b>0 \end{aligned}$$

したがって，求める条件は，

$$ab=a+b \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

である． □

南海　ここで一つ注意したい．(3) で求めた $H(t)$ の定数を除いた部分は (2) で求めた $T(t,\ s)$ において

$$\lim_{s\to t} T(t,\ s)$$

としたものだ．

拓生　本当だ．これは接線の定義から $\mathrm{P}(t)\mathrm{P}(s)$ が $\mathrm{P}(t)$ での接線になるのですね．ということはこの場合 $H(t)=0$ は C_0 と C_1 の共通接線を与える t の条件ということになります．

南海　その意味は後に考えよう．

3.16.2.4　中心の一致する楕円と円，$n=4$ の場合

南海　$n=4$ についても同様にするためには，「消去法」が必要で，これは私の方から提起したい．次の問題である．

補題 20　s に関する二つの二次式

$$As^2+Bs+C=0,\ A's^2+B's+C'=0$$

から s を消去すれば

$$(AC'-A'C)^2=(BC'-B'C)(AB'-A'B)$$

となる.

証明　$As^2+Bs=-C,\ A's^2+B's=-C'$ より,

$$AA's^2+BA's=-A'C,\ AA's^2+AB's=-AC'$$

$$\therefore\quad (BA'-B'A)s=AC'-A'C\cdots①$$

また,

$$AB's^2+BB's=-B'C,\ A'Bs^2+BB's=-BC'$$

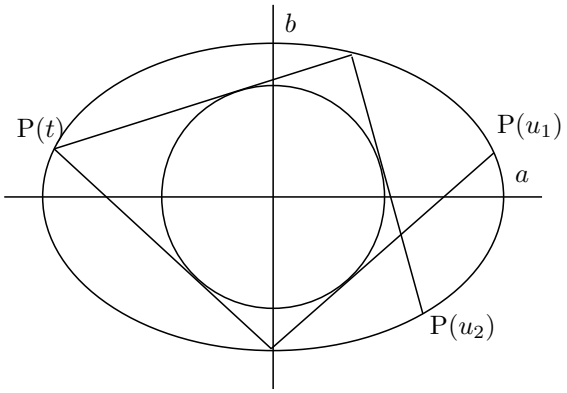
$$\therefore\quad (AB'-A'B)s^2=BC'-B'C\cdots②$$

そこで, ② の両辺に $AB'-A'B$ をかけると, ① の左辺の 2 乗に一致する. すなわち,

$$(AB'-A'B)(BC'-B'C)=(AB'-A'B)^2s^2=(AC'-A'C)^2$$

である. □

南海



さて，$n=4$ のときは，$T(t,\ s)=0$ と $T(s,\ u)=0$ を考える．これから s を消去する．すると P から 2 回目の操作で定まる点の座標を与える 2 次方程式が得られるはずだ．

この 2 次方程式が重解をもてば，つまり図で $u_1=u_2$ となれば，確かに 4 回で閉じる．それが P を頂点とし，C_0 に外接し，C_1 に内接する四角形が存在するための P に関する必要十分条件になるはずだ．

拓生　やってみます．$T(t,\ s)=0,\ T(s,\ u)=0$ から s を消去し，$t\neq u$ の条件の下で $t,\ u$ の関係式を求める．

$$\begin{aligned} & T(t,\ s)\\ =\ & (a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2)s^2+2(a^2-b^2-a^2b^2)ts+(a^2t^2+b^2-a^2b^2)\\ & T(u,\ s)\\ =\ & (a^2+b^2u^2-a^2b^2u^2)s^2+2(a^2-b^2-a^2b^2)us+(a^2u^2+b^2-a^2b^2)\end{aligned}$$

となるから，これより s を消去する.

$$\begin{aligned} & (AC'-A'C)^2\\ =\ & \{(a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2)(a^2u^2+b^2-a^2b^2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -(a^2+b^2u^2-a^2b^2u^2)(a^2t^2+b^2-a^2b^2)\}^2 \\
= \ & \{a^4(u^2-t^2) \\
& -b^4(u^2-t^2)+2a^2b^4(u^2-t^2)-a^4b^4(u^2-t^2)\}^2 \\
= \ & [(t^2-u^2)\{(a^2b^2-b^2)^2-a^4\}]^2 \\
= \ & \{(t+u)(t-u)(a^2b^2-b^2+a^2)(a^2b^2-b^2-a^2)\}^2 \\
& BC'-B'C \\
= \ & 2(a^2-b^2-a^2b^2) \\
& \times\{t(a^2u^2+b^2-a^2b^2)-u(a^2t^2+b^2-a^2b^2)\} \\
= \ & 2(a^2-b^2-a^2b^2)\{a^2tu(u-t)-(b^2-a^2b^2)(u-t)\} \\
= \ & 2(a^2-b^2-a^2b^2)(u-t)\{a^2tu-(b^2-a^2b^2)\} \\
& AB'-A'B \\
= \ & 2(a^2-b^2-a^2b^2) \\
& \times\{u(a^2+b^2t^2-a^2b^2t^2)-t(a^2+b^2u^2-a^2b^2u^2)\} \\
= \ & 2(a^2-b^2-a^2b^2)\{a^2(u-t)-(b^2-a^2b^2)ut(u-t)\} \\
= \ & 2(a^2-b^2-a^2b^2)(u-t)\{a^2-(b^2-a^2b^2)ut\}
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
& \{(t+u)(t-u)(a^2b^2-b^2+a^2)(a^2b^2-b^2-a^2)\}^2 \\
= \ & 2(a^2-b^2-a^2b^2)(u-t)\{a^2tu-(b^2-a^2b^2)\} \\
& \times 2(a^2-b^2-a^2b^2)(u-t)\{a^2-(b^2-a^2b^2)ut\}
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
& (t+u)^2(t-u)^2 \\
& \times(a^2b^2-b^2+a^2)^2(a^2b^2-b^2-a^2)^2 \\
= \ & 4(u-t)^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2 \\
& \times\{a^2tu-(b^2-a^2b^2)\}\{a^2-(b^2-a^2b^2)ut\}
\end{aligned}
$$

したがって，$t \neq u$ より,

$$
\begin{aligned}
& (t+u)^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2 \\
= \ & 4(a^2-b^2-a^2b^2)^2 \\
& \times[-a^2(b^2-a^2b^2)t^2u^2+\{a^4+(b^2-a^2b^2)^2\}ut-a^2(b^2-a^2b^2)]
\end{aligned}
$$

さて，P を一つの頂点とし，C_0 に外接しかつ C_1 に内接する四辺形がつくられるための条件は, 今求めた等式を u に関する二次方程式と見たとき，u がただ一つだけ存在することである．そこで, この等式を u について整理する.

$$
\begin{aligned}
& \{(a^2-b^2+a^2b^2)^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2+4a^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2(b^2-a^2b^2)t^2\}u^2 \\
& +2t[(a^2-b^2+a^2b^2)^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2-2(a^2-b^2-a^2b^2)^2\{a^4+b^4(1-a^2)^2\}]u \\
& +4a^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2(b^2-a^2b^2)+(a^2-b^2+a^2b^2)^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2t^2=0
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
\begin{aligned}
&[\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2+4a^2b^2\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2(1-a^2)t^2]u^2\\
&\quad+2t[\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2-2\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4+b^4(1-a^2)^2\}]u\\
&\quad+4a^2b^2(1-a^2)\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2+\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2t^2=0
\end{aligned}
$$

となる．この u の二次方程式の判別式を D_2 とおく．

$$
\begin{aligned}
D_2/4 &= t^2[\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2-2\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4+b^4(1-a^2)^2\}]^2\\
&\quad-[\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2+4a^2b^2\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2(1-a^2)t^2]\\
&\quad\times[4a^2b^2(1-a^2)\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2+\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2t^2]\\
&= -4a^2b^2(1-a^2)\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2t^4\\
&\quad+[4\{a^2-b^2(1+a^2)\}^4\{a^4+b^4(1-a^2)^2\}^2\\
&\quad-4\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4+b^4(1-a^2)^2\}\\
&\quad-16a^4b^4(1-a^2)^2\{a^2-b^2(1+a^2)\}^4]t^2\\
&\quad-4a^2b^2(1-a^2)\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2
\end{aligned}
$$

そこで，t^2 の係数を因数分解すると,

$$
\begin{aligned}
&4\{a^2-b^2(1+a^2)\}^4\{a^4+b^4(1-a^2)^2\}^2\\
&\quad-4\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4+b^4(1-a^2)^2\}\\
&\quad-16a^4b^4(1-a^2)^2\{a^2-b^2(1+a^2)\}^4\\
&= 4\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\\
&\quad\times[\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4+b^4(1-a^2)^2\}^2\\
&\quad-\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2\{a^4+b^4(1-a^2)^2\}\\
&\quad-4a^4b^4(1-a^2)^2\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2]\\
&= 4\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2\cdot 2a^2b^2(2b^2-a^2-1)
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
D_2/4 &= -4\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2\\
&\quad\times[a^2b^2(1-a^2)t^4-2a^2b^2(2b^2-a^2-1)t^2+a^2b^2(1-a^2)]\\
&= 4\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2a^2b^2\\
&\quad\times[(a^2-1)t^4+2(2b^2-a^2-1)t^2+(a^2-1)]
\end{aligned}
$$

となる.

拓生　$D_2/4=0$ が t が満たすべき条件式です．そこで，

$$
\begin{aligned}
H(t) &= 4\{a^2-b^2(1+a^2)\}^2\{a^4-b^4(1-a^2)^2\}^2a^2b^2\\
&\quad\times[(a^2-1)t^4+2(2b^2-a^2-1)t^2+(a^2-1)]
\end{aligned}
$$

とします．ここで t^2 の二次式

$$
(a^2-1)t^4+2(2b^2-a^2-1)t^2+(a^2-1)=0
$$

の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D/4 &= (2b^2-a^2-1)^2-(a^2-1)^2 \\ &= 4(b^2-a^2)(b^2-1) \end{aligned}$$

$1<b$ なので，$a>b$ なら $D<0$ である．

$a \leqq b$ のとき，$H(t)$ を t^2 の二次式と見たときの軸は

$$-\frac{2b^2-a^2-1}{a^2-1} = -\frac{b^2-a^2+b^2-1}{a^2-1} < 0$$

となる．$H(t)$ を t^2 の二次方程式と見たときの 2 解の積は 1 なので，この場合 t^2 の 2 次方程式は負の 2 解をもつ．つまり $H(t)=0$ は t の 4 次方程式として実数解をもたない．もし $H(t)=0$ となる t が 1 点でも存在すれば,$H(t)$ が恒等的に 0 とならねばならない．このとき任意の t に対して P を頂点とする四辺形が存在する．よって, 求める条件は,

$$\begin{aligned} & \{a^2-b^2(1+a^2)\}\{a^4-b^4(1-a^2)^2\} \\ = \ & (a^2-b^2-a^2b^2)(a^2+b^2-a^2b^2)(a^2-b^2+a^2b^2)=0 \end{aligned}$$

そして，$a>1$, $b>1$ なので,

$$a^2+b^2-a^2b^2=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

となる． □

南海　ここで得られた条件は，東大の問題の結果と同じだ．

拓生　$n=3$ のときの $H(t)$ と $n=4$ のときの $H(t)$ の式は違いますが，その判別式の正負は同じです．

南海　そうだ．その意味は何かあるのだろうが宿題にしておこう．

3.16.3　円の場合を一般的に考える

南海　二つの二次曲線 C_0, C_1 と 3 以上の自然数 n に関して，

> C_1 上のある点を頂点の一つとし，C_0 に外接し C_1 に内接する n 角形が一つでも存在すれば，任意の点についてそれを頂点の一つとする同様の n 角形が存在する．

ことが成り立つこの一般化された問題に可能なかぎり近づいてみよう．まず円の場合である．この場合は根軸が必要だ．

3.16.3.1　根軸について

南海　『数学対話』の「根軸について」で次の定理を証明した．

二つの二次式

$$\begin{cases} f(x,y) &= x^2+y^2-2ax-2by+c \\ g(x,y) &= x^2+y^2-2px-2qy+r \end{cases}$$

がある．$f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ で円が定まるとし，その円を C_f, C_g とする．このとき C_f, C_g は同心円でないとする．

(1) xy 平面の点 P から C_f と C_g に接線を引きその接点をそれぞれ T, S とする．$\overline{\mathrm{PT}} = \overline{\mathrm{PS}}$ となる点 P の軌跡は

$$-2(a-p)x - 2(b-q)y + c - r = 0$$

以下このようにして定まる軌跡を「C_f と C_g の根軸」と呼ぶ．

(2) -1 でない実数 k に対して，$h_k(x,\ y) = f(x,\ y) + kg(x,\ y)$ とおき，$h_k(x,\ y) = 0$ で円が定まるとき，これを C_k とする．二円 $C_f,\ C_k$ の根軸は，二円 $C_f,\ C_g$ の根軸と一致する．

(3) 逆に，平面上の $C_f,\ C_g$ とは異なる円 C_0 と C_f との根軸が，二円 $C_f,\ C_g$ の根軸と一致したとする．このとき円 C_0 の式はある実数 $j,\ k$ によって $h(x,\ y) = jf(x,\ y) + kg(x,\ y) = 0$ と表される．

根軸とは二つの円が交わっているときは，二つの共有点を通る直線だが，この直線は，二つの円への接線の長さが等しい点の軌跡でもある．この観点からすると，二円が交わらなくても意味をもつ．ここで「二つの円への接線の長さが等しい」としたところを,「二つの円への接線の長さの比が等しい」と変えるとどうなるか．

拓生　記号は上と同じにします．点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ から二円への接線の長さは

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{PT}}^2 &= \overline{\mathrm{PO_f}}^2 - (a^2+b^2-c) \\ &= \{(X-a)^2 + (Y-b)^2\} - (a^2+b^2-c) \\ &= f(X,\ Y) \\ \overline{\mathrm{PS}}^2 &= \overline{\mathrm{PO_g}}^2 - (p^2+q^2-r) \\ &= \{(X-p)^2 + (Y-q)^2\} - (p^2+q^2-r) \\ &= g(X,\ Y) \end{cases}$$

よって接線の長さの比が k であるとすれば

$$f(X,\ Y) = kg(X,\ Y)$$

となり，求める点の軌跡は

$$f(x,\ y) - kg(x,\ y) = 0$$

あっ．これはまた根軸が同じになる円になる．

南海　そうなのだ．二つの円 $f(x,\ y) = 0,\ g(x,\ y) = 0$ に対して

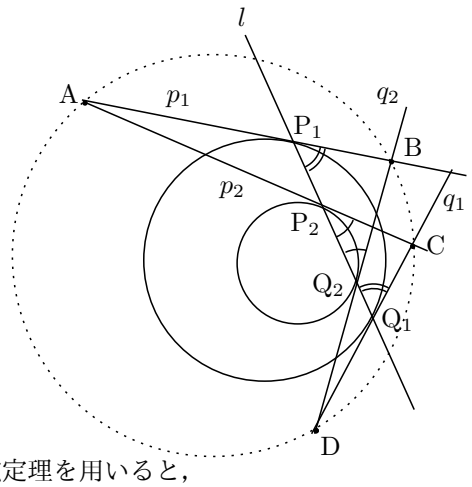
$$f(x,\ y) - kg(x,\ y) = 0$$

は，$k = 1$ なら根軸だが，k が正の場合 $k \neq 1$ でもこのような意味がある．$k < 0$ のときの意味などを考えればおもしろいはずだが，今は次のことを確認しておこう．

補題 21　二つの円への接線の長さの比が一定である点の軌跡は，これら二円と根軸を共有する円になる．

これを用いると次の事実が示される．

補題 22　一つの直線 l が，二つの円 O_1, O_2 に，それぞれ P_1, Q_1 と P_2, Q_2 で交わっている．これらの交点におけるそれぞれの円の接線を p_1, q_1 : p_2, q_2 とする．このとき p_1 と p_2，p_1 と q_2，q_1 と p_2，q_1 と q_2 の交点 A，B，C，D は，二つの円 O_1, O_2 と根軸を共有する同一円の周上にある．



証明　l と O_1, O_2 の交点での接線が l となす角を α, β とする．また図のように接線と円との交点を P_1, Q_1 : P_2, Q_2 とする．

$\triangle \mathrm{AP_1P_2}$，$\triangle \mathrm{BP_1Q_2}$, $\triangle \mathrm{CQ_1P_2}$，$\triangle \mathrm{DQ_1Q_2}$ に正弦定理を用いると，

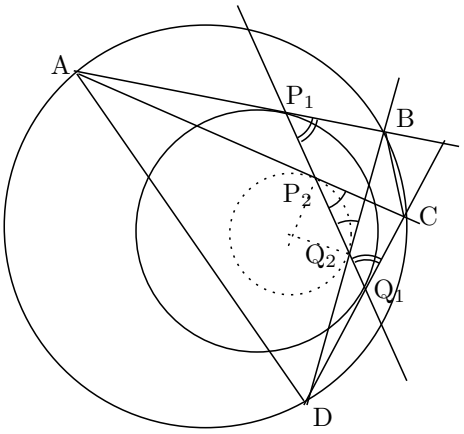
$$\frac{\mathrm{AP_1}}{\mathrm{AP_2}} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha)},\ \frac{\mathrm{BP_1}}{\mathrm{BQ_2}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\ \frac{\mathrm{CQ_1}}{\mathrm{CP_2}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\ \frac{\mathrm{DQ_1}}{\mathrm{DQ_2}} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha)}$$

つまり

$$\frac{\mathrm{AP_1}}{\mathrm{AP_2}} = \frac{\mathrm{BP_1}}{\mathrm{BQ_2}} = \frac{\mathrm{CQ_1}}{\mathrm{CP_2}} = \frac{\mathrm{DQ_1}}{\mathrm{DQ_2}}$$

したがって A，B，C，D は二円への接線の長さの比が等しいので，この二円と根軸を共有するある円の周上にある．　□

3.16.3.2　円の場合の一般的証明



南海　「ポンスレの閉形定理」に生かすために，この補題を次のようにいいかえよう．

円に内接する四辺形 ABCD の対辺 AB, CD が一つの円に接するとき，その接点 P_1, Q_1 を結ぶ直線が線分 AC, BD と交わる点を P_2, Q_2 とすれば，この点で AC, BD に接する円が存在し，かつこの円は他の二円と根軸を共有する．

P_2, Q_2 から AC, BD に垂線を引きその交点を中心にして，P_2 をとおる円を描けばそれは Q_2 も通り，題意をみたす．

これから次のポンスレの閉形定理が得られる．

定理 95 (ポンスレの定理)　与えられた円 O に内接する n 角形 $\mathrm{A_1A_2\cdots A_n}$ がある．

辺 $\mathrm{A_1A_2}$, $\cdots$, $\mathrm{A_{n-1}A_n}$ はそれぞれ円 O と根軸共有な定円 O_1, O_2, $\cdots$, O_{n-1} に接している．他の n 角形 $\mathrm{B_1B_2\cdots B_n}$ も辺 $\mathrm{B_1B_2}$, $\cdots$, $\mathrm{B_{n-1}B_n}$ がそれぞれ同じ定円 O_1, O_2, $\cdots$, O_{n-1} に接している．

このとき残る辺 $\mathrm{A_nA_1}$ と辺 $\mathrm{B_nB_1}$ は円 O と根軸共有な同一の定円 O_n に接している．

証明　円 O に内接する四辺形 $\mathrm{A_1A_2B_1B_2}$ において辺 $\mathrm{A_1A_2}$ と辺 $\mathrm{B_1B_2}$ は同一の定円 O_1 に接するから，$\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{A_2B_2}$ も O, O_1 と根軸を共有する一つの円 C に接する．同様に $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{A_3B_3}$ も O, O_2

と根軸を共有する一つの円 D に接する．円 D は $\mathrm{A_2B_2}$ に接し，しかも O, O_2, O_3 と根軸を共有する．ゆえに $C = D$ である．

こうして辺 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{A_2B_2}$, $\cdots$, $\mathrm{A_nB_n}$ は同じ円 C に接する．

四辺形 $\mathrm{A_1B_1A_nB_n}$ は円 O に内接し，辺 $\mathrm{A_1B_1}$ と辺 $\mathrm{A_nB_n}$ は円 O と根軸を共有する円 C と接する．ゆえに $\mathrm{A_1A_n}$ と $\mathrm{B_1B_n}$ も円 O, C と根軸を共有する一定の円に接する． □

この定理の特別な場合として

定理 96 (二円の場合の閉形定理)　一つの定円 C_1 に内接し，他の一つの定円 C_2 に外接する n 角形 $\mathrm{A_1A_2\cdots A_n}$ が一つ存在するとする．このとき C_1 上の一点 $\mathrm{P_1}$ から C_2 にひとつの接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を $\mathrm{P_2}$ とする． $\mathrm{P_2}$ から C_2 に $\mathrm{P_1P_2}$ とは異なる接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を $\mathrm{P_3}$ とする．以下同様に，順次 $\mathrm{P_4}$, $\cdots$, $\mathrm{P_{n+1}}$ を定めると，$\mathrm{P_{n+1}} = \mathrm{P_1}$ となる．

証明　これは $O_1 = O_2 = \cdots = O_{n-1} = O_n = C_2$ としてポンスレの定理を用い，$\mathrm{P_nP_1}$ も C_2 に接するので，$\mathrm{P_{n+1}} = \mathrm{P_1}$ となりこれも n 角形になる． □

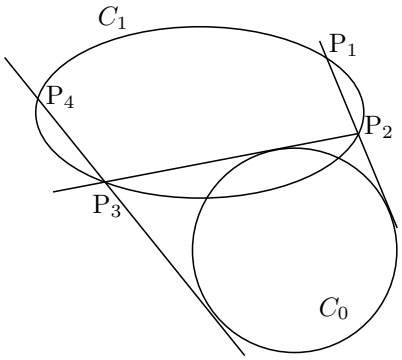
3.16.4　二次曲線の閉形定理

南海　ポンスレの閉形定理に現れた式の意味を考えよう．それを踏まえて一般的に証明することを試みよう．

3.16.4.1　複素数導入の必然性

南海　われわれは入試問題から出発したので，二つの二次曲線は相互に離れている場合しか考えなかった．二つの二次曲線の位置関係はもちろんいろいろあり得る．

次のようなときにもポンスレの閉形定理を考えることができるのではないか．



拓生　C_1 上の点 $\mathrm{P_1}$ から C_0 に接線を引き，接線上にある C_1 の上のもう一つの点を $\mathrm{P_2}$ とする．点 $\mathrm{P_2}$ から C_0 に接線を引き，接線上にある C_1 の上のもう一つの点を $\mathrm{P_3}$ とする．点 $\mathrm{P_3}$ から C_0 に接線を引き，接線上にある C_1 の上のもう一つの点を $\mathrm{P_4}$ とする．….

これを繰りかえして，元の $\mathrm{P_1}$ に戻ってくるかということですね．

ある点 $\mathrm{P_1}$ からはじめて n 回で元に戻れば，どこからはじめても元に戻るか．確かにこのように考えれば，位置関係は自由です．

南海　このような場合座標平面上で，C_0 と C_1 の両方に接する接線が存在しうる．共通接線は何本あるのだろう．

拓生　4 本，3 本，2 本，なし，のいろいろあるように思われます．

$n=3$ のとき　南海　そこでまず $n=3$ のときにいくつかの例を見てみよう．

まず先に考えた円と円で $n=3$ の場合の例をもう一度考えよう．

$$C_0 \ : \ x^2+y^2=1,\ C_1 \ : \ (x-a)^2+y^2=r^2$$

であった．C_1 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が媒介変数 t を用いて

$$x-a=\frac{r(1-t^2)}{1+t^2},\ y=\frac{2rt}{1+t^2}$$

と表され，点 Q も同様に媒介変数 s で表されるとき，直線 PQ が C_0 と接するための条件は

$$T(s,\,t)=\{(r-a)st+r+a\}^2-(st-1)^2-(s+t)^2$$

であった．そして P からはじめて，接線の他の交点を Q, R, S ととるとき，$\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となるための必要十分条件が

$$\begin{aligned} H(t) \quad = \quad & <(r-a)\{(r+a)^2-t^2-1\}+(r+a)[\{(r-a)^2-1\}t^2-1]>^2 \\ & -\{(r+a)^2+(r-a)^2t^2\}^2 \end{aligned}$$

とおくとき，$H(t)=0$ となるのであった．そこで，共通接線との関連を調べよう．

C_1 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ が

$$x_1-a=\frac{r(1-t^2)}{1+t^2},\ y_1=\frac{2rt}{1+t^2}$$

と表されるとき，点 P での接線が C_0 とも接するための t に関する条件を求めてみてほしい．

拓生　接線の式は

$$(x_1-a)(x-a)+y_1y=r^2$$

これが C_0 とも接すればよいので

$$\frac{-a(x_1-a)-r^2}{\sqrt{(x_1-a)^2+{y_1}^2}}=1$$

ここで $(x_1-a)^2+{y_1}^2=r^2$ なので，条件は

$$\{a(x_1-a)+r^2\}^2-r^2=0$$

この式を因数分解して $x_1-a=\dfrac{r(1-t^2)}{1+t^2}$ を代入する．

$$\{ar(1-t^2)+(r^2-r)(1+t^2)\}\{ar(1-t^2)+(r^2+r)(1+t^2)\}=0$$

r を約して整理する．

$$\{(r-a-1)t^2+r+a-1\}\{(r-a+1)t^2+r+a+1\}=0$$

これは定数倍を除くと $H(t)$ と同じ式だ．

なぜ $n=3$ のとき，$H(t)=0$ は共通接線を与える式になるのか．でもそれが虚根ということは?

南海

$$x^2+y^2=1,\ (x-a)^2+y^2=r^2$$

の共通接線を実際に求めてほしい．

拓生　共通接線を $mx+ny+1=0$ とおきます．両方と接するので

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}=1,\ \frac{|ma+1|}{\sqrt{m^2+n^2}}=r$$

です．これから $ma+1=\pm r$．また $n^2=1-\dfrac{(-1\pm r)^2}{a^2}$，だから接線は

$$\frac{-1\pm r}{a}x\pm\sqrt{1-\frac{(-1\pm r)^2}{a^2}}y+1=0\ (\text{第一，第三複号同順})$$

となります．根号内が負になるときはもう xy 平面での直線ではありえません．

南海　図形的にはともかく，それぞれの円の式と連立させて共通根を求めれば，それが重根になることはまちがいない．もちろん点と直線の距離の式は使えないが，x か y を消去して得られる二次式の判別式をとれば，距離の式から得られる式と同じ式が得られる．つまり虚根も考えれば，上の接線の式は $C_0,\ C_1$ の双方と重根をもつ．そういう意味ではもとの二つの二次曲線とそれぞれ重根をもつ共通接線はつねに 4 本あるということになる．

放物線と円で $n=3$ のとき　**南海**　念のため，その他の場合も $H(t)=0$ の根と共通接線の関係を確認しておいてほしい．

拓生

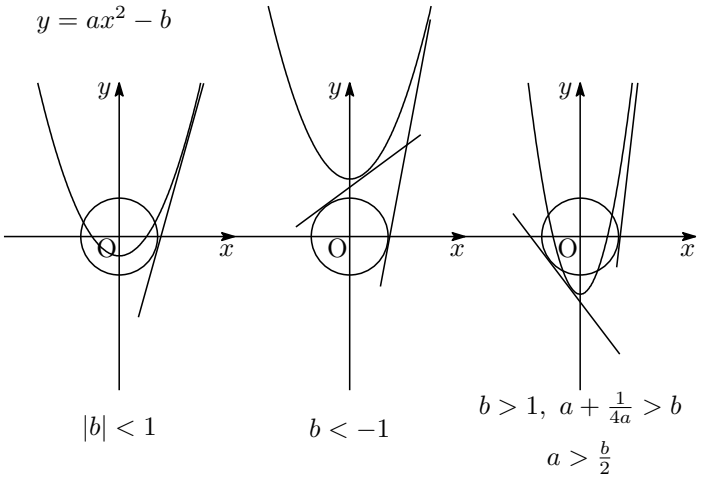
$$H(t)=(b-a-1)(b-a+1)\{a^2t^4+2a(b-2a)t^2+b^2-1\}$$

$H(t)=0$ を t^2 の二次方程式と見て 0 以上の解をもつ条件と共通接線の個数の関係を調べればよい．

$b^2-1\leqq 0$ なら $t^2\geqq 0$ の解は一つ．$t^2>0$ の解が二つになるのは，

$$\begin{cases} D>0 & \Longleftrightarrow & a+\dfrac{1}{4a}>b \\ b^2-1>0 & & \\ -(b-2a)>0 & \Longleftrightarrow & a>\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

のとき．これは $b<-1$ か $b>1,\ a+\dfrac{1}{4a}>b,\ a>\dfrac{b}{2}$ のときで，位置関係はそれぞれ図のようになり，共通接線はそれぞれ 2 本，4 本，4 本である．



楕円と円で $n=3$ のとき

$$\begin{aligned} H(t) &= (ab+a+b)(ab+a-b)(ab-a+b)(ab-a-b) \\ &\quad \times\{b^2(1-a^2)t^4+2(2a^2-b^2-a^2b^2)t^2+b^2(1-a^2)\} \end{aligned}$$

なので 2 根の積は 1．$H(t)=0$ が実数解をもつのは a か b が 1 で接する場合を除くと

$$D/4=4a^2(a^2-b^2)(1-b^2)>0,\ \text{軸}:-\frac{a^2-b^2+a^2(1-b^2)}{1-a^2}>0$$

のとき．これは $a<1<b$ または $b<1<a$ なので円と楕円が 4 つの交点を持ち，確かに 4 つの共通接線をもつ．

南海　$n=3$ の場合をまとめる．C_0 を円 $x^2+y^2=1$ とし，C_1 を次のようにとる．このときの $T(s,\ t)$，$H(t)$ である．

(i) 放物線 $y=ax^2-b$.

$$\begin{aligned} T(s,\,t) &= (ast+b)^2-a^2(s+t)^2-1 \\ H(t) &= (b-a-1)(b-a+1)\{a^2t^4+2a(b-2a)t^2+b^2-1\} \end{aligned}$$

(ii) 円 $(x-a)^2+y^2=r^2$.

$$\begin{aligned} T(s,\,t) &= \{(r-a)st+r+a\}^2-(st-1)^2-(s+t)^2 \\ H(t) &= \{(r^2-a^2)^2-4r^2\}[\{(r-a)t^2+r+a\}^2-(t^2+1)^2] \end{aligned}$$

(iii) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

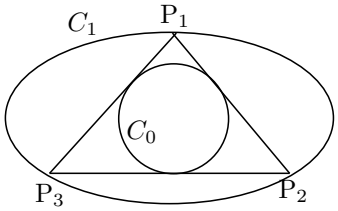
$$\begin{aligned} T(s,\,t) &= T(t,\ s)=a^2(s+t)^2+b^2(1-st)^2-a^2b^2(1+st)^2 \\ H(t) &= b^2(1-a^2)t^4+2(2a^2-b^2-a^2b^2)t^2+b^2(1-a^2)=0 \end{aligned}$$

いずれも先に注意したように

$$\lim_{s\to t}T(s,\ t)=\text{定数}\times H(t)$$

である．

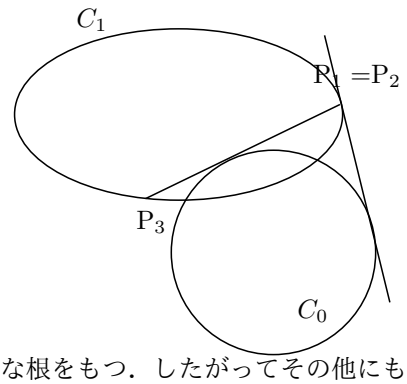
このように以上の例は，$n=3$ のときは，$\mathrm{P}(t)$ から共通接線が引けるような t が，$\mathrm{P}(t)$ を頂点とする三角形が出来る条件式を満たすことを示している．



これはなぜだろうか．$n=3$ のときの $H(t)$ の構成法にかなった方程式 $H(t)=0$ の自明な解が，共通接線となる 4 個の t なのだ．

$H(t)$ をどのように構成したか．図の上のように，$P(t)$ から 2 本の接線 P_1P_2，P_1P_3 を引く．直線 P_2P_3 が C_0 に接する条件が $H(t)=0$ であった．

点 P_1 を共通接線になる点とする．このときは $P_2=P_1$ となる．よって作り方から直線 P_2P_3 は C_0 に接する．



かくして 4 次方程式 $H(t)=0$ はつねに 4 個の自明な根をもつ．したがってその他にもう 1 個これを満たす根があれば $H(t)=0$ は恒等式となりすべての t で成立する．

拓生　これは $n=3$ の場合の一般的な証明になっています．

$n=4$ のとき

南海　$n=4$ の場合，意味はわかりにくい．以下の考察の結論は今後の課題として，いくつかの計算はしておこう．

すでに計算を行った楕円と円で $n=4$ のときと同様に，放物線と円で $n=4$ のときを計算してみる．実際の計算は Risa/Asir で行った．

放物線と円で $n=4$ のとき

$$\begin{aligned} T(s,\ t) &= (a^2t^2-a^2)s^2+(-2a^2+2ba)ts-a^2t^2+b^2-1 \\ T(u,\ s) &= (a^2s^2-a^2)u^2+(-2a^2+2ba)su-a^2s^2+b^2-1 \end{aligned}$$

から s を消去し，$(t-u)^2$ で約すると

$$\begin{aligned} &((4a^4-8ba^3+4b^2a^2)t^2-a^4+(2b^2-2)a^2-b^4+2b^2-1)u^2 \\ &\quad +(2a^4-8ba^3+(12b^2-8)a^2+(-8b^3+8b)a+2b^4-2)tu \\ &\qquad +(-a^4+(2b^2-2)a^2-b^4+2b^2-1)t^2+(4b^2-4)a^2+(-8b^3+8b)a+4b^4-4b^2 \end{aligned}$$

となる．この判別式を求め因数分解する．

$$16(a-b)^2(a^2-b^2+1)^2(a^2t^4+(-2ba+1)t^2+b^2-1)=0$$

が得られる．つまり

$$H(t)=(a-b)^2(a^2-b^2+1)^2(a^2t^4+(-2ba+1)t^2+b^2-1)$$

である．$n=4$ の場合，$H(t)$ は $n=3$ のときとは違う式になる．この式の図形的な意味はよくわからない．

楕円と円で $n=4$ のとき

拓生　楕円と円で $n=4$ のときも，$H(t)$ は $n=3$ のときとは違う式になります．

$$H(t)=(a^2-1)t^4+2(2b^2-a^2-1)t^2+(a^2-1)=0$$

でした．

南海　この場合も，式の図形的な意味はよくわからない．

拓生　円と二次曲線のいくつかの実例では，すべて最後に点 P を媒介変数表示したときの変数 t についての 4 次方程式が得られました．そしてそれが恒等的に 0 になることを示そうとしました．恒等的に 0 になるためには，実根でなくても虚根を含めて，しかも重根の場合は重複度も含めて，次数より 1 多い根があればそれで恒等的に 0 になるのでした．図形から出発したので実数解ばかり考えますが，恒等式かどうかの判断は実数でなくてもよい．

$n=3$ のときは自明な 4 解があり，その他に 1 解があれば恒等式なることがわかりました．これは，共通接線が実座標平面上にあってもなくても，かまいませんでした．$n=4$ のとき入試問題では $H(t)=0$ が虚数解をもち，かつ座標平面上に一つの四角形が存在することから，恒等式であることを示しました．

しかし $n=4$ のとき，自明な 4 解の存在はまだ見いだせていません．一般的にはつねに虚数解とはかぎらないので，この段階ではつねに恒等式なるとはまだいえていません．

3.16.4.2　複素射影空間内での証明

南海　その通りなのだが，実は考察をもう少し精緻にすると，ポンスレの定理は証明されているといえる．

そのため媒介変数 t と曲線の置かれた場である平面も，すべて射影空間で考えなければならない．また，すべて複素数体上で考えなければならない．

拓生　媒介変数を射影直線にすることで，例えば楕円の場合に $(-a,\ 0)$ を除くという例外がなくなる．また，二次曲線を射影平面で考えることで，放物線と円の場合にあった，「x 座標が ±1 と異なる C_1 上の点」という例外がいらなくなる．

南海　そうだ．そこで話を進めよう．

射影直線 $P^1(C)$ を次のように定める．$(0,\ 0)$ でない複素数の組 $(t_0,\ t_1)$ の集合を考える．$(t_0,\ t_1)=k(s_0,\ s_1)$ となる複素数 k が存在するとき，この二つの組は同値とし，この同値関係で複素数の組 $(t_0,\ t_1)$ の集合を類別したものを，一次元射影空間といい $P^1(C)$ と表す．これは実軸に無限遠点を加えたものを複素数に拡張したものである．

同様に射影平面 $P^2(C)$ を次のように定める．$(0,\ 0,\ 0)$ でない複素数の組 $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ の集合を考え，$(x_0,\ x_1,\ x_2)=k(y_0,\ y_1,\ y_2)$ となる複素数 k が存在するとき，この二つの組は同値とする．この同値関係で複素数の組 $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ の集合を類別したものを，二次元射影空間といい $P^2(C)$ と表す．今後 $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ を必要に応じて X のような大文字で表そう．

拓生　二次曲線 C を射影座標で表す．

$$f(\mathrm{X})=a{x_1}^2+b{x_2}^2+c{x_0}^2+2hx_1x_2+2lx_1x_0+2mx_2x_0$$

を用いて方程式 $f(\mathrm{X})=0$ で二次曲線 C が定まる．このとき C 上の点 $\mathrm{P}(p_0,\ p_1,\ p_2)$ における接線の式は

$$L(\mathrm{P},\ \mathrm{X})=ap_1x_1+bp_2x_2+cp_0x_0+h(p_2x_1+p_1x_2)+l(p_0x_1+p_1x_0)+m(p_0x_2+p_2x_0)$$

を用いて方程式 $L(\mathrm{P},\ \mathrm{X})=0$ で表される．

南海　そう．これをそのまま係数を複素数まで認めることにして拡張すればよい．ちなみに行列

$$A=\begin{pmatrix} c & l & m \\ l & a & h \\ m & h & b \end{pmatrix}$$

を用いると

$$f(\mathrm{X})=\mathrm{X}A{}^t\mathrm{X},\ L(\mathrm{P},\ \mathrm{X})=\mathrm{P}A{}^t\mathrm{X}$$

となる．ここで ${}^t\mathrm{X}$ は X を縦に書いた $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を表す．

『射影幾何』では標準的なベクトルを縦ベクトルで表すことが多いが，いずれでもよい．

さて複素数体上の二次曲線 $C:f(\mathrm{X})=0$ は適当な一次変換によって

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$$

という標準形になり，それらは二次式による媒介変数表示

$$x_0=it_0^2-it_1^2,\ x_1=2it_0t_1,\ x_2=t_0^2+t_1^2$$

をもつ．

つまり二次曲線 C 上の点 P は 2 次の同次式を用いて

$$\mathrm{P}=(u_0(\mathrm{T}),\ u_1(\mathrm{T}),\ u_2(\mathrm{T}))$$

と表される．ここで $\mathrm{T}=(t_0,\ t_1)$ は射影直線上の点である．

次に二次行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $|A|=ad-bc$ を行列式といい $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ と表す．さらに三次行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ に対しその行列式 $|A|$ を

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

で定める．射影平面の 2 点 $\mathrm{P}(p_0,\ p_1,\ p_2)$ と $\mathrm{Q}(q_0,\ q_1,\ q_2)$ を通る直線の式は

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}=0$$

で表される．これは X の一次式であり，$\mathrm{X}=\mathrm{P},\ \mathrm{Q}$ で成立することからわかる．

補題 23　二つの二次曲線 C_0 と C_1 がある．C_1 上の 2 点 P, Q がそれぞれ媒介変数 T, S で表されているとする．直線 PQ が C_0 に接するための必要十分条件は，T, S のそれぞれに関する二次の等式で表される．

証明　二次曲線 C_0 と C_1 はそれぞれ行列 A と B をもちいて

$$\mathrm{X}A^t\mathrm{X}=0,\ \mathrm{X}B^t\mathrm{X}=0$$

と表されるとする．P, Q はそれぞれ二次式によって $(u_0(\mathrm{T}),\ u_1(\mathrm{T}),\ u_2(\mathrm{T}))$, $(u_0(\mathrm{S}),\ u_1(\mathrm{S}),\ u_2(\mathrm{S}))$ と表される．よって直線 PQ は

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ u_0(\mathrm{T}) & u_1(\mathrm{T}) & u_2(\mathrm{T}) \\ u_0(\mathrm{S}) & u_1(\mathrm{S}) & u_2(\mathrm{S}) \end{vmatrix}=0$$

となる．これは

$$\left(\begin{vmatrix} u_1(\mathrm{T}) & u_2(\mathrm{T}) \\ u_1(\mathrm{S}) & u_2(\mathrm{S}) \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} u_0(\mathrm{T}) & u_2(\mathrm{T}) \\ u_0(\mathrm{S}) & u_2(\mathrm{S}) \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} u_0(\mathrm{T}) & u_1(\mathrm{T}) \\ u_0(\mathrm{S}) & u_1(\mathrm{S}) \end{vmatrix}\right){}^t\mathrm{X}=0$$

とも書ける．一方 C_0 上の点 M での接線は

$$\mathrm{M}A^t\mathrm{X}=0$$

と表される．これが直線 PQ と一致するので，

$$\mathrm{M}A=\left(\begin{vmatrix} u_1(\mathrm{T}) & u_2(\mathrm{T}) \\ u_1(\mathrm{S}) & u_2(\mathrm{S}) \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} u_0(\mathrm{T}) & u_2(\mathrm{T}) \\ u_0(\mathrm{S}) & u_2(\mathrm{S}) \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} u_0(\mathrm{T}) & u_1(\mathrm{T}) \\ u_0(\mathrm{S}) & u_1(\mathrm{S}) \end{vmatrix}\right)$$

である．つまり

$$\mathrm{M}=\left(\begin{vmatrix} u_1(\mathrm{T}) & u_2(\mathrm{T}) \\ u_1(\mathrm{S}) & u_2(\mathrm{S}) \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} u_0(\mathrm{T}) & u_2(\mathrm{T}) \\ u_0(\mathrm{S}) & u_2(\mathrm{S}) \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} u_0(\mathrm{T}) & u_1(\mathrm{T}) \\ u_0(\mathrm{S}) & u_1(\mathrm{S}) \end{vmatrix}\right)A^{-1}$$

この M は T と S のそれぞれについて一次式である．この M が C_0 上に存在することが，PQ が C_0 に接することを意味する．

この M を C_0 の方程式 $\mathrm{X}A^t\mathrm{X}=0$ に代入すると，確かに T, S のそれぞれに関する二次の等式になっている．□

この双二次式を $T(\mathrm{T},\ \mathrm{S})$ と表す．またこの式を $T(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ とも表す．

補題 24　二つの二次曲線 C_0 と C_1 がある．C_1 上の点 P_1 から C_0 にひとつの接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を P_2 とする．P_2 から C_0 に $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$ とは異なる接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を P_3 とする．このようにして点 P_n を定める．

点 P_1 が媒介変数 T で表され，点 P_n が媒介変数 S で表されるとすると T と S の間には，それぞれについて二次の関係式

$$T_n(\mathrm{T},\ \mathrm{S})=0$$

が成立し，これによって S が決定する．

証明　数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき．$T_n(\mathrm{T},\ \mathrm{S})=T(\mathrm{T},\ \mathrm{S})$ なので成立する．

$n=2$ のとき．$\mathrm{P}_2(\mathrm{U})$ として，連立方程式

$$\begin{cases} T(\mathrm{T},\ \mathrm{U})=0 \\ T(\mathrm{S},\ \mathrm{U})=0 \end{cases}$$

から U を消去する．補題 20 によって，T と S のそれぞれに関して四次の関係式が得られる．

P_2 は 2 個とれて，その各々から C_0 には $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$ ともう一つの接線が引ける．よってこの関係式は $\mathrm{S}=\mathrm{T}$ を重根にもつ．その二次関係式で約分される．その式を $T_3(\mathrm{T},\ \mathrm{S})$ とすれば．$T_3(\mathrm{T},\ \mathrm{S})$ は T と S のそれぞれに関して二次式で，$T_3(\mathrm{T},\ \mathrm{S})=0$ の 2 根が P_3 を与える．

$n\geqq 2$ に対して $T_n(\mathrm{T},\ \mathrm{S})$ が定まったとする．連立方程式

$$\begin{cases} T_n(\mathrm{T},\ \mathrm{U})=0 \\ T(\mathrm{S},\ \mathrm{U})=0 \end{cases}$$

U を消去する．補題 20 によって，T と S のそれぞれに関して四次の関係式が得られる．この 4 次式は $T_{n-1}(\mathrm{T},\ \mathrm{S})$ を因数にもつ．それで約した式を $T_{n+1}(\mathrm{T},\ \mathrm{S})$ とすれば．$T_{n+1}(\mathrm{T},\ \mathrm{S})=0$ の 2 根が P_{n+1} を与える．数学的帰納法によって証明が終わった．　□

例 3.16.1 非斉次式で示す．

$C_0\colon x^2+y^2+1$，$C_1\colon y=ax^2-b$ のとき．

$$\begin{aligned}
T_1(t,\ s) &= (ast+b)^2-a^2(s+t)^2-1 \\
T_2(t,\ s) &= \{(4a^4-8ba^3+4b^2a^2)t^2-a^4+(2b^2-2)a^2-b^4+2b^2-1\}s^2 \\
&\quad +\{2a^4-8ba^3+(12b^2-8)a^2+(-8b^3+8b)a+2b^4-2\}ts \\
&\quad +(-a^4+(2b^2-2)a^2-b^4+2b^2-1)t^2+(4b^2-4)a^2+(-8b^3+8b)a+4b^4-4b^2 \\
T_3(t,\ s) &= [(\{9a^{10}-48ba^9+(100b^2-12)a^8+(-96b^3+32b)a^7+(30b^4-12b^2-2)a^6 \\
&\quad +(16b^5-32b^3+16b)a^5+(-12b^6+28b^4-20b^2+4)a^4+(b^8-4b^6+6b^4-4b^2+1)a^2\}t^2 \\
&\quad -a^{10}+(12b^2-12)a^8+(-16b^3+16b)a^7+(-30b^4+68b^2-38)a^6 \\
&\quad +(96b^5-192b^3+96b)a^5+(-100b^6+188b^4-76b^2-12)a^4 \\
&\quad +(48b^7-80b^5+16b^3+16b)a^3+(-9b^8+12b^6+2b^4-4b^2-1)a^2]s^2 \\
&\quad +[-2a^{10}+18ba^9+(-72b^2+48)a^8+(168b^3-160b)a^7+(-252b^4+208b^2+44)a^6 \\
&\quad +(252b^5-192b^3-60b)a^5+(-168b^6+208b^4-72b^2+32)a^4+(72b^7-160b^5+136b^3-48b)a^3 \\
&\quad +(-18b^8+48b^6-36b^4+6)a^2+(2b^9-12b^5+16b^3-6b)a]ts \\
&\quad +\{-a^{10}+(12b^2-12)a^8+(-16b^3+16b)a^7+(-30b^4+68b^2-38)a^6 \\
&\quad +(96b^5-192b^3+96b)a^5+(-100b^6+188b^4-76b^2-12)a^4 \\
&\quad +(48b^7-80b^5+16b^3+16b)a^3+(-9b^8+12b^6+2b^4-4b^2-1)a^2\}t^2 \\
&\quad +(9b^2-9)a^8+(-48b^3+48b)a^7+(100b^4-112b^2+12)a^6+(-96b^5+128b^3-32b)a^5 \\
&\quad +(30b^6-42b^4+10b^2+2)a^4+(16b^7-48b^5+48b^3-16b)a^3 \\
&\quad +(-12b^8+40b^6-48b^4+24b^2-4)a^2+b^{10}-5b^8+10b^6-10b^4+5b^2-1
\end{aligned}$$

計算は Risa/Asir による．このように式は複雑になってゆくが，t と s の双 2 次式であることは変わりない．$t=t_1/t_0$，$s=s_1/s_0$ で斉次式に直せば射影直線を媒介変数とする式が得られる．

拓生　この結果，$S=T$ とおいた式から 4 次方程式が得られる．

$$T(T,\ T)=0$$

です．これはこれまでの考察で $H(t)=0$ としてきたものと，同様の役割を果たします．

$n=3$ のときは，これまでの方法で $H(t)=0$ を作ると，共通接線から 4 個の自明な解があり，その他に一つあれば恒等式でした．

$n=4$ のときはまだ一般的には解けていません．

南海　以下では簡単のために媒介変数を非斉次でとり，小文字の t などを使おう．

$n\geqq 5$ のとき．n 個の点を

$$\mathrm{P}_1(t_1),\ \mathrm{P}_2(t_2),\ \cdots,\ \mathrm{P}_n(t_n)$$

とする．ただし $\mathrm{P}_i(t_i)$ は媒介変数が $t=t_i$ に対応する点が P_i であることを意味する．これらの点は，そのどこからはじめても元に戻るのであるから，$T_n(t,\ t)=0$ の解として

$$t=t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$$

の n 個が存在する．

拓生　あっ，そうか．$n\geqq 5$ ならこの時点で恒等式とわかるのだ．

$n=4$ のときだけが残った．

南海　実はこの場合もできるのだ．$T_n(t,\ t)=0$ の n 個の解として $t=t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$ が存在したが，これらは重根のはずだ．

一般に u を固定すると

$$T(t,\ u)=0$$

は t の 2 次方程式となり，一般に t は 2 個定まる．i を 1 から n のいずれかとして $u=t_i$ とする．

$$T(t,\ t_i)=0$$

も t の 2 次方程式でこのとき $t=t_i$ が重根になる．言いかえると，4 次方程式 $T(t,\ t)=0$ において $t=t_i$ は重根である．

拓生　ということは n に対して 4 次方程式 $T(t,\ t)=0$ は重複度も含めて $2n$ 個の根があるのか．

南海　これを定理にまとめておこう．

定理 97 (ポンスレの閉形定理)　二つの二次曲線 C_0 と C_1 がある．$n\geqq 3$ とし，C_1 上の点 P_1 から C_0 にひとつの接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を P_2 とする．P_2 から C_0 に $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$ とは異なる接線をひき，その延長が再び C_1 と交わる点を P_3 とする．このようにして点 P_n を定める．

C_1 上の点 P_1 で $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_1$ となるものが存在すれば，任意の P_1 について $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_1$ となる．　■

証明　$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対し点 P_i が媒介変数 t_i で表されるとする．

一般に t_1 と t_n の間には，それぞれについて 2 次の関係式

$$T_n(t_1,\ t_n)=0$$

が成立する．点 P_1 が $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_1$ を満たすことは，t_1 が

$$T_n(t_1,\ t_1)=0$$

を満たすことと同値である．これが他の t_i についても成立する．

さらに，i を 1 から n のいずれかとして $u = t_i$ とする．

$$T(t,\ t_i) = 0$$

は t の 2 次方程式で $t = t_i$ は重根である．

$n(\geqq 3)$ に対して 4 次方程式 $T(t,\ t) = 0$ は重複度も含めて $2n(\geqq 6)$ 個の根をもつ．よって等式 $T(t,\ t) = 0$ は恒等式であり，任意の t に対して成立する．P_1 を任意にとり，順次 P_i を定めるとき，$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_1$ となる． □

南海　入試問題からはじめて，まずそれを完全な形で解いた．すると，虚数解をもつ 4 方程式が現れる．その正体を調べると，虚な共通接線を与える t の方程式だった．こうして複素数の世界を垣間見た．それをもとに図形的考察から離れて複二次式の代数的考察にうつり，ポンスレの定理を証明した．

入試問題を解明しようとし，そこに現れた式の意味を考えることで複素数の世界に至った．高校数学や入試数学も学問として研究すれば，代数幾何学の入り口に来る，ということだ．

しかしまだ手をつけていないところがある．C_1 上の点 P から C_0 に接線を引く．その接点を Q とする．これらの点の媒介変数表示 $\mathrm{P}(p)$ と $\mathrm{Q}(q)$ に対し，p と q の間にどのような関係があるかということである．ここから楕円曲線が現れる．ここから先は『パスカルの定理と幾何学の精神』のなかの「ポンスレの定理」に譲ろう．

第4章　解析分野

4.1　生成関数の方法

2000.9.28

4.1.1　二つの入試問題

耕一　2000 年の横浜国立大学の入試問題の別解を見ました.
南海　生成関数で解くというものだな.
耕一　はい．それとよく似た問題が 98 年北海道大学にあります.
南海　よくしっているな．それぞれを紹介しよう.

例題 4.1.1　［00 横浜国立大学］
数列 $\{a_n\}$ を

$$a_0 = 1,\, a_n = \sum_{k=1}^{n} 3^k a_{n-k} \quad (n = 1,\, 2,\, \cdots)$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) $a_1,\, a_2,\, a_3$ を求めよ.

(2) a_n を求めよ.

例題 4.1.2　［98 北大後期理系］
次の条件で定まる 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1,\, \frac{2^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

南海　普通は推測して帰納法で解く．横国大の解答は問題のところにあるがここに再掲載しておこう.. 北大の普通の解答は耕一君に作ってもらおう.
耕一　はい.
解答［00 横浜国立大学］

(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= 3a_0 = 3 \\ a_2 &= 3a_1 + 3^2 a_0 = 18 \\ a_3 &= 3a_2 + 3^2 a_1 + 3^3 a_0 = 108 \end{aligned}$$

(2) $a_n = 3 \cdot 6^{n-1} (n = 1,\, 2,\, \cdots)$ と推測される．これを数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき， $a_1=3$ より成立.

(ii) $n=1, 2, \cdots, m$ で成立するとする．このとき

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \sum_{k=1}^{m+1} 3^k a_{m+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{m} 3^k \cdot 3 \cdot 6^{m-k} + 3^{m+1} \\ &= 3^{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m} 2^{m-k}\right) + 3^{m+1} \\ &= 3^{m+1}\left(\frac{2^m-1}{2-1}\right) + 3^{m+1} \\ &= 3\cdot 6^m \end{aligned}$$

よって $n=m+1$ でも成立する.

(iii) 以上から $n=1, 2, \cdots$ に対し $a_n = 3\cdot 6^{n-1}$ が示された. □

解答［98 北大］

$$\begin{array}{lll} n=1 \text{ で条件式を使う} & 2=a_1a_2+a_2a_1 & \therefore \quad a_2=1 \\ n=2 \text{ で条件式を使う} & 2=a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1 & \therefore \quad a_3=\dfrac{1}{2} \\ n=3 \text{ で条件式を使う} & \dfrac{4}{3}=a_1a_4+a_2a_3+a_3a_2+a_4a_1 & \therefore \quad a_4=\dfrac{1}{6} \end{array}$$

これから

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

と推測される．数学的帰納法で示す.

$n=1, 2, 3, 4$ では成立した.

$1, 2, \cdots, n-1$ のとき成立するとして，n のときに成り立つことを示せばよい．条件式は等式であるから，結局条件式の右辺に $1, 2, \cdots, n$ のときの a_n を代入して計算した結果，条件式の左辺になればよい.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{(n-k+1)!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(k-1)!}\frac{1}{(n-k+1)!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n+1} {}_n\mathrm{C}_{k-1} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r = \frac{2^n}{n!} \ (\text{左辺}) \end{aligned}$$

ゆえに n のときも成立し,

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

が示せた. □

4.1.2　生成関数

南海　実は青空学園ではすでにいちど生成関数を使って入試問題の一般化を解いている．98 年の京大の入試問題の一般化だ．これを後で紹介しよう．ここで少し生成関数についてまとめよう．

数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ がある． $n = 1$ から始まるときは $a_0 = 0$ とすればよい．有限数列なら，あるところから先の項はすべて 0 とすれば，有限, 無限数列関係なく考えられる．この数列に対して, 各項 a_n を係数とする無限級数

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

を考え，これを数列の「生成関数」と呼ぶことにする．これは無限級数なので収束しなければ「関数」とはいえない．十分小さい t で

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots$$

が成り立てば,

$$a_i = b_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

がいえる．生成関数を考えその関係式から係数の関係を導くためには，収束半径が 0 でさえなければよい．したがってひとつひとつの関数について収束する t の範囲を考える必要はない．

二つの生成関数

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots, \quad g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots$$

に対して

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots \\ f(t)g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) t^n \end{aligned}$$

となる．

4.1.2.1　基本的な生成関数

(1) $a_i = 1 \quad i = 0, 1, 2, \cdots$ のとき．$f(t) = 1 + t(1 + t + t^2 + \cdots) = 1 + tf(t)$ なので,

$$f(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \frac{1}{1 - t}$$

(2) $a_i = i \quad i = 0, 1, 2, \cdots$ のとき．

$$\begin{aligned} f(t) &= t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 \cdots \\ f(t) - tf(t) &= (t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 \cdots) - (t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 4t^5 \cdots) \\ &= t + t^2 + t^3 + \cdots = \frac{1}{1 - t} - 1 \end{aligned}$$

ゆえに

$$f(t) = \frac{t}{(1 - t)^2}$$

(3) $a_i = \dfrac{1}{i!}$ $i = 0, 1, 2, \cdots$ のとき. $f'(t) = f(t)$ なので

$$f(t) = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots = e^t$$

この生成関数の方法は，実に強力なものだ．漸化式を解くのにも役立つ．漸化式が与えられると，それに対応して f(t) の関係式が得られる．それをもとに, f(t) の級数展開の一般項をつくれば, それによって係数の一般項が得られる．三項間漸化式を生成関数で解く方法などもまた説明しよう．

4.1.3 生成関数による別解

耕一　それでは解いてみます.

解答［横国大の別解］

t の無限級数を

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \\ g(t) &= 3t + 3^2 t^2 + 3^3 t^3 + \cdots \end{aligned}$$

とおく．ここで,

$$g(t) - 3t = 3^2 t^2 + 3^3 t^3 + \cdots = 3t \cdot g(t)$$

よって

$$g(t) = \frac{3t}{1 - 3t}$$

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} 3^k a_{n-k} \right) t^n \\ &= a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \\ &= f(t) - 1 \end{aligned}$$

つまり

$$f(t)\left(1 - g(t)\right) = f(t)\left(1 - \frac{3t}{1-3t}\right) = f(t)\left(\frac{1-6t}{1-3t}\right) = 1$$

である．よって

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1-3t}{1-6t} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-6t}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2 + 6t + (6t)^2 + \cdots) \end{aligned}$$

これが $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ と一致するので $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 6^n = 3 \cdot 6^{n-1}$$

□

解答［北大の別解］

a_n $(n=1,2,3,\cdots)$ に対して

$$f(t)=a_1+a_2t+a_3t^2+\cdots$$

とおく.

$$tf(t)=a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots$$

である.

$$\begin{aligned}(tf(t))^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_ka_{n+2-k}\right)t^{n+2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)t^{n+2}\\ &= t^2\left(1+2t+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots\right)\\ &= t^2e^{2t}\end{aligned}$$

$$\text{したがって}\quad tf(t)=\pm te^t,\quad \therefore\quad f(t)=\pm e^t$$

ところが $f(0)=a_1=1$ より $f(t)=e^t$

$$f(t)=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}t^n+\cdots$$

a_n は t^{n-1} の係数なので

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

□

南海　ずいぶん簡明に，見通しよく解けるだろう．ただ注意すべきは，たとえば北大の問題の別解だが，これはなにも本質的に新しい解法ではない．

耕一　といいますと….

南海　実は

$$e^{2t}=1+(2t)+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots$$
$$e^t\cdot e^t=(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots)\cdot(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots)$$

この二式が形式的無限級数として一致することを示そうとすると結局

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!}$$

に対して

$$a_1=1,\ \frac{2^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n+1}a_ka_{n+2-k}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を示さねばならないのだ．生成関数は数列を統一してひとつの関数として扱う方法だ，ということである．

4.1.4　カタラン数を生成関数で求める

4.1.4.1　c_n の漸化式

経路が最後に対角線に乗った番号で分類することにより，

$$c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{n-1}c_0$$

が得られる．これについては『数学対話』「カタラン数」を見てほしい．

カタラン数の生成関数

$$f(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \cdots$$

とする．すると

$$\begin{aligned} f(t)^2 &= c_0^2 + (c_0c_1 + c_1c_0)t + (c_0c_2 + c_1c_1 + c_2c_0)t^2 + \cdots \\ &= c_0^2 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + \cdots \\ \therefore \quad \{f(t)^2 - c_0^2\}t &= c_2t^2 + c_3t^3 + \cdots \\ &= f(t) - c_0 - c_1t \end{aligned}$$

$c_0 = c_1 = 1$ であることに注意すると，

$$tf(t)^2 - f(t) + 1 = 0$$

を得る．

ここで $y = f(t)$ とおこう．$ty^2 - y + 1 = 0$ より，

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t} = \frac{4t}{(1 \mp \sqrt{1-4t}) \cdot 2t} = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4t}} \quad \text{(複号同順)}$$

$t \to 0$ のとき $y \to c_0 = 1$ とならねばならないので，

$$y = \frac{2}{1 + \sqrt{1-4t}} = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}$$

ここで，一般に何度も微分できる関数 $f(x)$ は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k + \cdots$$

と級数に展開されることを用いる．これは $f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

とおくと

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)!a_{k+1}t + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}x^2 + \cdots$$

より

$$f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$$

となるのでわかる.

$$\begin{aligned}(1-4t)^{\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}(-4t)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-4t)^2 \\ &\quad +\cdots+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}(-4t)^{n+1}+\cdots\end{aligned}$$

この t^{n+1} の係数は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot(-1)^n\cdot(2n-1)\cdots1\cdot2^{2n+2}\cdot(-1)^{n+1} \\ =\ &-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{(n!)^2}\cdot2n\cdot2(n-1)\cdots2\cdot(2n-1)\cdots1 \\ =\ &-\frac{2}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\end{aligned}$$

よって, $\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$ の t^n の係数は

$$\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

つまり,

$$c_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

耕一　なるほど.

南海　入試問題もその気になって探求すると，いろんな広がりがあるのだ.

4.1.5　ある入試問題の一般化への生成関数の活用

南海　まず 98 年の京大の入試問題とその一般化を紹介しよう．このときは史織さんが考えてくれた.

例題 4.1.3　［98 年京大前期文理］

袋に青色，赤色，白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている．各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1 , 2 , 3 の番号がついている．これらの 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す．取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく，同番号のものも他にない玉の個数を得点とする．たとえば，青 1 番，赤 1 番，白 3 番を取り出したときの得点は 1 で，青 2 番，赤 2 番，赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である。このとき以下の問に答えよ.

(1) 得点が n になるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき，$A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ を求めよ.

(2) 得点の期待値を求めよ.

例 4.1.1 (問題の一般化)　袋に，k 種の色でぬられた同じ形の玉が k 個ずつ k^2 個入っている．各色の k 個の玉には 1 から k まで番号がついている．ここから同時に k 個の玉を取り出す.

k 個のうち同色のものが他になく、同番号のものも他にない玉の個数を得点とする.

点が n になるような取り出し方の総数を $f_k(n)$ とする.

(1) $f_k(n)$ をもとめる一般的な方法を求め，$f_4(0)$, $f_5(0)$ を求めよ．

(2) $f_k(n)$ を n と k の式で表すことはできるか．

(3) 得点の期待値を k の式で表すことはできるか．

史織　$f_k(n)$ について考えると，次のように $f_k(0)$ の漸化式が得られました．

(1) まず k^2 個の中から一つ選ぶ．次に最初に選ばれたものと色か番号が一致するものを除いた $(k-1)^2$ 個の中から一つとる．以下順次 n 個目を $(k-n+1)^2$ 個から一つ選ぶまでとる．この n 個の取り方は，取り出す順序に関係ないから $n!$ で割って，

$$\frac{k^2 \cdot (k-1)^2 \cdot \cdots \cdot (k-n+1)^2}{n!} = n!\,({}_kC_n)^2$$

(2) 残る $k-n$ 個は互いに同色同番があるような選び方だから，$f_{k-n}(0)$ 通り．

(3) よって，

$$f_k(n) = n!\,({}_kC_n)^2 \cdot f_{k-n}(0)$$

である．すべての選び方は ${}_{k^2}C_k$ 通りだから，$f_k(0)$ の漸化式

$${}_{k^2}C_k = \sum_{n=0}^{k} n! \cdot ({}_kC_n)^2 \cdot f_{k-n}(0)$$

が成り立つ．最初の条件は，$f_0(0) = 1$ である．

史織　ところで，この漸化式は解けるのですか．

南海　それが問題だ．少しでも前進しなければならない．できているところまで話そう．

$${}_{k^2}C_k = \sum_{n=0}^{k} n! \cdot ({}_kC_n)^2 \cdot f_{k-n}(0) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(k!)^2}{n!} \cdot \frac{f_{k-n}(0)}{((k-n)!)^2}$$

である．つまり，

$$\frac{{}_{k^2}C_k}{(k!)^2} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \cdot \frac{f_{k-n}(0)}{((k-n)!)^2} \quad \cdots (*)$$

ここで，$a_{k-n} = \dfrac{f_{k-n}(0)}{((k-n)!)^2}$ と置こう．そして次の二つの無限級数を考える．

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n \\ V(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \end{aligned}$$

すると

$$U(t) \cdot V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} a_{k-n} \right) t^k$$

である．漸化式 $(*)$ はこれが

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{{}_{k^2}C_k}{(k!)^2} t^k$$

となることを意味している．ところが $V(t)=e^t$ で，さらに $e^{-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-t)^n$ であるから，

$$\begin{aligned} U(t) &= e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{{}_{k^2}C_k}{(k!)^2}t^k \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-t)^n\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{{}_{k^2}C_k}{(k!)^2}t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{(k-j)!}\frac{{}_{j^2}C_j}{(j!)^2}\right)t^k \end{aligned}$$

t^k の係数を比較して，

$$\begin{aligned} f_k(0)=a_k(k!)^2 &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{k!}{(k-j)!j!}\cdot\frac{k!}{j!}\cdot{}_{j^2}C_j \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\,{}_kC_j\cdot{}_kP_{k-j}\cdot{}_{j^2}C_j \end{aligned}$$

史織　わー，解けてる．ためしてみます．

$$\begin{aligned} f_4(0) &= (-1)^4\,{}_4C_0\,{}_4P_4\,{}_0C_0+(-1)^3\,{}_4C_1\,{}_4P_3\,{}_1C_1+(-1)^2\,{}_4C_2\,{}_4P_2\,{}_4C_2 \\ &\quad +(-1)^1\,{}_4C_3\,{}_4P_1\,{}_9C_3+(-1)^0\,{}_4C_4\,{}_4P_0\,{}_{16}C_4 \\ &= 24-96+432-1344+1820 \\ &= 836 \\ f_5(0) &= (-1)^5\,{}_5C_0\,{}_5P_5\,{}_0C_0+(-1)^4\,{}_5C_1\,{}_5P_4\,{}_1C_1+(-1)^3\,{}_5C_2\,{}_5P_3\,{}_4C_2 \\ &\quad +(-1)^2\,{}_5C_3\,{}_5P_2\,{}_9C_3+(-1)^1\,{}_5C_4\,{}_5P_1\,{}_{16}C_4+(-1)^0\,{}_5C_5\,{}_5P_0\,{}_{25}C_5 \\ &= -120+600-3600+16800-45500+53130 \\ &= 21310 \end{aligned}$$

南海　期待値は求まる．

$$\begin{aligned} nf_k(n) &= n\cdot{}_kP_n\cdot{}_kC_n\cdot f_{k-n}(0) \\ &= k^2\cdot{}_{k-1}P_{n-1}\cdot{}_{k-1}C_{n-1}\cdot f_{k-n}(0) \\ &= k^2\ f_{k-1}(n-1) \end{aligned}$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{k}nf_k(n) &= k^2\sum_{n=0}^{k-1}f_{k-1}(n) \\ &= k^2\ {}_{(k-1)^2}C_{k-1} \end{aligned}$$

したがって求める期待値は

$$\frac{k^2\ {}_{(k-1)^2}C_{k-1}}{{}_{k^2}C_k}$$

である．

南海　これが**生成関数**の方法で，数列を求めるのに大変強力な方法なのだ．この先は，上に現れた関数の満たす関係を求めなければならず，それはできていない．

　京大の問題は生成関数まで使わせてくれたという意味で大変良い問題だった．

4.2　微分方程式とは

2005.12.5

4.2.1　微分方程式

南海　今年 (2006 年) の入試から，京都大学では数学 III で「簡単な微分方程式及び曲線の長さ」が含まれることになった．もともと 1960 年代は「微分方程式」が「積分法の応用」の中の一節としてあった．十数年前の「微分・積分」にもあったが，それがこの十年なく，今回の改訂でも復活しなかった．しかし，青空学園の『数学対話』－「惑星は楕円軌道を描く」を見ればわかるように，自然界の多くの現象は，微分方程式で書かれ，それを解くことで運動の法則が分かる．というより，もともとニュートン以来，微分法，積分法は微分方程式を解いて自然現象を解明することからはじまったのだ．

『数学対話』－「惑星は楕円軌道を描く」では

> 力もベクトルなのでこれを $\overrightarrow{F}$ と記し，位置をベクトル $\overrightarrow{r}$ とおき，かつ比例定数を m とすれば，ニュートンの第 2 法則は，
>
> $$m\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{F}$$
>
> となる．このように，未知関数 $\overrightarrow{r}$ やその導関数が入った等式を**微分方程式**という．ニュートンの法則は，微分方程式として表される．

と出てくる．これから位置をベクトル $\overrightarrow{r}$ が確定し，惑星の軌道が楕円であることが，解明されるのだった．今回は，この微分方程式のごく入り口を話そう．

拓生　そもそも微分方程式とは何なのですか．

南海　原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

だ．この両辺を x で微分するとどのようになるか．

拓生

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \cdots ①$$

です．

南海　この関係式を未知関数 y とその導関数 y' および変数 x の定関数 (この場合は x そのもの) についての関係式と見たものが微分方程式だ．

拓生　この関係式をみたす y を求めるのですね．

南海　そうだ．今度は逆に A を 0 でない定数として

$$y = A\cos(x + \alpha) \quad \cdots ②$$

から，y の微分を含む関係式を作るとどうなるか．2 回微分してほしい．

拓生　2 回微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos(x + \alpha)$$

ということは

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

です．② がみたす関係式です．② が解となる関係式です．

南海　このように，未知な関数とその導関数，および定関数を含む等式を**微分方程式**という．含まれる導関数の最も高い次数が n であるとき，これを n **階微分方程式**という．関数を $y = f(x)$ とすると，微分方程式とは，

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

等が，他の定まった関数と結びついて作られる等式である．

$$y\frac{dy}{dx} = a$$
$$\frac{dy}{dx} + e^x y - 3e^{2x} = 0$$

のようなものである．微分方程式を $f(x)$ を用いて書きあらわすことも出来る．例えば上の等式は $f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \cdots$ を用いて

$$f(x)f'(x) = a$$
$$f'(x) + e^x f(x) - 3e^{2x} = 0$$

とも書ける．また

$$yy' = a$$
$$y' + e^x y - 3e^{2x} = 0$$

とも書ける．記号の使い方は一通りではないので，問題文をよく読まなければならない．

例題 4.2.1 次の各関数がみたす微分方程式を作れ．$A,\ B,\ C$ は任意の定数である．

(1) $y = (A + Bx)e^x$

(2) $y = \dfrac{C}{x}$

(3) $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

(4) $y = A\cos x + B\sin x$

拓生　何回か微分した等式から定数を消去すればよいのですね．

(1)

$$y = (A + Bx)e^x$$

の両辺を微分して

$$y' = Be^x + (A + Bx)e^x$$

つまり

$$y' = y + Be^x$$

さらに，両辺を微分して

$$y'' = y' + Be^x$$

これから

$$y'' - 2y' + y = 0$$

(2)

$$y = \frac{C}{x}$$

両辺を微分して

$$y' = -\frac{C}{x^2}$$

つまり

$$xy' = -\frac{C}{x}$$

ゆえに

$$xy' + y = 0$$

(3)

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$$

両辺微分して

$$y' = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x}$$

これから

$$y + y' = -Be^{-2x}$$

さらに両辺微分して

$$y' + y'' = 2Be^{-2x}$$

ゆえに

$$2(y + y') + y' + y'' = 0$$

つまり

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

(4)

$$y = A\cos x + B\sin x$$

両辺微分して

$$y' = -A\sin x + B\cos x$$

さらに微分して

$$y'' = -A\cos x - B\sin x$$

ゆえに

$$y'' + y = 0$$

4.2.2　微分方程式の解

南海　与えられた微分方程式を満たす関数を微分方程式の**解**といい，解を求めることを微分方程式を**解く**という．微分方程式 ① を解いてみよう．

① を

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

とおいて両辺を x で積分するとどのようになるか．

拓生

$$\int y\frac{dy}{dx}\,dx = -\int x\,dx$$

左辺は

$$\int y\,dy = y^2$$

と積分定数だから，まとめて

$$y^2 = -x^2 + C$$

となります．つまり $x^2 + y^2 = C$ です．半径は定まりません．

南海　上の計算で置換積分になっているところは

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

から直ちに

$$y\,dy = -x\,dx$$

とし，両辺の積分をとる，として

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

としてよい．このように，微分方程式を解いて表れる定数 C のことを**任意定数**という．

$$x = 3 \text{ のとき } y = 4$$

のような条件をつけると C が定まる．

拓生　$C = 3^2 + 4^2 = 25$ なので半径 5 の円になります．ところでこの微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

この方程式を満たす x と y を座標にとって点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，点 P での接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx}$ ですから，この式は直線 OP と，点 P での接線が直交している，ということを意味しています．だから円になるのですね．

南海　微分方程式の意味はそういうことだ．任意定数を含んだ解を**一般解**，任意定数に特別の値を与えて得られる解を**特殊解**という．また，任意定数を定める条件を**初期条件**という．

4.2.3　微分方程式を解く

高校数学で解けた方がいいのは次の場合である.

(1) 直接積分するもの.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \to \quad y = \int f(x)\,dx$$

(2) 変数分離形.

$$f(x)dx = g(y)dy \quad \to \quad \int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy$$

最も簡単な場合に工夫して解いてみてほしい.

例題 4.2.2 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -2y$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = y(3+x)$

(3) $y\dfrac{dy}{dx} + 3x = 0$

(4) $x\dfrac{dy}{dx} + y + 2 = 0$

解答

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -2y$ より $y = 0$ (定数) は方程式を満たす.

$y \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{y}dy = -2dx$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{y}\,dy = -3\int dx$$

これから

$$\log|y| = -2x + C$$

つまり

$$y = \pm e^{-2x+C} = \pm e^{C}e^{-2x}$$

$a = \pm e^{C}$ とおいて

$$y = ae^{-2x}$$

これは $a = 0$ のとき $y = 0$ を含む.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = y(3+x)$ より $y = 0$ (定数) は方程式を満たす.

$y \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{y}dy = (3+x)dx$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int (3+x)\,dx$$

$$\log|y| = 3x + \frac{x^2}{2} + C$$

これから (1) と同様に

$$y = ae^{3x+\frac{x^2}{2}}$$

これは $a = 0$ のとき $y = 0$ を含む.

(3) $y\dfrac{dy}{dx} + 3x = 0$ より

$$ydy = -3xdx$$

(1)(2) と同様に

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{3}{2}x^2 + C$$

つまり

$$3x^2 + y^2 = a$$

(4) $x\dfrac{dy}{dx} + y + 2 = 0$ より $y = -2$ (定数) は方程式を満たす.

$y \neq -2$ のとき.

$$\frac{1}{y+2}dy = -\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \quad \log|y+2| = -\log|x| + C$$

これから

$$x(y+2) = a$$

これは $a = 0$ のとき $y = -2$ を含む.

参考までにもう少し進んだところも話しておこう.

(1) 適当な置換によって変数分離するもの. 例えば

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

と変形できれば, $y = ux$ とする. このとき

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

なので,

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}dx = \frac{1}{f(u) - u}du$$

と変数分離型になる.

この置換の仕方は多くの工夫がなされている. 高校数学では, それらを知る必要はないが, 置換が指示されれば解けるようにしたい.

(2) 線形 1 階微分方程式.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

型になるもの．$f'(x) = P(x)$ となる $f(x)$ をひとつ求め，両辺に $e^{f(x)}$ をかけると，

$$e^{f(x)}\frac{dy}{dx} + e^{f(x)}f'(x)y = e^{f(x)}Q(x)$$

左辺は $\dfrac{d}{dx}\left(e^{f(x)}y\right)$ なので

$$e^{f(x)}y = \int e^{f(x)}Q(x)\,dx$$

例えば

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1 + x^2$$

$(2x)' = 2$ なので両辺に e^{2x} をかける．

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = e^{2x}(1 + x^2)$$

$$\therefore \quad e^{2x}y = \int e^{2x}(1 + x^2)\,dx$$

右辺は部分積分をくりかえすことで求まる．

南海　変数分離形を解く練習をしよう．

演習 64 解答 65　次の微分方程式を解け．

(1) $y' = \dfrac{2y}{x}$

(2) $y' + \dfrac{y^2}{x^3} = 0$

(3) $y' + \dfrac{1+y}{1+x} = 0$

(4) $y' = \dfrac{y(1+y)}{x}$

(5) $y' = \dfrac{2xy}{x^2+1}$

(6) $y' = e^{x-y}$

(7) $y' = y\log x$

演習 65 解答 66　$\dfrac{dy}{dx}$ が y に比例し，$x = 0$ のとき $y = 5$，$x = 5$ のとき $y = 10$ とする．$x = 15$ のとき y はいくらか．

4.2.4　微分方程式を立てる

南海　高校数学でも，簡単な場合に，条件を満たす微分方程式を立て，それを解くことができる．

その例として，曲線群をひとつの微分方程式で表すことを考えよう．例えば $y = x + b$ という形に書ける直線であることは，

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

と表せる．また任意定数 a を用いて $y^2 = 4ax$ と表される放物線群は，両辺を x で微分し

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

これから a を消去して整理すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

と書きあらわすことが出来る．

例題 4.2.3 p を任意の定数とし，放物線

$$D_p : y^2 = 4px$$

を考える．

(1) すべての p に対する D_p の方程式が満たす微分方程式を求めよ．

(2) すべての p に対する D_p と直交し，かつ点 $(1,\ 0)$ を通る曲線を求めよ．

解答

p を任意の定数とし，放物線

$$D_p : y^2 = 4px$$

を考える．

(1) D_p の方程式の両辺を x で微分する．

$$2y\frac{dy}{dx} = 4p$$

これから p を消去して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

これが，すべての p に対し D_p の方程式が満たす微分方程式である．

(2) すべての p に対する D_p と直交する曲線の方程式は

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

を満たさなければならない．これから

$$ydy = -2xdx$$

$$\int y\,dy = -2\int x\,dx$$

より

$$\frac{1}{2}y^2 = -x^2 + C$$

点 $(1,\ 0)$ を通るので $C = 1$. ゆえに曲線の方程式は

$$2x^2 + y^2 = 2$$

演習 66 解答 67

k を 0 でない任意の定数とするとき，方程式

$$x^2 - y^2 = k$$

で表される曲線のすべてと直交する曲線の方程式を求めよ.

南海　また，量の相互関係を調べるときには，現象のすべての量 (変数) を確認し，それらの間の相互関係を書き出せばよい.

例題 4.2.4 長さの単位を m とする．xyz 空間で，xz 平面上の放物線 $z = x^2,\ y = 0$ を z 軸の周りに回転させた立体に，毎秒 $3m^3/t$ で水を入れる．水面の高さが $6m$ のときの水面の上昇速度を求めよ.

解答

ここに表れる量は体積 V，水面の高さ h，そして時間 t である．それらの相互関係は

$$\frac{dV}{dt} = 3,\ \int_0^h \pi x^2\,dz = \int_0^h \pi z\,dz = V$$

第 2 式から

$$\frac{dV}{dh} = \pi h \quad \cdots ①$$

第 1 式から

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = 3$$

ここに ① を代入して

$$\pi h\cdot\frac{dh}{dt} = 3$$

したがって $h = 6$ のとき水面の上昇速度 $\dfrac{dh}{dt}$ は

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}\ (m/t)$$

である.

4.2.5　関連入試問題

演習 67 (95 山形大)　解答 68

微分方程式

$$y'' + y = 2\cos x$$

の，初期条件 $y(0)=0,\ y'(0)=1$ をみたす解を $y(x)$ とし，

$$f(x)=y(x)\cos x-y'(x)\sin x$$
$$g(x)=y(x)\sin x+y'(x)\cos x$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(3) $y(x)$ を求め，$y(x)=0$ をみたす x をすべて求めよ．

演習 68 (類・山形大)　解答 69

ある物体を地球の表面から鉛直上方に発射するとき，発射してから t 秒後のこの物体と地球の中心との距離を xm とすると，微分方程式 $x''=-\dfrac{k^2}{2x^2}$ (k は正の定数) が成り立つ．

地球の半径を Rm，初速を $\dfrac{k}{\sqrt{R}}$m/秒とするとき，

(1) 与えられた微分方程式の両辺に $2x'$ をかけ，t について積分することにより x' を x の関数として表せ．

(2) x を t の関数として表し，この物体が地球を離れることができるかどうか調べよ．

演習 69 (83 年京大理系)　解答 70

内側が直円すい形の容器がある．その回転軸は鉛直で，頂点が最低点，深さは h で，上面は半径 R の円である．この容器に上面まで満たされた水を，断面積が S の管を通じて．最低点からポンプで流出させるとする．水の流出速度 v は，そのときの水面の高さを x とすれば，$v=kx$（k は正の定数）で与えられるようにポンプが調整されているものとする．流出し始めた時刻を $t=0$ として，時刻 t における水面の高さ $x(t)$ を求めよ．ただし，t は容器が空になる時刻までに限定する．(時刻 t と $t+\Delta t$ の間に流出する水量を ΔQ とすれば，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=Sv$ がなりたつ．)

演習 70 (93 年阪大前期理系)　解答 71

$f(x)$ は 2 次の導関数をもち，$f(0)<0$ を満たす関数で，さらに次の性質をもつという．原点を O とし，曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ に対し，点 $(x,y+1)$ を Q とするとき，$\angle$OPQ の二等分線が曲線 $y=f(x)$ の点 P における法線となる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) $g(x)=f'(x)$ とおくとき，$g(x)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(3) $f(0)=-1$ であるとき，$f(x)$ の形を決定せよ．

演習 71 (京大 95 年前期理系)　解答 72

深さ h の容器がある．底は半径 a (>0) の円板，側面は $x=f(y)$ $(0\leqq y\leqq h)$ のグラフを y 軸の回りに回転したものである．ただし $f(y)$ は正の連続関数で $f(0)=a$ とする．この容器に単位時間あたり V （一定）の割合で水を入れたとき，T 時間後に一杯になり，しかも $t\,(<T)$ 時間後の水面の面積は $Vt+\pi a^2$ であった．

関数 $f(y)$ を決定し，T を求めよ．

演習 72 (96 京大理系前期 6 番)　解答 73

ガソリンを x kg 積んだ状態で時速 v km で走るとき，毎時 $\dfrac{100+x}{100}e^{kv}$ kg のガソリンを消費する車がある．ここで k は正の定数である．この車を用いて 100 km 離れた地点へ一定速度で行くとき，ガソリンの消費量を最小にするには，最初に積むガソリンの量と走行速度をどのようにすればよいか．ただし，ガソリンがなくなれば車は直ちに停止するものとする．

演習 73 (07 京大理 (乙)6 番)　解答 74

すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a, b に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であつて

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている．

(1) 任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ．

(2) $y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ．

4.3　相加相乗平均の不等式

2001.5.15/1999.10.1

4.3.1　共通の設定

南海　相加平均，相乗平均の大小関係の証明方法は実にいろいろあり，どれもがたいへんおもしろい．ここでそれらを問題としてまとめた．12 通りの証明が問題になっている．ぜひ自分で解いてみてほしい．

一つの問題に対して解答とさらに別解を考えることは，異なる問題を 2 題するよりはるかに力をつける．それは，問題の本質をよりいっそう明らかにできる，という意味でもあり，実際に問題に対したときいろんな糸口を探す力をつける，という意味でもある．

まず全体の共通した記号を定める．$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ $(n \geqq 2)$ を n 個の正数とする．

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \end{aligned}$$

とおく．

問題形式で立て，その証明を記すという形ですすめる．

4.3.2　凸函数の性質を使うもの

まずはもっとも一般的な凸関数を使うものである．(2) の部分は 98 年大阪市立大学後期試験に出題されている．

方法 1　関数 $f(x)$ が 2 回微分可能で $f''(x) < 0$ を満たしているとする．また n は $n \geqq 2$ なる自然数とする．

(1) $p + q = 1$ を満たす任意の正の数 $p,\ q$ と，関数の定義域の任意の $x,\ y$ に対して，

$$pf(x) + qf(y) \leqq f(px + qy)$$

が成り立つことを平均値の定理を用いて示せ．

(2) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ を満たす任意の正の数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ と，定義域内の任意の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_n f(x_n) \leqq f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n) \quad \cdots ①$$

が成り立つことを示せ.

(3) $f(x)$ として適切な関数を選ぶことにより

$$G_n \leqq A_n$$

を示し，等号が成立する場合を述べよ．

解

(1) $x = y$ のときは等号が成立する．

$x < y$ とする．このとき $x < px + qy < y$ である．

区間 $[x,\ px + qy]$ で平均値の定理を用いると，$x < c_1 < px + qy$ で

$$f'(c_1) = \frac{f(px+qy) - f(x)}{(px+qy) - x} = \frac{f(px+qy) - f(x)}{q(y-x)}$$

となるものが存在する． $p - 1 = -q$ を用いた．

同様に区間 $[px + qy,\ y]$ で平均値の定理を用いると，$px + qy < c_2 < y$ で

$$f'(c_2) = \frac{f(y) - f(px+qy)}{y - (px+qy)} = \frac{f(y) - f(px+qy)}{p(y-x)}$$

となるものが存在する． $1-q = p$ を用いた．$f''(x) < 0$ で $c_1 < c_2$ であるから $f'(c_1) > f'(c_2)$ ．つまり

$$\frac{f(px+qy) - f(x)}{q(y-x)} > \frac{f(y) - f(px+qy)}{p(y-x)}$$

これから

$$pf(x) + qf(y) < f(px+qy)$$

従って題意の不等式が成立し等号成立は $x = y$ のときである．

(2) 数学的帰納法で示す．

$n = 2$ のときは (1) から成立．

n 個の場合に成立するとし $n+1$ 個の場合に成立することを示す．

$q = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ とおく．$q + p_{n+1} = 1$ であることに注意する．

$$\begin{aligned}
& p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_n f(x_n) + p_{n+1} f(x_{n+1}) \\
= \ & q\left\{\frac{p_1}{q} f(x_1) + \frac{p_2}{q} f(x_2) + \cdots + \frac{p_n}{q} f(x_n)\right\} + p_{n+1} f(x_{n+1}) \\
\leqq \ & qf\left(\frac{p_1}{q} x_1 + \frac{p_2}{q} x_2 + \cdots + \frac{p_n}{q} x_n\right) + p_{n+1} f(x_{n+1}) \\
\leqq \ & f\left(q\left\{\frac{p_1}{q} x_1 + \frac{p_2}{q} x_2 + \cdots + \frac{p_n}{q} x_n\right\} + p_{n+1} x_{n+1}\right) \\
= \ & f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_{n+1} x_{n+1})
\end{aligned}$$

ゆえに $n+1$ の場合も成立した．等号成立は $x_1 = \cdots = x_{n+1}$ のとき．

よって一般の n に対して題意が示された．

(3) $f(x) = \log x$ とする．$f'(x) = \dfrac{1}{x},\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ である．

$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ で (2) の結果を用いる．

$$\frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n}{n} \leqq \log\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \log(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqq \log\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)$$

つまり $G_n \leqq A_n$ が示された．等号成立は $a_1 = \cdots = a_n$ のとき． □

注意 4.3.1 これからただちに次の不等式も成立する．

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ と $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$ を正の実数とする．

$$({a_1}^{m_1}{a_2}^{m_2}\cdots{a_n}^{m_n})^{\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_n}} \leqq \frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

左辺右辺それぞれ，**重みつき相乗平均**，**重みつき相加平均**という．

方法 2 (① の別証)　関数 $f(x)$ が 2 回微分可能で $f''(x)<0$ を満たしているとする．定義域内の任意の $x,\ t$ に対して

$$f(x) \leqq f'(t)(x-t)+f(t)$$

が成立することを示せ．

これを $x=x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ および $t=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_kx_k$ で用いることにより① を示せ．

解

$$F(x)=f(x)-\{f'(t)(x-t)+f(t)\}$$

とおく．

$$F'(x)=f'(x)-f'(t),\quad F''(x)=f''(x)$$

$F'(t)=0$ で $F''(x)<0$ であるから $F(x)$ は $x=t$ で極大かつ最大である．$F(t)=0$ であるから，定義域内の任意の x に対し $F(x)\leqq 0$ が成立する．等号が成立するのは $x=t$ のときのみである．

つまり，定義域内の任意の $x,\ t$ に対して

$$f(x) \leqq f'(t)(x-t)+f(t)$$

が成立することが示された．

$t=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_kx_k$ として，x に $x=x_k$ を代入し，p_k をかけて $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について加える．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k) &\leqq \sum_{k=1}^{n}p_k\{f'(t)(x_k-t)+f(t)\}\\
&= f'(t)\sum_{k=1}^{n}p_k(x_k-t)+f(t)\sum_{k=1}^{n}p_k\\
&= f'(t)\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k-t\sum_{k=1}^{n}p_k\right)+f(t)\sum_{k=1}^{n}p_k\\
&= f(t)=f\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k\right)
\end{aligned}$$

つまり① が示された．等号成立は各 k に対する不等式で等号が成立するときであり，$x_k=t$ ($k=1,\ 2\cdots,\ n$)，つまり $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときである．　□

注意 4.3.2 相加平均，相乗平均の不等式を導くだけなら，はじめから $p_k=\dfrac{1}{n}$ で示せばよい．これは 96 年京都教育大学で出題されている．

この方法の優れているところは，数学的帰納法を使うことなく示せることである．相加平均，相乗平均の不等式を導くために① の形まで示すのは，そうしないと帰納法ができないからである．

4.3.3　特殊な函数を使うもの

まず 97 年に鹿児島大学で出題されたものを紹介しよう．雑誌『初等数学』(2001 年 3 月号) の宮地俊彦先生によるともともと宮地先生がどこかで話されたものが鹿児島大の先生の耳に入り入試問題になったそうだ．ちなみにできは非常に悪かったそうである．

方法 3　［79 鹿児島大］

(1) a を与えられた正の定数とするとき，$f(x)=\dfrac{a-x}{x}+\log x$ の最小値を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表すものとする．

(2) n 個の関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x)$ とそれらの和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ がいずれも最小値をもつとき，それらの最小値を，それぞれ，$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n,\ M$ とすると，

$$m_1+m_2+\cdots+m_n \leqq M$$

となることを示せ．

(3) 上の結果を利用して

$$G_n \leqq A_n$$

を示せ．また，この不等式で等号が成立する場合を吟味せよ．

解

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x} \\ &= \frac{-a+x}{x^2} \end{aligned}$$

従って $x=a$ のとき最小値 $f(a)=\log a$

(2) $m_k \leqq f_k(x)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ より

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \leqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

が任意の x で成立する．

一方，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ が $x=x_0$ で最小値 M をとるとすると，

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \leqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0)=M$$

つまり

$$m_1+m_2+\cdots+m_n \leqq M$$

が示された．

(3) $f_k(x)=\dfrac{a_k-x}{x}+\log x$ とおく．これは $x=a_k$ でのみ最小値 $\log a_k$ をとる．

一方

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k-nx}{x}+n\log x=n\left\{\frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k-x}{x}+\log x\right\}$$

の最小値は $n\log\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$ である．したがって (1) から

$$\sum_{k=1}^{n}\log a_k \leqq n\log\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$$

つまり

$$G_n \leqq A_n$$

である．また，この不等式で等号が成立するのは各 $f_k(x)$ が同じ x で最小になりうるときのみであるから，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときである． □

また別のものが 00 年滋賀県立大で出題された．昔から知られている方法である．

方法 4　［00 滋賀県立大］

(1) a, b が正の実数で n が 2 以上の自然数のとき，不等式

$$\left(\frac{a+b}{n}\right)^n \geqq a\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$$

が成り立つことを示せ．

(2)

$$G_n \leqq A_n$$

であり，等号が成り立つのは $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限ることを示せ．

解

(1)

$$f(x)=\left(\frac{x+b}{n}\right)^n-x\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}\quad(x>0)$$

とおく．

$$\begin{aligned} f'(x) &= n\left(\frac{x+b}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{x+b}{n}\right)^{n-1}-\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$x>0$ のとき

$$f'(x)>0 \iff \frac{x+b}{n}>\frac{b}{n-1} \iff x>\frac{b}{n-1}$$

したがって $f(x)$ は $x=\dfrac{b}{n-1}$ で極小かつ最小である．つまり

$$f(x) \geqq f\left(\frac{b}{n-1}\right)$$

ここで

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b}{n-1}\right) &= \left(\frac{\dfrac{b}{n-1}+b}{n}\right)^n - \frac{b}{n-1}\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{b}{n-1}\right)^n - \left(\frac{b}{n-1}\right)^n = 0 \end{aligned}$$

したがって $f(x) \geqq 0$ が $x>0$ に対してつねに成り立つ．

$x=a$ のときより a, b が正の実数で n が 2 以上の自然数のとき，不等式

$$\left(\frac{a+b}{n}\right)^n \geqq a\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$$

が成り立つことが示された．

(2) 数学的帰納法で示す．

$n=2$ のとき (1) の結論から

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqq ab \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

である．

$n=k$ で成立するとする．$a=a_{k+1}$ ， $b=a_1+a_2+\cdots+a_k$ ，$n=k+1$ で (1) の結論を用いると

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} &\geqq a_{k+1}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k \\ &\geqq a_{k+1}\cdot a_1a_2\cdots a_k \end{aligned}$$

等号が成立するのは $a=b$ かつ $a_1=\cdots=a_k$ ．つまり $a_1=\cdots=a_k=a_{k+1}$ のとき．

したがって $n \geqq 2$ の自然数について

$$G_n \leqq A_n$$

であり，等号が成り立つのは $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限ることが示された． □

これと同じ問題が，形を変えて出題されている．これは例題として掲げておく．方法 4 で，b を A に，a を x に，n を $n+1$ にすれば同じである．

例題 4.3.1 [05 徳島大]

n は自然数とする．

(1) A を正の実数とし，関数 $f(x)=\left(\dfrac{A+x}{n+1}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{A}{n}\right)^n x$ を考える．$x>0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \cdots,\ a_n > 0$ とする．次の不等式が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ．

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geqq a_1 a_2 \cdots a_n$$

多項式関数を用いる方法としては，次のものが標準的である．

方法 5　(1) $x > 0$ のとき，関数

$$f(x) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x}$$

の最小値を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，数学的帰納法により

$$G_n \leqq A_n$$

となることを証明せよ．

解

(1) 関数を

$$f_n(x) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x}$$

とし，$A = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ とおく．$x > 0$ のとき，

$$\begin{aligned} {f_n}'(x) &= \frac{1}{n} - \sqrt[n]{A} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{1}{n}(1 - A^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1-n}{n}}) \end{aligned}$$

したがって $x = A^{\frac{1}{n-1}}$ のとき $f_n(x)$ は極小かつ最小になる．最小値は

$$\begin{aligned} & f_n(A^{\frac{1}{n-1}}) \\ = \ & \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + A^{\frac{1}{n-1}} - n(A \cdot A^{\frac{1}{n-1}})^{\frac{1}{n}}}{n} \\ = \ & \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + A^{\frac{1}{n-1}} - n(A^{1+\frac{1}{n-1}})^{\frac{1}{n}}}{n} \\ = \ & \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + (1-n)(a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}{n} \end{aligned}$$

(2) $n = 2$ のとき．

$$f_2(x) = \frac{a_1 + x}{2} - \sqrt{a_1 x}$$

で，この $f_2(x)$ の最小値は

$$\frac{a_1 + (1-2)a_1}{2} = 0$$

$x = a_2$ で用いて $f_2(a_2) = \dfrac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} \geqq 0$．つまり

$$A_2 \geqq G_2$$

n のとき成立するとし， $n+1$ での成立を示す．

(1) の最小値を $n+1$ で用いて

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &\geqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} \\ &= \frac{nA_n-nG_n}{n+1} \end{aligned}$$

ゆえに，帰納法の仮定から $f_{n+1}(x)\geqq 0$ である．$x=a_{n+1}$ で用いて

$$f_{n+1}(a_{n+1})=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}\geqq 0$$

つまり

$$G_{n+1}\leqq A_{n+1}$$

ゆえに一般に

$$G_n\leqq A_n$$

が示された． □

次のものは凸関数を用いる証明 [2] と本質的には同じなのだが，相加平均，相乗平均の大小関係の証明に特化することでより簡単にできる．二つの方法をまとめてある．雑誌『初等数学』(1999 年 8 月号) の宮地俊彦先生の報告による．

方法 6 (1) $x>-1$ に対し

$$x\geqq\log(1+x)\ (\text{ 等号成立は } x=0 \text{ のときのみ })$$

を示せ．

(2) (1) で $x_k=\dfrac{a_k}{G_n}-1$ とおけ．得られた不等式をすべて加えることで

$$G_n\leqq A_n$$

を示し，等号成立が $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限ることを示せ．

(3) (1) で $x_k=\dfrac{a_k}{A_n}-1$ とおけ．得られた不等式をすべて加えることで

$$G_n\leqq A_n$$

を示し，等号成立が $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限ることを示せ．

解

(1) $x>-1$ に対し

$$f(x)=x-\log(1+x)$$

とおく．

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

したがって $f(x)$ は $x=0$ で極小かつ最小である．$f(0)=0$ なので $f(x)\geqq 0$ で，等号成立は $x=0$ のときのみであることが示された．

(2) $x_k = \dfrac{a_k}{G_n} - 1 > -1$ である．(1) から

$$\frac{a_k}{G_n} - 1 \geqq \log\left(\frac{a_k}{G_n}\right)$$

ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{G_n} - 1\right) \geqq \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{a_k}{G_n}\right)$$

$$\iff \quad \frac{nA_n}{G_n} - n \geqq \log\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{{G_n}^n} = n\log\frac{G_n}{G_n} = 0$$

$$\therefore \quad G_n \leqq A_n$$

等号成立は

$$x_k = \frac{a_k}{G_n} - 1 = 0 \ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

つまり $a_k = G_n$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のときに限る．これは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限ることを意味している．

(3) 同様に $x_k = \dfrac{a_k}{A_n} - 1 > -1$ なので (1) が使える．

$$\frac{a_k}{A_n} - 1 \geqq \log\left(\frac{a_k}{A_n}\right)$$

ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A_n} - 1\right) \geqq \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{a_k}{A_n}\right)$$

$$\iff \quad \frac{nA_n}{A_n} - n \geqq \log\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{A_n} = \log\frac{G_n}{A_n}$$

$$\therefore \quad 0 \geqq \log\frac{G_n}{A_n} \quad \text{より} \quad G_n \leqq A_n$$

等号成立は

$$x_k = \frac{a_k}{A_n} - 1 = 0 \ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

つまり $a_k = A_n$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のときに限る．これは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限ることを意味している． □

4.3.4 数列だけで証明するもの

関数の微分を使わずに数列だけで証明するには工夫がいる．

方法 7 次の命題を $\mathrm{P}(n)$ とおく．

任意の正の数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$に対し
$G_n \leqq A_n$.
等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$のときに限る．

このとき次の問いに答えよ，ただし $k,\ m,\ n$ は $k \geqq 1$ および $m,\ n \geqq 2$ の自然数とする．

(1) P(2) を示せ.

(2) P(2^k) を示せ.

(3) P(m) が成立すれば P($m-1$) が成立することを示せ.

(4) $n \geqq 2$ の自然数 n に対して P(n) が成立することを示せ.

解

(1)

$$\begin{aligned} A_2 - G_2 &= \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} \\ &= \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geqq 0 \end{aligned}$$

等号成立は $a_1 = a_2$ のとき. ゆえに P(2).

(2) まず P(m) $\Rightarrow$ P($2m$) を示す.

$$\begin{aligned} A_{2m} &= \frac{a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{2m}}{2m} \\ &= \frac{\dfrac{a_1 + \cdots + a_m}{m} + \dfrac{a_{m+1} + \cdots + a_{2m}}{m}}{2} \\ (\text{P}(m) \text{ より}) &\geqq \frac{(a_1 \cdots a_m)^{\frac{1}{m}} + (a_{m+1} \cdots a_{2m})^{\frac{1}{m}}}{2} \\ (\text{P(2) より}) &\geqq (a_1 \cdots a_{2m})^{\frac{1}{2m}} = G_{2m} \end{aligned}$$

したがって P(2^k) $\Rightarrow$ P(2^{k+1}) なので (1) と合わせて帰納法により P(2^k) である.

(3) P(m) とする. つまり

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + + a_{m-1} + a_m}{m} \geqq \sqrt[m]{a_1 a_2 \cdots a_{m-1} a_m}$$

ここで $a_m = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}}{m-1}$ を代入する.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + + a_{m-1}}{m-1} = A_{m-1} \\ \text{右辺} &= (a_1 \cdots a_{m-1} A_{m-1})^{\frac{1}{m}} = ({G_{m-1}}^{m-1} A_{m-1})^{\frac{1}{m}} \\ \therefore & \quad A_{m-1} \geqq ({G_{m-1}}^{m-1} A_{m-1})^{\frac{1}{m}} \\ \iff & \quad {A_{m-1}}^m \geqq {G_{m-1}}^{m-1} A_{m-1} \\ \iff & \quad A_{m-1} \geqq G_{m-1} \end{aligned}$$

つまり P($m-1$).

(4) $n \geqq 2$ の任意の自然数 n に対して

$$2^{k-1} < n \leqq 2^k$$

となる自然数 k をとる．

(2) より $\mathrm{P}(2^k)$．つぎに (3) の操作を 2^k-n 回繰り返し用いると

$$\mathrm{P}(2^k) \Rightarrow \mathrm{P}(2^k-1) \Rightarrow \mathrm{P}(2^k-2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathrm{P}(n)$$

となり $\mathrm{P}(n)$ が成立することが示された． □

同様にたいへんうまい工夫がされている．これも入試問題になったことがある．雑誌『初等数学』(2001 年 3 月号) の宮地俊彦先生の報告によると，1997 年の『数学セミナー』(9 月号) に掲載されたそうである．

方法 8 (1) $n \geqq 1,\ x > 0$ に対して

$$x^n - 1 \geqq n(x-1)$$

を示せ．

(2)

$$a_n \geqq nG_n - (n-1)G_{n-1} \quad \cdots ②$$

を示せ．等号が成立する条件を $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の関係で述べよ．

(3)

$$nA_n - nG_n \geqq (n-1)A_{n-1} - (n-1)G_{n-1}$$

を示せ．

(4)

$$G_n \leqq A_n$$

を示し，等号成立が $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限ることを示せ．

解

(1) $n \geqq 1,\ x \geqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} & x^n - 1 - n(x-1) \\ = \ & (x-1)\{(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1) - n\} \\ = \ & (x-1)\{(x^{n-1}-1) + (x^{n-2}-1) + \cdots + (x-1) + (1-1)\} \end{aligned}$$

ここで $x-1$ の符号と $x^{n-1}-1,\ x^{n-2}-1,\ \cdots,\ x-1$ の符号が同じなので

$$x^n - 1 - n(x-1) \geqq 0$$

等号成立は $x = 1$ のときである．

(2) (1) の x に $x = \dfrac{G_n}{G_{n-1}}$ を代入する．

$$\frac{G_n}{G_{n-1}} = \frac{(a_1 \cdots a_{n-1}a_n)^{\frac{1}{n}}}{(a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{{G_{n-1}}^{\frac{n-1}{n}} \cdot {a_n}^{\frac{1}{n}}}{G_{n-1}} = {G_{n-1}}^{-\frac{1}{n}} \cdot {a_n}^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \quad {G_{n-1}}^{-1} \cdot a_n - 1 \geqq n\left(\frac{G_n}{G_{n-1}} - 1\right)$$

これを整理して

$$a_n \geqq nG_n - (n-1)G_{n-1}$$

を得る．等号が成立するのは

$${G_{n-1}}^{-\frac{1}{n}} \cdot {a_n}^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = G_{n-1} = (a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$$

(3) $a_n = nA_n - (n-1)A_{n-1}$ を (2) の結果に代入することにより

$$nA_n - nG_n \geqq (n-1)A_{n-1} - (n-1)G_{n-1}$$

となる．

(4) (3) から $k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対して

$$kA_k - (k-1)A_{k-1} \geqq kG_k - (k-1)G_{k-1}$$

両辺 $k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ にわたって加えることにより

$$nA_n - A_1 \geqq nG_n - G_1$$

を得る． $A_1 = G_1$ なのでこれから

$$G_n \leqq A_n$$

を得る．等号成立は

$$a_2 = a_1,\ a_3 = (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} = a_1,\ \cdots,\ a_n = (a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} = a_1$$

と帰納的に定まるので $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限る． □

② は別解がある．ただし定積分を使う．雑誌『初等数学』(2001 年 3 月号) の宮地俊彦先生の報告による．

方法 9 $x > 0$ で定義された 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \left(\frac{G_n}{x}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

とする． a_{n+1} を正の数とし，定積分

$$\int_{G_n}^{a_{n+1}} f_n(x)\,dx$$

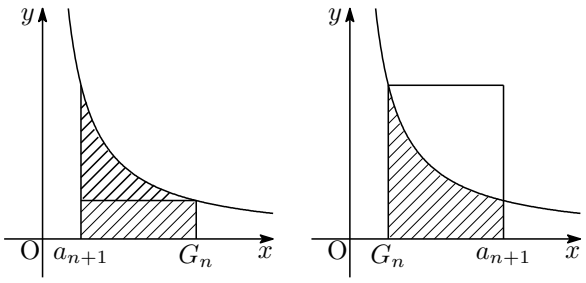
を考えることにより，② を示せ．

解

$x > 0$ で定義された 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \left(\frac{G_n}{x}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

と定める． $f_n(x)$ は単調減少関数である．



ここで

$$\begin{aligned}\int_{a_{n+1}}^{G_n} f_n(x)\,dx &= \left[G_n{}^{\frac{n}{n+1}}\cdot(n+1)x^{\frac{1}{n+1}}\right]_{a_{n+1}}^{G_n}\\ &= (n+1)G_n{}^{\frac{n}{n+1}}(G_n{}^{\frac{1}{n+1}}-a_{n+1}{}^{\frac{1}{n+1}})\\ &= (n+1)\{G_n-(G_n^n a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}\}\\ &= (n+1)G_n-(n+1)G_{n+1}\end{aligned}$$

である．そこで $a_{n+1}\leqq G_n$ のとき

$$\begin{aligned}&(G_n-a_{n+1})f(G_n)\leqq\int_{a_{n+1}}^{G_n} f_n(x)\,dx\\ \Longleftrightarrow\quad &G_n-a_{n+1}\leqq(n+1)G_n-(n+1)G_{n+1}\\ \Longleftrightarrow\quad &(n+1)G_{n+1}-nG_n\leqq a_{n+1}\end{aligned}$$

$a_{n+1}\geqq G_n$ のとき

$$\begin{aligned}&\int_{G_n}^{a_{n+1}} f_n(x)\,dx\leqq(a_{n+1}-G_n)f(G_n)\\ \Longleftrightarrow\quad &(n+1)G_{n+1}-(n+1)G_n\leqq a_{n+1}-G_n\\ \Longleftrightarrow\quad &(n+1)G_{n+1}-nG_n\leqq a_{n+1}\end{aligned}$$

いずれの場合も② が ($n+1$ の場合で) 示されている． □

これもよく知られたものだが，感心するほどうまく工夫されている．

方法 10 (1) $a\geqq 1,\ b\leqq 1$ である任意の正数 $a,\ b$ に対し

$$a+b\geqq 1+ab$$

を示せ．

(2) $a_1a_2\cdots a_n=1$ である任意の n 個の正数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ に対し，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqq n$$

を示せ．

(3)

$$G_n\leqq A_n$$

を示し，等号成立が $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限ることを示せ．

解

(1) $a \geqq 1,\ b \leqq 1$ である任意の正数 $a,\ b$ に対し

$$a + b - (1 + ab) = (a - 1)(1 - b) \geqq 0$$

等号成立は $a = 1$ または $b = 1$ のとき.

(2) 数学的帰納法で示す.

$n = 2$ のとき. $a_1 a_2 = 1$ より一方が 1 以上で，他方が 1 以下である．ゆえに (1) より

$$a_1 + a_2 \geqq 1 + a_1 a_2 = 2$$

なので成立している.

n で成立するとし $n+1$ での成立を示す．$a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = 1$ である．ここで 1 以上のものと 1 以下のものを選ぶ．番号を付け替えて $a_n \geqq 1,\ a_{n+1} \leqq 1$ としてよい．$b_n = a_n a_{n+1}$ とおくと $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} b_n = 1$．帰納法の仮定から

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n a_{n+1} \geqq n$$

(1) から

$$a_n + a_{n+1} \geqq 1 + a_n a_{n+1}$$

なので

$$n \leqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n a_{n+1} \leqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - 1$$

$$\therefore \quad n + 1 \leqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$

等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = b_n (= a_n a_{n+1}) = 1$ かつ $a_n = a_{n+1} = 1$ のとき，つまり $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a_n = a_{n+1} = 1$ のときである．ゆえに $n+1$ でも成立した.

よって一般に $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ である任意の n 個の正数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ に対し，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n$$

が成立する.

(3)

$$b_1 = \frac{a_1}{G_n},\ \cdots,\ b_n = \frac{a_n}{G_n}$$

とすると

$$b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{G_n^n} = 1$$

ゆえに (2) から

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqq n$$

つまり

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n G_n$$

である.

$$\therefore \quad G_n \leqq A_n$$

等号成立は (2) から $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$，つまり $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限る. □

なんとなんと，こんなこともできる．雑誌『初等数学』(2001 年 3 月号) の宮地俊彦先生によると (3) の不等式は **WIGERT の不等式** というそうだ．

方法 11　各 n に対して $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \cdots$ として一般性を失わない．このとき

(1)

$$A_{n+1}({A_{n+1}}^n - {A_n}^n) \geqq n{A_n}^n(A_{n+1} - A_n)$$

を示せ．

(2)

$${G_{n+1}}^{n+1} = {G_n}^n\{(n+1)A_{n+1} - nA_n\}$$

を示せ．

(3)

$$\left(\frac{G_{n+1}}{A_{n+1}}\right)^{n+1} \leqq \left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n$$

を示せ．

(4)

$$G_n \leqq A_n$$

を示し，等号成立が $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限ることを示せ．

解

(1) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1}$ なので

$$a_{n+1} = \frac{na_{n+1}}{n} \geqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A_n$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad A_{n+1} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \\ &\geqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + A_n}{n+1} = A_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{n+1}({A_{n+1}}^n - {A_n}^n) \\ = \;& A_{n+1}(A_{n+1} - A_n)({A_{n+1}}^{n-1} + {A_{n+1}}^{n-2}A_n + \cdots + {A_n}^{n-1}) \\ \geqq \;& A_n(A_{n+1} - A_n)(n{A_n}^{n-1}) = n{A_n}^n(A_{n+1} - A_n) \end{aligned}$$

等号成立は $a_{n+1} = A_n$ のときである．

(2) $\dfrac{{G_{n+1}}^{n+1}}{{G_n}^n} = a_{n+1}$，$(n+1)A_{n+1} - nA_n = a_{n+1}$ なので

$${G_{n+1}}^{n+1} = {G_n}^n\{(n+1)A_{n+1} - nA_n\}$$

である．

(3) (1) より

$$(n+1)A_{n+1} - nA_n \leqq \frac{{A_{n+1}}^{n+1}}{{A_n}^n}$$

(2) とあわせて

$${G_{n+1}}^{n+1} \leqq {G_n}^n \cdot \frac{{A_{n+1}}^{n+1}}{{A_n}^n}$$

つまり

$$\left(\frac{G_{n+1}}{A_{n+1}}\right)^{n+1} \leqq \left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n$$

(4) (3) より

$$\frac{{G_n}^n}{{A_n}^n} \leqq \frac{G_1}{A_1} = 1$$

$$\therefore \quad G_n \leqq A_n$$

等号成立は

$$A_1 = a_2, \quad A_2 = a_3, \quad \cdots, \quad A_n = a_{n+1}$$

のときに限る．つまり $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限る． □

4.4　凸関数と不等式

2018.9.28/2018.9.8/2015.1.25/2009.7.3/2000.12.12

4.4.1　凸領域

拓生　『数学対話』の「相加相乗平均の不等式 」で，次のもっとも基本的な不等式を学びました．

関数 $f(x)$ が 2 回微分可能で $f''(x) < 0$ を満たしているとする．また n は $n \geqq 2$ なる自然数とする．

$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ を満たす任意の正の数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ と，定義域内の任意の実数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ に対して，不等式

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_n f(x_n) \leqq f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n)$$

が成り立ち，等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときにかぎり，成り立つ．

南海　この不等式は，**イェンセンの不等式**と言われ，不等式の基礎になるものだ．

拓生　相加相乗平均の不等式はイェンセンの不等式で，$f(x) = \log x$，$r_i = \dfrac{1}{n}$ とおくことで得られます．つまり

$$\frac{1}{n}\log(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) \leqq \log\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}\right)$$

より得られます．

イェンセンの不等式から，その他のよく知られた不等式も導くことができるのでしょうか．

南海　高校で習う，コーシー・シュワルツの不等式も、三角不等式もここから導くことができる．

拓生　そうなのですか．

ところで，$f''(x) < 0$ であるとき「その関数のグラフは上に凸である」といいます．確かにグラフの形はそうなのですが，では一体「凸」とはどのように定義されるのだろう，など考えました．

南海　関数が凸であることの前提に領域が凸であることがある．領域が凸であることと，それを用いて関数が凸であることをしっかりと定義し，領域の凸な性質と関数が凸であることとがどのように結びつくのかを考えよう．

そしていくつかのよく知られた不等式をここから導いてみよう．

そこでまず領域の凸性とは何か，これを明確にしよう．数学 III の二次導関数の応用で「上に凸」とか「下に凸」とか習うわけだが，では「凸」とは何か．その意味からはっきりさせないと一般化はうまくできなかったわけだ．

ここで二つの多角形を見てほしい．

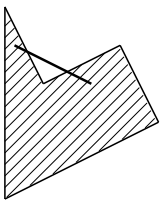


図 1

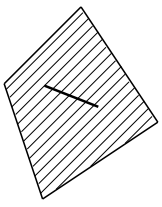


図 2

結論からいうと図 1 は凸でない五角形だ．それに対して図 2 は凸な多角形だ．この違いをどのように定義するのか．

拓生　図を見せてもらったので気づきましたが，凸な方は内部の任意の二点を結ぶ線分がまた内部にあるが，凸でないと線分が外に飛び出すことがある．

南海　その通り．ここに「凸」をはっきりさせるカギがある．

凸という概念はこのように直線で囲まれた図形だけではなく, 一般の領域で考えられる．領域が凸であることを問題自身のなかで定義した入試問題がある．

例題 4.4.1　［03 慶應大］

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ は正数とする．このとき

$$ab \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad cd \geqq 1$$

ならば

$$ad + bc \geqq 2$$

であることを証明せよ．

(2) 座標平面の部分集合 C が凸であるとは，C の相異なる 2 点 P と Q に対して線分 PQ が C に含まれることである．

$$D = \{(x,\ y) \mid x > 0,\ xy \geqq 1\ \}$$

が凸であることを証明せよ．

拓生　解いてみます．問題のなかで定義が与えられているときは,「定義に立ちかえる」が基本です．問題の定義通りにやってみます．

解答

(1)

$$a \geqq \frac{1}{b} \quad \text{かつ} \quad c \geqq \frac{1}{d}$$

であるから

$$ad + bc \geqq \frac{d}{b} + \frac{b}{d} \geqq 2\sqrt{\frac{d}{b} \cdot \frac{b}{d}} = 2$$

等号成立は

$$a = \frac{1}{b} = c = \frac{1}{d}$$

のときである．

(2) 集合 D の 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1),\ \mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ をとる．

$$x_1 > 0,\ x_1y_1 \geqq 1,\ x_2 > 0,\ x_2y_2 \geqq 1$$

が成り立っている．

2 点を結ぶ線分 PQ 上の各点 R は $0 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数 t を用いて

$$\mathrm{R}((1-t)x_1 + tx_2,\ (1-t)y_1 + ty_2)$$

と表される．このとき

$$\begin{aligned} & \{(1-t)x_1 + tx_2\}\{(1-t)y_1 + ty_2\} \\ = \ & (1-t)^2x_1y_1 + t(1-t)(x_1y_2 + x_2y_1) + t^2x_2y_2 \\ \geqq \ & (1-t)^2 + t(1-t)(x_1y_2 + x_2y_1) + t^2 \end{aligned}$$

(1) から

$$x_1y_2 + x_2y_1 \geqq 2$$

が成り立ち，かつ $t(1-t) \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} & \{(1-t)x_1 + tx_2\}\{(1-t)y_1 + ty_2\} \\ \geqq\ & (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = \{(1-t)+t\}^2 = 1 \end{aligned}$$

つまり点 $\mathrm{R}((1-t)x_1 + tx_2,\ (1-t)y_1 + ty_2)$ が再び D に属することが示された．つまり線分 PQ 上の任意の点が D に属する．

ゆえに D は凸であることが証明された． □

南海　この問題にある凸性の定義を改めて書いておこう．

定義 25 (平面領域の凸性)　平面上の領域 K が凸であるとは，次の命題が成り立つことである．

K の任意の二点 A, B に対して，線分 AB 上の点はすべて K に属する．

このとき領域 K は凸性をもつともいう． ■

拓生　すると定義から，領域 $K_1,\ K_2$ が凸なら共通領域 $K_1 \cap K_2$ も凸です．点 $\mathrm{A},\ \mathrm{B} \in K_i$ なら線分 AB 上のすべての点が K_i に属する，これが $i = 1,\ 2$ で成り立つからです．

南海　その通り．これから n 個の凸領域の共通部分も凸となる．

拓生　$ax + by \leqq c$ のように直線で座標平面を二つに分けたとき，それぞれの領域は凸です．定義からすぐに導けます．

南海　やってみてほしい．

拓生

$$D = \{\ (x,\ y) \mid ax + by \leqq c\ \}$$

とします．集合 D の 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1),\ \mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ をとる．

$$ax_1 + by_1 \leqq c,\ ax_2 + by_2 \leqq c$$

が成り立っている．2 点を結ぶ線分 PQ 上の各点 R は $0 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数 t を用いて

$$\mathrm{R}((1-t)x_1 + tx_2,\ (1-t)y_1 + ty_2)$$

と表される．このとき

$$\begin{aligned} & a\{(1-t)x_1 + tx_2\} + b\{(1-t)y_1 + ty_2\} \\ =\ & (1-t)(ax_1 + by_1) + t(ax_2 + by_2) \\ \leqq\ & (1-t)c + tc = c \end{aligned}$$

よって点 $\mathrm{R}((1-t)x_1 + tx_2,\ (1-t)y_1 + ty_2)$ が再び D に属する．ゆえに D は凸であることが証明された． □

南海　その通り．

拓生　ですからいくつかの半平面の共通領域は多角形をなし，この多角形は凸性をもちます．これが凸多角形なのですね．

逆に，凸な多角形はこのような半平面の共通部分として得られるのでしょうか．

先ほどの例では，確かに，図 1 の多角形は半平面の共通部分としては作れないが，図 2 の多角形は半平面の共通部分として作れます．

南海　n $(n \geqq 3)$ についての数学的帰納法でできそうである．ただ今後の議論には必要ないので，これは宿題としておこう．

そこでまず凸な領域内の n 個の点とその重みつき平均に関する次の定理を示そう．

定理 98　凸な平面領域 K と基準点 O がある．自然数 n に対し K の n 個の点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n$ と，$0 < r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n$　かつ　$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 1$ である n 個の実数の組をとる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \sum_{k=1}^{n} r_k \overrightarrow{\mathrm{OA}_k}$$

で定まる点 P は K に含まれる．　■

証明　n に関する数学的帰納法で証明する．$n = 1$ なら明らかである．

n のときに成立するとし，$n+1$ のときの成立を示す．$0 < r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ r_{n+1}$　かつ　$r_1 + r_2 + \cdots + r_n + r_{n+1} = 1$ である $n+1$ 個の実数の組をとり，$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ とおく．$r + r_{n+1} = 1$ である．

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \sum_{k=1}^{n+1} r_k \overrightarrow{\mathrm{OA}_k} \\ &= r \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{r} \overrightarrow{\mathrm{OA}_k} + r_{n+1} \overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}} \end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{r} = 1$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{r} \overrightarrow{\mathrm{OA}_k}$$

とおくと，数学的帰納法の仮定によって，$\mathrm{Q} \in K$ である．そして，$r + r_{n+1} = 1$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + r_{n+1} \overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}}$$

は線分 QA_{n+1} 上の点である．K の凸性によって $\mathrm{P} \in K$ である．

$n+1$ のときも成立したので，数学的帰納法からすべての自然数 n で定理が成立する．　□

南海　凸領域の考察を深めるには，領域が開集合か閉集合か (『解析基礎』参照) 等の議論が必要なのだが，それはここではおいて，凸領域を不等式等で定義するときは，不等式に等号を入れ境界を含めるようにしよう．

定理 99 (Gauss の定理)　$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ は相異なる複素数で，複素数平面上の n 角形

$$K \ :\ \mathrm{A}_1(\alpha_1)\mathrm{A}_2(\alpha_2)\cdots\mathrm{A}_\mathrm{n}(\alpha_\mathrm{n})$$

は凸多角形であるとする．

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

とおく．複素数 z は

$$f'(z) = 0$$

を満たしているとする．

このとき，複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ は n 角形 K の内部の点である．

証明

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_i}$$

より，$f'(z) = 0$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - \alpha_i} = 0$$

よってまた，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\bar{z} - \bar{\alpha_i}} = 0$$

従って，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{z - \alpha_i}{|z - \alpha_i|^2} = 0$$

つまり，

$$z \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \alpha_i$$

である．ここで，

$$r_i = \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \right)^{-1}$$

とおくと，

$$r_i > 0 \ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ \sum_{i=1}^{n} r_i = 1$$

で，

$$z = \sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i$$

がなりたつ．

よって，定理 98 より，z は 凸多角形 K の内部に存在する． □

4.4.2 凸関数

南海 次に凸関数だ．凸関数とは次のような関数だ．

定義 26 (凸関数) 区間 $[a,\ b]$ で定義された関数 $f(x)$ は，定義域内の相異なる任意の二点 $x_1,\ x_2$ に対して，

$$(1) \quad \text{つねに} \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{4.1}$$

$$\text{または，} \quad (2) \quad \text{つねに} \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leqq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \tag{4.2}$$

が成り立つ．このとき，関数 $f(x)$ は凸関数であるという．

(1) が成り立つとき下に凸であるといい，(2) が成り立つとき上に凸であるという． ■

符号の正負でわけて，一方を凸関数，他方を凹関数ということもあるが，ここでは上に凸と下に凸を用いる．また，区間 $[a,\ b]$ で下に凸なら，$[a,\ b]$ 内の任意の区間 $[c,\ d]$ でも下に凸であることに注意しよう．これは，定義から明らかである．

定理 100 関数 $f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続で，かつ下に凸である．このとき $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす任意の実数に対して

$$f\left((1-t)a+tb\right) \leqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

が成り立つ． ■

南海　これに関連した過去問題がある．等号の場合であるが，2008 年静岡大学後期 である．それを参考にもして，この定理の証明をやっておきたい．

私の高校のときのノート が手元にあるが，そこでもこの定理を証明しようとしている．懐かしいものであるが，実数の連続性を前提としても，二，三厳密でないところがある．また，凸領域の概念もないままであった．

ここで，それらを見直し再構成してゆこう．ただし，以下の議論の土台に実数の連続性があり，その点に関しては『解析基礎』の「実数の構成」を参考にしてもらいたい．

証明　$\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ とする．区間 $[a,\ b]$ を 2^n 等分し，その等分点を

$$p(n,\ j) = a + \frac{b-a}{2^n}\cdot j \quad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n)$$

とおく．また，

$$q(n,\ j) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2^n}\cdot j \quad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n)$$

とおく．点 $(p(n,\ j),\ q(n,\ j))$ は 2 点 A，B を結ぶ直線上にある．

任意の j $(j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n)$ に対し

$$f(p(n,\ j)) \leqq q(n,\ j) \quad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n) \tag{4.3}$$

となることを，n に関する数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のときは $j = 0,\ 1,\ 2$ に対して

$$p(1,\ 0) = a,\ p(1,\ 1) = \frac{a+b}{2},\ p(1,\ 2) = b$$

$$q(1,\ 0) = f(a),\ q(1,\ 1) = \frac{f(a)+f(b)}{2},\ q(1,\ 2) = f(b)$$

なので，下に凸の定義から成立する．

$n = k$ で成立するとする．$j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^k - 1$ に対して

$$f(p(k,\ j)) \leqq q(k,\ j), \qquad f(p(k,\ j+1)) \leqq q(k,\ j+1)$$

である．これから

$$f\left(\frac{p(k,\ j)+p(k,\ j+1)}{2}\right) \leqq \frac{f(p(k,\ j))+f(p(k,\ j+1)}{2} \leqq \frac{q(k,\ j)+q(k,\ j+1)}{2}$$

ところが

$$\frac{p(k,\ j)+p(k,\ j+1)}{2} = \frac{1}{2}\left\{a + \frac{b-a}{2^k}j + a + \frac{b-a}{2^k}(j+1)\right\}$$

$$= \quad a + \frac{b-a}{2^{k+1}}(2j+1) = p(k+1,\ 2j+1)$$

$$\frac{q(k,\ j)+q(k,\ j+1)}{2} = \frac{1}{2}\left\{f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2^k}j + a + \frac{f(b)-f(a)}{2^k}(j+1)\right\}$$

$$= \quad f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2^{k+1}}(2j+1) = q(k+1,\ 2j+1)$$

であるから

$$f(p(k+1,\ 2j+1)) \leqq q(k+1,\ 2j+1)$$

である．$p(k+1,\ 2j+1) = p(k,\ j),\ q(k+1,\ 2j+1) = q(k,\ j)$ だから，あわせて，区間 $[a,\ b]$ を 2^{k+1} 等分したときにも，対応する各等分点において同様の不等式が成り立つ．

よって $n = k+1$ でも成立し，各 n に対し (4.3) が成立する．

次に，$(1-t)a+tb$ は区間 $(a,\ b)$ にある．各 n に対して

$$p(n,\ j) \leqq (1-t)a+tb < p(n,\ j+1)$$

となる j が存在する．必要なときは，この j を $j(n)$ とかく．実数の連続性によって

$$\lim_{n\to\infty} p(n,\ j(n)) = (1-t)a+tb$$

であり，そのうえで関数 $f(x)$ の連続性から

$$\lim_{n\to\infty} f(p(n,\ j(n))) = f((1-t)a+tb)$$

である．また 3 点

$$(p(n,\ j),\ q(n,\ j)),\ ((1-t)a+tb,\ (1-t)f(a)+tf(b)),\ (p(n,\ j+1),\ q(n,\ j+1))$$

はいずれも直線 AB 上にある．従って $(1-t)f(a)+tf(b))$ は $q(n,\ j)$ と $q(n,\ j+1)$ の間にある．よって

$$\lim_{n\to\infty} q(n,\ j(n)) = (1-t)f(a)+tf(b)$$

も成り立つ．一方，

$$f(p(n,\ j(n))) \leqq q(n,\ j)$$

であるので，極限をとって

$$f((1-t)a+tb) \leqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

が成立する． □

定理 101　区間 $[a,\ b]$ で定義された関数 $f(x)$ が区間 $(a,\ b)$ で二次導関数が存在するとする．この条件の下で，関数 $f(x)$ が下に凸であることと $f''(x) \geqq 0$ が成り立つことが同値である．そして $f''(x) = 0$ となる x は孤立点，つまり十分小さい区間をとれば，そこに単独で存在する． ■

証明　下に凸な場合に示す．このとき定義域内の異なる二点 $x_1,\ x_2$ に対して

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < 0$$

である．$x_1 < x_2$ とする．この不等式は

$$\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\dfrac{x_1+x_2}{2} - x_1} < \frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \dfrac{x_1+x_2}{2}} \tag{4.4}$$

と変形される．

区間 $[a,\ b]$ を 2^n 等分し，その等分点を前定理と同様に表す．$p_{j+1} = \dfrac{p_j + p_{j+2}}{2}$ であるから，不等式 (4.4) よりただちに

$$\frac{f\,(p_{j+1}) - f(p_j)}{p_{j+1} - p_j} < \frac{f(p_{j+2}) - f\,(p_{j+1})}{p_{j+2} - p_{j+1}}$$

が得られる．これから $i < j$ に関して

$$\frac{f\,(p_{i+1}) - f(p_i)}{p_{i+1} - p_i} < \frac{f\,(p_{j+1}) - f(p_j)}{p_{j+1} - p_j}$$

が成り立つ．

次に区間 $[a,\ b)$ の任意の x をとる．

$$p(n,\ j(n)) \leqq x < p(n,\ j(n) + 1)$$

となる $j(n)$ があり，

$$\lim_{n\to\infty} p(n,\ j(n)) = \lim_{n\to\infty} p(n,\ j(n) + 1) = x$$

である．また区間 $[p(n,\ j),\ p(n,\ j{+}1)]$ に平均値の定理を適用することにより，区間 $(p(n,\ j),\ p(n,\ j{+}1))$ 内の $c(n,\ j)$ で

$$\frac{f\,(p_{j+1}) - f(p_j)}{p_{j+1} - p_j} = f'(c(n,\ j))$$

となるものが存在する．次に $x < y$ である y をとる．同様に

$$\lim_{n\to\infty} p(n,\ k) = \lim_{n\to\infty} p(n,\ k + 1) = y$$

かつ

$$\frac{f\,(p_{k+1}) - f(p_k)}{p_{k+1} - p_k} = f'(c(n,\ k))$$

となる k および $c(n,\ k)$ が存在する．$j < k$ なので

$$f'(c(n,\ j)) < f'(c(n,\ k))$$

であり，

$$p(n,\ j) < x,\ c(n,\ j) < p(n,\ j + 1), \quad p(n,\ k) < y,\ c(n,\ k) < p(n,\ k + 1)$$

であるから，$n \to \infty$ のとき

$$c(n,\ j) \to x,\ c(n,\ k) \to y$$

となる．この結果

$$f'(x) \leqq f'(y)$$

が得られる．$x < y$ のとき n を大きくとると $k - j$ は十分大きくなるので等号は成立しない．したがって $f'(x)$ は単調増加であり，つねに $f''(x) \geqq 0$ が成り立つ．そして $f''(x) = 0$ となる x は孤立点である．

逆に，$f'(x)$ が存在し，かつつねに $f''(x) \geqq 0$ が成り立つとする．定義域内の異なる二点 $x_1,\ x_2$ $(x_1 < x_2)$ をとる．区間 $\left[x_1,\ \dfrac{x_1 + x_2}{2}\right]$ と区間 $\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2},\ x_2\right]$ に関して平均値の定理を適用する．

$$\frac{f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\dfrac{x_1 + x_2}{2} - x_1} = f'(c_1),\ \frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - \dfrac{x_1 + x_2}{2}} = f'(c_2)$$

となる $c_1,\ c_2$ がそれぞれ区間 $\left(x_1,\ \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ と区間 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right)$ に存在する．

$f''(x) \geqq 0$ で $c_1 < c_2$ より

$$f'(c_1) < f'(c_2)$$

である．つまり

$$\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\dfrac{x_1+x_2}{2} - x_1} < \frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \dfrac{x_1+x_2}{2}}$$

である．これを整理して

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

を得る．つまり関数 $f(x)$ は下に凸である． □

南海　上に凸な場合も証明は同様である．

次の定理が，関数の凸性と領域の凸性を結びつける．

定理 102　関数 $f(x)$ は定義域 $[a,\ b]$ で連続で，下に凸であるとする．このとき領域

$$K = \{\ (x,\ y) \mid f(x) \leqq y,\ a \leqq x \leqq b\ \}$$

は凸性をもつ． ■

証明　K から二点 $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$, $\mathrm{Q}(q_1,\ q_2)$ $(p_1 \leqq q_1)$ をとる．条件から

$$a \leqq p_1,\ q_1 \leqq b,\ f(p_1) \leqq p_2,\ f(q_1) \leqq q_2 \tag{4.5}$$

である．線分 PQ 上の点 C を $0 < t < 1$ なる t を用いて

$$\mathrm{C}\left((1-t)p_1 + tq_1,\ (1-t)p_2 + tq_2\right)$$

とおく．点 C が K に属することを示せばよい．つまり，

$$f((1-t)p_1 + tq_1) \leqq (1-t)p_2 + tq_2$$

を示せばよい．

定理 100 を区間 $[p_1,\ q_1]$ で用いることにより

$$f((1-t)p_1 + tq_1) \leqq (1-t)f(p_1) + tf(q_1)$$

なので，条件 (4.5) とあわせて

$$f((1-t)p_1 + tq_1) \leqq (1-t)p_2 + tq_2$$

が成り立つ．よって領域 K は凸である． □

南海　ここで点 C が K の境界 $y = f(x)$ 上にあるのは，二点 P, Q が同一の点でかつ $y = f(x)$ 上にあるときにかぎることを確認しよう．

また，関数が上に凸で連続なときは不等号を逆にすることで，同様に領域 $y \leqq f(x)$ の凸性が示される．

定理 98 と定理 102 を結びつけると次のことが成立する．

系 6　関数 $f(x)$ は定義域で連続で，下に凸である．このとき，定義域の n 個の x の値 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ と $0 < r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n$　かつ　$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 1$ である n 個の実数の組に対して不等式

$$f\left(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_n\alpha_n\right) \leqq r_1 f(\alpha_1) + r_2 f(\alpha_2) + \cdots + r_n f(\alpha_n) \tag{4.6}$$

が成立する．ここで等号が成立するのは $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対する α_i がすべて等しいときであり，そのときにかぎる．　■

証明　n 個の点 $(\alpha_i,\ f(\alpha_i))\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は領域 $f(x) \leqq y$ に属する．定理 102 によってこの領域は凸なので，定理 98 から点

$$\left(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_n\alpha_n,\ f\left(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_n\alpha_n\right)\right)$$

も領域 $f(x) \leqq y$ に含まれる．よって不等式 (4.6) が成立する．

等号成立条件を数学的帰納法で示す．$n = 1$ のときは成立．

n のとき成立するとする．

$n + 1$ のとき等号が成立する条件は定理 98 の証明において，点 Q が $y = f(x)$ 上にあり，かつ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + r_{n+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}}$$

で定まる点 P も $y = f(x)$ 上にあることである．

帰納法の仮定から $\alpha_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ がすべて等しく，かつ定理 102 の証明において

$$(1-t)f(p_1) + tf(q_1) = f((1-t)p_1 + tq_1)$$

となるときである．それが $p_1 = q_1$ となるときにかぎることは，証明のなかにある．よって $n + 1$ このときに等号が成立するのは α_{n+1} が他の α_i に等しいときであり，このときにかぎる．つまり $\alpha_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n + 1)$ すべて等しいときである．よって系が示された．　□

拓生　これは「相加相乗平均の不等式」にあるイェンセンの不等式の凸関数を用いた証明の別証明ですか．

南海　中味は同じこと，つまり凸関数で定まる領域の凸性を用いているので，別証明とはいえない．しかし，領域の凸性と関数の凸性をいったん別個に定義し，それを結びつけたので論証の仕組みが見やすい．

『不等式』[8] には「凸関数の理論における基礎はイェンセンによって構築された」とある．イェンセン（Jensen）の論文は,「Sur les fonction convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math.30(1906), 175-193」とのことである．

拓生　凸関数のグラフ上に，順に $n\ \ (n \geqq 3)$ 個の値

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

を取り，これに対する xy 平面上の n 個の点

$$\mathrm{A}_1(x_1,\ f(x_1)),\ \mathrm{A}_2(x_2,\ f(x_2)),\ \cdots,\ \mathrm{A}_n(x_n,\ f(x_n))$$

で定まる多角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ とは凸多角形になります．つまり多角形の周と内部でできる領域 P は凸性をもちます．

南海　どうして言えるのか．

拓生　下に凸なときに考えます．x の値が $f(x)$ の定義区間内でかつ $y \geqq f(x)$ である領域 K は凸性をもちます．したがって多角形の各辺は K に属し，その結果 P そのものも K に属します．

直線 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ で K を二つの領域に分けます．このとき，領域 P は二つに分けられた K の各領域のいずれか一方にのみ属します．もしそうでないと，x_i と x_{i+1} の間にもう一つ頂点を作る x の値が必要になります．また，直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1$ に関しても領域 P は二つに分けられた K の各領域のいずれか一方にのみ属します．

したがって P は，これら各辺をつくる直線で平面を二つに分け P の属する側を取るとき，その共通部分になります．

そこで，P 内の 2 点 S, T をとります．直線 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ で分けられる K の二つの領域はともに凸性をもちます．ですから，線分 ST はこの K の二つの領域のうち，P のある側に属します．

これが各辺について言えるので，線分 ST はそれらの共通部分である P に属します．つまり P は凸な領域です．

4.4.3　ヘルダーの不等式とコーシー・シュワルツの不等式

南海　さて，この凸関数の方等式を用いて，よく知られている絶対不等式を証明していこう．絶対不等式といわれる不等式にはどんなものがあったか．

拓生　相加相乗平均の不等式，コーシー・シュワルツの不等式，三角不等式です．これらは別個に習いました．

コーシー・シュワルツの不等式，三角不等式も凸関数の不等式から出るのですか．

南海　この二つをある程度一般化し，イェンセンの不等式、から順次導こう．

まず，コーシー・シュワルツの不等式とは．

拓生

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2)$$

等号成立は

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n$$

のときです．

南海　両辺の平方をとると?

拓生

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leqq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)^{\frac{1}{2}}({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2)^{\frac{1}{2}}$$

です．ベクトルを $\vec{a} = (\cdots,\ a_i,\ \cdots)$, $\vec{b} = (\cdots,\ b_i,\ \cdots)$ とすると

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqq |\vec{a}| \left|\vec{b}\right|$$

等号成立は $\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ のとき，といいかえることができます．

南海　これが次のように一般化される．絶対値の問題を後で解決する．まず負でない実数で考える．以下，$n \geqq 2$ とする．

系 7 (ヘルダーの不等式)　n を自然数とし，$a_i,\ b_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を負でない実数とする．p と q は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす正の実数とする．このとき

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqq ({a_1}^p + {a_2}^p + \cdots + {a_n}^p)^{\frac{1}{p}}({b_1}^q + {b_2}^q + \cdots + {b_n}^q)^{\frac{1}{q}}$$

が成立する．等号成立は $a_i : b_i$ がすべて等しいときである．これを**ヘルダーの不等式**という．■

証明

$$A=\sum_{i=1}^{n}{a_i}^p,\quad B=\sum_{i=1}^{n}{b_i}^q$$

とおく．$A=0$ は $a_i=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を意味するので，定理の等式の両辺は 0 で成立する．$B=0$ のときも同様．

以下 $A>0,\ B>0$ とする．

関数 $f(x)=\log x$ は $f''(x)=-x^{-2}<0$ であるから上に凸．$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ なので正の x と y に関して

$$\frac{1}{p}\log x+\frac{1}{q}\log y\leqq\log\left(\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y\right)$$

これから

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leqq\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y$$

この不等式は $x=0$ または $y=0$ でも成立する．この不等式自体は**ヤングの不等式**といわれる．

ここに

$$x=\frac{{a_i}^p}{A},\ y=\frac{{b_i}^q}{B}$$

を代入し $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について加える．

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{a_i}^p}{A}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{{b_i}^q}{B}\right)^{\frac{1}{q}}\leqq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{a_i}^p}{pA}+\frac{{b_i}^q}{qB}\right)$$

両辺整理すると

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqq\frac{1}{pA}\sum_{i=1}^{n}{a_i}^p+\frac{1}{qB}\sum_{i=1}^{n}{b_i}^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

これから

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqq A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}$$

となる．

等号成立は $\dfrac{{a_i}^p}{A}=\dfrac{{b_i}^q}{B}$ がすべての i で成り立つときである．このとき ${a_i}^p:{b_i}^q=B:A$ で i によらず一定で，$a_i,\ b_i\geqq 0$ なので，${a_i}^p:{b_i}^q$ が i によらず一定．逆にこのときは $\dfrac{{a_i}^p}{A}=\dfrac{{b_i}^q}{B}$ がすべての i で成り立つ．以上で定理が示された． □

拓生　コーシー・シュワルツの不等式は $p=q=2$ のときなのですね．でもコーシー・シュワルツの不等式は負の数でもよかった．

南海　一般の p では負数があるとべきが定義されないときがあるので，非負としている．$p=q=2$ なら，負でもよい．

a_i や b_i に負なものがあるときは

$$\begin{aligned}&(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2=|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|^2\\ \leqq\ &(|a_1b_1|+|a_2b_2|+\cdots+|a_nb_n|)^2\\ \leqq\ &({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2)\end{aligned}$$

とすればよい．

そのうえで等号成立は，${a_i}^2 : {b_i}^2$ が i によらず一定，かつ a_ib_i がすべて同符号のときである．

ヘルダーの不等式は $a_i,\ b_i$ の 2 系列でなくてもよい．3 系列のとき．$p,\ q,\ r$ は $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=1$ を満たす正の次数とする．このとき

$$\begin{aligned} & a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n \\ \leqq\ & ({a_1}^p+{a_2}^p+\cdots+{a_n}^p)^{\frac{1}{p}}({b_1}^q+{b_2}^q+\cdots+{b_n}^q)^{\frac{1}{q}}({c_1}^r+{c_2}^r+\cdots+{c_n}^r)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

が成立する．これが m 系列になっても同じことである．

拓生　3 系列のときは不等式

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}z^{\frac{1}{r}} \leqq \frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y+\frac{1}{r}z$$

に

$$\frac{{a_i}^p}{{a_1}^p+{a_2}^p+\cdots+{a_n}^p},\ \frac{{b_i}^p}{{b_1}^q+{b_2}^p+\cdots+{b_n}^q},\ \frac{{c_i}^p}{{c_1}^r+{c_2}^p+\cdots+{c_n}^r}$$

を代入して i について加えればできます．

$p=q=r=3$ とするとコーシー・シュワルツの不等式も

$$\begin{aligned} & (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n)^3 \\ \leqq\ & ({a_1}^3+{a_2}^3+\cdots+{a_n}^3)({b_1}^3+{b_2}^3+\cdots+{b_n}^3)({c_1}^3+{c_2}^3+\cdots+{c_n}^3) \end{aligned}$$

で成立します．学校ではベクトルの内積や二次関数の非負条件から導きます．あの方法では 3 系列の場合はできません．それが凸関数を応用すればできるのですね．

南海　3 系列の場合は非負条件がいるが．このように系 6 の凸関数の不等式は，他の多くの絶対不等式を生みだす源泉だ．ヘルダーの不等式はさらに広い応用があるが，ここではそれを指摘するにとどめよう．

4.4.4　ミンコフスキーの不等式と三角不等式

南海　次に三角不等式とは?

拓生　ベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ に対して

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \leqq |\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$$

等号成立は $\vec{a}\ //\ \vec{b}$ のとき．

南海　これを成分で書くと?

拓生　ベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ を n 次元ベクトルとし，$\vec{a}=(\cdots,\ a_i,\ \cdots),\ \vec{b}=(\cdots,\ b_i,\ \cdots)$ とすると

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

南海　この指数の 2 が次のように一般化される．ただし指数を一般の実数にするので，$a_i,\ b_i$ は負でない実数である．

系 8 (ミンコフスキーの不等式)　$p>1$ である実数 p と負でない実数 $a_i,\ b_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ．等号成立は $a_i : b_i$ がすべて等しいときである．これをミンコフスキーの不等式という．
■

証明

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1}\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ となる実数 q をとり，ヘルダーの不等式を使う．$q(p-1)=p$ なので

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p &\leqq \left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right\}^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right\}^{\frac{1}{q}}\\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{p-1}{p}}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\end{aligned}$$

これから

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

を得る．等号成立は，$a_i : (a_i+b_i)$，$b_i : (a_i+b_i)$ が一定より．$a_i : b_i$ が一定のときである．　□

拓生　ほんとだ．これは距離の不等式ではありませんか．大変よく似ています．

南海　ミンコフスキーの不等式は，$p=1$ のときも等号で成り立つ．1 以上の実数 p を定める．$|\ \ |$ は実数の絶対値とする．

n 次元空間の二点 $\mathrm{A}(\cdots,\ a_i,\ \cdots)$, $\mathrm{B}(\cdots,\ b_i,\ \cdots)$ に対して

$$d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

とおく．d_p は距離の公理

(i) 非負性 (半正定値性) ：$d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B}) \geqq 0$,

(ii) 同一性 (非退化性) ： $d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=0 \iff \mathrm{A}=\mathrm{B}$,

(iii) 対称性 ：$d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=d_p(\mathrm{B},\ \mathrm{A})$,

(iv) 三角不等式 ：$d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})+d_p(\mathrm{B},\ \mathrm{C}) \geqq d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{C})$

を満たす．

拓生　三角不等式が問題です．三つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の i 成分を $x_i,\ y_i,\ z_i$ とすると，$x_i+y_i=z_i$ であり，

$$d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{C}) = \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})+d_p(\mathrm{B},\ \mathrm{C})$$

です．つまり三角不等式が成り立つ．これで d_p が距離の公理を満たすことが示された．ここで実数の絶対値が入るので，ミンコフスキーの不等式自体は負でない実数でいいのです．

コーシー・シュワルツの不等式，ミンコフスキーの不等式がすべて凸関数の不等式である，イェンセンの不等式、からでるのですね．

4.4.5 高校範囲で考える

南海 これらの不等式はさらに積分型で成り立ち，函数解析という分野でたいへん重要なものだ．しかし高校範囲では，このあたりまでの一般化を見通せればよい．

拓生 一般化することによって，かえって見通しがよくなることがよくわかりました．

そのうえで，一般化することなく，高校で絶対不等式として習う相加平均と相乗平均の不等式から，高校範囲のコーシー・シュワルツの不等式や三角不等式を直接に導く道筋を確認したいのです．

x と y を負でない実数とするとき，不等式

$$\sqrt{xy}\leqq\frac{x+y}{2}\quad\cdots①$$

が成り立つ．等号は $x=y$ のとき成立する．これが相加平均と相乗平均の不等式である．

これを用いてコーシー・シュワルツの不等式

$$(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2\leqq({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)\quad\cdots②$$

を証明します．

証明 まず，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ を負でない実数とする．このときは不等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqq({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)^{\frac{1}{2}}({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)^{\frac{1}{2}}\quad\cdots③$$

等号は $a_1:x_1=\cdots=a_n:x_n$ のときである．を示せばよい．

$x=\dfrac{{a_k}^2}{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}$，$y=\dfrac{{x_k}^2}{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}$ を ① に代入し，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について加える．

$$\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}}$$
$$\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}+\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}\right)=1$$

が得られる．これは ③ に他ならない．等号は $x=y$ つまり

$$\frac{{a_k}^2}{{x_k}^2}=\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}$$

が各 k について成り立つときである．つまり $a_1:x_1=\cdots=a_n:x_n$ のときである．

a_k, x_k が負でないとはかぎらないとき．一般に実数 y_1, $\cdots$, y_n について

$$|y_1+\cdots+y_n| \leqq |y_1|+\cdots+|y_n|$$

が成り立ち，等号はすべて同符号のとき成立する．これは $n=2$ のときは両辺 2 乗して，一般の n については数学的帰納法で直接示される．よって ② は

$$\begin{aligned}(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2 &= |a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|^2\\ &\leqq (|a_1||x_1|+|a_2||x_2|+\cdots+|a_n||x_n|)^2\\ &\leqq ({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)\end{aligned}$$

より成立する．等号は a_1x_1, a_2x_2, $\cdots$, a_nx_n が同符号でかつ $|a_1|:|x_1|=\cdots=|a_n|:|x_n|$ のとき．つまり $a_1:x_1=\cdots=a_n:x_n$ のときである． □

次に，相加平均と相乗平均の不等式 ① から，三角不等式を導きます．三角不等式は

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

でした．その証明です．

まず，a_i, b_i は負でないとする．

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)$$

コーシー・シュワルツの不等式 ③ を，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)$ と $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)$ に対して用いる．

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 &\leqq \left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\end{aligned}$$

これから

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

を得る．等号成立は，$a_i:(a_i+b_i)$，$b_i:(a_i+b_i)$ が一定より．$a_i:b_i$ が一定のときである．

a_i, b_i に負が混在する場合は，

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^2$$

より，負がない場合に帰着する．

等号は $a_i:b_i$ が負でなく，すべて等しいときである． □

南海　高校では，相加平均と相乗平均の不等式，コーシー・シュワルツの不等式，そして三角不等式が別々の不等式として学ぶ．

しかしこれらがすべて，相加平均と相乗平均の不等式から導かれることを理解することはたいへん大切なことだ．

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 型の参考問題：「津田塾大 」

4.5　オイラーの公式

2003.11.26/2002.5.26

4.5.1　オイラーの公式

史織　複素数の偏角について次の等式を『数学対話』の「複素数の構成」で証明しました．教科書にものっています．

z_1，z_2 を 2 つの複素数とし，arg で偏角を表すと

$$\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

それで思ったのですが，これってまったく対数の式

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

ではありませんか.「偏角って対数？」と思いました．

南海　なるほど．

史織　それで，この式のもとは何かと考えるとそれはド・モアブルの定理です．$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とすると

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

となります．偏角を考えるのに大きさはいらないので $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$f(\theta_1)\cdot f(\theta_2) = f(\theta_1+\theta_2)$$

です．これは指数法則 $a^x\cdot a^y = a^{x+y}$ と同じです．すると $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$って「指数関数？」

南海　よく考えた．いわば高校数学の秘密に自分の力で迫っている．結論から言えば $\cos\theta + i\sin\theta$ はまさに指数関数だ．それは

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

となる．これを **オイラーの公式 (Euler's formula)** という．

史織　べきに虚数が入るのですか．何か神秘的な感じですね．

南海　そうだ．三角関数と指数関数が虚数単位 i をなかだちに結びついている．これは人類が発見した数学史上最もうつくしい公式だ．この公式を理解するには左辺の定義から始めなければならない．そのためにはいくらか準備がいる．高校の範囲では厳密には論証しきれないところが出る．しかしそれはそれでかまわない．厳密には大学数学のなかで学んでもらいたい．オイラー (1707〜1783) の時代も 19 世紀以降の数学から見ればそんなに厳密であったわけではない．しかし彼らはすばらしい洞察力で新しい数学的な現象を発見した．事実としての数学的現象をつかむことが大切だ．

4.5.2　関数の展開

南海　準備として，関数の級数展開について話そう．平均値の定理を知っているな．

史織　はい．区間 $[a,\ b]$ で連続で区間 $(a,\ b)$ で微分可能な関数 $f(x)$ に対して $a<c<b$ の c で

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となるものがある．
南海　これから分母を払って整理すると

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$$

となる．これをさらに拡張することができる．

定理 103　関数 $f(x)$ を区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で n 回微分可能な関数とする．このとき，次のような c が存在する．

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n,\quad a<c<b$$

証明

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k+K(b-x)^n$$

とする．ここで K は

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+K(b-a)^n$$

で定める．すると

$$F(a)=f(b),\quad F(b)=f(b)$$

よって，ロルの定理により $a<c<b$ である c が存在して，$F'(c)=0$ となる．ここで

$$F'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k-\frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1}\right]-Kn(b-x)^{n-1}$$

であるから,

$$F'(c)=\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}-Kn(b-c)^{n-1}=0$$

が成り立つ．つまり

$$K=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

である．よって

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{n}(c)}{n!}(b-a)^n$$

である．□

史織　平均値の定理の証明と似ています．
南海　そう．うまく関数 $F(x)$ をとりロルの定理から c の存在を示すのはまったく同じだ．この定理を $a=0, b=x$ で用い，c を $c=\theta x, 0<\theta<1$ とあらわすと次のようになる．

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

史織　ちょっと待ってください．$f(x)=e^x$ のときは，$f(x)$ は何回微分しても e^x だから

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{k!}x^k+\cdots+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

ですね．これはよく入試問題にも出てきます．
南海　そうだね．これを題材にした問題は多い．この展開は後にも何度も出てくるところで実数 α に対し，$f(x)=(1+x)^\alpha$ で用いるとどうなるかな．
史織　やってみます．$k\geqq 1$ に対して，

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

したがって，

$$\begin{aligned}&(1+x)^\alpha\\ =\ & 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}\\ &+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n}\cdot x^n\end{aligned}$$

となります．
南海　さらに α が自然数 n の場合は？
史織　α が自然数 n の場合，最終項は

$$\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}(1+\theta x)^0x^n={}_n\mathrm{C}_nx^n$$

また，x^k の係数はちょうど ${}_n\mathrm{C}_k$ となっているので

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

となります．あっ，これは二項定理そのものです．
南海　考えてみれば二項定理は多項式の展開法則だから一致するのは当然なのだが，なかなかうまくできている．さて，本題．$f(x)$ が何度でも微分可能とする．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=0$$

となれば $f(x)$ はべき級数:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

と展開される．ここで厳密でない論証をしている．どのような x で収束するのか，この展開に対して微分は各項の微分でいいのか，等々．これは大学数学の課題だ．先の e^x から作った無限級数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{k!}x^k+\cdots$$

は任意の x で収束し微分は各項別にできる．以下この事実を使う．同様にして $\sin x,\cos x,\log(1+x)$ の展開式を作ってみてほしい．

史織　はい．

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \\ \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots\end{aligned}$$

となりました．

南海　$\log(1+x)$ はもちろん $-1 < x$ でなければならないが，$-1 < x \leqq 1$ の範囲の x で収束する．収束範囲については『解析基礎』「級数展開」等を参照．

これは，数学 IIIC の関数の近似で学習した近似式を，任意の精度で精密化したものである．最近は近似式が必修でないので習っていないかも知れない．

4.5.3　オイラーの公式へ

指数関数 e^x は

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

と展開された．また自然対数の底 e は

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

となる．

史織　e^x については指数法則も証明しなければならない？

南海　いいことに気づいた．やってみてほしい．

史織　(しばらく考える．すこし南海先生に教えてもらう．)

$$\begin{aligned}e^x \cdot e^y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}y^m\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{n+m=j} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\sum_{n+m=j} \frac{j!}{n!m!}x^n y^m\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\sum_{n=0}^{j} {}_j\mathrm{C}_n x^n y^{j-n}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(x+y)^j = e^{x+y}\end{aligned}$$

南海　というわけだ．

史織　指数法則の証明に二項定理が出てくるのですね．

南海　このような事実を味わうことが大切だ．そこで複素数 z に対しても

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n$$

と定めてしまえ，ということだ．$z = x + iy$ とすると指数法則は示したばかりなので

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

になる．そこで

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1+(iy)+\frac{1}{2}(iy)^2+\frac{1}{3!}(iy)^3+\frac{1}{4!}(iy)^4+\cdots \\ &= 1+(iy)-\frac{1}{2}y^2-\frac{i}{3!}y^3+\frac{1}{4!}y^4+\cdots \\ &= 1-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4!}y^4+\cdots+i\left(y-\frac{1}{3!}y^3+\cdots\right) \end{aligned}$$

史織　あっ．この実部と虚部は先に求めた $\cos y$ と $\sin y$ の展開です．だから

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

になる！

南海　もちろんここでは加える順序を変えてもいいのか，という問題がある．この場合はいいのだがその論証はここではしない．かくして

定理 104

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

となり，オイラーの公式が示せた．

e^{x+iy} を級数展開を用いて定義したが，e のもう一つの定義にならい

$$e^{x+iy}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n$$

として定め，論を進める方法もある．いずれにしてもオイラーの公式は数学的に実在する現象である．ところで $x+iy=i\pi$ にすると

$$e^{i\pi}=-1$$

となる．これは，円周率 π，自然対数の底 e，そして虚数単位 i，さらに数 1 を結びつける式だ．それぞれ，歴史的にはまったく別のところで発見され用いられてきた．それがこのように一つの式に結びつくのだ．不思議というか，うまくできているというか，造化の妙というか．感心するしかない．

4.5.4　いくつかの話題

南海　ここまで来ればド・モアブルの定理とは，指数法則

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

そのもであることがわかる．ド・モアブルの定理は三角関数の加法定理そのものだ．ところで 1999 年の東大で次の問題が出題されている．

例題 4.5.1　［99 東大前期文理］

(1) 一般角 θ に対して $\sin\theta$, $\cos\theta$ の定義を述べよ．

(2) (1) で述べた定義にもとづき一般角 α, β に対して

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ.

われわれの立場から別の解ができる.

史織　$\cos\theta$ は $e^{i\theta}$ の実部とするのですね. すると $e^{i\theta}$ の共役は $e^{-i\theta}$ だから次の式を定義にできる.

(1)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

(2) このとき

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

である.

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

より

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\ &= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

両辺の実部と虚部を比較して加法定理が得られる.

南海　もちろんこれは, $e^{i\theta}$ の定義や指数法則の成立を示していないので解答としては不完全だ. しかし, 今話してきたことをすべて書けば一応解答にはなる.

三角関数の定義は一つではない. さらに別の観点から定義することもできる. オイラーの公式を手にすると, 二つの三角関数 $\sin\theta$, $\cos\theta$ を $e^{i\theta}$ の実部と虚部として統一的につかめる. 例えば, もし

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

を認めるなら

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta+i\sin\theta) &= \frac{d}{d\theta}\cos\theta + i\frac{d}{d\theta}\sin\theta\\ = \quad i(\cos\theta+i\sin\theta) &= -\sin\theta+i\cos\theta\end{aligned}$$

より

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta,\ \frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$

となる. いろいろ試してみてほしい.

4.6　代数学の基本定理

2003.9.8

4.6.1　複素数係数の方程式

史織　次の方程式を解いているとき，先生が 6 次方程式には必ず 6 個の根 roots があるので見落とさないようにしなさい，といわれました．

$$X^6 - \sqrt{2}X^3 + 1 = 0$$

次数だけの根があることは

$$(1+2i)x^2 + (2+i)x - 3(1+i) = 0$$

のように係数が虚数でも成り立つのですね．

南海　そうだ．ただし，6 次方程式に 6 個の根があることが重要なのではない．基本的なことは，複素数を係数にもつ方程式の根は複素数のなかに存在する，ということだ．

史織　一つの根 α があれば，因数定理によって方程式が $(x-\alpha)Q(x)$ と因数分解できる．$Q(x)$ も x の多項式なので，$Q(x)$ をまた因数分解して，次々に分解していけばよいのですね．6 次方程式に 6 個あることは，少なくとも一つの根が存在することの結果なのですね．

南海　$f(x)$ を複素数係数の n 次多項式とする．$f(x) = 0$ のように 多項式 $= 0$ と置いて得られる方程式を代数方程式と呼ぼう．n 次の代数方程式には必ず根があること，その結果として n 個の根があることを，実際に方程式を解くことなく保証する．これがいわゆる**代数学の基本定理**だ．

史織　しかしどのような根拠によって，このようなことが示されるのでしょうか．

南海　証明方法は実はいくつかある．いちばん一般的な方法は，実数の連続性といわれる性質と複素数の極形式 に存在の根拠を求めるものだ．それだけではもちろん何のことかわからないだろうから，代数学の基本定理と実数，複素数の基本について最初から少しずつ考えてみよう．

代数方程式に一つの根 α_1 が存在すれば因数定理によって

$$f(x) = (x-\alpha_1)Q(x) \quad \cdots ①$$

と因数分解される．$Q(x)$ にも同様の操作をし，これを繰り返すことで次の定理が得られる．

定理 105　$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ を複素数係数の n 次多項式とする．このとき，方程式 $f(x) = 0$ は重複度を含めてちょうど n 個の複素数根 $\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_n$ をもつ．すなわち，

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \quad \cdots ②$$

と一次式の積に因数分解できる．

史織　この定理の証明は厳密には数学的帰納法ですね．

$n = 1$ のとき．$f(x) = ax + b$ とすると，方程式は $ax + b = 0$．$n = 1$ より $a \neq 0$ なので，$x = -\dfrac{b}{a}$ という根がただ一つ存在する．

$n-1$ 次で成立するとする．① の両辺の次数と最高次の係数を比較して $Q(x)$ が $n-1$ 次式で，x^{n-1} の項の係数は a_n であることがわかる．数学的帰納法の仮定から $Q(x) = 0$ は重複度を含めてちょうど $n-1$ 個の複素数根をもつ．これを $\alpha_2\,\cdots\,\alpha_n$ とすると，

$$Q(x) = a_0(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

と因数分解される．ゆえに式 ② が示された．

南海　さて,「複素数は本当に存在するのか」で次のように書いた．

> 「代数学の基本定理」は代数方程式を解くことに関しては複素数より大きい世界は要らない，ということを意味している．これまではそうではなかった．$2x+3=0$ は，係数は整数だが，その根は整数でなく有理数だし，$x^2-2=0$ なら根は無理数だ．実数の世界まで広げなければ根がない．このように，これまでは係数が属する世界より外の広い世界を考えなければ根がないということが起こったが，複素数係数の代数方程式のすべて根は複素数の中に存在するので，代数方程式を解くということでは，これより広い数の世界は要らないのだ．このことを「複素数は代数的に閉じている」という．その意味で複素数は十分に広い世界なのだ.】

これはここではもう少し正確に述べなければならない．

自然数から整数，整数から有理数，実数から複素数への世界の広がりは，根が存在するように代数的に広げていくことで実現される．しかし，実数は有理数に有理数係数の代数方程式の実数の根を付け加えた数の集合より大きいのだ．

有理数係数の代数方程式の根になる数を**代数的数**と呼ぶ．代数的数は複素数の範囲で考える．i も代数的数だ，代数的でない実数を**超越数**という．実数は代数的な実数の集合より大きい集合なのだ．円周率 π や自然対数の底 e は超越数であって代数的数ではない．

史織　証明は難しいのですか．

南海　現在でも，超越性が示されている実数はほんの僅かであり，与えられた数が超越数であるかどうかを調べるのはたいへん難しい．

史織　π が無理数であることの証明は，2003 年の大阪大学後期の試験問題にありました．

南海　そう．e や π が無理数であることの証明は高校範囲でできる．

e が無理数であることの証明を例題にしておこう．(1)〜(3) は入試問題．(4)(5) はその応用だ．

例題 4.6.1　e を自然対数の底とし，自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を次のように定義する．

$$f_n(x)=x^ne^{-x},\ F_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$$

このとき次の問いに答えよ．

(1) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$0\leqq f_n(x)\leqq \dfrac{1}{e}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(1)}{n!}=0$ を示せ．

(3) $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$ を示せ．

(4) 任意の自然数 n に対し，次の不等式を示せ．

$$0<n!\left\{e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right\}<1$$

(5) e が無理数であることを示せ．

史織

(1) $f_n(x) = x^n e^{-x}$ なので

$$f_n(x)' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$$

n は自然数なので $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $f_n(x)' \geqq 0$ となり，$f_n(x)$ はこの区間で単調増加である．
$f_n(0) = 0,\ f_n(1) = \dfrac{1}{e}$ であるから

$$0 \leqq f_n(x) \leqq \frac{1}{e}$$

(2) (1) から

$$0 \leqq \int_0^1 f_n(t)\,dt \leqq \int_0^1 \frac{1}{e}\,dt$$

これから $0 \leqq F_n(1) \leqq \dfrac{1}{e}$．つまり $0 \leqq \dfrac{F_n(1)}{n!} \leqq \dfrac{1}{e \cdot n!}$．

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{F_n(1)}{n!} = 0$$

(3) $F_n(1) = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$ なので

$$\begin{aligned} F_n(1) &= \left[-t^n e^{-t}\right]_0^1 + n\int_0^1 t^{n-1}e^{-t}\,dt \\ &= -\frac{1}{e} + nF_{n-1}(1) \end{aligned}$$

これから

$$\frac{F_n(1)}{n!} - \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!} = -\frac{1}{e \cdot n!}$$

よって

$$\frac{F_n(1)}{n!} - \frac{F_0(1)}{0!} = -\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

ここで

$$F_0(1) = \int_0^1 e^{-t}\,dt = 1 - \frac{1}{e}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{F_n(1)}{n!} &= 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \end{aligned}$$

(2) から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(1)}{n!} = 0$ なので

$$1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = 0$$

つまり

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

(4) (3) から $0 < n!\left\{e - \left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)\right\}$ は明らかである．次に

$$n!\left\{e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right\} = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

である．ここで j を自然数とすると

$$\frac{n!}{(n+j)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)} \leqq \frac{1}{2^j}$$

なので

$$n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < 1$$

したがって

$$0 < n!\left\{e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right\} < 1$$

(5) 背理法で示す．e が有理数であるとし $e = \dfrac{p}{q}$ とおく．$n = q$ のとき

$$0 < q!\left\{\frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)\right\} < 1$$

が成り立つが，$q!\left\{\dfrac{p}{q} - \left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{q!}\right)\right\}$ は整数なので，これは矛盾である．よって e は無理数である．

1744 年，オイラーはこの練習問題のようにして e の無理数性を示した．さらに，1873 年，エルミートは e が超越数であることを証明した．これに対して，π が無理数であることを示したのはランベルト（1761 年）であり，最終的にリンデマンが π が超越数であること証明した（1882 年）．リンデマンはエルミートの方法を発展させ，π の超越性を示した．

4.6.2 代数学の基本定理の証明

南海　さて本題に入ろう.「実数とは何か」の中にある実数の連続性が，証明の根拠になる．xy 平面上の領域 D が**有界閉領域**であるとは，十分大きい円盤をかけばその中に D が入り．D の無限部分集合の集積点がすべて D に属することをいう．このとき

定理 106　平面上の有界閉領域 D で連続な実数値関数 $F(x,\ y)$ は D で最大値，最小値をとる．

証明

x を固定すれば y の関数になり x を固定したとき D が y の閉集合にあることは明らかである．したがって x を固定するたびに最大値 $M(x)$ が存在する．これは x の連続関数である．また，$I = \{x \mid (x,\ y) \in D\ \}$ とおけば I は実数の集合の中の閉集合である．したがって x の関数としての $M(x)$ に最大値 M_0 がある．$F(x,\ y)$ が連続だから，先に y を固定して得られる最大値 M_1 と等しく，これが．$F(x,\ y)$ の D における最大値である．

最小値についても同様である．　□

以下複素数係数の多項式を，変数を z で，係数を c_i で表すことにする．

$$f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n \quad (c_i \in C,\ c_0 \neq 0)$$

とする．また複素数体と複素数平面を同一視し C で表す．

代数学の基本定理を三段階に分けて証明する．最初の二段階を補題として示す．

補題 25　$z = x + iy$ とし，$F(x,\ y) = |f(z)|$ とする．十分大きい M をとると

$$|x + iy| \geqq M \quad \text{ならば} \quad |f(x + iy)| > |c_n|$$

証明　$F(x,\ y)$ は複素数平面全体で定義された x と y の連続関数である．そこで

$$\left|\frac{c_1}{c_0}\right|,\ \left|\frac{c_2}{c_0}\right|,\ \cdots,\ \left|\frac{c_n}{c_0}\right|$$

の最大値を N として，$M = (n+1)N$ とおく．$|z| = |x + iy| \geqq M$ ならば，

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |c_0||z|^{n-1}\left|z + \frac{c_1}{c_0} + \frac{c_2}{c_0 z} + \cdots + \frac{c_n}{c_0 z^{n-1}}\right| \\
&\geqq |c_0||z|^{n-1}(|z| - \left|\frac{c_1}{c_0} + \frac{c_2}{c_0 z} + \cdots + \frac{c_n}{c_0 z^{n-1}}\right|) \\
&\geqq |c_0||z|^{n-1}\{(n+1)N - \left|\frac{c_1}{c_0} + \frac{c_2}{c_0 z} + \cdots + \frac{c_n}{c_0 z^{n-1}}\right|\} \\
&\geqq |c_0||z|^{n-1}\{(n+1)N - nN\} = |c_0||z|^{n-1}N \geqq |c_0||z|^{n-1}\left|\frac{c_n}{c_0}\right| \\
&= |z|^{n-1}|c_n| \geqq |c_n|
\end{aligned}$$

これで題意が示された．□

これは $|z|$ の絶対値を十分大きくとれば，関数値の絶対値は定数項の絶対値 $|c_n|$ より大きくできるということで，それ自体当然のことである．

補題 26　M は前補題の M とする．関数 $|f(z)| = |f(x+iy)|$ の有界閉領域 $D = \{z \in C \mid |z| \leqq M\}$ における最小値は，関数 $|f(z)|$ の C 全体における最小値である．

証明

a が関数 $|f(z)|$ の D における最小値とする．任意の $z \in C$ について $z \in D$ なら $a \leqq |f(z)|$. $z \notin D$ なら前補題から $|f(z)| > |c_n| = |f(0)| \geqq a$ である．□

基本定理 105 の証明

関数 $|f(z)|$ の D における最小値は定理 106 により存在する．その最小値を a とする．このとき

$$a = 0$$

であることを示す．$a > 0$ として矛盾を示す．最小値を与える z を b とする．つまり

$$|f(b)| = a > 0$$

と仮定する．ここで z を b の周りに十分小さい半径で一周回す．そのために $u = \cos\theta + i\sin\theta$ として $z = b + ru$ とおく．

$$f(z) = f(b + ru) = a_0 + a_1(ru) + a_2(ru)^2 + \cdots + a_n(ru)^n$$

と，$f(z)$ を展開して ru の多項式に整理する．$a_0 = f(b) \neq 0$ である．a_1 から順に見て最初に 0 でない係数を a_e とする．

$$f(z) = f(b + ru) = f(b) + a_e(ru)^e + a_{e+1}(ru)^{e+1} + \cdots$$

となる．r を十分に小さくとってすべての θ に対して

$$|a_e(ru)^e| > |a_{e+1}(ru)^{e+1} + \cdots| \quad \cdots ①$$

となるようにする．

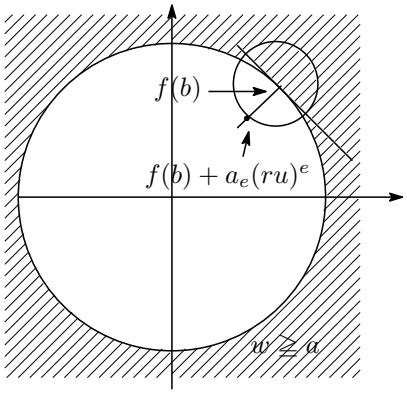
なぜそれが可能か．$|a_{e+1}|, \cdots, |a_n|$ の最大値を A とし，$l = n - e$ とおくと

$$\begin{aligned} |a_{e+1}(ru)^{e+1} + \cdots| &\leqq |A|(r^{e+1} + r^{e+2} + \cdots + r^n) \\ &= |A|r^{e+1}\frac{1 - r^l}{1 - r} < |A|r^{e+1}\frac{1}{1 - r} \end{aligned}$$

で，$|a_e(ru)^e| = |a_e|r^e$ なので

$$|A|r^{e+1}\frac{1}{1 - r} < |a_e|r^e$$

となるようにとればよい．両辺 r^e を約すと $|A|\dfrac{r}{1 - r} < |a_e|$ なので，このような r は存在する．



ここで $w = f(z)$ によって複素数平面から複素数平面への関数を考える．角 θ が 0 から 2π まで変化すると $f(b) + a_e(ru)^e$ は $f(b)$ の周りを e 回まわる．$|w| = |f(z)|$ はつねに $|w| \geqq a$ をみたす領域内になければならない．ところが $f(b) + a_e(ru)^e$ が図のように $f(b)$ をとおり円 $|w| = a$ と垂直な直線上に来たとき，① から $w = f(z)$ は $|w| \geqq a$ 内にはあり得ない．これは a が $|f(z)|$ の最小値であることと矛盾する．

したがって $a = 0$ となり確かに $f(z) = 0$ となる z が存在する． □

4.7　円周率を表す

2003.9.28

4.7.1　円周率に収束する数列

南海　2003 年の東大前期入試で「円周率 π が 3.05 より大きいことを示せ」という問題が出題された．また，同じ 2003 年阪大後期入試では円周率 π が無理数であることを示す問題が出題された．こういう理論的な問題を入試にまとめて出題するのはたいへんいいことだ．そこで今日は，円周率を実際に式に表し値を求めるさまざまな方法を，高校数学として可能な範囲で考えよう．

拓生　まず円周率 π の定義です．

$$\pi = \frac{\text{円周}}{\text{直径}}$$

その値は

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459 2\cdots$$

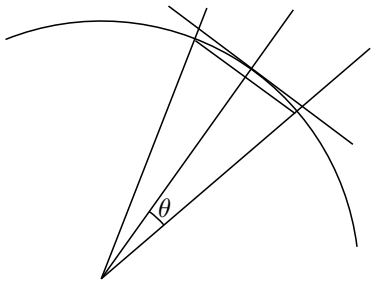
と続く無理数です．

南海　そう．日常の目的には 3.14 や $\dfrac{22}{7}$ を用いれば十分で，もう少し精度の高い数値が必要な技術系では 3.1416 や 3.14159 などを使用することが多い．天気予報や人工衛星などの計算では 30 桁程度の値を使用している．355/113 も覚えやすく精度が高い分数である．

ドイツの数学者ルドルフ・ファン・コイレンは 1600 年代に 35 桁目まで π の正しい値を計算した．彼の墓標にはこの値が刻まれている．ドイツでは彼の名にちなんで円周率をルドルフ数と呼ぶそうだ．スロベニアの数学者ユリー・ベガは 1789 年に 140 桁まで正しい値を求め，37 桁目までが正しかった．この記録はその後 50 年破られることがなかった．円周率は人間が世界から見いだした定数で，やはり人間の歴史とともにある．

円周率を算出することは、アルキメデスが円に接する正多角形の周長を求めることにより始まった．まずアルキメデスの方法を整理しよう．円周率の定義から，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の円周がちょうど π になる．そこで半径 $\dfrac{1}{2}$ の円に内接する正 k 角形の周の長さを $p(k)$，外接する正 k 角形の周の長さを $P(k)$ とおこう．

拓生　まずこれを求めてみます．正 k 角形の隣りあう 2 つの頂点と円の中心がなす角の $\dfrac{1}{2}$ を θ とおく．$\theta = \dfrac{2\pi}{2k} = \dfrac{\pi}{k}$ になる．したがって内接正 k 角形の 1 辺は $2\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{k} = \sin\dfrac{\pi}{k}$．外接正 k 角形の 1 辺は $2\cdot\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\pi}{k} = \tan\dfrac{\pi}{k}$ になる．



$$\therefore\quad p(k) = k\sin\frac{\pi}{k},\qquad P(k) = k\tan\frac{\pi}{k}$$

南海　だから，ここでさらに正多角形の各辺を 2 分割して正 $2k$ 角形にするとそれぞれ周の長さは

$$p(2k) = 2k\sin\frac{\pi}{2k},\qquad P(2k) = 2k\tan\frac{\pi}{2k}$$

となる．ここでもし $p(2k)$, $P(2k)$ を $p(k)$, $P(k)$ で表すことができれば，最初は正三角形や正四角形からはじめて，次々に正六角形や正八角形，正十二角形や正十六角形，$\cdots$ としたときの内接正多角形と外接正多角形の周の長さを，その関係式から求めていくことができる．

拓生　とりあえず $p(k)$ と $P(k)$ の和と積を作ってみます．簡単のために $\theta = \dfrac{\pi}{k}$ とおきます．

$$\begin{aligned} p(k)+P(k) &= k\sin\theta + k\tan\theta \\ &= k\sin\theta\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right) = k\sin\theta\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta} \\ &= 2k\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\frac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos\theta} = 4k\sin\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\cos\theta} \\ p(k)P(k) &= k^2\sin\theta\tan\theta = k^2\frac{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos\theta} \end{aligned}$$

これは割ると簡単になりました．$\dfrac{p(k)+P(k)}{p(k)P(k)} = \dfrac{1}{p(k)} + \dfrac{1}{P(k)}$ だから

$$\frac{1}{p(k)} + \frac{1}{P(k)} = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{k\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{2\cos\dfrac{\pi}{2k}}{2k\sin\dfrac{\pi}{2k}} = 2\cdot\frac{1}{P(2k)}$$

逆に言うと

$$\frac{1}{P(2k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p(k)} + \frac{1}{P(k)}\right)$$

$p(2k)$ がわかりません．

南海　ここは次のようにすればよい．

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(2k)}\cdot\frac{1}{p(k)} &= \frac{\cos\dfrac{\pi}{2k}}{2k\sin\dfrac{\pi}{2k}}\cdot\frac{1}{k\sin\dfrac{\pi}{k}} \\ &= \frac{\cos\dfrac{\pi}{2k}}{2k\sin\dfrac{\pi}{2k}}\cdot\frac{1}{2k\sin\dfrac{\pi}{2k}\cos\dfrac{\pi}{2k}} \\ &= \left(\frac{1}{2k\sin\dfrac{\pi}{2k}}\right)^2 = \frac{1}{p(2k)^2} \end{aligned}$$

拓生　つまり

$$\frac{1}{p(2k)} = \sqrt{\frac{1}{P(2k)}\cdot\frac{1}{p(k)}}$$

ですね．

南海　とすると，最初に任意の正 k 角形を作り，そこから順に倍々に増やしていって，$2^n k$ となったときを考える．

$$a_n = \frac{1}{P(2^n k)},\ b_n = \frac{1}{p(2^n k)}$$

とおくと

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$

これで計算して a_n, b_n を求めていけば，その逆数が内接，外接正多角形の周長だ．これは，円周に収束する．これで任意の精度で円周率が求まる．

アルキメデスは正六角形から始めたらしい．

拓生　半径 $\frac{1}{2}$ の円に内接する正六角形の周は $p(6) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$．また外接正六角形は一辺が $2 \cdot \frac{1}{2}\tan\frac{2\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ なので $P(6) = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

これから a_0 と b_0 を求め，漸化式によって a_1 と b_1 から順に求めていく．その逆数が外からと内からの円周の近似，つまりは円周率の近似です．この場合

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{P(6)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.28867513459481288225457439025098 \\ b_0 &= \frac{1}{p(6)} = \frac{1}{3} = 0.33333333333333333333333333333333 \end{aligned}$$

電卓を用いていくつか計算してみました．

n	$a_n = \frac{1}{P(2^n 6)}$	$b_n = \frac{1}{p(2^n 6)}$
0	0.28867513459481288225457439025098	0.33333333333333333333333333333333
1	0.31100423396407310779395386179199	0.32197527542968942891658106657621
2	0.31648975469688126835526746418361	0.31922073231418286121212345272012
3	0.31785524350553206478369545845 15	0.31853725622246899366784668655328

この逆数をとっていくと

n	$P(2^n 6)$	$p(2^n 6)$
0	3.46410161513775458705489268302 35	3
1	3.21539030917347247767064390194 15	3.10582854123024914818678605149 15
2	3.15965994209750048331663497784 55	3.13262861328123819716174946950 05
3	3.14608621513143497109809879425 27	3.13935020304686720713514682122 33−

$n = 1$ ですでに $\pi > 3.10$ になっているのですね．

南海　$n = 1$ ということは正 12 角形の場合だ．次に $k = 4$ で正方形から始めてみよう．

拓生　この場合

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{P(4)} = \frac{1}{4} = 0.25 \\ b_0 &= \frac{1}{p(4)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.35355339059327376220042218105242 \end{aligned}$$

n	$a_n = \frac{1}{P(2^n 4)}$	$b_n = \frac{1}{p(2^n 4)}$
0	0.25	0.35355339059327376220042218105242
1	0.30177669529663688110021109052621	0.32664074121909413196416079335 66
2	0.31420871825786550650 65321859419413	0.32036443096768827234951078702172
3	0.31728657461277688944084836448136	0.31882178866807274113164034327073

この逆数をとっていくと

n	$P(2^n4)$	$p(2^n4)$
0	4	2.828427124746190097603377448419 4
1	3.313708498984760390413509793679 9	3.061467458920718173827679872250 7
2	3.182597878074528110585561962319 9	3.121445152258052285572557895644 2
3	3.151724907429256098470320681331	3.136548490545939263814258044444 9

$n=1$ ですでに $\pi > 3.06$ になっている．これが正八角形を内接させた場合で東大の問題の解答に使ったものです．

4.7.2 ビエタの公式

南海　三角関数の倍角公式からできるのがビエタの公式だ．次の等式が成立する．

$$\begin{aligned} & \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}\sin\frac{\alpha}{2^n} \\ = \quad & \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) \\ = \quad & \cdots \\ = \quad & \frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2^n} \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$$

ここで $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ を代入してみてほしい．

拓生

$$\frac{\dfrac{1}{2^n}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

そうか．これから

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^2}\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$$

ここで $n\to\infty$ をとると $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ なので，

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^2}\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cdots}$$

南海　そこで倍角公式，$\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$ を用いて $\cos\dfrac{\pi}{2^2}$ から順に計算する．

拓生　やってみます.

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{2^2} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\
\cos\frac{\pi}{2^3} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \\
\cos\frac{\pi}{2^4} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \\
&\cdots \\
\therefore\quad \frac{\pi}{2} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots}
\end{aligned}$$

南海　少し計算をやってみよう.

拓生　はい.

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2.828427124746190097603377448419 4$$

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}} = 3.061467458920718173827679872242 8$$

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}} = 3.121445152258052285572557895631 1$$

2 項目までの計算で，3.05 は越えます．これは立派に東大の問題の別解になっています.

4.7.3　ウォリスの公式

南海　$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおくと，I_n には漸化式ができる.

拓生　はい.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)'\,dx \\
&= \left[-\sin^{n-1} x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

ここで

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

したがって

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

南海　極限をとるため，いくつか考えなければならない．

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots\cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

一方，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対し $0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ であるから

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n} = 1$ なので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$
$$\therefore \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdots$$

これをウォリスの公式という．

拓生

$$\frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{4n^2}{4n^2-1} > 1$$

なので

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \cdots\cdot \frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \\
&> \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \cdot \frac{10\cdot 10}{9\cdot 11} \cdot \frac{12\cdot 12}{11\cdot 13} \cdot \frac{14\cdot 14}{13\cdot 15} \cdot \frac{16\cdot 16}{15\cdot 17} \\
&= \frac{2^{30}}{9\cdot 11\cdot 11\cdot 13\cdot 13\cdot 15\cdot 15\cdot 17\cdot} > 1.52529
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \pi > 3.05058 > 3.05$$

これがウォリスの公式を活用した東大の問題に対する解でした．

4.7.4　関数 $\frac{1}{1+x^2}$ の活用

拓生　円周率が値になる積分があります．$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ です．$x = \tan\theta$ と置換することにより 0 から 1 まで積分します．$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ですから

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, d\theta = \frac{\pi}{4}$$

いつもこのようになります.

南海　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ をよく見てみると

$$\frac{d\theta}{dx}=\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+x^2}$$

となっている．これは θ を x の関数と見たとき，その導関数が $\dfrac{1}{1+x^2}$ であることを意味している．

拓生　つまり tan の逆関数の導関数ですか.

南海　そうだ．いずれにせよ $\dfrac{1}{1+x^2}dx=d\theta$ であるから，不定積分

$$\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\theta+C$$

なのだ．だから $a=\tan\alpha$ とすれば

$$\int_0^a\frac{1}{1+x^2}\,dx=\alpha$$

となる．ところが一方，$|x|<1$ に対して

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots$$

と無限等比級数に展開される．これを 0 から 1 まで積分することにより

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\\&=\int_0^1(1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots)\,dx\\&=\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots\right]_0^1\\&=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\end{aligned}$$

これがいわゆる「ライプニッツの公式」だ．ただし発見者はライプニッツではないらしい．もちろん，$|x|<1$ でなければ等比級数は収束しないのに 0 から 1 まで積分してよいのかとか，無限級数で表される関数の定積分と，各項の定積分の和とは一致するのかとか，の問題がある．これはいずれも肯定的に解決されるがそれについては大学で学んでほしい．例えば『解析概論』のような解析の基本書に載っている．

※　後に表した『解析基礎』のなかの「積分の方法」－「広義積分」にもある．

このライプニッツの公式は，級数としての収束はあまりよくない．東大の問題では無限級数の問題を回避するとともに，下からの評価を出すため次のような解答を作った．$0<x<1$ では $x^{24}-x^{26}>0$ のように，x^{24} の項以下の和はは正なので，$0<x<1$ において

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{j=0}^{11}(-x^2)^j+x^{24}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(-x^2)^j>\sum_{j=0}^{11}(-x^2)^j$$

がいえる．両辺を 0 から 1 まで積分する．

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&>\sum_{j=0}^{10}\left(\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{2j+3}\right)\\\therefore\quad\pi&>\frac{8}{1\cdot3}+\frac{8}{5\cdot7}+\frac{8}{9\cdot11}+\frac{8}{13\cdot15}+\frac{8}{17\cdot19}+\frac{8}{21\cdot23}=3.0584\cdots>3.05\end{aligned}$$

拓生　円周率を早く求めるのにいい方法はないのでしょうか．

南海　もちろんいっぱいある．ウエブ上を検索すればいくつもの公式が見つかる．その一つを紹介しよう．

先に「スロベニアの数学者ユリー・ベガは 1789 年に 140 桁まで正しい値を求め，37 桁目までが正しかった」と書いたが，彼の用いたのは次の公式で，これはジョン・マチンが 1706 年に発表したものだ．

$$\frac{\pi}{4} = 4\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^{\frac{1}{239}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

拓生　どうしてこんな式を見つけたのでしょう．

南海　tan の加法定理からだが，今風には次の複素数の展開からわかる．

$$\begin{aligned}(5+i)^4\cdot(-239+i) &= (625+4\cdot 125i+6\cdot 25i^2+4\cdot 5i^3+i^4)\cdot(-239+i)\\ &= (625-150+1+500i-20i)\cdot(-239+i) = (476+480i)\cdot(-239+i)\\ &= -114244-114244i = -114244(1+i)\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(5+i)^4}{239+i} = \frac{1}{239^2+1}(5+i)^4\cdot(239-i) = \frac{114244}{239^2+1}(1+i)$$

ここで

$$\arg(5+i)=\alpha,\ \arg(239+i)=\beta$$

とおくと．$1+i$ の偏角は $\dfrac{\pi}{4}$ なので，これは

$$4\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$$

を意味している．そして $\tan\alpha=\dfrac{1}{5},\ \tan\beta=\dfrac{1}{239}$ なので

$$4\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^{\frac{1}{239}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 4\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$$

になる．

拓生　この節の始めの式を不定積分に書けば

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ =\ &\int (1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots)\,dx\\ =\ &x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+C\end{aligned}$$

となるので，ここに $\dfrac{1}{5}$ を代入して 4 倍したものから $\dfrac{1}{239}$ を代入したものを引けばよいのですね．代入するものが小さいので早く収束して有効数字が大きいものが得られる．

南海　そうなんだ．この式は 1949 年に ENIAC で 2037 桁を計算する際に使用され，今でも収束が速いものとして知られている．少しやってみよう．$x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7$ に $\dfrac{1}{5}$ を代入して 4 倍すると，

拓生

$$0.78958201904761904761904761904762$$

また $\dfrac{1}{239}$ を代入すると

$$0.00418407600207472386449454626953 66$$

$$\begin{aligned} & \therefore \quad \pi \\ = \ & 4(0.78958201904761904761904761904762 - 0.00418407600207472386449454626953 66) \\ = \ & 3.14159177218217729501821229111 2 \end{aligned}$$

確かに一気に 3.141592 まで来ました．

4.7.5 オイラーの発見した円周率の公式

南海 もう一つ高校数学の範囲でできることを紹介しよう．それはド・モアブルの定理を用いるものである．

拓生 ド・モアブルの定理とは，すべての整数 n に対し

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

が成り立つ，というものですね．

南海 ド・モアブルの定理の本質的な部分はオイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

だ．これについては『ド・モアブルの定理からオイラーの公式へ』を見てほしい．ド・モアブルの定理の右辺は $(x+y)^n$ の形なので二項定理で展開することができる．

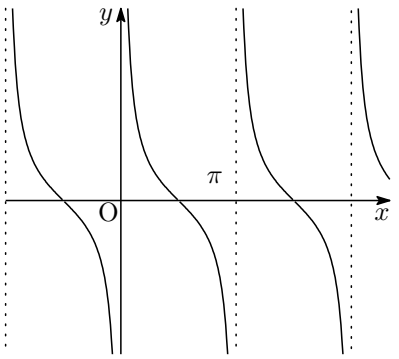
実数部と虚数部をまとめると，

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = f_n(\cos\theta) + i\sin\theta g_n(\cos\theta)$$

と $\cos\theta$ に関する 2 つの多項式 $f_n(\cos\theta)$ と $g_n(\cos\theta)$ が得られる．

拓生 $f_n(x)$ をチェビシフの多項式と呼び，x の n 次式で x^n の係数は 2^{n-1} になる．

南海 $g_n(x)$ もチェビシフの多項式ということもあるし，もう少し違う形でいうこともある．これについては『チェビシェフの多項式』を見てほしい．これは本当に有用なもので，そこから導かれる結果は高校数学ではもっとも深いものだろう．さて，今回はこのド・モアブルの定理とチェビシェフの多項式のうち，虚数部分から得られる三角関数の多項式を用いる．もう一つ，ここでは tan の逆数が用いられる．$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ とおいて，これを「コタンジェント」と呼ぶ．そのグラフは次のようになる．



$y = \cot x$

拓生

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

ですから，$y = \tan x$ と $y = \cot x$ は $x = \dfrac{\pi}{4}$ で対称です．

南海　ド・モアブルの定理の右辺を二項定理で展開し，両辺の虚数部分をとる．

拓生　二項定理により右辺は

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{l=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_l \cos^{n-l}\theta (i\sin\theta)^l$$

と展開されます．右辺の各項で l が奇数の項が i が残ります．

南海　n が偶数か奇数かで最後の項は変わってくるが，奇数の項をまとめて左辺の虚数部分と等値すると．

$$\begin{aligned} i\sin n\theta &= {}_n\mathrm{C}_1 \cos^{n-l}\theta (i\sin\theta) + {}_n\mathrm{C}_3 \cos^{n-3}\theta (i\sin\theta)^3 + {}_n\mathrm{C}_5 \cos^{n-5}\theta (i\sin\theta)^5 + \cdots \\ &= i\{{}_n\mathrm{C}_1 \cos^{n-l}\theta \sin\theta - {}_n\mathrm{C}_3 \cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + {}_n\mathrm{C}_5 \cos^{n-5}\theta \sin^5\theta + \cdots\} \end{aligned}$$

全体を $\sin^n\theta$ でくくる．

$$\sin n\theta = \sin^n\theta ({}_n\mathrm{C}_1 \cot^{n-1}\theta - {}_n\mathrm{C}_3 \cot^{n-3}\theta + {}_n\mathrm{C}_5 \cot^{n-5}\theta + \cdots) \quad \cdots ①$$

となる．

南海　① で $n = 2m+1$ とする．θ に各 $\theta = \dfrac{k\pi}{2m+1}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ を代入する．

このとき左辺 $\sin n\theta$ は 0 で，$\sin\theta$ は 0 でない．よってこれらの θ に関して

$${}_{2m+1}\mathrm{C}_1 \cot^{2m}\theta - {}_{2m+1}\mathrm{C}_3 \cot^{2m-2}\theta + {}_{2m+1}\mathrm{C}_5 \cot^{2m-4}\theta + \cdots = 0 \quad \cdots ②$$

が成り立つ．いま $t = \cot^2\theta$ とおくと ② は

$${}_{2m+1}\mathrm{C}_1 t^m - {}_{2m+1}\mathrm{C}_3 t^{m-1} + {}_{2m+1}\mathrm{C}_5 t^{m-2} + \cdots = 0$$

となる．したがって $t = \cot^2\dfrac{k\pi}{2m+1}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ はこの m 次方程式の m 個の相異なる根であることがわかる．

拓生　m 個の $\cot^2\dfrac{k\pi}{2m+1}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ が満たす m 次の方程式ですか．根と係数の関係が使えますね．

南海　$m-1$ の係数について何が言えるか.

拓生　m 次の方程式の最高次数の係数は ${}_{2m+1}\mathrm{C}_1$，$m-1$ 次の項の係数は $-{}_{2m+1}\mathrm{C}_3$ です.

だから，$\cot^2\dfrac{k\pi}{2m+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ をすべて加えるとこれが m 個の根の和なので根と係数の関係によって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1} &= -\frac{-{}_{2m+1}\mathrm{C}_3}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1}\\ &= \frac{1}{2m+1}\cdot\frac{(2m+1)2m(2m-1)}{3!}=\frac{m(2m-1)}{3}\quad\cdots③\end{aligned}$$

確かにこれは cot の関係式ですが，ここから何が言えるのでしょうか.

南海　これから，ある級数の収束とその和を求める．三角関数の基本的な不等式

$$\sin x<x<\tan x\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

がある．これを今の場合に活かす.

拓生　今は $\cot^2$ を考えているので

$$\sin^2 x<x^2<\tan^2 x$$

逆数をとって

$$\frac{1}{\sin^2 x}>\frac{1}{x^2}>\cot^2 x$$

$\dfrac{1}{\sin^2 x}$ は $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と同様に

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$$

つまり

$$1+\cot^2 x>\frac{1}{x^2}>\cot^2 x\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

南海　なかなか察しがよい．③ の左辺の各項にこの不等式を適用すると

$$1+\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}>\frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2}>\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}$$

これを k について 1 から m まで加える.

$$m+\frac{m(2m-1)}{3}>\sum_{k=1}^{m}\frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2}>\frac{m(2m-1)}{3}$$

両辺に $\dfrac{\pi^2}{(2m+1)^2}$ をかけると

$$\pi^2\left(\frac{m}{(2m+1)^2}+\frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2}\right)>\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}>\pi^2\frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2}$$

ここで $m\to\infty$ をとる.

拓生

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2}=\frac{1}{6},\qquad \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{(2m+1)^2}+\frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2}\right)=\frac{1}{6}$$

であるから $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ は収束し

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

となります.

南海　円周率 π を明示的に無限級数で表す公式でオイラー (1707〜82) が発見した．もっともオイラーはもっと違う方法でこの公式に到達したらしい.『ド・モアブルの定理からオイラーの公式へ』で紹介したが，$\sin x$ は

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

という展開をもつ．一方，$\sin x=0$ となる x は $0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,\ \cdots$ なので

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots=Ax(\pi^2-x^2)(2^2\pi^2-x^2)\cdots$$

と，0 でない定数 A を用いて因数分解されるはずだ．x で割って

$$1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\cdots=A(\pi^2-x^2)(2^2\pi^2-x^2)\cdots$$

定数項を比較して

$$1=A\pi^2\cdot2^2\pi^2\cdot3^2\pi^2\cdot\cdots$$

となる．右辺の x^2 の係数は，これらの積から一つずつ落としたものなので

$$-A\{(2^2\pi^2\cdot3^2\pi^2\cdot\cdots)+(\pi^2\cdot3^2\pi^2\cdot\cdots)+\cdots\}$$

となる．だから右辺の定数項と x^2 の係数の間の関係を左辺の x^2 の係数と比較することで

$$\begin{aligned}\frac{1}{3!}&=\frac{(2^2\pi^2\cdot3^2\pi^2\cdot\cdots)+(\pi^2\cdot3^2\pi^2\cdot\cdots)+\cdots}{\pi^2\cdot2^2\pi^2\cdot3^2\pi^2\cdot\cdots}\\&=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\cdots\end{aligned}$$

これから

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

このように考えたらしい．すばらしい直感だ.

4.7.6　ゼータ関数の値

南海　方程式 ① の根を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$ のように書くと

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots=(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\cdots)$$

である．これを利用して，方程式 ① の m 個の根の平方の和を求めよう．

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots=\frac{{}_{2m+1}\mathrm{C}_3}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1}=\frac{m(2m-1)}{3}$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\cdots=\frac{{}_{2m+1}\mathrm{C}_5}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1}=\frac{m(m-1)(2m-1)(2m-3)}{30}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots\\ =\ &\frac{m^2(2m-1)^2}{9}-\frac{m(m-1)(2m-1)(2m-3)}{15}\\ =\ &\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^4\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}$$

ここで $1+\cot^2 x>\dfrac{1}{x^2}>\cot^2 x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$1+2\cot^2 x+\cot^4 x>\frac{1}{x^4}>\cot^4 x\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

である．すでに行った計算と同様に

$$\begin{aligned}&m+2\frac{m(2m-1)}{3}+\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}\\ >\ &\sum_{k=1}^{m}\frac{(2m+1)^4}{k^4\pi^4}\\ >\ &\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\frac{m}{(2m+1)^4}+2\frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^4}+\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-7)}{45(2m+1)^4}\\ >\ &\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^4\pi^4}\\ >\ &\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45(2m+1)^4}\end{aligned}$$

これから

$$\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots$$

を得る．さて，数 s に対して

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

を「ゼータ関数」という．実数 s で s が $s>1$ にあればこの級数は収束する．逆に $s=1$ のときに発散することは，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\log(n+1)$$

よりわかる．ゼータ関数は今日もまだ未解決の問題を含む関数で，整数論できわめて重要であるばかりでなく，その他の分野でも頻繁に登場する．オイラーの公式が重要なのはゼータ関数の特別な値になっているからである．

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\\ \zeta(4) &= 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}\end{aligned}$$

同様に次のような公式も成り立つ．

$$\begin{aligned}\zeta(6) &= 1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}\\ \zeta(8) &= 1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\cdots=\frac{\pi^8}{9450}\\ \zeta(10) &= 1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\cdots=\frac{\pi^{10}}{93555}\\ \zeta(12) &= 1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\cdots=\frac{691\pi^{12}}{638512875}\end{aligned}$$

※　後に表した『数学対話』のなかの「$\zeta(2l)$ を関・ベルヌーイ数で表す」に一般形がある．

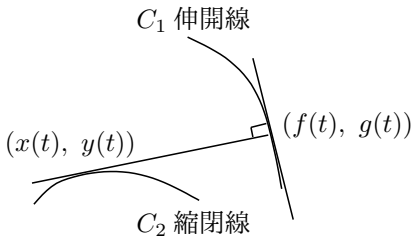
4.8　縮閉線

2020.7.12

4.8.1　縮閉線の定義

太郎　曲線に巻かれたひもを，まっすぐに伸ばしてゆくとき，その先端の描く曲線が，もとの曲線の**伸開線**というということを知りました．

図を見ると，伸ばしたひもの先端はその点での伸開線の接線と直交しています．またひもを伸ばした直線は，もとの曲線と接しています．



『数学対話』のなかの「包絡線

http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa/taiwaNch03/node21.html

」を見ると，逆に，もとの曲線は伸開線の包絡線になっているのですね．

南海　その通りだ．それが**縮閉線**だ．平面上の曲線 C_1 に対し，曲線上の点の法線を考え，その点が動くとき，その法線の包絡線 C_2 を縮閉線という．

伸開線 C_1 に対して縮閉線 C_2 は一意に定まるが，逆に，同じ縮閉線を作る伸開線は無数にある．

太郎　そうか．ひもの長さを変えると伸開線は変わってくるが，しかし，法線の包絡線は同じですね．

南海　これらの曲線は，いわゆる微分幾何の最初にでてくるものだ．ここでは，高校範囲で考えるため，曲率や曲率半径といった概念なしに考えよう．

『解析基礎』の「微分と幾何

http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/kaisekikiso/node37.html

」では，曲率などの定義までは述べた．がそこでは,「伸開線，縮閉線の話題や，包絡線の一般論などさまざまに論ずべきことがあるが，ここは当初の目的である力学の数学的な基礎部分に絞ってここで終え」た．

そこで，ここでは，媒介変数で表されたいくつかの曲線に対し，その縮閉線を求めよう．つまりその曲線の法線の包絡線を求めよう．それはもとの曲線に対して一意に定まるので，考えやすい．

先の「包絡線

http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa/taiwaNch03/node21.html

」をふりかえる．そこに書かれていることを再構成しよう．

曲線 C_1 が媒介変数 t によって $(f(t),\ g(t))$ と表されるとする．この t に対応する，包絡線上の点 $(x(t),\ y(t))$ とする．先の図にこれらの点も書き入れる．

このときベクトル $(x(t)-f(t),\ y(t)-g(t))$ と，接線方向 $(f'(t),\ g'(t))$ は直交している．よって，

$$f'(t)\{x(t)-f(t)\}+g'(t)\{y(y)-g(t)\}=0$$

つまり，

$$f'(t)x(t)+g'(t)y(t)=\{f'(t)f(t)+g'(t)g(t)\}\quad\cdots①$$

である．両辺を t で微分する．

$$\begin{aligned}&f'(t)x'(t)+f''(t)x(t)+g'(t)y'(t)+g''(t)y(t)\\&\quad-\{f'(t)^2+f''(t)f(t)+g'(t)^2+g''(t)g(t)\}=0\end{aligned}$$

ここで，$(f'(t),\ g'(t))$ と $(x'(t),\ y'(t))$ は直交しているので，$f'(t)x'(t)+g'(t)y'(t)=0$ である．これより，

$$f''(t)x(t)+g''(t)y(t)=\{f'(t)^2+f''(t)f(t)+g'(t)^2+g''(t)g(t)\}\quad\cdots②$$

となる．① と ② を連立することで，包絡線の媒介変数表示 $(x(t),\ y(t))$ を書き表すことができる．

ここで，t に対応する法線と t' に対する法線の交点を $(X,\ Y)$ とする．

$$f'(t)X+g'(t)Y-\{f'(t)f(t)+g'(t)g(t)\}=0$$

と t' に対応する法線

$$f'(t')X+g'(t')Y-\{f'(t')f(t')+g'(t')g(t')\}=0$$

がなりたつ．これから，

$$\{f'(t)-f'(t')\}X+\{g'(t)-g'(t')\}Y-\{f'(t)f(t)-f'(t')f(t')\}-\{g'(t)g(t)-g'(t')g(t')\}=0$$

を得る．$t-t'$ で割って，

$$\frac{\{f'(t)-f'(t')\}}{t-t'}X+\frac{\{g'(t)-g'(t')\}}{t-t'}Y-\frac{\{f'(t)f(t)-f'(t')f(t')\}}{t-t'}-\frac{\{g'(t)g(t)-g'(t')g(t')\}}{t-t'}=0$$

を得る．$t\to t$ の極限をとり，

$$f''(t)X+g''(t)Y-f'(t)^2-f''(t)f(t)-g'(t)^2-g''(t)g(t)=0$$

となる．

② と比較して，$t'\to t$ のとき，$(X,\ Y)\to(x(t),\ y(t))$ となることがわかる．

この方法で楕円の縮閉線を求める問題が 98 年の慶応医学部

http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/kakomon/20c/98keii.htm

で出題されている．

この慶応の問題を一般化して，二次曲線の縮閉線を考えてゆこう．

4.8.2　二次曲線

楕円の場合

南海　a と b を $a>b$ の正の定数とする xy 平面上に楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ がある．

楕円の媒介変数表示では, 角が必要である．そこで，t の代わりに θ を用いる．これによって曲線 C は，$f(\theta)=a\cos\theta$，$g(\theta)=b\sin\theta$ の媒介変数表示をもつ．

$0 < \theta < 2\pi,\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ のとき，点 $\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ での法線の方程式を求める．

点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ と C 上の点 $\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ に対し，直線 PQ が，点 Q での C の法線であるとする．

① は，

$$-ax\sin\theta + by\cos\theta - \left(-a^2\sin\theta\cos\theta + b^2\sin\theta\cos\theta\right) = 0$$

となる．これより，

$$a^2 - b^2 = \frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta}$$

が成り立つ．両辺を θ で微分し，直交関係 $-ax'\sin\theta + by'\sin\theta = 0$ を用いると，

$$0 = \frac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{by\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

を得る．2 式を連立して解いて

$$ax = (a^2 - b^2)\cos^3\theta, \quad by = (a^2 - b^2)\sin^3\theta$$

となる．媒介変数を消去して

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \quad \cdots ③$$

を得る．

さらなる性質

南海　縮閉線上の点での接線は，伸開線との交点における伸開線の接線と直交している．縮閉線上の同じ点から，他にも伸開線に法線が引ける場合もある．

楕円の場合，今求めた縮閉線で定まる領域

$$(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} < (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \quad \cdots ④$$

は，楕円に少なくとも 4 本の法線が引けるような点 $(X,\ Y)$ の満たすべき必要十分条件という特徴づけをもつ．さらに，③ は 3 本の法線が引けるような点 $(X,\ Y)$ の満たすべき条件となる．

それを示そう．

$0 < \theta < 2\pi,\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ とする．平面上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ から C 上の点 $\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ に少なくとも 4 本の異なる法線が引けるとする．このような点 P の集合は，不等式 ④ で表される領域となる．

証明

$X > 0,\ Y > 0$ とする．このとき，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を通る法線となる C 上の点を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とすると，$\theta \neq 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ である．

$0 < \theta < 2\pi,\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ に対して，$f(\theta) = \dfrac{aX}{\cos\theta} - \dfrac{bY}{\sin\theta}$ とおく．

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}aX + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}bY \\ &= \frac{aX\sin^3\theta + bY\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \end{aligned}$$

$f'(\theta)=0$ となる θ は $\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}=-\dfrac{bY}{aX}$ となるとき，つまり，$\tan\theta=-\left(\dfrac{bY}{aX}\right)^{\frac{1}{3}}$ のときである．

$-\left(\dfrac{bY}{aX}\right)^{\frac{1}{3}}<0$ より，これをみたす θ は，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ に 1 個ずつある．それを θ_1，θ_2 とする．

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき，$\sin\theta$ の $\cos\theta$ も減少するので，$f'(\theta)$ は θ_1 で正からに負に変わり，θ_1 で極大，

$\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ のとき，$\sin\theta$ の $\cos\theta$ も増加するので，$f'(\theta)$ は θ_2 で負から正に変わり，この θ_2 で極小である．

したがって，$a^2-b^2=f(\theta)$ が異なる 4 つの解をもつのは

$$a^2-b^2>f(\theta_2)$$

のときであり，3 つの解をもつのは

$$a^2-b^2=f(\theta_2)$$

のときである．

$\tan\theta_2=-\left(\dfrac{bY}{aX}\right)^{\frac{1}{3}}$ より，

$$\cos^2\theta_2=\frac{(aX)^{\frac{2}{3}}}{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}},\quad \sin^2\theta_2=\frac{(bY)^{\frac{2}{3}}}{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}}$$

ここで，$\cos\theta_2>0$，$\sin\theta_2<0$ なので，

$$\cos\theta_2=\frac{(aX)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}}},\quad \sin\theta_2=\frac{-(bY)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}}}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
f(\theta_2) &= \frac{aX\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}}}{(aX)^{\frac{1}{3}}}-\frac{bY\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}}}{-(bY)^{\frac{1}{3}}}\\
&= \{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}\}\sqrt{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}}\\
&= \{(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}\\
&< a^2-b^2
\end{aligned}$$

これより，不等式 ④ が示された．

X，Y のいずれかが負であるときも，図形の対称性と不等式の対称性から，同様の関係が成り立つ．

$X>0$，$Y=0$ のとき

平行条件 ① は

$$\frac{\cos\theta}{a}(b\sin\theta)-\frac{\sin\theta}{b}(a\cos\theta-X)=0$$

となり，$\theta=0,\ \pi$ のとき成立し，さらに $\theta\neq 0,\ \pi$ のときは

$$\cos\theta=\frac{aX}{a^2-b^2}$$

となる．さらに，この θ が 2 個とれるのは，$\left|\dfrac{aX}{a^2-b^2}\right|<1$ のときで，このとき条件 ④ 成り立つ．

$X=0$，$Y>0$ のときも同様である．

$X=Y=0$ なら法線は x 軸と y 軸にとれ，対応する点は 4 個ある．$X=Y=0$ は ④ をみたす．

以上から，平面上の点 P から少なくとも 4 本の異なる法線が引ける条件が，④ であることが示された．

3 本引ける条件も同様に示される．

関連入試問題が 2020 年東大理科 6 番

http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/kakomon/2020/20ta06.htm

である．

6 番では，楕円は

$$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

である．$a^2=2$，$b=1$ なので，縮閉線は

$$(\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

となる．これに対して $0<r<1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2+y^2<r^2$$

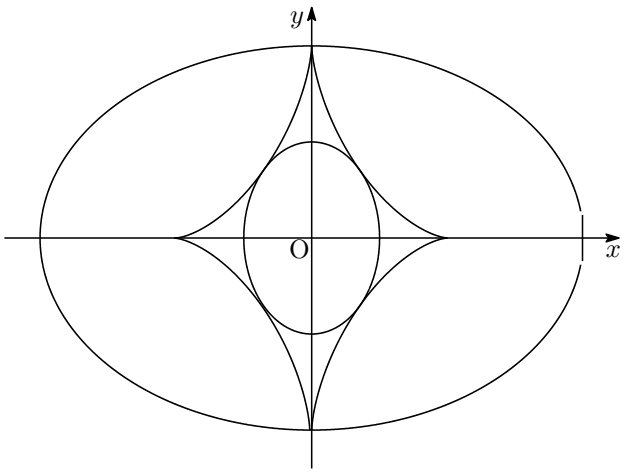
が表す領域を D とする．本問は D が領域

$$(\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}<1$$

に含まれるための r の最大値を問うている．

この形に限定した最大値なので，あくまで十分条件でしかない．

$r=\dfrac{1}{2}$ のときの図は次のようになる．



放物線の場合

南海　係数は簡単にして，放物線 $y=x^2$ の縮閉線を求めよう．

太郎　この放物線を媒介変数で表すと $(t,\ t^2)$，つまり $f(t)=t$，$g(t)=t^2$ です．

$$f'(t)=1,\ f''(t)=0,\quad g'(t)=2t,\ f''(t)=2$$

ですから，① と ② はそれぞれ，

$$x+2ty=t+2t^3,\quad 2y=6t^2+1$$

となり，これから

$$x=-4t^3,\quad y=3t^2+\frac{1}{2}$$

となります．

t を消去すると，

$$27x^2=2(2y-1)^3$$

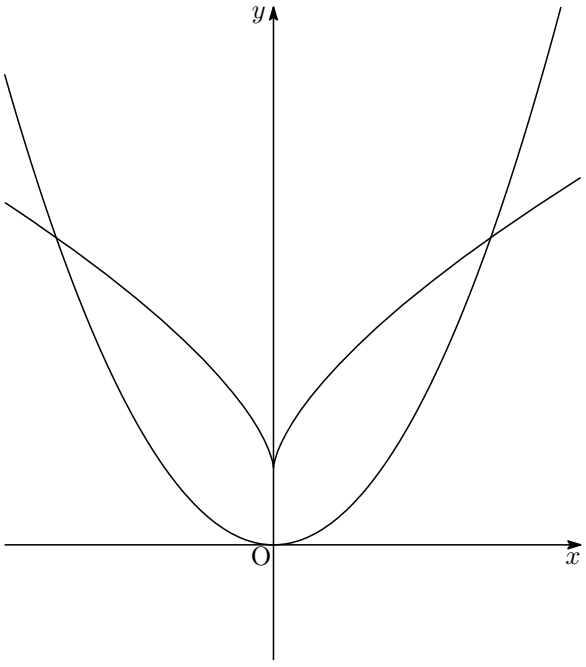
となります．

南海　媒介変数での増減表を作り，凹凸まで調べれば曲線の概形が分かる．

Win Tpic

http://aogaeru-lab.my.coocan.jp/sub1.html

等を用いると，直接図を書いてくれる．一定の密度で座標を計算して曲線を描くのだ．それによると，$y=x^2$ とあわせて次のようになる．なお，最初の楕円の縮閉線も Win Tpic で描いている．



太郎　放物線の場合，ある点を通る法線は，最大何本引けるのでしょうか．

南海　点 $(X,\ Y)$ を通る法線は

$$X+2tY=t+2t^3$$

となる．よって，最大 3 本だ．

太郎　3 本引ける条件を求めてみます．

$f(t)=2t^3+(1-2Y)t-X$ とおきます．$f'(t)=6t^2+1-2Y$ なので，$2Y-1\geqq 0$ が必要で，このとき，$t=\pm\sqrt{\dfrac{2Y-1}{6}}$ で極になる．$\alpha=\sqrt{\dfrac{2Y-1}{6}}$ とおく．

このとき，$f(t)=0$ が重解を含めて 3 個の解をもつ条件は $f(\alpha)f(-\alpha)\leqq 0$ である．

$$f(\alpha)f(-\alpha)=X^2-\left(2\alpha^3+(1-2Y)\alpha\right)^2=X^2-\left(-\frac{2(2Y-1)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{6}}\right)^2$$

となるので，

$$-\frac{2(2Y-1)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{6}}\leqq X\leqq\frac{2(2Y-1)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{6}}$$

となります．

$x=-4t^3,\quad y=3t^2+\dfrac{1}{2}$ で定まる曲線は，この領域の境界の曲線と一致します．

双曲線の場合

南海　同様に係数を簡単にして，xy 平面上に双曲線 $C:x^2-y^2=1$ で考えよう．この曲線の媒介変数はどのようになるか．

太郎　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=1$ なので，$x+y=t$，$x-y=\dfrac{1}{t}$ とすると，$x=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$，$y=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$ となります．つまり，

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad g(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

です．

$$f'(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right),\ f''(t)=\frac{1}{t^3},\ g'(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right),\ g''(t)=-\frac{1}{t^3}$$

となり，① は

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)x+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)y-\left\{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=0$$

となり，これより，

$$x+y+\frac{1}{t^2}(-x+y)-t+\frac{1}{t^3}=0$$

である．また，② において

$$\begin{aligned}&f'(t)^2+f''(t)f(t)+g'(t)^2+g''(t)g(t)\\ =\ &\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2+\frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2-\frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\\ =\ &\frac{1}{2}+\frac{3}{2t^4}\end{aligned}$$

であるから，② は

$$\frac{1}{t^3}(x-y)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2t^4}\right)=0$$

となる．これを解いて

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{t}\right)^3, \quad y(t) = -\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{t}\right)^3$$

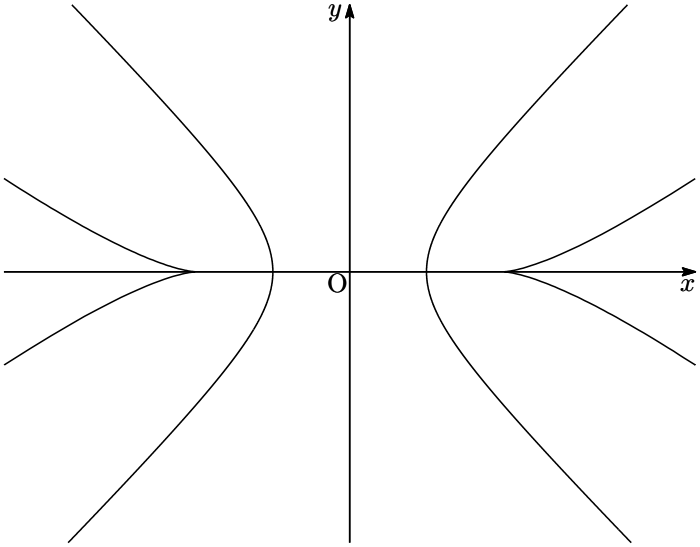
となります．

これから t を消去すると

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

となります．

南海　グラフは次のようになる．



太郎　双曲線の媒介変数表示 $x = f(t),\ y = g(t)$ において，$(f(t),\ g(t))$ を通る法線上の点 $(X,\ Y)$ は

$$X + Y + \frac{1}{t^2}(-X + Y) - t + \frac{1}{t^3} = 0$$

を満たす．これから

$$t^4 - (X + Y)t^3 + (X - Y)t - 1 = 0$$

となります．

南海　ところがこの形の方程式は大変難しい．

時間をかけて考えてみよう．

4.8.3　サイクロイド

太郎　他の曲線で，面白いものはありませんか．

南海　サイクロイドの場合，計算ができて，縮閉線が再びサイクロイドになる．

太郎　やってみます．サイクロイドを媒介変数 θ と定数 a によって

$$f(\theta) = a(\theta - \sin\theta), \quad g(\theta) = a(1 - \cos\theta)$$

とします．

$$f'(\theta) = a(1 - \cos\theta), \quad g'(\theta) = a\sin\theta$$
$$f''(\theta) = a\sin\theta, \quad g''(\theta) = a\cos\theta$$

なので，① ，② を計算する．$x(\theta)$ などは x とする．

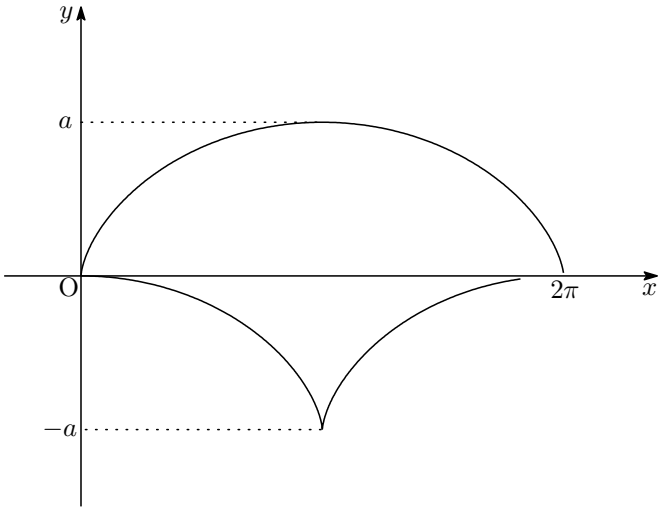
$$(1-\cos\theta)x+(\sin\theta)y=a(1-\cos\theta)\theta$$
$$(\sin\theta)x+(\cos\theta)y=a(1-\cos\theta+\theta\sin\theta)$$

となる．$1-\cos\theta\neq 0$ の下でこれを解くと，

$$x=a(\theta+\sin\theta),\quad y=a(-1+\cos\theta)$$

となります．

南海　同じ結果が『解析概論』にある．そこにあるように，これは再びサイクロイドである．



太郎　引ける法線の数に関する問題はどのようになるのでしょうか．

　また『数学対話』の「光の包絡線」に「外サイクロイドと内サイクロイド」があります．その媒介変数表示は

$$\begin{pmatrix} f(\theta) \\ g(\theta) \end{pmatrix}=(a+b)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}-b\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \\ \sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \end{pmatrix}$$

です．これについてもいえるのですか．

南海　これについては現段階では宿題としておこう．

4.9　$\zeta(2l)$ を関・ベルヌーイ数で表す

2009.11.28

南海　初等的な方法で，ゼータ関数の正の偶数 $2l$ に対する関数値 $\zeta(2l)$ を関・ベルヌーイ数で表す公式を導く．そのために，関・ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式の定義を与え必要最小限の基本性質を母関数を用いて証明する．さらにド・モアブルの定理からある代数方程式を導き，解の基本対称式と解のべき乗和を考察する．

ゼータ関数を高校生に伝えるための一つの難点は，関数論を用いることであった．そこにリーマンの飛躍があるのだが，一方で関数論を用いることなく高校数学範囲でゼータ関数に触れることができれば，教材としても用いることができる．

なお母関数 (生成関数) については「生成関数の方法」を参照．また，$\zeta(2)$，$\zeta(4)$ を直接計算することについては「円周率を表す」を参照してほしい．そこでのゼータ関数値の計算の一般化が本稿である．

大きくとらえて，何かできそうだという予感で一週間考えた．逆算して 0 にならないといけないところを 3 乗和まで具体的に計算して確認した．しかしそのからくりがなかなか分からずいろいろ一般化して考えた．最後に $B_{2l+1}(1/2)=0$ が浮かびあがって出てきたのにはまったく驚いた.『高校数学の方法』の「例で考える」「一般化して考える」などの実践だった.『高校数学の方法』を入試問題以外で自分で用いたのは初めてであった．そこで書いていることは，このようなときにも活きることを確認することができた．

2018.5.13 : 関・ベルヌーイ数の定義を，関孝和やヤコブ・ベルヌーイが与えたものに直した．あわせて，いくつか加筆した．

4.9.1　関・ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式

定義 27 (関・ベルヌーイ数)　数列 $\{B_n\}$ を次の漸化式で定義する．

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}\mathrm{C}_k B_k = n+1$$

B_n を**関・ベルヌーイ数**という．■

関・ベルヌーイ数は日本の関孝和と，スイスのヤコブ・ベルヌーイが 17 世後半にそれぞれ独立に発見した．

例 4.9.1

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1 \\
2B_1 + B_0 = 2, \qquad B_1 &= \frac{1}{2} \\
3B_2 + 3B_1 + B_0 = 3, \qquad B_2 &= \frac{1}{6} \\
4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 4, \qquad B_3 &= 0 \\
5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + B_0 = 5, \qquad B_4 &= -\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

以下

$$B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{12} = -\frac{691}{2730},\ \cdots$$

である．

基本的性質　数列の性質を調べる強力な手段が母関数の方法である．一般に，数列 $\{a_n\}$ に対して，形式的なべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}t^n$ を指数的母関数という．

関・ベルヌーイ数 B_k に対して，その指数的母関数を

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}t^n$$

とおく．

命題 20　$f(t)$ は等式

$$f(t) = \frac{te^t}{e^t - 1}$$

を満たす．ただし $e^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n$ とする． ■

証明

$$\begin{aligned} f(t)\cdot e^t &= \left(B_0 + B_1 t + \cdots + \frac{B_n}{n!}t^n + \cdots\right)\left(1 + t + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots\right) \\ &= B_0 + (B_0 + B_1)t + \cdots + \left\{\frac{B_n}{n!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{B_{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{1}{2!} + \cdots + B_0\cdot\frac{1}{n!}\right\}t^n + \cdots \\ &= B_0 + (B_0 + B_1)t + \cdots + \frac{B_n + nB_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 B_{n-2} + \cdots + B_0}{n!}t^n + \cdots \end{aligned}$$

ここで，

$$nB_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 B_{n-2} + \cdots + B_0 = \sum_{k=0}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k B_k = n$$

であるから，$B_0 = 1$ を必要なところに代入して

$$\begin{aligned} f(t)\cdot e^t &= \left(t + \cdots + \frac{n}{n!}t^n + \cdots\right) \\ &\quad + B_0 + B_1 t + \cdots + \frac{B_n}{n!}t^n + \cdots = te^t + f(t) \end{aligned}$$

これから上記等式が成立する． □

命題 21　$B_{2k-1} = 0\ (k \geqq 2)$ である． ■

証明　$f(t)$ の一次の項は $\dfrac{1}{2}t$ である．

$$f(t) - \frac{1}{2}t = \frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}t\cdot\frac{e^t + 1}{e^t - 1}$$

となる．ところが

$$\frac{1}{2}(-t)\cdot\frac{e^{-t}+1}{e^{-t}-1}=\frac{1}{2}(-t)\cdot\frac{1+e^{t}}{1-e^{1}}=\frac{1}{2}t\cdot\frac{e^{t}+1}{e^{t}-1}$$

となり，$f(t)$ から項 $\dfrac{1}{2}t$ を除いた部分は偶関数である．従って

$$B_{2k-1}=0\ (k\geqq 2)$$

が示された． □

定義 28 (ベルヌーイ多項式)　自然数 n に対して，多項式 $B_n(x)$ を関･ベルヌーイ数 B_n を用いて

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k B_k x^{n-k}$$

で定める．これを**ベルヌーイ多項式**という． ■

定義から $B_n(0)=B_n$ である．基本性質をあげる．**2.** はあとでは使わないが，ベルヌーイ多項式の意味そのものなのであげておく．

命題 22　次の等式が成りたつ．

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n=\frac{te^{xt}}{e^t-1}$.

2. $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$.

3. $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$. ■

証明

1.　命題 20 と同様の計算を行う．

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k B_k x^{n-k}}{n!}t^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k(-t)^k}{k!}\cdot\frac{x^{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!}\right\}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-t)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}t^n\right)\\ &= \frac{-te^{-t}}{e^{-t}-1}\cdot e^{xt}=\frac{te^{xt}}{e^t-1}\end{aligned}$$

2.　$F(t,\ x)=\dfrac{te^{xt}}{e^t-1}$ とおく．二つの変形を行う．

$$F(t,\ x)e^t=\frac{te^{(x+1)t}}{e^t-1}=F(t,\ x+1)$$

$$F(t,\ x)e^t=\frac{e^t}{e^t-1}te^{xt}=te^{xt}+F(t,\ x)$$

1. を用いて両辺の級数展開での t^n の係数を比較する．

$$\frac{B_n(x+1)}{n!}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{B_n(x)}{n!}$$

よって，$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$ である．

3. 同様に $F(t,\ 1-x)$ を考える．

$$F(t,\ 1-x)=\frac{te^{(1-x)t}}{e^t-1}=\frac{te^te^{x(-t)}}{e^t-1}=\frac{te^{x(-t)}}{1-e^{-t}}=\frac{(-t)e^{x(-t)}}{e^{-t}-1}=F(-t,\ x)$$

同様に両辺の t^n の係数比較から $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$ を得る． □

4.9.2 倍角公式から得られる代数方程式

n 倍角の公式のある表現 ド・モアブルの定理

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

の右辺を二項定理で展開し，両辺の虚数部分をとる．

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l\cos^{n-l}\theta(i\sin\theta)^l$$

と展開されるので

$$\begin{aligned}i\sin n\theta &= {}_n\mathrm{C}_1\cos^{n-l}\theta(i\sin\theta)+{}_n\mathrm{C}_3\cos^{n-3}\theta(i\sin\theta)^3+{}_n\mathrm{C}_5\cos^{n-5}\theta(i\sin\theta)^5+\cdots\\ &= i\{{}_n\mathrm{C}_1\cos^{n-l}\theta\sin\theta-{}_n\mathrm{C}_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+{}_n\mathrm{C}_5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta+\cdots\}\end{aligned}$$

である．全体を $\sin^n\theta$ でくくる．$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ を用いて

$$\sin n\theta=\sin^n\theta({}_n\mathrm{C}_1\cot^{n-1}\theta-{}_n\mathrm{C}_3\cot^{n-3}\theta+{}_n\mathrm{C}_5\cot^{n-5}\theta+\cdots)$$

となる．これは正弦の n 倍角の公式の cot による表現である．$n=2m+1$ として終項まで書く．

$$\begin{aligned}&\sin(2m+1)\theta\\ =\ &\sin^{2m+1}\theta\left\{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1\cot^{2m}\theta-{}_{2m+1}\mathrm{C}_3\cot^{2m-2}\theta+{}_{2m+1}\mathrm{C}_5\cot^{2m-4}\theta+\cdots+(-1)^m\right\}\end{aligned}$$

方程式の根 θ に $\theta=\dfrac{k\pi}{2m+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ を代入する．この θ の値に対して $\sin(2m+1)\theta$ は 0 で，$\sin\theta$ は 0 でない．よってこれらの θ の値に関して

$${}_{2m+1}\mathrm{C}_1\cot^{2m}\theta-{}_{2m+1}\mathrm{C}_3\cot^{2m-2}\theta+{}_{2m+1}\mathrm{C}_5\cot^{2m-4}\theta+\cdots+(-1)^m=0$$

が成り立つ．つまり $\alpha_k=\cot^2\dfrac{k\pi}{2m+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ は、m 次方程式

$${}_{2m+1}\mathrm{C}_1t^m-{}_{2m+1}\mathrm{C}_3t^{m-1}+{}_{2m+1}\mathrm{C}_5t^{m-2}+\cdots+(-1)^m=0$$

の m 個の相異なる根である．

根と係数の関係　α_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ の i 次の基本対称式を σ_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ とする．根と係数の関係式から

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -\frac{-{}_{2m+1}\mathrm{C}_3}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1} = \frac{{}_{2m}\mathrm{C}_2}{3} \\
\sigma_2 &= \frac{{}_{2m+1}\mathrm{C}_5}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1} = \frac{{}_{2m}\mathrm{C}_4}{5} \\
&\cdots \\
\sigma_i &= (-1)^i\frac{(-1)^i{}_{2m+1}\mathrm{C}_{2i+1}}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1} = \frac{{}_{2m}\mathrm{C}_{2i}}{2i+1} \\
&\cdots \\
\sigma_m &= \frac{1}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1}
\end{aligned}$$

基本対称式の係数　i に対して m を十分大きくとると

$$\sigma_i = \frac{2m(2m-1)\cdots(2m-2i+1)}{(2i+1)!} = \frac{2^{2i}}{(2i+1)!}m^{2i}+\cdots$$

となり，σ_i は m の $2i$ 次多項式で，最高次の係数は $\dfrac{2^{2i}}{(2i+1)!}$ である．

根のべき乗和　さらに，α_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ の l 乗和を s_l とする．$s_l = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}{\alpha_k}^l$ である．

補題 27　l が与えられた自然数，それに対して m を $l<m$ にとる．

$$s_l = \sigma_1 s_{l-1} - \sigma_2 s_{l-2} - \cdots + (-1)^{l-2}\sigma_{l-1}s_1 + l(-1)^{l-1}\sigma_l$$

が成り立つ．■

証明　自然数 a と c $(c\geqq 2)$ に対して $u(a,\ c)$ を，α_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ の異なる a 個の積で，そのうち $a-1$ 個は一乗，一つが c 乗であるもの全体の和とする．例えば

$$u(3,\ 2) = \alpha_1\alpha_2(\alpha_3)^2+\cdots = \sum_{\text{異なる } p,q,r}\alpha_p\alpha_q(\alpha_r)^2$$

である．$u(a,\ c)$ はそれ自身 α_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ の対称式である．以下, 和は異なる添え字にわたるものとする．また，$s_l = u(1,\ l)$ である．

$c\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}
u(a,\ c) &= \sum_{p_1,\cdots,p_a}\alpha_{p_1}\cdots\alpha_{p_{a-1}}(\alpha_{p_a})^c \\
&= \sum_{p_1,\cdots,p_a}\alpha_{p_1}\cdots\alpha_{p_{a-1}}\alpha_{p_a}(\alpha_{p_a})^{c-1} \\
&= \sigma_a s_{c-1} - \sum_{p_1,\cdots,p_a,p_{a+1}}\alpha_{p_1}\cdots\alpha_{p_{a-1}}\alpha_{p_a}(\alpha_{p_{a+1}})^{c-1} \\
&= \sigma_a s_{c-1} - u(a+1,\ c-1)
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
u(a,\ 2) &= \sum_{p_1,\cdots,p_a}\alpha_{p_1}\cdots\alpha_{p_{a-1}}(\alpha_{p_a})^2 \\
&= \sum_{p_1,\cdots,p_a}\alpha_{p_1}\cdots\alpha_{p_{a-1}}\alpha_{p_a}\alpha_{p_a}
\end{aligned}$$

であるが，

$$\sum_{p_1,\cdots,p_a} \alpha_{p_1}\cdots\alpha_{p_{a-1}}\alpha_{p_a}\sum\alpha_p$$

の展開のなかで，異なる $a+1$ 個の積になるものが，そのうちいずれを $\sum\alpha_p$ からとるかの場合の数，つまり $a+1$ 個ずつ現れる．ゆえに

$$u(a,\ 2) = \sigma_a s_1 - (a+1)\sigma_{a+1}$$

$a = 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ にわたって順次代入することにより

$$\begin{aligned} s_l &= u(1,\ l) = \sigma_1 s_{l-1} - u(2,\ l-1) \\ &= \sigma_1 s_{l-1} - \{\sigma_2 s_{l-2} - u(3,\ l-2)\} \\ &= \sigma_1 s_{l-1} - \sigma_2 s_{l-2} + \cdots + (-1)^{l-2} u(l-1,\ 2) \\ &= \sigma_1 s_{l-1} - \sigma_2 s_{l-2} + \cdots + (-1)^{l-2}\sigma_{l-1}s_1 + l(-1)^{l-1}\sigma_l \end{aligned}$$

を得る．□

注意 4.9.1　本補題そのものは，α_k $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ が根である必要はなく，一般の文字で成立する．$l = 3$ のときは

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) - (xy+yz+zx)(x+y+z) + 3xyz$$

という等式である．

4.9.3　係数定理

以上の準備のもとで以下の定理を示す．

定理 107　l を自然数とする．l に対して自然数 m を十分大きくとる．$s_l = \sum_{k=1}^{m} {\alpha_k}^l$ は m の $2l$ 次多項式であり，最高次の係数 A_{2l} は

$$A_{2l} = \frac{2^{4l-1}}{(2l)!}(-1)^{l-1}B_{2l}$$

である．■

証明　数学的帰納法で示す．

$l = 1$ のとき．$s_1 = \sigma_1 = \dfrac{2m(2m-1)}{6} = \dfrac{2^2}{6}m^2 + \cdots$ である．ここで，

$$\frac{2^3}{2!}B_2 = \frac{4}{6}$$

なので成立している．

定理の命題が $1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ で成立しているとする．

補題 27 の項 $\sigma_i s_{l-i}$，σ_l において，σ_i は m の $2i$ 次多項式であり，s_{l-i} は m の $2(l-i)$ 次多項式であるから，$\sigma_i s_{l-i}$ は m の $2l$ 次多項式である．

帰納法の仮定から

$$s_l = \sigma_1 s_{l-1} - \sigma_2 s_{l-2} - \cdots + (-1)^{l-2}\sigma_{l-1}s_1 + l(-1)^{l-1}\sigma_l$$

の m の $2l$ 次の係数 A_{2l} は

$$A_{2l} = \sum_{i=1}^{l-1} \frac{(-1)^{i-1}2^{2i}}{(2i+1)!} \cdot \frac{2^{4(l-i)-1}(-1)^{l-i-1}B_{2l-2i}}{(2l-2i)!} - \frac{l(-1)^l 2^{2l}}{(2l+1)!}$$

となる．これを変形整理する．$\dfrac{(2l+1)!}{(2i+1)!(2l-2i)!} = {}_{2l+1}\mathrm{C}_{2l-2i}$ より

$$A_{2l} = \frac{(-1)^l 2^{4l-1}}{(2l+1)!}\left\{\sum_{i=1}^{l-1} {}_{2l+1}\mathrm{C}_{2l-2i} \cdot B_{2l-2i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2i} - \frac{2l}{2^{2l}}\right\}$$

$2l-2i = 2j$ とおくと

$$A_{2l} = \frac{(-1)^l 2^{4l-1}}{(2l+1)!}\left\{\sum_{j=1}^{l-1} {}_{2l+1}\mathrm{C}_{2j} \cdot B_{2j}\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-2j} - \frac{2l}{2^{2l}}\right\}$$

$j=0$ のときの項 ${}_{2l+1}\mathrm{C}_0 B_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2l} = \dfrac{1}{2^{2l}}$ と $j=2l$ のときの項 ${}_{2l+1}\mathrm{C}_{2l}B_{2l} = (2l+1)B_{2l}$ を加減して

$$A_{2l} = \frac{(-1)^l 2^{4l-1}}{(2l+1)!}\left\{\sum_{j=0}^{l} {}_{2l+1}\mathrm{C}_{2j} \cdot B_{2j}\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-2j} - (2l+1)B_{2l} - \frac{2l+1}{2^{2l}}\right\}$$

3 以上の奇数 k に対して $B_k = 0$ で上記の形式の和で項 B_1 に対応するのは

$$-{}_{2l+1}\mathrm{C}_1 B_1\left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1} = -\frac{2l+1}{2^{2l+1}}$$

である．よってこれらの項を加減し，和を 2 でくくると

$$A_{2l} = \frac{(-1)^l 2^{4l-1}}{(2l+1)!}\left\{2\sum_{k=0}^{2l+1}(-1)^k {}_{2l+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k\left(\frac{1}{2}\right)^{2l+1-k} - (2l+1)B_{2l}\right\}$$

を得る．$B_n(x)$ の定義から

$$\sum_{k=0}^{2l+1}(-1)^k {}_{2l+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k x^{2l+1-k} = B_{2l+1}(x)$$

である．よって

$$A_{2l} = \frac{(-1)^l 2^{4l-1}}{(2l+1)!}\left\{2B_{2l+1}\left(\frac{1}{2}\right) - (2l+1)B_{2l}\right\}$$

である．命題 22 の **3.** より

$$B_{2l+1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{2l+1}B_{2l+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

なので $B_{2l+1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ である．この結果

$$A_{2l} = \frac{(-1)^l 2^{4l-1}}{(2l+1)!}\{-(2l+1)B_{2l}\} = \frac{2^{4l-1}}{(2l)!}(-1)^{l-1}B_{2l}$$

となる．定理の命題は l のときにも成立し，すべての自然数 l に対して成立する． □

4.9.4　$\zeta\,(2l)$ を関・ベルヌーイ数で表す

数 s に対して

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

を「ゼータ関数」という．実数 s が $s > 1$ にあればこの級数は収束する．

定理 108　l が与えられたとき，

$$\zeta(2l) = \frac{2^{2l-1}(-1)^{l-1}B_{2l}}{(2l)!}\pi^{2l}$$

ここに B_n は関・ベルヌーイ数である． ■

証明　l に対して自然数 m を十分大きくとる．$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき

$$\sin x < x < \tan x$$

が成り立つ．各項は正なので

$$\sin^2 x < x^2 < \tan^2 x$$

である．逆数をとって

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x > \frac{1}{x^2} > \cot^2 x$$

となる．よって

$$(1 + \cot^2 x)^l > \frac{1}{x^{2l}} > (\cot^2 x)^l$$

である．ここに $x = \dfrac{k\pi}{2m+1}$ を代入し $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ にわたって加える．$\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right) = \alpha_k$ とおいたので

$$\sum_{k=1}^{m}(1+\alpha_k)^l > \sum_{k=1}^{m}\frac{(2m+1)^{2l}}{k^{2l}\pi^{2l}} > \sum_{k=1}^{m}{\alpha_k}^l$$

定理 4.10 によって $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(1+\alpha_k)^l$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}{\alpha_k}^l$ は m の多項式であり，いずれも

$$\frac{2^{4l-1}}{(2l)!}(-1)^{l-1}B_{2l}m^{2l} + \cdots$$

と表される．ただし $\cdots$ は次数 $2l$ より低位の項を表す．この結果，

$$\begin{aligned}\frac{\pi^{2l}}{(2m+1)^{2l}}\left\{\frac{2^{4l-1}}{(2l)!}(-1)^{l-1}B_{2l}m^{2l} + \cdots\right\} &> \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^{2l}} \\ &> \frac{\pi^{2l}}{(2m+1)^{2l}}\left\{\frac{2^{4l-1}}{(2l)!}(-1)^{l-1}B_{2l}m^{2l} + \cdots\right\}\end{aligned}$$

$m \to \infty$ のとき，両辺は $\dfrac{2^{2l-1}}{(2l)!}(-1)^{l-1}B_{2l}\pi^{2l}$ に収束する．つまり定理が示された． □

なお，

$$\zeta(2l) = 1 + \frac{1}{2^{2l}} + \frac{1}{3^{2l}} + \frac{1}{4^{2l}} + \cdots > 0$$

なので，

$$\frac{2^{2l-1}(-1)^{l-1}B_{2l}}{(2l)!}\pi^{2l} > 0$$

である．よって $l \geqq 1$ のとき

$$(-1)^{l-1}B_{2l} > 0$$

つまり，関・ベルヌーイ数は，第 2 項 B_2 以降の偶数項は正負をくりかえすことも示された．

例 4.9.2 例 4.9.1 を用いると次の値が得られる．

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{2}{2!}B_2\pi^2 = \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(4) &= \frac{2^3}{4!}(-B_4)\pi^4 = \frac{\pi^4}{90} \\
\zeta(6) &= \frac{2^5}{6!}B_6\pi^6 = \frac{\pi^6}{945} \\
\zeta(8) &= \frac{2^7}{8!}(-B_8)\pi^8 = \frac{\pi^8}{9450} \\
\zeta(10) &= \frac{2^9}{10!}B_{10}\pi^{10} = \frac{\pi^{10}}{93555} \\
\zeta(12) &= \frac{2^11}{12!}(-B_{12})\pi^{12} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}
\end{aligned}$$

4.10　素数の分布

2004.1.10

4.10.1　素数の分布とは

拓生　素数を 1 から 100 までのなかで書くと

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47$$
$$53,\ 59,\ 61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89,\ 97$$

の 25 個あります．ところが 5900 から 6000 のなかでは

$$5903,\ 5923,\ 5927,\ 5939,\ 5953,\ 5981,\ 5987$$

の 7 個しかありません．

南海　5900 から 6000 の間の素数はどのようにして見つけたのか．

拓生　先の 100 までの素数のなかで

$$73^2 = 5329,\ 79^2 = 6241$$

ですから，73 までの素数で順に割って割り切れるものを除いていきました．5900 から 6000 の間の数 N が $N = mn$ と因数分解できて $m \leqq n$ とすると，$N = mn \geqq m^2$ となるので，小さい方の素因数は 73 以下です．

南海　このように，小さい素数で割り切れるものを除いていくことで，新たな素数を発見していく方法が**エラトステネスの篩 (ふるい)** といわれるものだ．正整数 n が素数であるかどうかを判定したければ，$p^2 \leqq n$ の範囲の素数 p で割ってみればよい．いずれでも割り切れなければ素数と判定してよい．例えば 1999 は素数か．

拓生　$43^2 = 1849$ で $47^2 = 2209$ ですから，2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 で割れるかどうかを調べればいいです．いずれでも割り切れないので素数です．

南海　このように，順に素数で割って割り切れる数をふるいにかけて除く．N までの数に対して $\sqrt{N}$ 以下の素数まで調べる．そのいずれでも割りきれずに残ったものが N 以下の素数である．

エラトステネス（Eratosthenēs，紀元前 276 頃〜前 192 頃) は古代ギリシアの数学者，天文学者，地理学者だった．素数の選別法として有名な「エラトステネスの篩 (ふるい)」を発見した．また、はじめて赤道の周囲を測量し、約 45000 km と算出した人でもある．主著は「地理学」である．何ともすごい人だ．日本列島はようやく弥生時代に入ったばかりの頃だ．

ところで「篩 (ふるい)」を知っているか．

拓生　「候補をふるいにかける」とか,「一次試験でふるい落とされる」などの言い方は知っていますが,「篩 (ふるい)」を見たことはありません．

南海　1831 年 (天保 2) に薩摩藩主島津重豪 (しまづしげひで) が曾槃・白尾国柱らに命じて作らせた農業書『成形図説』に図が載っているので紹介しよう．この書は農事・五穀・疎菜・薬草・草木・鳥類などについて，和漢洋の諸書で考証し，さらに綿密な図を掲げ，編纂させた百科全書である．全 100 巻の大部なものだ．和語，漢語，オランダ語の名前を記し，説明を付けている．

拓生　周りが鉄で出来ていて電気で振動するものを見たことがあります．工事しているところで小石を除くのに使われています．

南海　そう．あれが篩だ．少し回り道をしたが，さて君の質問は？

拓生　1 から 100 には 24 個もあるのに，5900 から 6000 では 7 個しかありません．大きな数になるといろんな素数がそれまでにあるので，だんだん新しい素数の出現が少なくなっていくのは，そうだろうと思うのですが．では，どのような割合で出現するのかとか，そういうことを聞きたいのです．

南海　なるほど．どのように素数が分布しているのかということを，素数の分布に関する問題という．これを考えるために，正の実数 x を越えない素数の個数を $\pi(x)$ と表そう．

拓生

$$\pi(100) = 24,\ \pi(6000) - \pi(5900) = 7$$

ということですね．

4.10.2　素数が無数にあることの別証明

南海　まずわかることは

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty$$

だ．

拓生　つまり素数は無数にあるということですね．

南海　2300 年以上前になるわけだが，ユークリッドが背理法で素数が無数にあることを証明した．このユークリッドの証明がそのまま入試問題になっている．『高校数学の方法』「論証の推進力-背理法」で紹介している．ぜひこれを見てほしい．

次に $\pi(x)$ は確かにいくらでも大きくなるのだが，しかしその大きさの程度は x よりもずっと小さく

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$$

である．この 2 つを統一的な方法で示す．それは解析的な方法，つまり微分積分を使う方法だ．ひとつ記号を定める．$\sum$ は和の記号として知っている．積の記号を $\prod$ とする．例えば

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!$$

のように使う．

定理 109　(1) $\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty$

(2) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{x} = 0$

この証明のために，『初等整数論』で既出の関係式であるが次の等式を補題としてあらかじめ示しておこう．

補題 28 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_r$ を相異なる素数とする．実数 x を越えない自然数のなかで $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_r$ のいずれでも割り切れないものの個数は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}&[x]-\left[\frac{x}{p_1}\right]-\left[\frac{x}{p_2}\right]-\cdots-\left[\frac{x}{p_r}\right]\\&\quad+\left[\frac{x}{p_1p_2}\right]+\left[\frac{x}{p_1p_3}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{p_{r-1}p_r}\right]-\cdots+(-1)^r\left[\frac{x}{p_1p_2\cdots p_r}\right]\quad\cdots①\end{aligned}$$

ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．

拓生　『初等整数論』を参考に数学的帰納法で示します．

証明　r に関する数学的帰納法で証明する．

$r=1$ のときは $1,\ 2,\ \cdots,\ [x]$ のなかで p_1 の倍数は

$$1\cdot p_1,\ 2\cdot p_1,\ \cdots,\ \left[\frac{x}{p_1}\right]p_1$$

だけある．したがって実数 x を越えない自然数のなかで p_1 で割り切れないものの個数は

$$[x]-\left[\frac{x}{p_1}\right]$$

となり，① は成立する．

$r=k$ のとき ① が成立するとする．

$r=k+1$ とし，さらに p_{k+1} が追加されたとする．このときは，さらに p_{k+1} の倍数 $yp_{k+1}\ \left(y\leqq\dfrac{x}{p_{k+1}}\right)$ を除かなければならない．そのうち y が $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k$ で割り切れるものはすでに除かれているので，新たに除くべきものの個数は，$\dfrac{x}{p_{k+1}}$ を越えない整数のなかで $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k$ で割り切れないものの個数である．ゆえに求める個数は

$$\begin{aligned}&[x]-\left[\frac{x}{p_1}\right]-\left[\frac{x}{p_2}\right]-\cdots+\left[\frac{x}{p_1p_2}\right]+\left[\frac{x}{p_1p_3}\right]+\cdots+(-1)^k\left[\frac{x}{p_1p_2\cdots p_k}\right]\\&\quad-\left\{\left[\frac{x}{p_{k+1}}\right]-\left[\frac{x}{p_1p_{k+1}}\right]-\left[\frac{x}{p_2p_{k+1}}\right]-\cdots+(-1)^k\left[\frac{x}{p_1p_2\cdots p_{k+1}}\right]\right\}\\=\ &[x]-\left[\frac{x}{p_1}\right]-\left[\frac{x}{p_2}\right]-\cdots-\left[\frac{x}{p_{k+1}}\right]+\left[\frac{x}{p_1p_2}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{p_1p_{k+1}}\right]\\&\quad-\left[\frac{x}{p_1p_2p_3}\right]-\cdots-\left[\frac{x}{p_1p_2p_{k+1}}\right]+\cdots+(-1)^{k+1}\left[\frac{x}{p_1p_2\cdots p_{k+1}}\right]\end{aligned}$$

ゆえに $k+1$ のときも成立し，題意が示された．　□

南海　微積から補題をもう一つ．

補題 29

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$$

拓生　これはできます．

証明

関数 $\dfrac{1}{x}$ は単調減少なので

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx<\frac{1}{k}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\, dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

つまり

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$\lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty$ より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

南海　以上の準備をして定理 109 を証明しよう．

定理 109 の証明

(1) x 以下の素数にわたる積

$$\prod_{p\leqq x} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p}} = \prod_{p\leqq x} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

を考える．

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots$$

であるから

$$\prod_{p\leqq x} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p\leqq x} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right)$$

は，x 以下の素数とそのべきのみを因数にもつような数 k 全体にわたる和

$$\sum \frac{1}{k}$$

である．x 以下の正整数 n はもちろん x 以下の素数とそのべきのみを因数にもつような数であるから

$$\prod_{p\leqq x} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \geqq \sum_{n\leqq x} \frac{1}{n} \quad \cdots ②$$

となる．

ここで補題 29 より，$x \to \infty$ のとき ② の右辺は発散する．

もし $\lim_{x\to\infty} \pi(x)$ が有限であれば，$x \to \infty$ のとき ② の左辺は有限個の素数にわたる和となり収束する．これは矛盾なので $\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty$ が示された．

(2) $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ \cdots$ と小さい方から r 個の素数が与えられているとする．これらの素数は x より小さいものとする．x 以下の素数は，この r 個の素数と x 以下の数でこれら r 個の素数で割り切れない数をあわせた数の一部である．したがって

$$\begin{aligned}\pi(x) \quad \leqq \quad & r + [x] - \left[\frac{x}{p_1}\right] - \left[\frac{x}{p_2}\right] - \cdots - \left[\frac{x}{p_r}\right] \\ & + \left[\frac{x}{p_1p_2}\right] + \left[\frac{x}{p_1p_3}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{p_{r-1}p_r}\right] - \cdots + (-1)^r \left[\frac{x}{p_1p_2\cdots p_r}\right]\end{aligned}$$

補題 28 の和の項数は 2^r である．$[x] < x,\ -[x] \leqq -x+1$ なので，あわせて $\pm[x] < \pm x + 1$ がなりたつ．したがって

$$\begin{aligned}
& [x] - \left[\frac{x}{p_1}\right] - \left[\frac{x}{p_2}\right] - \cdots - \left[\frac{x}{p_r}\right] \\
& \qquad + \left[\frac{x}{p_1p_2}\right] + \left[\frac{x}{p_1p_3}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{p_{r-1}p_r}\right] - \cdots + (-1)^r \left[\frac{x}{p_1p_2\cdots p_r}\right] \\
< \quad & 2^r + x - \frac{x}{p_1} - \frac{x}{p_2} - \cdots - \frac{x}{p_r} \\
& \qquad + \frac{x}{p_1p_2} + \frac{x}{p_1p_3} + \cdots + \frac{x}{p_{r-1}p_r} - \cdots + (-1)^r \frac{x}{p_1p_2\cdots p_r} \\
= \quad & 2^r + x \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}$$

となる．$r + 2^r < 2^{r+1}$ であるから

$$\pi(x) < 2^{r+1} + x \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\pi(x)}{x} < \frac{2^{r+1}}{x} + \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

ここで r を $2^{r+1} \leqq \sqrt{x}$ である最大のものにとる．このとき

$$\frac{\pi(x)}{x} \leqq \frac{1}{\sqrt{x}} + \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$x \to \infty$ のとき $r \to \infty$ である．したがって (1) で示したように

$$\lim_{x\to\infty} \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} = \infty$$

つまり

$$\lim_{x\to\infty} \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ とあわせて

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$$

が示された．

4.10.3 素数分布の探求

さてその上で x を越えない素数の個数 $\pi(x)$ はどのような性質をもっているのかを考えよう．

このような場合，まず実験して，x の一定の範囲にある素数の個数を求めていくことが大切だ．自分でプログラムを組んで，書き出していくのがいちばんよい．エラトステネスの篩の方法はプログラムを書く練習のいちばん初歩の問題だ．

ただ大きなところまで計算すると結構時間がかかる．そこで今回は次のところに載っている表を参考にしよう．アメリカのテネシー大学の先生が展開している「The Prime Pages」だ．URL は http://primes.utm.edu/ なので見てほしい．そのなかの How Many Primes Are There? には，段階を区切って素数の個数が表になっている．このページを見るときは，ブラウザソフトの表示文字種「エンコード」を「Unicode(UTF-7)」にするときれいになる．ここでは多くの結果が証明なしに紹介されている．

拓生　100 までだと規則性があるようには見えないけれど，1000 になるとなんとなく直線?　いや少し上に凸なようにも見えます．1000000 はやや上に凸なきれいな曲線です．

南海　多くの人が $\pi(x)$ の性質を研究した．

拓生　$\pi(x)$ で $x = 10,\ 100,\ 1000,\ 10000$ のときの表に次の値を書き加えてみます．

x	$\pi(x)$	$\log_{10} x$	$\pi(x)\log_{10} x$
10	4	1	4
100	25	2	50
1000	168	3	504
10000	1229	4	4916

ほぼ，$\dfrac{1}{2}x$ の値が $\pi(x)\log_{10} x$ になります．ということは

$$\frac{1}{2}x = \pi(x)\log_{10} x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{\log x} = \pi(x)\frac{2}{\log 10}$$

なので，$\dfrac{x}{\log x}$ の値がほぼ $\pi(x)\dfrac{2}{\log 10}$ になるということです．

南海　そう．このようなことを昔の人はいろいろ調べたのだ．計算機のない時代に手計算で調べたのだ．$\log 10$ は約 2.30 なのでこの計算では $\dfrac{x}{\log x}$ はほぼ $0.868\pi(x)$ ということになる．もっと x を大きくとるとどのような値に収束するか，これをいろいろと推測したのだ．その結果 1801 年にルジャンドルは

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

であろうと予想した．ただしここで $x > 0$ で定義された 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が

$$f(x) \sim g(x)$$

であるとは，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

となることとする．さらにこれとは独立にガウスは

$$\pi(x) \sim \int_0^x \frac{dt}{\log t}$$

を予想した．このあたりは先のテネシー大学の先生のページにも載っている．

拓生　予想はいろいろあったのでしょうが，実質的な進展はどうだったのでしょうか．

南海　あのチェビシェフが 1850 年に次のことを示した．これも先のページにある．次のようにかかれている．

Tchebycheff made the first real progress toward a proof of the prime number theorem in 1850, showing there exist positive constants $a < 1 < b$ such that

$$\frac{ax}{\log x} < \pi(x) < \frac{bx}{\log x}$$

and that if $\dfrac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}}$ had a limit, then its value must be one.

今日はこのチェビシェフの定理の前半を示そう.

定理 110 正の定数 $c_1 < 1 < c_2$ で，$x \geqq 2$ に対して

$$c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x}$$

となるものが存在する.

これを示すためにひとつ補題を証明しておこう.

補題 30 自然数 $n!$ の素因数分解に含まれる素数 p の個数は,

$$\sum_{l=1}^{[\log_p n]} \left[\frac{n}{p^l}\right]$$

である.

証明 $[\log_p n]$ は $p^k \leqq n$ となる最大の k の値である.
1 から n までの自然数のなかでちょうど p^l で割り切れるものの個数は

$$\left[\frac{n}{p^l}\right] - \left[\frac{n}{p^{l+1}}\right]$$

である. $l \geqq [\log_p n] + 1$ に対しては $\dfrac{n}{p^l} < 1$ となり $\left[\dfrac{n}{p^l}\right] = 0$ である. したがって求める個数は

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{[\log_p n]} l\left(\left[\frac{n}{p^l}\right] - \left[\frac{n}{p^{l+1}}\right]\right) \\
= & \sum_{l=1}^{[\log_p n]} \left(l\left[\frac{n}{p^l}\right] - (l+1)\left[\frac{n}{p^{l+1}}\right]\right) + \sum_{l=1}^{[\log_p n]} \left[\frac{n}{p^{l+1}}\right] \\
= & \sum_{l=1}^{[\log_p n]} \left[\frac{n}{p^l}\right]
\end{aligned}$$

である. □

定理 110 の証明

$$c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x)$$

となる正の定数の存在を示す.

m を正整数として，整数

$$ {}_{2m}\mathrm{C}_m = \frac{(2m)!}{m!m!} $$

の大きさを 2 通りの方法で評価する．

$p \leqq 2m$ である素数に対して $\dfrac{(2m)!}{m!m!}$ の素因数分解に含まれる素数 p の個数は，補題 30 より

$$ \sum_{l=1}^{[\log_p(2m)]} \left(\left[\frac{2m}{p^l} \right] - 2 \left[\frac{m}{p^l} \right] \right) $$

である．m を p^l で割った余りを r とするとき

$$ \left[\frac{2m}{p^l} \right] - 2 \left[\frac{m}{p^l} \right] = \begin{cases} 0 & \left(0 \leqq r < \dfrac{p^l}{2} \right) \\ 1 & \left(\dfrac{p^l}{2} \leqq r < p^l \right) \end{cases} $$

である．したがって

$$ \sum_{l=1}^{[\log_p(2m)]} \left(\left[\frac{2m}{p^l} \right] - 2 \left[\frac{m}{p^l} \right] \right) \leqq [\log_p(2m)] $$

これから

$$ \frac{(2m)!}{m!m!} \leqq \prod_{p \leqq 2m} p^{[\log_p(2m)]} $$

一方，$p^{[\log_p(2m)]} \leqq 2m$ であるから

$$ \prod_{p \leqq 2m} p^{[\log_p(2m)]} \leqq (2m)^{\pi(2m)} $$

つまり

$$ \frac{(2m)!}{m!m!} \leqq (2m)^{\pi(2m)} $$

となる．ところが

$$ \begin{aligned} \frac{(2m)!}{m!m!} &= \frac{(2m)(2m-1)\cdots(m+1)}{m(m-1)\cdots 1} \\ &= \frac{(m+m)(m+m-1)\cdots(m+1)}{m(m-1)\cdots 1} = (1+1)\left(\frac{m}{m-1} + 1 \right) \cdots (m+1) \\ &\geqq 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^m \end{aligned} $$

なので，上の結果より

$$ 2^m \leqq (2m)^{\pi(2m)} $$

対数をとって

$$ m \log 2 \leqq \pi(2m) \log(2m) $$

つまり

$$ \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{2m}{\log(2m)} \leqq \pi(2m) $$

次に $m \geqq 1$ に対して

$$ \frac{2m}{2m+1} \geqq \frac{2}{3} $$

であるから

$$\pi(2m+1)\log(2m+1) > \pi(2m)\log(2m) \geqq \frac{\log 2}{2}(2m)$$

$$> \quad \frac{\log 2}{2}\cdot\frac{2}{3}(2m+1)$$

つまり

$$\frac{\log 2}{3}\cdot\frac{2m+1}{\log(2m+1)} \leqq \pi(2m+1)$$

したがって整数 $[x]$ に対して

$$\frac{\log 2}{3}\cdot\frac{[x]}{\log[x]} \leqq \pi([x]) \leqq \pi(x)$$

が成り立つ．ここで $[x] > x-1,\ [x] \leqq x$ なので

$$\frac{[x]}{\log[x]} > \frac{x-1}{\log x} = \frac{x}{\log x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \geqq \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\log x}$$

したがって

$$\frac{\log 2}{6}\cdot\frac{x}{\log x} < \pi(x)$$

$c_1 = \dfrac{\log 2}{6}$ とおけばよい．次に，

$$\pi(x) < c_2\frac{x}{\log x}$$

となる c_2 の存在を示す．

$m < p \leqq 2m$ の範囲の素数は $\dfrac{(2m)!}{m!m!}$ の分母を割らない．よって $\dfrac{(2m)!}{m!m!}$ は $\displaystyle\prod_{m<p\leqq 2m} p$ で割り切れる．つまり

$$m^{\pi(2m)-\pi(m)} < \prod_{m<p\leqq 2m} p \leqq \frac{(2m)!}{m!m!}$$

これから

$$(\pi(2m)-\pi(m))\log m < \log\frac{(2m)!}{m!m!}$$

ところが

$${}_{2m}\mathrm{C}_m < \sum_{k=0}^{2m} {}_{2m}\mathrm{C}_k = 2^{2m}$$

より

$$\log\frac{(2m)!}{m!m!} < 2m\log 2$$

$$\therefore \quad (\pi(2m)-\pi(m)) < 2\log 2\frac{m}{\log m}$$

$y \geqq 2$ に対して

$$[2y] \leqq 2y < 2[y]+2$$

なので

$$\begin{aligned}\pi(2y)-\pi(y) &= \pi([2y])-\pi([y])\\ &\leqq \pi(2[y]+2)-\pi([y]) < \pi(2[y])+2-\pi([y])\\ &< 2\log 2\frac{[y]}{\log[y]}+2 < (2\log 2+2)\frac{y}{\log y}\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\log(2y)\pi(2y)-\log y\pi(y) &= \log y\{\pi(2y)-\pi(y)\}+\log 2\pi(2y)\\ &< (2\log 2+2)y+\log 2\pi(2y)\end{aligned}$$

ところが $\log 2\pi(2y)<\pi(2y)<2y$ なので

$$\log(2y)\pi(2y)-\log y\pi(y)<(2\log 2+2)y+2y=(2\log 2+4)y$$

ここで x に対して $2^{l+1}\leqq x<2^{l+2}$ となる l をとり y に $\dfrac{x}{2},\ \cdots,\ \dfrac{x}{2^l}$ を順次代入する．$j=1,\ \ldots,\ l$ とすると

$$\log\left(\frac{x}{2^{j-1}}\right)\pi\left(\frac{x}{2^{j-1}}\right)-\log\left(\frac{x}{2^j}\right)\pi\left(\frac{x}{2^j}\right)<(2\log 2+4)\frac{x}{2^j}$$

これをすべて加えて

$$\begin{aligned}&\log x\pi(x)-\log\left(\frac{x}{2^l}\right)\pi\left(\frac{x}{2^l}\right)\\ <\ &(2\log 2+4)\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^l}\right)x\\ <\ &(2\log 2+4)x\end{aligned}$$

よって

$$\log x\pi(x)<(2\log 2+4)x+\log\left(\frac{x}{2^l}\right)\pi\left(\frac{x}{2^l}\right)$$

$2\leqq\dfrac{x}{2^l}<4$ なので $\pi\left(\dfrac{x}{2^l}\right)\leqq 2$ で，さらに $x\geqq 2$ のとき $\log x<x$ であるから

$$\log x\pi(x)<(2\log 2+6)x$$

つまり $c_2=(2\log 2+6)$ とすればよい． □

4.10.4 素数定理

南海　定理 110 は定理 109 の (2) の別証明になっている．

拓生

$$\frac{c_1}{\log x}<\frac{\pi(x)}{x}<\frac{c_2}{\log x}$$

ですから，$x\to\infty$ のとき，はさみうちの原理によって $\dfrac{\pi(x)}{x}\to 0$ である．

南海　チェビシェフはさらにこの c_1，c_2 を調べ，

$$0.92\frac{x}{\log x}<\pi(x)<1.11\frac{x}{\log x}$$

まで示した．またもし $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)\log x}{x}$ が収束するならば，それは 1 であることも示した．

チェビシェフのこの証明からさらの半世紀後，1896 年になってフランスの数学者アダマール (J.Hadamard) とプーサン (C.de la Vallée Poussin) によってほとんど同時に独立に

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1$$

が示されたのだ．これを**素数定理**という．彼らの方法はリーマンの ζ 関数を用いるきわめて難しいものだった．1949 年になってセルバーグ (A.Selberg) が ζ 関数を用いない初等的な方法で示した．素数については今日もまだ未解決な問題がたくさんある．この世界に素数があるということはなんと不思議なことなのだろう．

さて，青空学園では 2005 年〜2007 年に数論の読者会をした．そこで，私が『解析的整数論』(末綱恕一，岩波書店) に載っている素数定理の証明を紹介した．読書会に使った『数論 I』に定理 7.3 までは用いる．その他は出来るかぎり完結的に整理した．といっても，ζ 関数を中心に複素関数論を使うので，理解は難しい．あくまで参考にするということで，それをここに紹介する．

4.10.4.1 素数定理の証明

いくつかの準備をして，素数定理を示す．1930 年代のランダウらの方法である．『数論 I』p.266 にあるように

$$\psi(x) \equiv \sum_{p^m \leqq x} \log p$$

を考える．

補題 31 $s = \sigma + ti$ において $\sigma > 1$ なら

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx = s\int_0^\infty \psi(e^u)e^{-us}\,du$$

証明
チェビシェフの定理 110 より

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{p\leqq x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p \leqq \sum_{p\leqq x}\frac{\log x}{\log p}\log p \\ &= \pi(x)\log x = O(x)\end{aligned}$$

これから積分の存在することは確かである．

$$-\log(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots$$

なので

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p,m}\frac{1}{mp^{ms}}$$

この両辺を微分することにより

$$\begin{aligned}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\psi(n)-\psi(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \psi(n)\left\{\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right\} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \psi(n)s\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^{s+1}} = s\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx \\ &= s\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx\end{aligned}$$

このなかで $x = e^u$ とおけば，第二の積分になる． □

補題 32 v が 0 でない実数なら

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}\,dt=\frac{\sin^2 v}{v^2}$$

証明

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}\,dt+\int_{0}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}\,dt\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_{0}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{-vti}\,dt+\int_{0}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}\,dt\right\}\\
&= \int_{0}^{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)\cos vt\,dt\\
&= \left[\left(1-\frac{t}{2}\right)\frac{\sin vt}{v}\right]_0^2+\int_0^2\frac{1}{2}\frac{\sin vt}{v}\,dt=\frac{1-\cos vt}{2v^2}=\text{右辺}\quad\square
\end{aligned}$$

実数 u に対し

$$H(u)\equiv e^{-u}\psi(e^u)$$

と書く．明らかに $y_2\geqq y_1$ のとき

$$H(y_2)\geqq H(y_1)e^{y_1-y_2}\tag{4.7}$$

が成り立つ．

補題 33 $\lambda>0$ のとき任意の実数 y に対し

$$K(y,\ \lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda y}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv$$

が存在する．かつ

$$\lim_{y\to\infty}K(y,\ \lambda)$$

も存在し，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv$ に一致する．

証明

$$\int_0^\infty e^{-u(s-1)}\,du=\frac{1}{s-1}$$

となるので，補題 31 より，

$$\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{s}{s-1}\right)\frac{1}{s}=\int_0^\infty\{H(u)-1\}\,e^{-u(s-1)}\,du$$

$\lambda>0,\ \epsilon>0$ と実数 y に対し

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}\left\{-\frac{\zeta'(1+\epsilon+\lambda ti)}{\zeta(1+\epsilon+\lambda ti)}-\frac{1+\epsilon+\lambda ti}{\epsilon+\lambda ti}\right\}\frac{dt}{1+\epsilon+\lambda ti}\\
&=\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}\left\{\int_0^\infty\{H(u)-1\}\,e^{-\epsilon u}e^{-\lambda uti}\,du\right\}dt\\
&=\int_0^\infty\{H(u)-1\}\,e^{-\epsilon u}\,du\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda(y-u)ti}\,dt\\
&=\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y}\left\{H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)-1\right\}e^{-\epsilon\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)}\,dv\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}\,dt\\
&=\frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)e^{-\epsilon\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)}\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv-\frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y}e^{-\epsilon\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)}\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv
\end{aligned}$$

『数論 I』**定理 7.3** より $s = 1 + ti$ $(t \neq 0)$ で $\zeta(s)$ は零点をもたない．したがって $\lambda \geqq 1$ となる範囲で

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$$

は正則である．この結果 $\epsilon \to 0$ のとき，第 1 行の積分値の極限は存在する．一方，最終行の第二の積分値の極限も存在する．これらの極限では積分内で $\epsilon \to 0$ としてよい．この結果，第一の積分についても同様であり．

$$\begin{aligned} &K(y,\ \lambda) \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda y t i} \left\{ -\frac{\zeta'(1+\lambda t i)}{\zeta(1+\lambda t i)} - \frac{1+\lambda t i}{\lambda t i} \right\} \frac{dt}{1+\lambda t i} + \int_{-\infty}^{\lambda y} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv \end{aligned}$$

が存在した．
右辺の第一の積分は,『数論 I』**定理 7.3** より，ある普通の連続関数をフーリエ級数に展開した係数であるから $y \to \infty$ のときは 0 に収束する．よって

$$\lim_{y\to\infty} K(y,\ \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$$

(注) この値は実は π になるが，有限確定値であること以外は次の定理では使わないので,『解析的整数論』でも示されていない． □

定理 111 (素数定理)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

証明
第 1 段階として，

$$\psi(x) \sim x \quad \text{即ち} \qquad \lim_{y\to\infty} H(y) = 1$$

を示す．
補題 33 の積分値を P とおく．

$$P \equiv \lim_{y\to\infty} K(y,\ \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$$

このとき $\lambda > 0$ なので，補題 33 と不等式 (4.7) より

$$P \geqq \overline{\lim_{y\to\infty}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv \geqq \overline{\lim_{y\to\infty}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$$

ゆえに

$$\overline{\lim_{y\to\infty}} H(y) = \overline{\lim_{y\to\infty}} H\left(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \leqq \frac{P e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}}{\displaystyle\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv}$$

最後の式は $\lambda \to \infty$ のとき 1 に収束するので，

$$\overline{\lim_{y\to\infty}} H(y) \leqq 1 \tag{4.8}$$

不等式 (4.8) から $H(y)$ は有界である．

$$H(y) \leqq Q$$

とおく．再び補題 33 と不等式 (4.7) より

$$\begin{aligned} P &= \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\lambda y} H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv \\ &\leqq Q \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \frac{dv}{v^2} + \lim_{y\to\infty} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv + Q \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \\ &\leqq \frac{2Q}{\sqrt{\lambda}} + P e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \lim_{y\to\infty} H\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \end{aligned}$$

つまり

$$\lim_{y\to\infty} H(y) \geqq e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \left(1 - \frac{2Q}{P\sqrt{\lambda}}\right)$$

この右辺も $\lambda \to \infty$ のとき 1 に収束するので，

$$\lim_{y\to\infty} H(y) \geqq 1 \tag{4.9}$$

2 つの不等式 (4.8)，(4.9) から

$$\lim_{y\to\infty} H(y) = 1 \tag{4.10}$$

が示された．

これをもとに素数定理を示す．$x > e$ に対して

$$\omega = \frac{x}{\log^2 x}$$

とおく．$\omega < x$ である．式 (110) から

$$\begin{aligned} \psi(x) \leqq \pi(x)\log x &\leqq \pi(\omega)\log x + \sum_{\omega < p \leqq x} \frac{\log p}{\log \omega} \log x \\ &\leqq w \log x + \frac{\log x}{\log \omega} \psi(x) \end{aligned}$$

よって

$$1 \leqq \frac{\pi(x)\log x}{\psi(x)} \leqq \frac{x}{\psi(x)\log x} + \frac{\log x}{\log \omega}$$

ここで等式 (4.10) から

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\psi(x)} = 1$$

また

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\log \omega} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\log x - 2\log(\log x)} = 1$$

であるから

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{\psi(x)\log x} + \frac{\log x}{\log \omega}\right) = 1$$

つまり，素数定理は示された． □

4.11　光線の包絡線

2009.1.8/2005.10.3

4.11.1　問題の設定

耕一　円柱型のガラスコップを太陽の光の当たるところにおくと，写真のように，コップの内側に明るいところと暗いところができ，その境界に曲線が浮かびあがることに気づきました．

南海　なかなかよく写っている．これは左側からガラスコップに太陽の光があたって，その光線がガラスコップの内側で全反射してできた曲線だ．

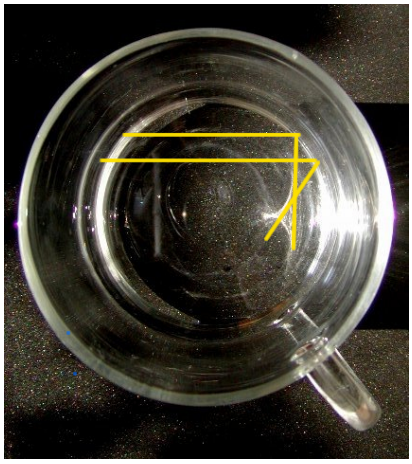
耕一　この境界を作る曲線がどのような曲線か知りたいのです．

南海　そのためには，明るいところと暗いところのできるわけを知らねばならない．

耕一　確かに．なぜこのような曲線ができるのですか．

南海　おそらく，光線が入射角と反射角が等しいという反射の原理によって，コップの内側で反射し，その反射光線が少しずつずれていくことで，多くの光線が密集するところと，そうでないところができ，水の中の粒子に多くの光が当たるところが明るくなり，曲線が浮かびあがるのだろう．

耕一　反射光線のいちばん密になるのが，反射光線が通過していく境界ですね．この境界の曲線って，反射光線による包絡線ではありませんか．



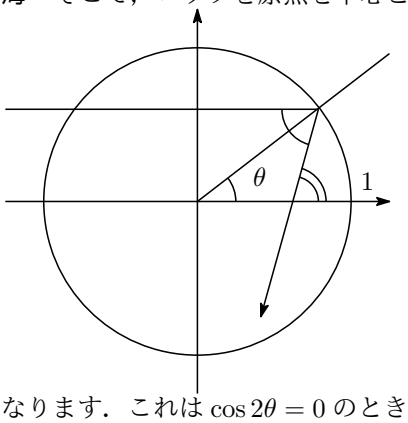
南海　そう考えてよい．包絡線は，光線の通過領域の境界線であって，光線がその曲線に接して動いていくので，通過領域側が明るくなる．さらに境界がいちばん明るくなるのは，それだけ多くの光がその場を通るからだと考えられる．直線群が接している曲線をこの直線群の**包絡線**と言うんだ．

耕一　包絡線は『数学対話』-「座標幾何のひろがり」－「包絡線」に一般的な求め方があります．しかしそのためには，光線の方程式を，何らかの媒介変数を用いて書きあらわさなければなりません．

南海　この曲線は数学的には包絡線というのだが，光学分野では焦線（caustic）あるいは火線という名で知られている．焦点では光が 1 点に集まるが，焦線とは点ではなくて線をなす場合をいうのである．ホイヘンス (Christiaan Huygens,1629 年 4 月 14 日～1695 年 7 月 8 日）の教科書 (1690 年) にすでに書かれている．

4.11.2　光線の包絡線

南海　そこで，コップを原点を中心とする半径 1 の円としよう．



図のように，x 軸に平行な光線が，点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ で反射しているとしよう．反射光の通過する直線の方程式はどのようになるか．

耕一　傾きは $\tan 2\theta$ ですから

$$y = \tan 2\theta(x - \cos\theta) + \sin\theta$$

です．分母を払って整理すると

$$(\sin 2\theta)x - (\cos 2\theta)y = \sin\theta \quad \cdots ①$$

となります．これは $\cos 2\theta = 0$ のときも成立します．

ここからは包絡線の一般論ですね．少し難しいです．

南海　まず，何らかの曲線が存在していることは事実である．われわれは，その曲線とこの光線が接していると考えているので，接点を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とおこう．$(x(\theta),\ y(\theta))$ の軌跡が，この曲線そのものだ．

耕一　曲線がどのような媒介変数表示になるかはわからないので，とりあえずそれを $(x(\theta),\ y(\theta))$ とおいたのですね．するとこの点は光線上の点でもあるから方程式 ① を満たし．

$$(\sin 2\theta)x(\theta) - (\cos 2\theta)y(\theta) = \sin\theta \quad \cdots ②$$

となる．『数学対話』－「座標幾何のひろがり」－「包絡線」によればこれを θ で微分するのですね．すると

$$2(\cos 2\theta)x(\theta) + (\sin 2\theta)x'(\theta) + 2(\sin 2\theta)y(\theta) - (\cos 2\theta)y'(\theta) = \cos\theta$$

となります．ところがベクトル $(x'(\theta),\ y'(\theta))$ は曲線の接線方向ですから，接線の法線ベクトル

$$(\sin 2\theta,\ -\cos 2\theta)$$

と直交しています，つまり

$$(\sin 2\theta)x'(\theta) - (\cos 2\theta)y'(\theta) = 0$$

です．これを微分した式に代入して両辺を 2 で割ると

$$(\cos 2\theta)x(\theta) + (\sin 2\theta)y(\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta \quad \cdots ③$$

となります．② , ③ を連立して x と y について解くと

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{1}{2}\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta \\ y(\theta) &= \frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta \end{aligned}$$

です．

南海　もう一息，これを積和の公式で分けるとどうなるか．

耕一

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{1}{2}\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta \\ &= \frac{1}{4}(\cos 3\theta + \cos\theta) + \frac{1}{2}(-\cos 3\theta + \cos\theta) \\ &= \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta \\ y(\theta) &= \frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta \\ &= \frac{1}{4}(\sin 3\theta + \sin\theta) - \frac{1}{2}(\sin 3\theta - \sin\theta) \\ &= \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta \end{aligned}$$

これはどこかで見たことがあります.

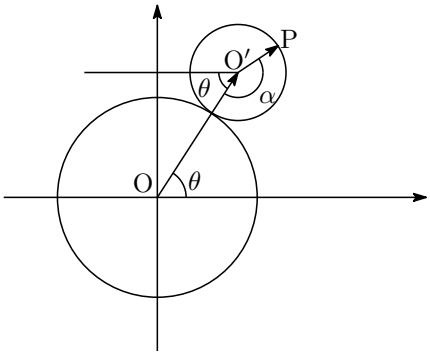
4.11.3 外サイクロイドと内サイクロイド

耕一 確か円の周りにもう一つの円を回転させたときの，点の軌跡でした．半径いくらの円にすればよいのでしたか.

南海 こういう曲線を外サイクロイドというのだが．そういうときは半径 a の円の周りを半径 b の円がまわるとして，一般的な媒介変数表示を作ればよい.

半径 a の円を今後基準円，動く円を動円と呼ぶ.

耕一 基準円の中心を O，動円の中心を O′ とする.



図のように角 θ と α を反時計回りを正の方向にして定めると

$$a\theta = b\alpha$$

となる．よって $\alpha = \dfrac{a}{b}\theta$ である．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ が x 軸の水平方向となす角は

$$\pi + \theta + \alpha = \pi + \frac{a+b}{b}\theta$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}} \\ &= (a+b)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \cos\left(\pi + \dfrac{a+b}{b}\theta\right) \\ \sin\left(\pi + \dfrac{a+b}{b}\theta\right) \end{pmatrix} \\ &= (a+b)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \\ \sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

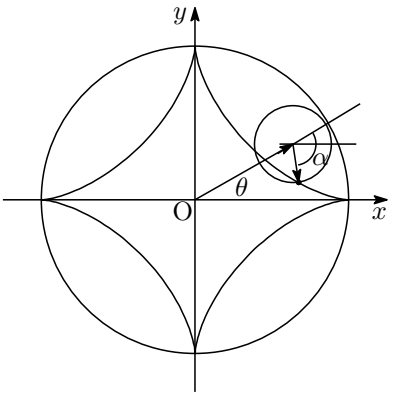
です．すると，先ほどの包絡線は

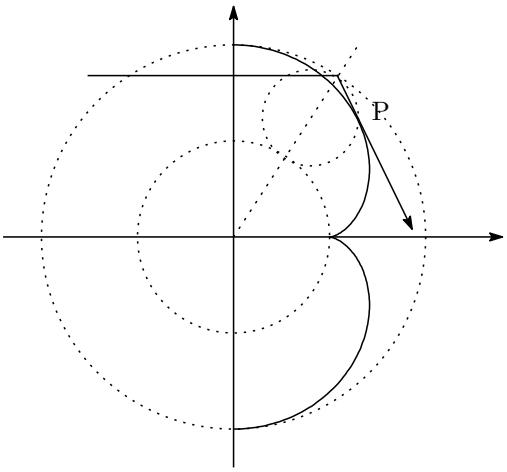
$$a+b=\frac{3}{4},\ b=\frac{1}{4},\ \frac{a+b}{b}=3$$

ですから，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上を半径 $\dfrac{1}{4}$ の円を回転させてできる外サイクロイドになる，これが私の質問の内容でした．光線が点 P で曲線に接している様子がわかります．

南海　もっと詳しくいろいろ調べることができるので，考えてほしい．

耕一　内側を回転してもいいのですね．





南海　半径 b の動円が半径 a の基準円の内側をまわるものだ．記号の付け方を同様にすると，方向も考えて $\alpha=-\dfrac{a}{b}\theta$ となる．したがってベクトル $\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ が x 軸の正の方向となす角は $-\dfrac{a}{b}\theta+\theta=\dfrac{a-b}{-b}\theta$ となり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}}\\ &= (a-b)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{a-b}{-b}\theta\right)\\ \sin\left(\dfrac{a-b}{-b}\theta\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．これは外サイクロイドの b を $-b$ にしたものである．

$a=4$，$b=1$ なら図のような星形になる．

まとめると，円の周りを回転する円周上の定点の軌跡である外サイクロイドと内サイクロイドは，統一的に次のように媒介変数で表示されることになります．

α は正の数，b は 0 でない実数とします．b が正なら半径 a の基準円に外接して半径 b の動円がまわるとき，また b が負なら半径 a の基準円に内接して半径 $-b$ の動円がまわるとき，その動円上の点 P の軌跡の一般的な媒介変数表示は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a+b)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}-b\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right)\\ \sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right)\end{pmatrix}\quad\cdots④$$

です．相似なら同じ軌跡と考えてよいので，これらのサイクロイドは $\dfrac{b}{a}$ で決まります．

また a が負の時は，$(-x(\theta),\ -y(\theta))$ の媒介変数表示が，基準円の半径が $-a$ のサイクロイドになるので，$(x(\theta),\ y(\theta))$ もまたサイクロイドになります．

南海　それでよいのだが，内サイクロイドに関してすこし注意すべきことがある．$b=-a$ のときは基準円と動円が一致する．これは除く．$\dfrac{b}{a}\neq-1$ としなければならない．

$b=-\dfrac{1}{2}a$ のときは，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a\cos\theta,\ 0)$ となり，動円上の点 P の軌跡は基準円の直径そのものになる．これは図を描いてもわかる．これを退化した内サイクロイドといってもよい．

このとき動点 P は直線運動を行う．円運動が直線運動に変わる．これが遊星歯車の原理だ．例えば京都大学総合博物館にこのような模型 がある．その動きはまさに直線運動 になる．

b が負で $b < -a$ のときは $a+b<0$ となる．そこで ④ で $\dfrac{a+b}{b}\theta = \phi$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (a+b)\begin{pmatrix}\cos\dfrac{b}{a+b}\phi\\ \sin\dfrac{b}{a+b}\phi\end{pmatrix} - b\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\\ &= \{a-(a+b)\}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} - \{-(a+b)\}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{a-(a+b)}{-(a+b)}\phi\\ \sin\dfrac{a-(a+b)}{-(a+b)\phi}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので，基準円の半径が a，動円の半径が $-(a+b)$ の外サイクロイドになる．

4.11.4　一般化の試み

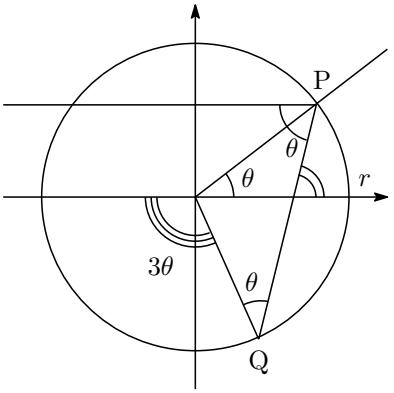
耕一　反射光線の包絡線として，円の周りをその円の半径の $\dfrac{1}{2}$ の円をまわしてできる外サイクロイドが得られました．そこで質問です．$\dfrac{b}{a}$ を与えたとき，このサイクロイドを直線の包絡線として作ることができるのでしょうか．

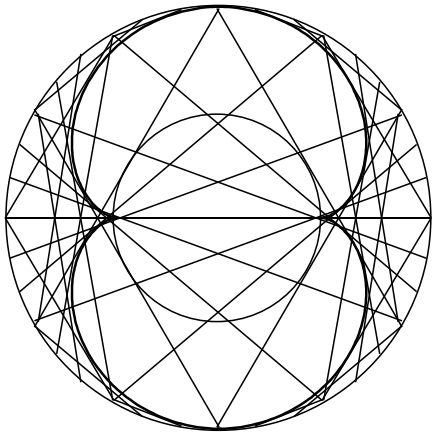
南海　それを考えるためには，ここまで考えたことを一般化しなければならない．

光線が半径 1 の円の内側で反射してできる光線の包絡線が半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周りを半径 $\dfrac{1}{4}$ がまわってできる外サイクロイドになるということだった．

図のように半径 1 の円周上の点 P で反射した光線が，もういちど同じ円にあたる点を Q としよう．そして，必ずしも反射光線の軌跡ではない一般の円の弦 PQ の包絡線を考える．

その設定の仕方を，反射光線の場合から考えよう．角 θ は同様にとるとすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が x 軸の正の方向となす角はいくらになるか．





耕一　図から考えてそれは $\pi + 3\theta$ です．

そうか．点 P が角 θ の位置にあるとき，点 Q が $\pi+3\theta$ の位置にあるような関係を保って弦 PQ が動くとき，その包絡線が 2 円の半径の比が 2 : 1 であるような外サイクロイドになるのだ．このように考えると，光が右側から当たった場合も含めて，外サイクロイドが得られるのです．

10° ずつで PQ を動かして書いてみました．

南海　このようにいちどは手を動かして書くことは大切だ．

耕一　ところで，一般化ですが，この 3 を p にするのですか．

南海　そうだ．明らかに $p=0,\ 1,\ -1$ のときは包絡線を作らないので，$p\neq 0,\ 1,\ -1$ とする．点 P が角 θ の位置にあるとき，点 Q が角 $\pi+p\theta$ の位置にあるとして，直線 PQ の包絡線を考えようということだ．

ただし点 P, Q が一致するときは直線 PQ の包絡線を考えるときには除外しておく．除外した θ の値以外のところで得られた包絡線が除外した θ の値以外のところでは連続しているなら，除外した θ の値に対応する点も連続性によって包絡線の点として定義される．

耕一　点 P, Q が一致するのは，

$$\theta=\pi+p\theta+2k\pi$$

つまり

$$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{p-1}$$

のときです．包絡線を考えるときはこの θ を除外するのですね．

南海　特異な点を除外して考え，後でその点を個別に考えるのがよい．そこでこの前提で，直線 PQ の方程式を求めよう．

耕一　$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(\cos(\pi+p\theta),\ \sin(\pi+p\theta))=(-\cos(p\theta),\ -\sin(p\theta))$ ですから直線 PQ の方程式は，

$$(\sin\theta+\sin(p\theta))(x-\cos\theta)-(\cos\theta+\cos(p\theta))(y-\sin\theta)=0$$

これから

$$(\sin\theta+\sin(p\theta))x-(\cos\theta+\cos(p\theta))y-\sin(p-1)\theta=0$$

です．さらに変形すると，

$$2x\sin\frac{p+1}{2}\theta\cos\frac{p-1}{2}\theta-2y\cos\frac{p+1}{2}\theta\cos\frac{p-1}{2}\theta=2\sin\frac{p-1}{2}\theta\cos\frac{p-1}{2}\theta$$

となります．ところが $\theta\neq\dfrac{(2k+1)\pi}{p-1}$ つまり $\dfrac{p-1}{2}\theta\neq(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\dfrac{p-1}{2}\theta\neq 0$．したがって PQ の方程式は

$$x\sin\frac{p+1}{2}\theta-y\cos\frac{p+1}{2}\theta=\sin\frac{p-1}{2}\theta$$

となります．

次に包絡線と直線 PQ の接点を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とします．この点は PQ 上にあるので

$$x(\theta)\sin\frac{p+1}{2}\theta-y(\theta)\cos\frac{p+1}{2}\theta=\sin\frac{p-1}{2}\theta\quad\cdots⑤$$

です．これを θ で微分します．

$$\begin{aligned}&x'(\theta)\sin\frac{p+1}{2}\theta+x(\theta)\cdot\frac{p+1}{2}\cos\frac{p+1}{2}\theta\\&-y'(\theta)\cos\frac{p+1}{2}\theta+y(\theta)\cdot\frac{p+1}{2}\sin\frac{p+1}{2}\theta=\frac{p-1}{2}\cos\frac{p-1}{2}\theta\quad\cdots⑥\end{aligned}$$

ところがベクトル $(x'(\theta),\ y'(\theta))$ は包絡線の接線ベクトルですから，法線方向 $\left(\sin\dfrac{p+1}{2}\theta,\ -\cos\dfrac{p+1}{2}\theta\right)$ とは直交します．つまり

$$x'(\theta)\sin\frac{p+1}{2}\theta-y'(\theta)\cos\frac{p+1}{2}\theta=0$$

したがって関係式 ⑥ は

$$x(\theta)\cos\frac{p+1}{2}\theta+y(\theta)\sin\frac{p+1}{2}\theta=\frac{p-1}{p+1}\cos\frac{p-1}{2}\theta$$

となります．これと ⑤ を連立して $x(\theta),\ y(\theta)$ について解き，$p=3$ の場合と同様の整理と変形をおこなうと次式が得られました．

$$\begin{cases} x(\theta)=\dfrac{p}{p+1}\cos\theta-\dfrac{1}{p+1}\cos p\theta \\ y(\theta)=\dfrac{p}{p+1}\sin\theta-\dfrac{1}{p+1}\sin p\theta \end{cases}$$

南海　これで先の質問が解けるのではないか．

耕一　④ の表示と今得られた表示と見比べ

$$a+b=\frac{p}{p+1},\ b=\frac{1}{p+1},\ \frac{a+b}{b}=p$$

と置きます．

$$a=\frac{p-1}{p+1},\ b=\frac{1}{p+1}$$

ですから，

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{p-1}$$

つまり与えられた $\dfrac{b}{a}$ に対して

$$p=\frac{a}{b}+1$$

ととればよいのです．

南海　そういうことなのだ．

耕一　逆にまた，得られた包絡線がサイクロイドであることもわかります．

4.11.5　円族の包絡線としてのサイクロイド

南海　正数 a と正数 b の外サイクロイドと正数 a と負数 $-b$ の内サイクロイドの相互関係を調べよう．それぞれのサイクロイド上の点を P，P′ とすると，その媒介変数表示は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a+b)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}-b\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right)\\ \sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(a-b)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{a-b}{-b}\theta\right)\\ \sin\left(\dfrac{a-b}{-b}\theta\right)\end{pmatrix}$$

となる．また点 T を $\mathrm{T}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とする．

耕一　この場合同じ半径 b の動円が半径 a の基準円の内と外をまわるので，点 P と点 P′ は同時に基準円に戻ります．

南海　そう，その上でベクトル $\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ と点 P でのサイクロイドの接線は直交している．これを確認してほしい．

耕一　$\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ とします．まず

$$\overrightarrow{\mathrm{TP}} = b\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \\ \sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} \cos\theta - \cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \\ \sin\theta - \sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \end{pmatrix}$$

です．一方

$$\begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - (a+b)\begin{pmatrix} -\sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \\ \cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix} -\sin\theta + \sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \\ \cos\theta - \cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right) \end{pmatrix}$$

なので，これから

$$\overrightarrow{\mathrm{TP}} \cdot \begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} = 0$$

となります．

南海　同様にベクトル $\overrightarrow{\mathrm{TP'}}$ と点 P′ でのサイクロイドの接線も直交している．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{TP'}} = -b\begin{pmatrix} \cos\theta - \cos\left(\dfrac{a-b}{-b}\theta\right) \\ \sin\theta - \sin\left(\dfrac{a-b}{-b}\theta\right) \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{TP}}\right|^2 &= b^2\left\{2 - 2\left(\cos\theta\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right) + \sin\theta\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)\right)\right\} \\ &= 2b^2\left(1 - \cos\frac{a}{b}\theta\right) \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{TP'}}\right|^2 &= b^2\left\{2 - 2\left(\cos\theta\cos\left(\frac{a-b}{-b}\theta\right) + \sin\theta\sin\left(\frac{a-b}{-b}\theta\right)\right)\right\} \\ &= 2b^2\left(1 - \cos\frac{a}{-b}\theta\right) = \left|\overrightarrow{\mathrm{TP}}\right|^2 \end{aligned}$$

以上のことから，2 つのサイクロイドは，点 T を中心とする半径 $\left|\overrightarrow{\mathrm{TP}}\right|$ の円に接していることがわかる．

いいかえると，基準円上に中心をもち外サイクロイドに接する円の集合 (円族) の通過領域の境界は，動円の半径が等しい内サイクロイドになる．内外逆にしても成立する．

耕一　すると，このような外サイクロイドに接するということで定まる円の群が，内サイクロイドに接している．ということは包絡線と似ています．

南海　そうだ．媒介変数 α をもつ曲線族 $C_\alpha : f(x,\ y,\ \alpha) = 0$ がある．α が連続的に変化するとき，曲線族 C_α が常にある曲線 E に接し，しかも E がその接点の軌跡であるとき，E を曲線族 C_α の**包絡線**という．

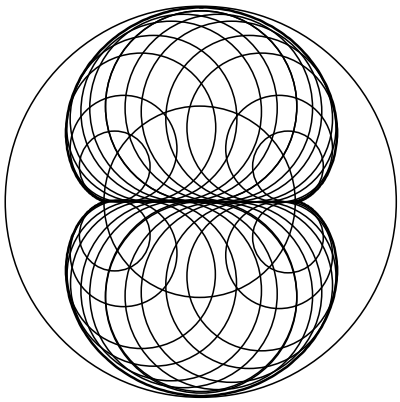
今の場合

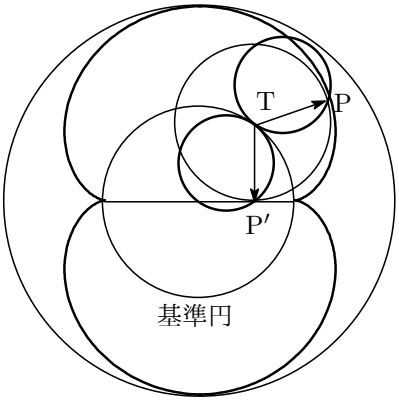
$$C_\theta : (x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2 - 2b^2\left(1 - \cos\frac{a}{b}\theta\right) = 0$$

とするとこの曲線族が内サイクロイドを包絡線にもつということだ.

耕一　いくつか例を書いてみます.

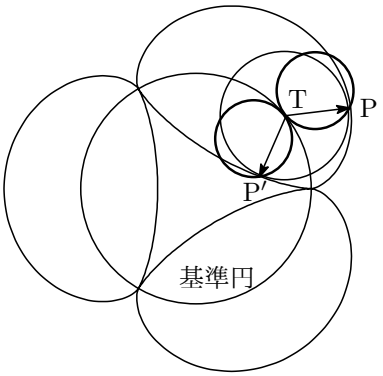
$a=1$ で $b=\dfrac{1}{2}$ のとき．内サイクロイドは退化した直径です.





$a=1$ で $b=\dfrac{1}{3}$ のとき．相互関係の方を描いてみました.

南海　この対話では,『初等数学』を発行しておられる松田康雄さんによる「円サイクロイド」(『日本数学協会論文集』第 4 号 2008 年所収）を参考にした．感謝します.



4.12　懸垂線と双曲線

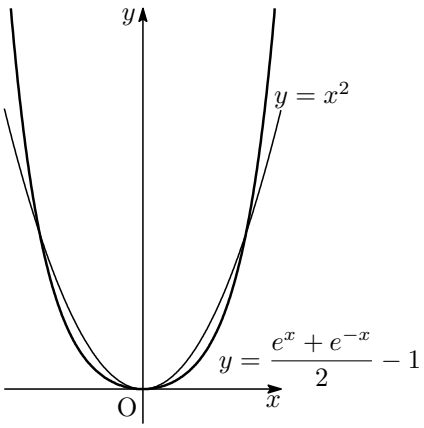
2004.1.15

4.12.1　懸垂線の方程式

耕一　懸垂線 (カテナリー) を習いました．それが鎖を吊したときにできる曲線であることも習ったのですが，なぜあのような式になるのかわかりません．

南海　それでは，懸垂線の方程式を求め，その関数に関するいくつかの話題を考えていこう．ちょうど鎖があるので吊してみよう．この曲線を懸垂線、英語では Catenary という． Catenary という言葉は 1691 年にホイヘンス（Huygens）によって作られたそうである．語源はラテン語の鎖 "catena" で，英語の鎖 chain も源をたどれば同じ語源に行き着く．

耕一　放物線と似ていますが，放物線とは違うのですね．



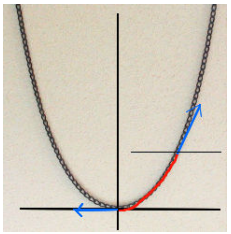
南海　違う．二つを同じ座標平面にかいてみよう．太い方が懸垂線，細い方が放物線だ．さすがに懸垂線は指数関数でできているだけに，はじめは放物線より値が小さいが，その後はずっと大きい値をとる．

問題はこの懸垂線の式を求めるということだった．つまり求める曲線を $y = f(x)$ とおき，$f(x)$ を決定しようということだ．懸垂線の意味からこの曲線が y 軸に関して対称であるとしてよい．また，

$$f(0) = 0$$

であるようにする．以下は $x \geqq 0$ で考えよう．

任意の x に対して，曲線の原点と x までの部分を写真のように赤線に引く．この部分の力の釣り合いを考えよう．



南海　原点では左方向に一定の張力が働く．この大きさを H とする．これは定数である．そこで，図のように任意の x に対して，点 $(x,\ f(x))$ で接線方向に大きさ T の張力が働いているとする．この大きさはもちろん x によって変化する．鎖には重力が作用している．鎖の重みと張力とが釣り合っている，と考えられる．

原点での張力，原点から $(x,\ f(x))$ までの鎖に働く重力，点 $(x,\ f(x))$ での接線方向の張力，これらが釣り合っている．点 $(x,\ f(x))$ での接線方向が x 軸の正の方向となす角を θ とおこう．張力を x 軸方向と y 軸方向に分解する．x 軸方向は H と $T\cos\theta$ とが釣り合っている．

$$H = T\cos\theta$$

y 軸方向について考える．図の赤線部分の長さ s

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

によってこの部分の重さが決まる．これが $T\sin\theta$ と釣り合っている．鎖の単位長さあたりの質量を w とし，重力定数を g とおけば，

$$gws = T\sin\theta$$

である．これから T が消去されて

$$\tan\theta = \frac{gw}{H}s$$

ここで，$\dfrac{gw}{H} = a$ とおこう．するとすべてを決定している関係式は次の 3 つである．

$$\begin{cases} s = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt & \cdots ① \\ \tan\theta = \dfrac{d}{dx} f(x) & \cdots ② \\ \tan\theta = as & \cdots ③ \end{cases}$$

① の両辺を x で微分する．$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ なので ② を代入して

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + f'(x)^2} \\ &= \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \end{aligned}$$

である．③ の両辺を s で微分する．

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{ds}\tan\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{ds} \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{d\theta}{dx} \end{aligned}$$

これを x について 0 から x まで積分すると

$$ax = \int_0^x \frac{1}{\cos\theta}\frac{d\theta}{dx}\, dx = \int_0^\theta \frac{1}{\cos\theta}\, d\theta$$

南海　$\displaystyle\int_0^\theta \frac{1}{\cos\theta}\, d\theta$ は計算できるか．

耕一　はい．

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{1}{\cos\theta}\, d\theta &= \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{1 - \sin^2\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left\{ \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}\, d\theta + \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}\, d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2}\{-\log(1 - \sin\theta) + \log(1 + \sin\theta)\} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1}{2}\log\frac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} \\ &= \log\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \log\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right) \end{aligned}$$

南海

$$ax = \log\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right)$$

より

$$e^{ax} = \frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta \quad \cdots ④$$

両辺の逆数をとると，….

耕一　$e^{ax} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ なので

$$\begin{aligned} e^{-ax} &= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} \\ &= \frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

です．

南海　④ , ⑤ の辺々を引いて，

$$\tan\theta = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

となる．ところが ② なので

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

変数を t にして両辺 0 から x まで積分する．$f(0) = 0$ なので

$$\begin{aligned} [f(t)]_0^x &= \int_0^x \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\,dt \\ \therefore \quad f(x) &= \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

を得る．

南海　今は $f(0) = 0$ にしたが，$a = 1$ で，$f(0) = 1$ のものが懸垂線の標準的なものだ．つまり $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ だ．

耕一　計算では途中で媒介変数 s がうまく使われています．

南海　曲線の長さを媒介変数にとると計算が簡明になるというのは，微分幾何という分野では基本的なことなのだが高校数学では難しい．この考えを用いた入試問題を一つ紹介しよう．

演習 74　［03 早稲田理工］解答 75

放物線 $y = \dfrac{x^2}{2}$ のうち，$0 \leqq x \leqq 1$ の部分を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し，原点 O から P までの C の部分の長さを s で表す．x と y を s の関数とみなして $x = f(s),\ y = g(s)$ とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) $\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2$ の値を求めよ．

(2) 次の等式を示せ．

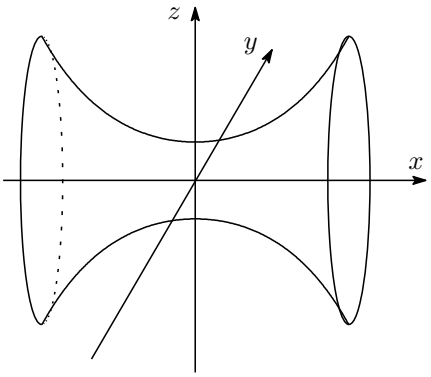
$$f''(s) = -\frac{1}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}g'(s),\ g''(s) = -\frac{1}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}f'(s)$$

(3) P における C の法線上にあり，P との距離が正の定数 a である 2 点のうち，C の下側にあるものを $\mathrm{Q}(v,\ w)$ とする．$v,\ w$ を $f(s),\ g(s),\ f'(s),\ g'(s)$ を用いて表せ．

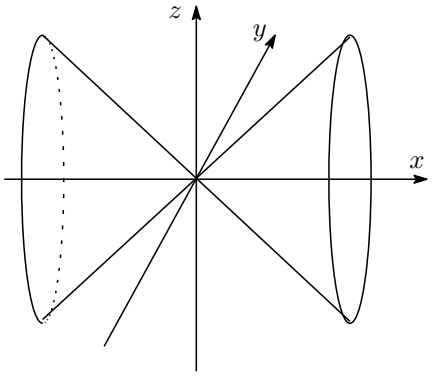
(4) C の長さを L とし，P が C 全体を動くときの，Q の描く曲線の長さを M とする．$M-L$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$ を用いてもよい．

4.12.1.1　懸垂面

南海　ついでに懸垂線が現れる曲面を紹介しよう
懸垂線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ を x 軸の周りに回転した回転面を**懸垂面**という．



耕一　どこかで見たことがあります．
南海　2 つの円形の針金の輪を作りシャボン玉の液で膜を作ったときの面だ．
$x=\pm1$ での断面 $y^2+z^2=\dfrac{e+e^{-1}}{2}$ を固定する．



この 2 つの円の間に張られる面はいろいろできる．次のような円錐もある．
両端を $x=\pm1$ での断面 $y^2+z^2=\dfrac{e+e^{-1}}{2}$ に固定したさまざまの曲面の中で側面の**面積が最小**になるものが懸垂面なのだ．これが懸垂面を特徴づける．
耕一　証明は難しいのですか．
南海　やや高校範囲を越えるのでここではできない．高校範囲で示せるようになったら証明も紹介したい．

4.12.2　双曲線関数

南海　懸垂線は実は双曲線と深い関係がある．それを考えていこう．
双曲線 H ： $x^2-y^2=1$ $(x>0)$ は，実数 t を用いて $x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ という媒介変数表示をもつ．
耕一

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}-\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}=1$$

ですから，$\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2},\ \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$ は H 上の点です．さらに相加相乗平均の不等式から $1\leqq\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$，かつ

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{2}=+\infty,\ \lim_{t\to\pm\infty}\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\pm\infty,$$

です．e^t, e^{-t} はともに t の連続な関数ですから，t が全実数を動くと，$\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2},\ \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$ は H の全体を動きます．双曲線 C ： $x^2-y^2=1$ $(x>0)$ 上の任意の x と y は，実数 t を用いて $x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ と表されます．ということでいいでしょうか．

南海　同じ二次曲線である円 C ： $x^2+y^2=1$ の媒介変数表示として

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$$

がとれることはよく知られている．ここで,『ド・モアブルの定理からオイラーの公式へ』を見てほしいのだが

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

とかけるのだった．これによれば

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

つまり円 C ： $x^2+y^2=1$ は媒介変数表示

$$x=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ y=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

をもつ．

耕一　双曲線 H ： $x^2-y^2=1$ $(x>0)$ は，実数 t を用いて

$$x=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2},\ y=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$$

という媒介変数表示をもつというのと同じ形ですね．

　ということは，この 2 つは sin, cos と似ているということですか．

南海　その通り．実は $\cos\theta$, $\sin\theta$ のことを三角関数というのにならって，

$$\frac{e^{t}+e^{-t}}{2},\ \frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$$

のことを双曲線関数という．そして双曲線のことを hyperbolic curve というのにちなんで，記号で

$$\cosh t=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2},\ \sinh t=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$$

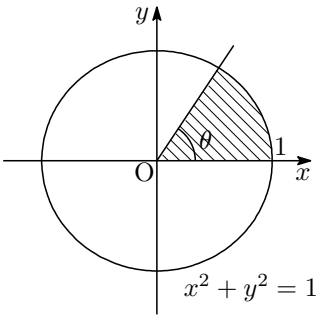
と表す．

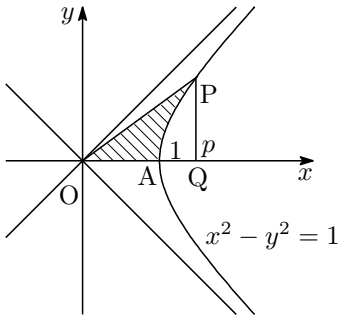
耕一　双曲線の媒介変数表示になっていたということは

$$\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$$

ということですね．

南海　そうだ．さらに，三角関数との対比で双曲線関数の性質を調べよう．三角関数の角 θ に対して $\dfrac{\theta}{2}$ は単位円の斜線部分の面積だった．





それに対して第 1 象限にある双曲線 H 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ をとる．また $\mathrm{A}(1,\ 0)$ とする．また点 P から x 軸に降ろした垂線の足を $\mathrm{Q}(p,\ 0)$ とする．点 P に対応する媒介変数値を t とする．線分 OP, OA と，点 A と点 P で切り取られる H の弧とで囲まれた図形の面積 S がちょうど $\dfrac{t}{2}$ となる．

耕一　やってみます．

$$S = \triangle\mathrm{OPQ} - \int_1^p y\,dx$$

です．変数を t に置換し計算をします．$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{pq}{2} = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{8}$ であり，さらに $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ です．

南海　t は p に対応して固定されているが，この t と媒介変数 t をあえて混同している．わかっていてそうするのは構わない．

耕一　本当は文字を変えるのですが，結局同じことになります．

$$\begin{aligned}
\therefore \quad S(p) &= \triangle\mathrm{OPQ} - \int_1^p y\,dx \\
&= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{8} - \int_0^t \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 dt \\
&= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{8} - \left[\frac{e^{2t}}{8} - \frac{t}{2} - \frac{e^{-2t}}{8}\right]_0^t = \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

確かになりました．ここで質問です．もともとラジアンの定義は円弧でした．双曲線の場合弧 AP の長さは t でしょうか．円の場合は 0 から θ までの弧長は

$$\int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^\theta \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\,d\theta = \theta$$

です．双曲線関数の場合はどうなりますか．

南海　どうなるかやってみよう．弧 AP の長さを L としよう．

耕一

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^t \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t}\,dt
\end{aligned}$$

あれ，ルートが消えない．三角関数とまったく同じではないのですね．

南海　では加法定理はどうだろう．

耕一

$$\begin{aligned}
\cosh t_1 \cosh t_2 &= \frac{(e^{t_1} + e^{-t_1})(e^{t_2} + e^{-t_2})}{4} = \frac{(e^{t_1+t_2} + e^{-(t_1+t_2)})}{4} + \frac{(e^{-t_1+t_2} + e^{t_1-t_2})}{4} \\
\sinh t_1 \sinh t_2 &= \frac{(e^{t_1} - e^{-t_1})(e^{t_2} - e^{-t_2})}{4} = \frac{(e^{t_1+t_2} + e^{-(t_1+t_2)})}{4} - \frac{(e^{-t_1+t_2} + e^{t_1-t_2})}{4} \\
\therefore \quad \cosh(t_1 + t_2) &= \cosh t_1 \cosh t_2 + \sinh t_1 \sinh t_2 \\
\cosh t_1 \sinh t_2 &= \frac{(e^{t_1} + e^{-t_1})(e^{t_2} - e^{-t_2})}{4} = \frac{(e^{t_1+t_2} - e^{-(t_1+t_2)})}{4} + \frac{(e^{-t_1+t_2} - e^{t_1-t_2})}{4} \\
\sinh t_1 \cosh t_2 &= \frac{(e^{t_1} - e^{-t_1})(e^{t_2} + e^{-t_2})}{4} = \frac{(e^{t_1+t_2} - e^{-(t_1+t_2)})}{4} - \frac{(e^{-t_1+t_2} - e^{t_1-t_2})}{4} \\
\therefore \quad \sinh(t_1 + t_2) &= \cosh t_1 \sinh t_2 + \sinh t_1 \cosh t_2
\end{aligned}$$

三角関数の加法定理とは少し違うのですね．ついでにすでに計算はしていますが

$$\frac{d}{dt}\cosh t = \sinh t,\ \frac{d}{dt}\sinh t = \cosh t$$

で，これも三角関数とは少し違います．

4.12.3　双曲線関数の逆関数

南海　$x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ の逆関数はどのようになるだろう．

耕一　t について解いてみます．

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad (e^t)^2 - 2xe^t + 1 = 0$$

$e^t > 0$ ですから $e^t = x + \sqrt{x^2-1}$．したがって $t = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ です．これは入試問題でよく見かけます．

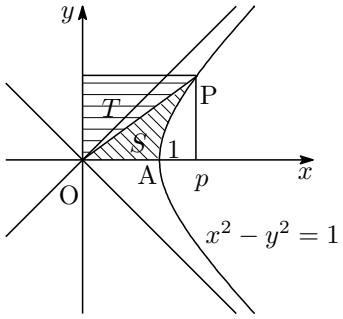
南海　先の面積 S は $\dfrac{t}{2}$ なのだから，この面積 S を x で表せば

$$\frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2-1})$$

となる．同様に $y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ を t について解くと

$$t = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

なる．



図のように S とさらに三角形の面積 T を加えてみよう．

耕一　$x^2 - y^2 = 1$ を x について解くと $x > 0$ では $x = \sqrt{y^2+1}$ ですから

$$T = \frac{1}{2}xy = \frac{y\sqrt{y^2+1}}{2}$$

したがって

$$S + T = \frac{\log(y + \sqrt{y^2+1})}{2} + \frac{y\sqrt{y^2+1}}{2}$$

南海　これは $x^2 - y^2 = 1$ を x について解いて $x = \sqrt{y^2+1}$ とし，このグラフと $x = 0$ と $x = y$ で囲まれる部分の面積だ．

耕一　つまり

$$\int_0^y \sqrt{y^2+1}\,dy = \frac{\log(y + \sqrt{y^2+1})}{2} + \frac{y\sqrt{y^2+1}}{2}$$

変数を x にして不定積分でかくと

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2+1}) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + C$$

4.12.4　放物線の弧長

耕一　これはまさに放物線の弧長の式です．放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の $x=0$ から $x=1$ の部分の長さは，$y'=x$ なので，

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$$

です．ところが上の不定積分があるので，

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left\{\log(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}\right\}$$

と求まります．

南海　渦巻き線 $x=\theta\cos\theta,\ y=\theta\sin\theta$ の $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分の長さを求めようとすると，次の計算が必要である．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\\ =\ &(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2=\theta^2+1\end{aligned}$$

したがってこの長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}d\theta$$

となり，同じ不定積分が必要になる．これは 2002 年京大で出題された．紹介しておこう．

演習 75　［02 年京大前期理系］　解答 76

(1) $x\geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ について，導関数を求めよ．

(2) 極方程式 $r=\theta\ (\theta\geqq 0)$ で定義される曲線の，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを求めよ．

放物線を頂点で軸と直交する直線に沿ってすべらないように転がすとき，焦点のえがく軌跡が懸垂線になる．これをあつかった入試問題を，途中の小問をすべて省いて紹介する．これまで導いた式を使って解いてみよう．

演習 76　［98 年早稲田理工改題］　解答 77

放物線 $C:y=\dfrac{x^2}{2}$ とその焦点 F $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ がある．C が x 軸に接しながら，すべらないように右の方に傾いていくとき，焦点 F の軌跡を求めよ．

4.13　惑星は楕円軌道を描く

2004.12.5

4.13.1　ケプラーの法則とニュートンの法則

4.13.1.1　ケプラーの法則

拓也　地球は太陽の周りを太陽を焦点の一つとする楕円軌道でまわっています．2 つの質点の間に距離の 2 乗に反比例する力が働くという万有引力の法則から楕円軌道が導かれる，と習いました．しかしその計算は高校物理の範囲を超える，ということで証明は習いません．そんなに難しいのですか．

南海　いや，そんなことはない．少し準備はいるが高校数学と地続きだ．

それに，ここが，今日に続く微分積分学のはじまるところだ．ニュートンこそ，微分積分法をはじめて物理現象の解明に用い，またそのことを通して微分積分学を確立した人だ．

拓也　微分や積分の記号もニュートンですか．

南海　今われわれが使っている記号はニュートンの同時代人であるライプニッツによる．ニュートンの微分の方法は**流率法**といわれ，幾何学的な形式で表現される．それを，およそ 100 年の後に，オイラーが，彼の手になる**無限解析**の方法で，力学の諸法則を微分方程式に表しそして解いたのだ．

この微分方程式で運動の法則を表すということを，高校生にもぜひ理解してほしいと思っている．高校数学に微分方程式が復活するということでもあるし，一緒に考えてみよう．高校数学だけを前提にして，必要な概念や方法はすべて定義し証明するという方針でやってみよう．問題は物理学の問題であり，何より物理法則の正確な理解が必要だ．

惑星が楕円軌道をまわることを最初に発見したのはケプラーだ．少し調べてほしい．ケプラーが発見した法則とは？

拓也

> 第 1 法則：惑星は太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く．
> 第 2 法則：惑星と太陽とを結ぶ線分の描く面積は単位時間あたり常に一定である．
> 第 3 法則：惑星の公転周期の 2 乗は軌道の半長径の 3 乗に比例する．

です．

南海　ケプラーとはどんな人だ．

拓也　本を見ると，ヨハネス・ケプラー（1571〜1630）はドイツの数学者で自然哲学者，とありました．天体の運行法則に関する研究を行い，膨大な観測データを分析し法則を発見したといわれています．

南海　つまり，理論的に天体の運動を解明した．この点で，天文学者というよりも天体物理学者であると言う方がふさわしい．ケプラーの視力は弱く天体観測には向いていなかった．

拓也　そんなケプラーに観測データを与えたのは，デンマークの大貴族であるティコ・ブラーエ (1546〜1601) だった．政治家になるためにコペンハーゲン，ライプチッヒの大学に進学したが，1560 年，部分日食を体験し天文学に強い関心を持った．天文台をつくり (1576)，観測機械を改良し，天体の詳しい位置を観測した．彗星を観測したが，地動説は信じなかった．ベン島に観測所を作り 20 年間精密な天体観測を行った．彼は弟子たちに「君は金星．君は土星」と惑星を担当させ，観測データを詳しく分析させた．

南海　ケプラーはティコ・ブラーエの弟子の一人であったが，身分が違いすぎて，ティコ・ブラーエからはどちらかというと疎まれていた．

火星は一番動きが複雑でその分析は困難だと考えられていた．そこで「ケプラー，君は火星を担当しろ」となった．これがケプラーには幸運だった．

古代ギリシア以来の円運動に基づく宇宙論が当時の支配的な思想であった．惑星は中心の星の周囲を完全な円軌道で運行すると考えられていた．その根拠は，完全なる神は完全なる運動を造られる，ということだった．

ケプラーもまた，他の弟子たちと同様に，惑星の運動を円運動の組合せで説明しようと，日々膨大なデータを解析し続けていた．だが，次にあげるように火星は他の惑星と違って離心率が大きい(参考文献 3)．

惑星	金星	地球	火星	木星	土星
離心率	0.0068	0.0167	**0.0934**	0.0485	0.0555

拓也　楕円軌道といってもほとんど円なのですね．確か離心率を e，長軸と短軸を $2a$, $2b$ とすると

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

でした．

南海　そう．そこで $\dfrac{b}{a}$ を順次計算してほしい．

拓也　電卓で計算します．順に

$$0.999977,\ 0.999861,\ \mathbf{0.995629},\ 0.998823,\ 0.998459$$

です．長軸と短軸の比がほとんど 1 なのに，データを整理し，計算して火星が楕円軌道であることを見つけたのですか．

南海　そうだ．いかに当時の観測が正確であったか．また彼らの計算が膨大で精密であったことか．対数は発見されていたが，すべて手計算だ．

ケプラーは 3 つの法則をいちどに発見したのではない．まず面積速度が一定であることを発見した．そこから，天体の運行には何らかの法則があることを知り，その内容をさらに追求したのだ．そしてついに，惑星の軌道を楕円と仮定すると，ティコ・ブラーエの観測した結果を説明できることが分かった．

ケプラーの内心はやはり神の円であった．現実は楕円である．楕円は円錐曲線といわれるように，円錐から派生する．彼はどうもこのことから，円が最も完全だということと，現実が楕円であることに折り合いをつけたらしい．新しい発見は，このように発見者自身をもひき裂くものなのだ．

4.13.1.2　ニュートンの法則

拓也　これに対してニュートンの法則は

> 第 1 法則：慣性の法則．静止または一様な直線運動をする物は，これに力が作用しないかぎり，その状態を保つ．
> 第 2 法則：物体が力の作用を受けるとき，力の向きに，力の大きさに比例した加速度が生じる．
> 第 3 法則：作用反作用の法則．力を他に及ぼした物体は、同じ大きさの反対向きの力を及ぼされる．

です.

南海　ニュートンの名は余りによく知られているが，彼の人となりの本質が理解されているとはいいがたい.

拓也　サー・アイザック・ニュートン（Sir Isaac Newton, ユリウス暦:1642 年 12 月 25 日〜1727 年 3 月 20 日，現在のグレゴリオ暦では 1643 年 1 月 4 日〜1727 年 3 月 31 日）は，イングランドのウールスソープ生まれ．イギリスの物理学者・数学者・天文学者で、近代科学最大の科学者.

南海　近代的な意味での科学者なのかどうか．議論のあるところだ．かれは錬金術にも深い関心をもち，近代の科学者というより中世の錬金術師の流れをくむ人というべきなのだ．だが，そんな彼の頭脳に，近代の到来を告げる微分積分が宿ったのだ．新しい発見が古い思想と肉体を借りて出現するという感じだ.

拓也　ニュートンは，ガリレオが亡くなったその年に生まれた．1665 年イギリスにペスト（黒死病）が流行，大学は感染を避けるために閉鎖された．ニュートンは，郷里の母親のもとに帰った．この期間に，リンゴが木から落ちるのを見た，万有引力の考えを得たといわれる．同時に,「同じ年（1666 年）に私は月の軌道にまで及ぶ重力について考え始めた」とニュートン自身が言ったと本にありました.

4.13.1.3　万有引力の法則

南海　ニュートンは運動の法則を発見するとともに，ケプラーの法則などをもとに万有引力の法則を導き出した．このときニュートンは地球の軌道がほぼ円軌道であることを用いている．円軌道であれば，面積速度一定というケプラーの法則は等速円運動を意味する．その半径を r，周期を T とすると位置ベクトル $\vec{r}$ は

$$\vec{r} = r\left(\cos\frac{2\pi}{T}t,\ \sin\frac{2\pi}{T}t\right)$$

と時間の三角関数で表される．2 回微分して加速度は

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(-\cos\frac{2\pi}{T}t,\ -\sin\frac{2\pi}{T}t\right)$$

ケプラーの第 3 法則から $T^2 \propto r^3$ であるから中心に向かう加速度の大きさが $\dfrac{1}{r^2}$ に比例することがわかる．つまり惑星が太陽に引かれる力が $\dfrac{1}{r^2}$ に比例する.

ニュートンは，月をその軌道に保つのに必要な力と，地表面上の重力を比較してみた．その結果，きわめてよい近似で満足な結果が得られた.

> 世界のひとたちに，私がどのように見えるのか，私は知らない．しかし，私自身にとって，私は浜辺で遊ぶ少年のように思われる．私は，時々なめらかな小石やふつうより美しい貝殻を見つけては喜んでいる．しかし，真理の大洋は，すべて未発見のまま私の前に横たわっている.

このニュートン有名な言葉は，このような世界の法則を確認した人ならではのものだ.

ケプラーの法則は，太陽と惑星の間だけでなく，惑星と衛星（あるいは人工衛星）などの間でも成立する．ここからさらにニュートンはケプラーが太陽系の惑星の運動について述べたことは，2 つの任意の質点間に対しても同様に成り立つことを洞察した．これが万有引力の法則である．これらはみなペストが流行した 1665 年と 1666 年の 2 年間のことである。

ニュートンは，天空と地上が同じ法則の下にあることを発見したのだ．天と地という古来の二元論を事実において打ち破るものであった．

4.13.2 惑星の運動方程式を立てる

4.13.2.1 運動法則の意義

南海　ニュートンの第 2 法則は数学と物理学を結びつけている．

ベクトル $\vec{r}$ や行列 A の各成分が変数 t の関数であるときに，各成分を t で微分したベクトルや行列を $\dfrac{d}{dt}\vec{r}$ や $\dfrac{d}{dt}A$ と記す．各成分を時間の関数とするベクトル $\vec{r} = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ を位置を表すベクトルとする．各成分を t で微分したベクトル $\dfrac{d}{dt}\vec{r} = (x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$ を速度ベクトルという．同様に，2 次微分 $\dfrac{d^2}{dt^2}\vec{r}$ も考えられる．それを加速度ベクトルという．これは数学の範囲にある量だ．ところがこれが，その位置にある質点に働いた力と比例するというのだ.「力」は物理量だ．力もベクトルなのでこれを $\vec{F}$ と記し，比例定数を m とすれば，ニュートンの第 2 法則は，

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \vec{F}$$

となる．このように，未知関数 $\vec{r}$ やその導関数が入った等式を**微分方程式**という．ニュートンの法則は，微分方程式として表される．

拓也　この m は質量ですね．

南海　というより，これが質量の定義式だ．厳密には慣性質量という．これは物質に固有の量である．

拓也　ところで，ニュートンの第 1 の慣性の法則ですが，第 2 法則で力 $\vec{F}$ を $\vec{0}$ にすると，加速度が 0，つまり速度一定が出ませんか．なぜ，第 1 の法則を立てる必要があるのでしょうか．

南海　第 1 の法則は，この世界を慣性系としてとらえようということだ．慣性系であるから，例えば速度と質量を独立にとらえることが出来る．慣性系でなければそもそも第 2 法則がそのままでは意味がない．

だから第 2 法則の前提として第 1 法則があるのであって，逆ではない．

拓也　そういえば，第 1 の法則で「一様」ということがいわれます．しかしこれも，時間の客観的な存在を前提にしてはじめて意味ある言葉ではないでしょうか．

南海　その通りである．第 1 法則は座標系とは独立した時間の存在をも宣言している．さて，ニュートンが主著『自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)』(1687 年 7 月 5 日) で示したもう一つの基本法則が，万有引力の法則だ．

拓也　2 つの物体の間には、互いに逆方向の引力が働き、その力 $\vec{F}$ の大きさは，G を万有引力定数、物体の質量は M, m，物体間の距離を d とすると，

$$|\vec{F}| = \frac{GmM}{d^2}$$

となる．方向は 2 つの質点を結ぶ線に平行です．この方程式はベクトルでも表せます．右辺をベクトルで表すと，いずれを基準点にとるかで符号が逆になりますが，第 3 法則によって大きさは等しいです．

南海　この式から定まる質量 m と M が重力質量だ．

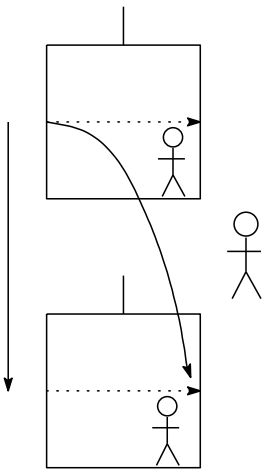
慣性質量と重力質量

拓也　質量にいろいろあるのですか.

南海　よく知られているように，ガリレオは「物の質量と落ちる速さとは関係がない」という落体の法則を発見した．このような否定形の法則は，その背後により大きな肯定形の原理をもつ.「落体の法則」に関して言えば，それは一般相対論の「等価原理」である．地球上でものを落とすと，その質量に関係なく $9.8m/s^2$ で加速する．では，地上で $1kg$ の物質を無重力状態で毎秒 $9.8m$ の割合で加速させるには，どれだけの力が必要か？

拓也　$1kg$ の力です.

南海　単位は正確に $kg{\cdot}m/s^2$ といおう．これは普通 N で表し「ニュートン」と呼んでいる．ところで，加速度を与えるために必要な力が比例するのは物の「慣性質量」だ．重力から受ける力は「重力質量」に比例する．この 2 つを同一とみなすことが「一般相対性理論」の重要な前提である「等価原理」だ.



アインシュタインは，1916 年に「重力場のはたらきと，座標系が慣性座標系にたいして加速度運動することによる見かけの力の場のはたらきが，すべての物理現象において同じはたらきをする」という「等価原理」を一つの土台として,「一般相対性理論」を発表した (もう一つの原理は「一般相対性原理」).「等価原理」によって，ある系にいる観測者は，自分が，ある基準系にたいして加速度系にいるのか，重力場の中にいるのかがわからない．落下するエレベーターの中の観測者に対してエレベータの中で光は直進するが，この光をエレベータの外の観測者から見れば，光は曲がって進んでいる．この，加速度系における思考実験によって，重力場によって光は曲げられることがわかる.「等価原理」によって，重力とは空間の歪みであることが示される.

このことは，1919 年 5 月 29 日，エディントン（Sir Arthur Stanly Eddington，1882〜1944）によって，西アフリカのギニア湾，プリンレーベ島で，日蝕の際に検証された．つまり，地球から見て太陽の側にある星から出た光は太陽の重力場によってゆがめられるため，その見かけの位置が実際の位置からずれる．これをエディントンたちは検出したのである.

相対性理論によればこの世界はニュートンの意味での慣性系ではない．慣性系であることは近似的にしか成り立たない．速度はニュートンの慣性系ではいくらでも大きくなるはずだが，相対性理論によれば，光速より大きな速度はない．慣性の法則は近似法則なのである.

4.13.2.2　惑星の運動法則

南海　そこで，ニュートンの法則と万有引力の法則を結びつける.

太陽と地球の間の運動は，いわゆる 2 体問題である．だから太陽と地球全体の重心を問題にしなければならない．しかし，太陽の質量は地球に比べてはるかに大きい．したがって，太陽と地球全体の重心は，太陽に一致するとしてよい．その結果，太陽は動かず地球が太陽の周りを動くとして考えてよい．次に太陽も地球も巨大な物体である．しかし剛体の運動はその重心に質量がある点の運動と考えることが出来る.

太陽の質量を M，地球の質量を m，万有引力定数を G とする．太陽を基準点とする地球の位置

をベクトル $\overrightarrow{r}$ で表す．時を t で表す．するとニュートンの法則と万有引力の法則から

$$m\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r} = \frac{GMm}{|\overrightarrow{r}|^2}\frac{-\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|} \quad \cdots ①$$

が成立する．最後の $\dfrac{-\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|}$ は地球から太陽に向かう方向の単位ベクトルで，つまりは引力の方向を表す大きさ 1 のベクトルである．

これで問題の設定は出来た．このような力が働くとき，地球の軌道が楕円であることを示そう．他の力 (例えば他の惑星の影響など) は小さいので，これを無視し，太陽との引力のみが働くとして，軌道を求めるのである．

4.13.3 運動方程式を読み解く

4.13.3.1 惑星運動は平面運動である

拓也 いま考えているベクトルは空間ベクトルですか．
南海 そうだ．しかし次のことを示せば，あとは平面ベクトルだけを考えればよい．ここで中心力とは，2 つの質点の間で 2 つの質点を結ぶ直線方向に働く力のことである．

定理 112 太陽と地球の間に中心力のみが働いている場合，地球は，一つの平面上を運動する．

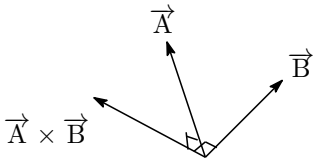
拓也 つまり

$$m\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r} = f(r)\frac{-\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|} \quad \cdots ②$$

とかける場合ですね．考えれば他に力が働かないのだから，太陽と地球を結ぶ直線と，ある時刻における速度ベクトルとで定まる平面を離れようがない．
南海 そういうことだが，これを数学的に示すことが出来る．

外積の定義
南海 力学の諸法則を書きあらわす言葉として**外積**が有用である．今後も役に立つので，ベクトルの**外積**を定義しよう．これは数学の範囲のことである．

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ がある．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ からベクトル $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ へ右ネジを回転させたとき，ネジの進む方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{k}$ とおく．また $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ のなす角を θ とおく．



このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ の外積を次式で定める．

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} \times \overrightarrow{\mathrm{B}} = |\overrightarrow{\mathrm{A}}||\overrightarrow{\mathrm{B}}|\sin\theta\,\overrightarrow{k}$$

拓也 内積の時と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{A}} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ と $\overrightarrow{\mathrm{B}} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{A}} \times \overrightarrow{\mathrm{B}}$ を成分で表さなければならない．大きさは

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{A}}||\overrightarrow{\mathrm{B}}|\sin\theta &= |\overrightarrow{\mathrm{A}}||\overrightarrow{\mathrm{B}}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{A}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{B}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{A}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}})^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2} \\
&= \sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2}
\end{aligned}
$$

です．しかし方向はどのようにとればよいのか．

南海　結論的にいうと

$$\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}}=(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1)$$

とすればよい．

拓也

$$(\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}}=(y_1z_2-y_2z_1)x_1+(z_1x_2-z_2x_1)y_1+(x_1y_2-x_2y_1)z_1=0$$

ですから $\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}}\perp\overrightarrow{\mathrm{A}}$，同様に $\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}}\perp\overrightarrow{\mathrm{B}}$ も成り立ちます．

　でも，右ネジの進む方向というのはどのように示せばよいのかわかりません．

南海　後は方向だけなので，ベクトル全体を回転し，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{A}} &= (a,\ 0,\ 0)\ (a>0) \\
\overrightarrow{\mathrm{B}} &= (b\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)\quad (b>0,\ 0<\theta<\pi)
\end{aligned}
$$

としてみる．外積は

$$\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}}=(0,\ 0,\ ab\sin\theta)$$

となり，確かに $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ へ右ネジを回したときの進む方向になっている．したがって外積は次のような計算法則を満たす．

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}} &= -\overrightarrow{\mathrm{B}}\times\overrightarrow{\mathrm{A}} \\
\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{A}} &= \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{\mathrm{A}}\times(k\overrightarrow{\mathrm{B}}) &= k(\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}})\ (k:\text{は実数}) \\
\overrightarrow{\mathrm{A}}\times(\overrightarrow{\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{C}}) &= \overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{C}}
\end{aligned}
$$

外積と微分

南海　$\overrightarrow{\mathrm{A}}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と $\overrightarrow{\mathrm{B}}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ の各成分が t の関数のとき，

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}})=\frac{d}{dt}(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1)$$

を考えると，x 成分についてみれば

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(y_1z_2-y_2z_1) &= \frac{dy_1}{dt}z_2+y_1\frac{dz_2}{dt}-\left(\frac{dy_2}{dt}z_1+y_2\frac{dz_1}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{dy_1}{dt}z_2-\frac{dy_2}{dt}z_1\right)+\left(y_1\frac{dz_2}{dt}-y_2\frac{dz_1}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

となる．他の成分についても同様なので，

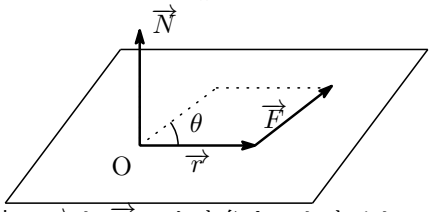
$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}})=\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathrm{A}}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{A}}\times\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathrm{B}}\right)$$

が成り立つ．

拓也　内積でも，行列の積でも，積のそれぞれの成分がもとの成分の積の和や差で作られているときは，同様の微分公式が成り立ちます．外積はどんなところで用いられるのですか．

角運動量

南海　外積を用いて記述される一番基本的な物理量は**力のモーメント**だ.



図のように，力 $\vec{F}$ が位置ベクトル $\vec{r}$ の質点 P に作用するとき，ベクトル $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$ を力 $\vec{F}$ の基準点 O の周りにもつモーメントという.

拓也　$\vec{r}$ と $\vec{F}$ のなす角を θ とすると，ベクトル $\vec{N}$ の大きさは $|\vec{r}|\cdot|\vec{F}|\sin\theta$ です．$|\vec{F}|\sin\theta$ はちょうど力 $\vec{F}$ の $\vec{r}$ と直交する方向の大きさになるので，**力のモーメント**の大きさは点 O の周りの回転させる力の強さのようです.

南海　そうだ．モーメントは力に関するものだけではない．一般に，質点 P にある物理量 $\vec{G}$ と基準点 O に関する P の位置ベクトル $\vec{r}$ に対して，外積 $\vec{r}\times\vec{G}$ を $\vec{G}$ が点 O の周りにもつモーメントという.

$\vec{G}$ が運動量

$$\vec{p}=m\vec{v}=m\frac{d}{dt}\vec{r}$$

であるとき，この運動量 $\vec{p}$ のモーメントを**角運動量**という.

角運動量保存則の証明

南海　ニュートンの第 3 法則，つまり作用反作用の法則が成り立つ質点では，外力が作用しないかぎり，角運動量は時間に対して変化しない．これはまず当然であるが，外力が作用してもその作用線がつねに固定点を通るとき，このときも，その点の周りの角運動量は一定である．これを証明しよう．この事実が，惑星運動は平面上の運動であることを意味する.

固定点を基準点に取る．質点に作用する力は $f(r)\dfrac{-\vec{r}}{|\vec{r}|}$ と表される．ニュートンの第 2 法則から，この力が $m\dfrac{d^2}{dt^2}\vec{r}$ と釣り合っている．つまり運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}=f(r)\frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

が成り立つ,

両辺のモーメントをとる．左から $\vec{r}$ を外積でかける.

$$\vec{r}\times\left(m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}\right)=\frac{-f(r)}{|\vec{r}|}\vec{r}\times\vec{r}$$

拓生　右辺は $\vec{r}\times\vec{r}=\vec{0}$ より，$\vec{0}$ です.

南海　一方,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}\right)\\ =\;&\frac{d}{dt}\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}+\vec{r}\times\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}\\ =\;&\vec{r}\times\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}\end{aligned}$$

である．したがって

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}\right)=\vec{0}$$

拓也　そうか．つまり，

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{c} \text{ (定ベクトル)}$$

が成り立つ．運動量ベクトルは $m\dfrac{d}{dt}\vec{r}$ なのでこれはまさに角運動量が時間に対して一定であることを示している．

一方，これは 2 つのベクトル $\vec{r}$ と $\dfrac{d}{dt}\vec{r}$ がつねに $\vec{c}$ と直交していることを示す．運動は時間に関して連続的であるから，2 つのベクトル $\vec{r}$ と $\dfrac{d}{dt}\vec{r}$ がつねに同一の平面上にあることが示された．そういうことですね．

4.13.3.2　面積速度一定の法則

極座標と運動方程式

南海　これからは，太陽を原点とするある平面で考えればよいことになった．ここでベクトル $\vec{r}$ を

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

と極座標で表そう．ここで $r = |\vec{r}|$ としている．

高校の数学では，r が一定の円運動について速度ベクトルと加速度ベクトルが求められている．ここでは r も角 θ も時 t の関数であるとして，速度ベクトルと加速度ベクトルを求めなければならない．

拓也　やってみます．以下 $'$ や $''$ は t に関する 1 次微分，2 次微分であるとします．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{r} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta \\ r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

南海　この結果は

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix}$$

と書ける．

拓也

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} &= \frac{d}{dt}\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\cdot\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r'' \\ r'\theta' + r\theta'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r'\theta' \\ r\theta'^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r'' - r\theta'^2 \\ 2r'\theta' + r\theta'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

南海　ここで

$$2r'\theta' + r\theta'' = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

である．だからまとめると，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{r} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dr}{dt} \\ r\dfrac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \\
\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

拓也　ニュートンの法則は惑星運動では

$$m\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) \end{pmatrix} = -\frac{GMm}{r^2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

となるのか．

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を左からかけると，

$$\begin{aligned}
m\begin{pmatrix} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) \end{pmatrix} &= -\frac{GMm}{r^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
&= -\frac{GMm}{r^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これから

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\dfrac{GM}{r^2} & \cdots ③ \\ \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) = 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

を得る．

面積速度一定

南海　まず ④ は何を意味するか．

拓也　これは

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \quad (\text{一定})$$

ということです．

南海　極方程式で表された運動の，面積速度の式を求めよう．$r(t)$, $\theta(t)$ に対し時間の変化量を Δt とし．

$$\begin{aligned}
r(t+\Delta t) &= r(t) + \Delta r \\
\theta(t+\Delta t) &= \theta(t) + \Delta\theta
\end{aligned}$$

とおこう．また，動径の通過面積を $S(t)$ とする．時間 t から $t+\Delta t$ までの間の動径の最大値と最小値を R と r とすれば

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\theta \leqq S(t+\Delta t)-S(t) \leqq \frac{1}{2}R^2\Delta\theta$$

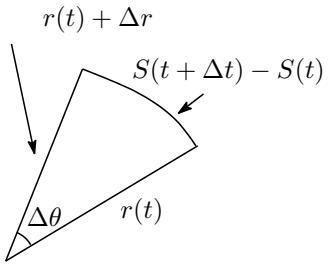
だ．したがって

$$\frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \leqq \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \leqq \frac{1}{2}R^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ のとき $R,\ r \to r(t)$ なので

$$\frac{d}{dt}S = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

となる．



拓也　かくして面積速度一定が示されたわけです．

南海　一点注意．面積速度一定を意味する式 ④ を導いた過程を見直せば，働いている力が $-\dfrac{GMm}{r^2}$ でなくても，距離 r のみに関する任意の関数であっても，④ が結論される．

つまり面積速度一定は，万有引力の法則とは独立に，中心力のみが働くところで成立する．

4.13.3.3　運動方程式から軌道方程式を導く

南海　さてわれわれの得た微分方程式 ③ , ④ をもとに，惑星の軌道が楕円であることを導こう．

拓也　③ , ④ の基本的な変数は時間 t です．惑星の軌道は r と角 θ の関係です．時間 t での位置を決定することはしないのですか．

南海　確かにそこまでしてはじめて問題を解いたといえる．しかし，まず ③ , ④ から r と角 θ の関係を導き，楕円軌道であることを確定させ，観測データとあわせながら，位置決定などの問題を解くのが現実的なのだ．そこで r と角 θ の関係を導きたい．

運動方程式の変形

南海　そのために，③ , ④ を変形して r と角 θ の間の微分方程式を導くのが次の目標だ．④ から $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{h}{r^2}$ が導かれている．これを ③ に代入して整理する．

拓也

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad \cdots ⑤$$

となります．逆数の多い複雑な方程式になりました．

南海　方程式が複雑になったときは，より基本的な変数に変えてみる，ということが基本だ．r は質点間の距離であるが，距離，速度，加速度，といった数学的な量に対して，位置エネルギー (本当は「ポテンシャル」というべき所だ)，運動量，力，といった物理学的な量が，特にそれが保存量である場合に，基本的な量だ．

2 つの質量 $m,\ M$ をもつ質点が万有引力で引き合い，距離 r のときそれぞれ速度が $v,\ V$ となったとする．万有引力による位置エネルギー U は

$$U = \int_{\infty}^{r} -\frac{GmM}{r^2}\,dr = -\frac{GmM}{r}$$

で定まる．

拓也　これはエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = E$$

として習いました．

南海　この U は，中心力が働く場でのポテンシャルというものだ．これはこのような場での基本量だ．ポテンシャルは $\dfrac{1}{r}$ に比例している．

拓也　$s = \dfrac{1}{r}$ と変数を変換してみる価値があるのですね．

南海　数学的にも，微分方程式を変形するためのこのような置き換えは長い間にいろいろと工夫されてきたのだ．物理的にも意義あるわけだ．ここは，青空学園の掲示板で akn1aj さんに教えられた．ここではそれを使わせてもらう．t での微分を作ったうえで，θ での微分に置きかえていく．

拓也

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{s^2}\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{s^2}\frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&= -h\frac{ds}{d\theta} \\
\frac{d^2r}{dt^2} &= -h\frac{d^2s}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} \\
&= -h\frac{d^2s}{d\theta^2}\cdot hs^2
\end{aligned}$$

ですから ⑤ は

$$-h^2\frac{d^2s}{d\theta^2}\cdot s^2 = h^2s^3 - GMs^2$$

これから

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} = -s + \frac{GM}{h^2}$$

となりました．

南海　つまり

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(s - \frac{GM}{h^2}\right) = -\left(s - \frac{GM}{h^2}\right)$$

ここで $f(\theta) = s - \dfrac{GM}{h^2}$ とおくと，

$$\frac{d^2f}{d\theta^2} = -f \quad \cdots ⑥$$

となった．この微分方程式を解けばよい．

微分方程式を解く

拓也　2 回微分すれば符号だけが変わるというのは，例えば $\sin\theta$, $\cos\theta$ があります．

南海　確かに．それらは ⑥ をみたす．問題は ⑥ を満たすものをすべて求めなければならない．

拓也　でも

$$f = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \ldots + a_k\theta^k + \cdots$$

とおくと，

$$\frac{d^2f}{d\theta^2} = 2a_2 + \cdots + k(k-1)a_k\theta^{k-2} + \cdots$$

となるので，⑥ は

$$k(k-1)a_k = -a_{k-2}$$

を意味していないでしょうか．これは係数の漸化式です．2 つ飛びなので a_0，a_1 を決めればすべて決まる．

一方，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots \\ \sin\theta &= \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\end{aligned}$$

で，確かにこれは漸化式を満たしている．だから ⑥ を満たす f は必ず

$$f = a_0\cos\theta + a_1\sin\theta$$

と表される．

南海　よくできました．ニュートンの力学に現れる関数は何度でも微分可能で，級数に展開できる．だからこれでよい．ここでは，次のようなより一般的な微分方程式の解に関する基本定理を考えておこう．

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

のような形をした微分方程式を 2 階線形微分方程式という．これに関して次の定理が成り立つ．これはわずか 20 年ほど前の高校微積の問題集には載っているものだ．

定理 113 微分方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ において

(1) y_1，y_2 が解ならば，任意の定数 c_1，c_2 に対して $c_1y_1 + c_2y_2$ も解である．

(2) y_1，y_2 が解で，かつ定義域のすべての x に対して

$$y_1{y_2}' - y_2{y_1}' \neq 0$$

が成り立つなら，すべての解は適当な定数 c_1，c_2 を用いて $c_1y_1 + c_2y_2$ と表される．

証明

拓也　(1) はすぐ出来ます．

$$\begin{aligned}&(c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ =\ & c_1({y_1}'' + p(x){y_1}' + q(x)y_1) + c_2({y_2}'' + p(x){y_2}' + q(x)y_2) = 0\end{aligned}$$

より，$c_1y_1 + c_2y_2$ も解である．

南海　(2) は少し難しい．

任意の解 y をとる．行列 $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{pmatrix}$ は，$y_1{y_2}' - y_2{y_1}' \neq 0$ より逆行列をもつ．そこで

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とおく．つまり

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

より

$$y = uy_1 + vy_2$$
$$y' = uy_1{}' + vy_2{}'$$

となる．第 1 式を微分して $y' = uy_1{}' + u'y_1 + vy_2{}' + v'y_2$ となる．第 2 式と比較して $u'y_1 + v'y_2 = 0$ となる．

第 2 式を微分して $y'' = uy_1{}'' + u'y_1{}' + vy_2{}'' + v'y_2{}'$ となる．ここで

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + p(x)y' + q(x)y \\ &= uy_1{}'' + vy_2{}'' + u'y_1{}' + v'y_2{}' \\ &\qquad +p(x)(uy_1{}' + vy_2{}') + q(x)(uy_1 + vy_2) \\ &= u\{y_1{}'' + p(x)y_1{}' + q(x)y_1\} + v\{y_2{}'' + p(x)y_2{}' + q(x)y_2\} \\ &\qquad +u'y_1{}' + v'y_2{}' \\ &= u'y_1{}' + v'y_2{}' \end{aligned}$$

したがって

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$
$$u'y_1{}' + v'y_2{}' = 0$$

となる．つまり

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．$y_1y_2{}' - y_2y_1{}' \neq 0$ より

$$u' = 0,\ v' = 0$$

を得る．つまり u と v は定数である．よってこれを $c_1,\ c_2$ とおくと

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

と表された．

拓也　$y_1 = \cos\theta,\ y_2 = \sin\theta$ とすると

$$y_1y_2{}' - y_2y_1{}' = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$$

より．任意の解が $y = c_1\cos\theta + c_2\sin\theta$ と表されるのですね．

惑星の軌道は楕円である

南海　さて，⑥ の解はすべて $c_1\cos\theta + c_2\sin\theta$ とかけることがわかった．これは合成すると $A\cos(\theta + \alpha)$ となる．角 θ の始点をとりなおすことで $A\cos(\theta)$ としてよい．$f(\theta) = s - \dfrac{GM}{h^2}$ であったから

$$s = \frac{GM}{h^2} + A\cos\theta$$

となる．$r = \dfrac{1}{s}$ より

$$r = \frac{1}{\dfrac{GM}{h^2} + A\cos\theta} = \frac{\dfrac{h^2}{GM}}{1 + \dfrac{Ah^2}{GM}\cos\theta}$$

となった．

拓也　$e=\dfrac{Ah^2}{GM}$，$l=\dfrac{h^2}{GM}$ とおくと

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta}$$

これは確かに e を離心率とする 2 次曲線だ．しかし楕円ですか．

南海　実際に惑星の軌道は閉じているので楕円でなければならない．これがケプラーの第 2 法則だ．

拓也　わかりました．そうすると彗星などでは放物線になったりもするのですね．

南海　そうだ．

4.13.3.4　ケプラーの第 3 法則

南海　軌道が楕円であることが確定すれば，ケプラーの第 3 法則は数学の問題だ．

この楕円の長軸は $\theta=0,\ \pi$ での r の和だから

$$2a=\frac{l}{1+e}+\frac{l}{1-e}=\frac{2l}{1-e^2}$$

また短軸は

$$2b=2\sqrt{a^2-e^2a^2}=\frac{2l}{\sqrt{1-e^2}}$$

ゆえに

$$a=\frac{l}{1-e^2},\ b=\frac{l}{\sqrt{1-e^2}}$$

つまり

$$al=b^2$$

面積速度は

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{2}$$

なので，周期を T とすると楕円の面積は $\dfrac{Th}{2}$ である．

一方，面積は πab でもあるので

$$\frac{Th}{2}=\pi ab$$

$$\therefore\quad \frac{T^2h^2}{4}=\pi^2a^2b^2=\pi^2la^3$$

つまり「惑星の公転周期の 2 乗は軌道の半長径の 3 乗に比例する」というケプラーの第 3 法則が示された．

4.13.4　参考文献

とくに (2) は今回の対話に続くものとして，ぜひ意欲的な高校生に挑戦してもらいたい．

(1)『重力と力学的世界』(山本義隆，1981，現代数学社)

(2)『古典力学の形成』(山本義隆，1997，日本評論社)

(3) 『ケプラー・天空の旋律』(吉田武，1999，共立出版)

(4) 『詳解・力学演習』(後藤憲一他，1971，共立出版)

(5) 『磁力と重力の発見』全 3 巻 (山本義隆，2003，みすず書房)

4.14　最速降下曲線

2016.10.8

4.14.1　問題の設定

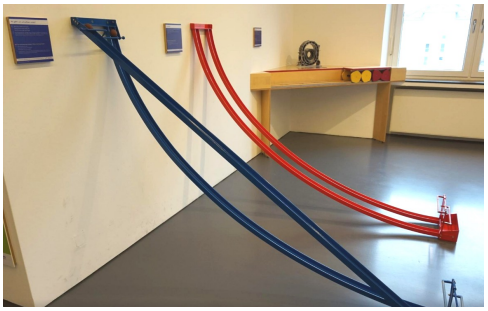
数学博物館

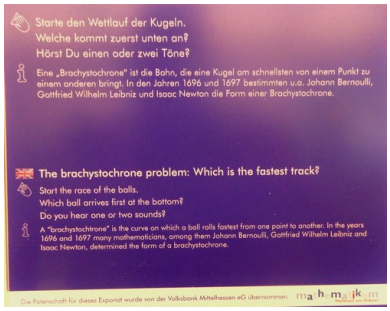
南海　2016 年の春と夏にドイツ中西部のギーセンという町にある**数学博物館**にいった．子供のための遊具を主にしたさまざまの器材や道具があり，それに触れ動かしてみることが出来る．大人がやっても難しいものもある．

　たいへんおもしろい試みであり，いろいろ考えさせられるところがあった．

史織　日本にはこのような施設はないのですか．

南海　いろいろな試みはあるが，同じようなものはないようだ．さて，この数学博物館の中に，写真のような玉を転がす滑り台のようなものがある．





　青い方の台の横の壁には，次のような解説が，ドイツ語と英語で書かれている．

> 最速降下曲線問題：どちらが早い道か？
> どちらの球が早く下までくるか？
> 聞こえた玉の音は 1 つだった，2 つだった？
> 「最速降下曲線」とは，ある点からある点までもっともはやく到達する曲線のことである．1696 年から 1697 年に，多くの数学者，その中には，ヨハン・ベルヌーイ，ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ　そしてアイザック・ニュートンらもいたが，この最速降下曲線の形を決定した．

とある．

史織　直線の方が距離は短いが，曲線になっている方が，加速度がつくだけ，距離は長いが到達時間が短いのですね．しかしこの曲線は何なのですか．

南海　結論を先に言えば，この曲線はサイクロイドである．**The Brachistochrone Challenge** ではサイクロイドが最速であることの様子がわかる．「最速降下曲線」のことを「brachistochrone」というが，これらの言葉で検索すると，多くのサイトが出てくる．動画も多くある．またフランス語だが **COURBE BRACHISTOCHRONE** は図でよく理解できる．

サイクロイドはさらに等時性という性質もある．赤い方の台の横の壁には，次のような解説が，ドイツ語と英語で書かれている．

> 異なる位置から 2 つの玉を落とす．どちらが早く下まで来るか．
> やってみると，どこから落としても，下まで来る時間は同じだ．

史織　サイクロイドは円の移動にともなう円周上の点の軌跡と習いましたが，その他にいろいろな性質があるのですね．

問題のまとめと物理からの準備

南海　さて，問題を次のようにまとめよう．

まず玉は質点として考え大きさはなく，その質量を m とする．この質点にかかる力は重力のみであるとし，空気抵抗や摩擦は無視する．

したがって考える曲線は重力の方向と平行な平面の上にある．この平面を座標平面にとり，y 軸の正の方向を重力の働く方向にとる．このとき，平面上の原点と点 $(a,\ h)$ を結ぶ曲線 C を考える．

(1) 原点から点 $(a,\ h)$ まで最も短い時間で落下するような曲線 C を決定せよ．

(2) 曲線 C で y 座標が最大となる点を A とする．原点と A の間の任意の点 B から A まで落下にかかる時間は，B のとり方によらず一定であることを示せ．

史織　問題はわかりました．

南海　求める曲線がサイクロイドであることを確認するのに方法が 2 つある．

一つは，光の屈折原理と同じ考え方で求めるもので，ヨハン・ベルヌーイはこの方法でサイクロイドを得た．**スネルの法則**といわれる法則を導いて，それから微分方程式を導く．これが方法 1 である．

その後，上に名のあがる数学者たちが，より一般的な解法を展開した．オイラー＝ラグランジュ方程式が基本となる．これは変分法という方法が基礎となる．方法 2 では，それを初歩的に用いて考える．

まず，物理学からの準備をしよう．時刻 t を用いて，曲線 C の媒介変数表示を $x = x(t),\ y = y(t)$ とする．また，y を x の関数として x で微分したときは，断ることなく $\dfrac{dy}{dx}$ を y' で表す．

さて，時刻 t における玉の速度を v とする．原点にあるとき速度が 0 であるので，物理学の**エネルギー保存則**によって，位置エネルギーの減少分が運動エネルギーに置きかわる．y 軸方向の座標が y のとき，その速度は

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

を満たす．よって速度は位置の関数として

$$v = \sqrt{2gy}$$

となる．

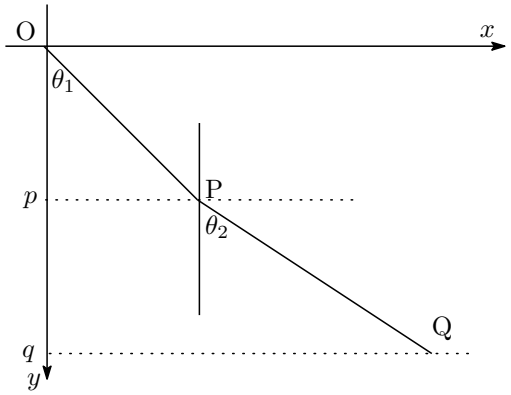
4.14.2　微分方程式を立てる

4.14.2.1　方法 1：スネルの法則を用いる

南海　これを前提に考えよう．光の屈折の考察で用いられる考え方をここで適用する．

図のように x 軸から直線 $y=p$ までは速度 v_1 で，直線 $y=p$ から直線 $y=q$ までは速度 v_2 で直線に動く点がある．原点 O から点 P まで動き，そこから点 Q まで動くとする．それぞれの直線の y 軸となす角を θ_1，θ_2 とする．

O から Q までの移動にかかる時間が最小となるとき，v_1，v_2，θ_1，θ_2 にどのような関係が成り立っているか．



史織

$$\mathrm{OP}=\frac{p}{\cos\theta_1},\ \mathrm{PQ}=\frac{q}{\cos\theta_2}$$

です．また，

$$l=p\tan\theta_1+q\tan\theta_2$$

が y 軸から点 Q までの距離で一定です．そして，O から Q までの移動時間は

$$T=\frac{p}{v_1\cos\theta_1}+\frac{q}{v_2\cos\theta_2}$$

となります．

南海　よく考えている．ただし，ここで角は鋭角を前提にしている．

その上で問題は，l が一定という条件の下で，T が最小となるとき，v_1，v_2，θ_1，θ_2 が満たすべき条件を求めるということである．

l の式を θ_1 で微分して

$$\frac{p}{\cos^2\theta_1}+\frac{q}{\cos^2\theta_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1}=0$$

である．T が最小なときは，T を θ_1 の関数と考えたとき，極値になるので，$\dfrac{dT}{d\theta_1}=0$ となる．つまり，

$$\frac{dT}{d\theta_1}=\frac{p\sin\theta_1}{v_1\cos^2\theta_1}+\frac{q\sin\theta_2}{v_2\cos^2\theta_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

である．$\dfrac{d\theta_2}{d\theta_1}$ を消去して，

$$\frac{p\sin\theta_1}{v_1\cos^2\theta_1}+\frac{q\sin\theta_2}{v_2\cos^2\theta_2}\left(-\frac{p}{\cos^2\theta_1}\cdot\frac{\cos^2\theta_2}{q}\right)=0$$

これより

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

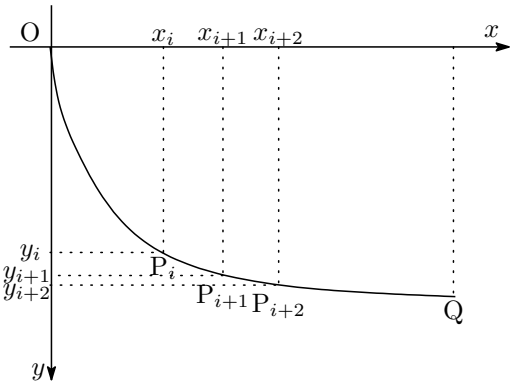
を得る．これを**スネルの法則**という．

史織　これは必要条件ですね．

南海　その通り．この必要条件はどのように曲線を定めるのか．最速降下曲線の満たすべき必要条件を求めよう．

関数 $y = f(x)$ のグラフの曲線が最速降下曲線であるとする．そして，曲線上の点 $P(x,\ y)$ での速度が v であるとし，曲線の点 P での接線と y 軸のなす角を θ とする．

移動区間を x に関して小区間に分ける．



この小区間 $[y_i,\ y_{i+1}]$ における平均速度を v_i，2 点 $(x_i,\ y_i)$，$(x_{i+1},\ y_{i+1})$ を結ぶ直線と y 軸とのなす角を θ_i とおくと，

$$\frac{\sin\theta_i}{v_i} = \frac{\sin\theta_{i+1}}{v_{i+1}}$$

が隣りあうすべての区間で成り立つ．よって

$$\frac{\sin\theta_i}{v_i} = \text{一定}$$

である．ここで区間の分割を小さくし，巾を 0 に収束させると，

$$\frac{\sin\theta}{v} = \text{一定},$$

が必要である．また

$$y' = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

なので，

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

で $v = \sqrt{2gy}$ であるから，最速降下曲線の満たすべき必要条件として

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = c\ (\text{一定}) \tag{4.11}$$

となる．このように必要条件として満たすべき微分方程式を導いたが，いくつもの吟味すべき問題がある．例えば，角 θ は鈍角のことも起こりうるが，それは場合に分けて考えねばならない．

4.14.2.2　方法 2：オイラー＝ラグランジュ方程式

南海　オイラーや，またその次の時代のラグランジュによって，より一般的な方法が考えられた．以下，それを考える．解析学の物理への適用として，変分法をはじめて導入し，物理学の分野で**解析力学**という方法を樹立する契機となることであった．

降下時間の積分表示　玉が原点から点 $(x,\ y)$ に来るまで移動した距離を s とすると，

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt}$$

であるから，$v = \sqrt{2gy}$ を代入して，

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}$$

したがって，原点から点 $(a,\ h)$ に来るまでにかかる時間 T は定積分

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^a \frac{dt}{dx}dx \\ &= \int_0^a \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}dx = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}dx \end{aligned}$$

で与えられる．

ただし，$x = 0$ のとき $y = 0$ で，被積分関数 $\sqrt{\dfrac{1 + y'^2}{2gy}}$ は $x = 0$ では定義されない．この積分の意味は

$$\lim_{u \to +0} \int_u^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}dx$$

とする．これについては『**解析基礎** 』－「**広義積分** 」などを参照のこと．

この T は曲線 C が変われば変わる．T は曲線 C の関数であり，$T(C)$ と書かねばならない．

史織　$T(C)$ を最小にする曲線 C を決定せよ．これが，最速降下曲線問題ですね．

南海　そうだ．そのためにはもうひとつ段階を踏まなければならない．

オイラー＝ラグランジュ方程式の導出

南海　T を定める被積分関数 $\sqrt{\dfrac{1 + y'^2}{2gy}}$ は，y と y' の関数で x は現れない．しかし一般には，y と y' とそして x とで表される関数の定積分を考えなければならないことが多い．また実際，この 3 つで決定される物理量は他にもあり，この被積分関数を，ラグランジュ（Lagrange）にちなんだ記号であるが，

$$L(y,\ y',\ x)$$

と書くことが多い．L の形が与えられ，関数 y を変化させるとき，定積分

$$\int_0^a L(y,\ y',\ x)\,dx$$

が最大，あるいは最小になる y を決定すること，と問題を一般化することが出来る．最大や最小になるということは，y の変化に対して L が極大，あるいは極小となときであり，y の変化に対する L の変化率がその y で 0 になることが必要である．

このようにして y を求める方法のことを**変分法**といい．変分法を研究する学を**変分学**という．

一般に，極となるための y に関する必要十分条件は，たいへん難しい．しかし，極を与える関数であるための必要条件は，次のように微分方程式で記述することができる．

$\delta(0) = \delta(a) = 0$ となる微分可能な任意の関数 $\delta(x)$ をとる．そして，ϵ を実数とし，

$$Y(x) = y(x) + \epsilon\delta(x)$$

とおく．曲線 $Y = Y(x)$ もまた原点と点 $(a,\ h)$ を結ぶ曲線の方程式である．y が極を与える関数であるためには，

$$\frac{d}{d\epsilon}\int_0^a L(Y,\ Y',\ x)\,dx\bigg|_{\epsilon=0} = 0$$

となることが必要である．以下の計算は,『**解析基礎** 』－「**多次元微分** 」などを参照のこと．

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}\int_0^a L(Y,\ Y',\ x)\,dx &= \int_0^a \frac{d}{d\epsilon}L(y(x)+\epsilon\delta(x),\ y'(x)+\epsilon\delta'(x),\ x)\,dx \\ &= \int_0^a \left\{\frac{\partial L}{\partial Y}\delta(x) + \frac{\partial L}{\partial Y'}\delta'(x)\right\}dx\end{aligned}$$

第 2 項を部分積分する．$\delta(0) = \delta(a) = 0$ より

$$\int_0^a \frac{\partial L}{\partial Y'}\delta'(x)\,dx = \left[\frac{\partial L}{\partial Y'}\delta(x)\right]_0^a - \int_0^a \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial Y'}\delta(x)\,dx = -\int_0^a \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial Y'}\delta(x)\,dx$$

となる．よって，

$$\frac{d}{d\epsilon}\int_0^a L(Y,\ Y',\ x)\,dx = \int_0^a \left(\frac{\partial L}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial Y'}\right)\delta(x)\,dx = 0$$

ここで $\epsilon = 0$ のとき $Y = y,\ Y' = y'$ なので，$\epsilon \to 0$ をとると，

$$\int_0^a \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta(x)\,dx = 0$$

が任意の $\delta(x)$ に対して成立しなければならない．よって

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \tag{4.12}$$

が必要である．ただしここで次の補題を用いている．

補題 34 (変分法の基本補題)　連続関数 $\varphi(x)$ が，$\delta(a) = \delta(b) = 0$ を満たす任意の連続関数に対して

$$\int_a^b \varphi(x)\delta(x)\,dx = 0$$

を満たすなら，$\varphi(x)$ は恒等的に 0 である． ■

これは証明が必要なことであるが，ここではそれを承認する．

微分方程式 (4.12) を**オイラー＝ラグランジュ方程式**という．

最速降下曲線の条件

南海　このオイラー＝ラグランジュ方程式は，極の条件を満たすための必要条件である．最速降下の問題では

$$L = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} \tag{4.13}$$

であるから，L は y と y' のみを含み，x がない．このとき，次のような変形が可能である．オイラー＝ラグランジュ方程式 (4.12) より

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

であるが，積の微分から

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}$$

なので，

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$$

L が y と y' よりなる関数なので，y と y' の関数の x による微分から

$$\frac{d}{dx}L = \frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial L}{\partial y'}\cdot\frac{dy'}{dx} = \frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial L}{\partial y'}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

が成り立つ．よってこの場合，オイラー＝ラグランジュ方程式 (4.12) は

$$\frac{d}{dx}L - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

となり，両辺 x で積分して

$$L - \frac{\partial L}{\partial y'} = c\,(\text{定数}) \tag{4.14}$$

となる．(4.14) に (4.13) の L を代入して

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = c \tag{4.15}$$

を得る．こうして方法 1 による (4.11) と同様の式が得られた．

史織　しかしこの微分方程式は y が定数であればつねに成立しませんか．

南海　その通りである．初期条件があるのでそのままでは条件を満たさないが，局所的には y が定数であってもこの方程式を満たす．

4.14.3　微分方程式を解く

南海　局所的にも定数ではない解を求めよう．(4.15) から，

$$y(1+y'^2) = \frac{1}{2gc^2}$$

と変形できるので，右辺の定数を $2A$ とおく．この結果，y の微分方程式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2A-y}{y}$$

が得られる．定数なら $y=2A$ となるので，$y>0$ で $\dfrac{2A-y}{y}>0$ とする．$-A<A-y\leqq A$ となるので，

$$A-y=A\cos t\ \ (0<t<2\pi)$$

とおくことができる．このとき，

$$\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right)^2=\frac{2A-y}{y}=\frac{1+\cos t}{1-\cos t}=\frac{\cos^2\dfrac{t}{2}}{\sin^2\dfrac{t}{2}}$$

である．$\dfrac{dy}{dt}=A\sin t=2A\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$ であるから，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\left(2A\sin^2\frac{t}{2}\right)^2$$

玉は x 軸の正の方向に動くようにする．つまり $\dfrac{dx}{dt}\geqq 0$ にとる．これから

$$\frac{dx}{dt}=2A\sin^2\frac{t}{2}=A(1-\cos t)$$

両辺積分して，

$$x=A(t-\sin t)+D$$

初期条件から $t=0$ のとき $x=0$．よって $D=0$ である．そして，$y=A(1-\cos t)$ なので，最速降下曲線は

$$x=A(t-\sin t),\ y=A(1-\cos t)$$

となる．サイクロイドである．$x=a$ のとき $y=h$ なので

$$a=A(t-\sin t),\ h=A(1-\cos t)$$

とおくと，$0<t<2\pi$ においては t，そして A がただ 1 つに定まる（これは練習問題とする）．

4.14.4　等時性の証明

南海　これは十分高校範囲でできる．y 座標が最大となるのは $t=\pi$ の時である．

等時性の証明は，y 方向に一定の拡大や縮小をして示してもよいので，$\mathrm{A}(\pi,\ 2)$ としよう．そうするとサイクロイドは媒介変数 t を用いて

$$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$$

と表される．$\mathrm{B}(x_0,\ y_0)$ から玉を落とすとする．この点に対応する t の値を α としよう．このときは，エネルギー保存則によって，

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(y-y_0)$$

となる．

史織　計算をしてみます．

この点から A$(\pi,\ 2)$ に来るまでの時間は，

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y-y_0)}}dx &= \int_{\alpha}^{\pi}\sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right)^2}{2g(\cos\alpha-\cos t)}}(1-\cos t)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\int_{\alpha}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos\alpha-\cos t}}dt\end{aligned}$$

となる．

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos\alpha-\cos t}}dt &= \int_{\alpha}^{\pi}\sqrt{\frac{2\sin^2\dfrac{t}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-2\cos^2\dfrac{t}{2}}}dt \\ &\qquad \sin\frac{t}{2}\geqq 0,\ \cos\frac{\alpha}{2}\geqq 0 \text{ より，} \\ &= \int_{\alpha}^{\pi}\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\dfrac{t}{2}}}dt = \int_{\alpha}^{\pi}\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\dfrac{t}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}}\frac{dt}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{\alpha}{2}\leqq\dfrac{t}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq\dfrac{\cos\dfrac{t}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\leqq 1$ であるから，$\cos\theta=\dfrac{\cos\dfrac{t}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ とおける．このとき，両辺を t で微分すると

$$-\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

より，

$$\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}dt=2\sin\theta d\theta$$

であり，$t:\alpha\to\pi$ のとき $\cos\theta:1\to 0$ であるから，$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$ となる．よって

$$\int_{\alpha}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos\alpha-\cos t}}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2d\theta=\pi$$

となり，これは α によらず一定である．つまり C 上の点 B がどこにあれ，B から A に来るまでにかかる時間は一定である．

南海　その通りだ．

4.14.5　最速であることの証明

南海　このように必要条件で微分方程式を作り，それをもとにサイクロイドを得た．実はサイクロイドが最速降下曲線であることの十分性，つまり他のどんな曲線より早く降下することを示すことができる．これは，「**最速降下線について**」に教えられた．感謝しつつ，整理し再構成してみよう．ここにはその他にもいくつかのことが書かれているので，参考にしてほしい．

サイクロイドを

$$x = A(t - \sin t), \quad y = f = A(1 - \cos t)$$

とする．f は x の関数でもあり，$x = 0$ のとき $f = 0$，$x = a$ のとき $f = h$ であった．また $\dfrac{df}{dx}$ を f' と表す．

次に任意の曲線を

$$x = p(t), \quad y = g = q(t)$$

とする．g は x の関数でもあり，$x = 0$ のとき $g = 0$，$x = a$ のとき $g = h$ であった．また $\dfrac{dg}{dx}$ を g' と表す．

そうすると，それぞれこの曲線上を重力のみが働いて降下するとき，かかる時間はそれぞれ

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1 + f'^2}{2Gf}}\, dx, \quad \int_0^a \sqrt{\frac{1 + g'^2}{2Gg}}\, dx$$

であった．ただし，関数 g と区別するため重力定数を G と大文字にしている．したがって，示すべきは任意の曲線に対して，

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1 + g'^2}{g}}\, dx \geqq \int_0^a \sqrt{\frac{1 + f'^2}{f}}\, dx$$

が成り立ち，等号が $g = f$ のときにかぎって成立することである．

ここでコーシー・シュワルツの不等式から

$$\sqrt{1 + f'^2}\sqrt{1 + g'^2} \geqq 1 + f'g'$$

が成り立つ．実際，$1 + f'g' < 0$ なら成立するので，$1 + f'g' \geqq 0$ とし両辺 2 乗して引く．

$$(1 + f'^2)(1 + g'^2) - (1 + f'g')^2 = (f' - g')^2$$

となり，不等式の成立と，等号の成立条件が $0 < x < a$ で恒等的に $g = f$ となることであることがわかる．これによって，

$$\sqrt{\frac{1 + f'^2}{f}} \cdot \sqrt{\frac{1 + g'^2}{g}} \geqq \frac{1 + f'g'}{\sqrt{fg}}$$

つまり

$$\sqrt{\frac{1 + g'^2}{g}} \geqq \frac{1 + f'g'}{\sqrt{g(1 + f'^2)}}$$

である．

$$\sqrt{\frac{1 + g'^2}{g}} \geqq \sqrt{\frac{1 + f'^2}{f}} + \frac{1 + f'g'}{\sqrt{g(1 + f'^2)}} - \sqrt{\frac{1 + f'^2}{f}}$$

とおき，

$$F = \frac{1 + f'g'}{\sqrt{g(1+f'^2)}} - \sqrt{\frac{1+f'^2}{f}}$$

を考える．ここで

$$f' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{\cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}},\ 1+f'^2 = \frac{2}{1-\cos t} = \frac{1}{\sin^2\dfrac{t}{2}}$$

であり，

$$\sqrt{\frac{1+f'^2}{f}} = \sqrt{\frac{2}{A}}\cdot\frac{1}{1-\cos t} = \sqrt{\frac{1}{2A}}\cdot\frac{1}{\sin^2\dfrac{t}{2}},\ \sqrt{f} = \sqrt{2A}\sin\frac{t}{2}$$

なので，

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{g'}{\sqrt{g}}f'\right) - \sqrt{\frac{1+f'^2}{f}} \\
&= \sin\frac{t}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{g'}{\sqrt{g}}\frac{\cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right) - \sqrt{\frac{1+f'^2}{f}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2} + 2(\sqrt{g})'\cos\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{1+f'^2}{f}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2} + 2(\sqrt{g}-\sqrt{f})'\cos\frac{t}{2} + 2\sqrt{f}'\cos\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{1+f'^2}{f}}
\end{aligned}$$

ところが，

$$2\sqrt{f}'\cos\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{1+f'^2}{f}} = \frac{f'}{\sqrt{f}}\cos\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{1+f'^2}{f}}$$

$$= \frac{\cos^2\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2A}\sin\dfrac{t}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2A}}\cdot\frac{1}{\sin^2\dfrac{t}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2A}}$$

なので，

$$F = \frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2} + 2(\sqrt{g}-\sqrt{f})'\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{\sqrt{2A}}$$

である．さらにこれを次のように変形する．

$$F = 2\left\{(\sqrt{g}-\sqrt{f})\cos\frac{t}{2}\right\}' - 2(\sqrt{g}-\sqrt{f})\cdot\frac{d}{dx}\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{\sqrt{2A}}$$

$$\frac{d}{dx}\cos\frac{t}{2} = \frac{\cos\dfrac{t}{2}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{A(1-\cos t)} = -\frac{1}{4A\sin\dfrac{t}{2}}$$

なので

$$\begin{aligned}
& -2(\sqrt{g}-\sqrt{f})\cdot\frac{d}{dx}\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{\sqrt{2A}} \\
= \quad & \frac{\sqrt{g}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}+\frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2}-\sqrt{f}\frac{1}{2A\sin\dfrac{t}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2A}} \\
= \quad & \frac{\sqrt{g}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}+\frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2}-\sqrt{A(1-\cos t)}\frac{1}{2A\sin\dfrac{t}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2A}} \\
= \quad & \frac{\sqrt{g}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}+\frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2}-\sqrt{2A\sin^2\frac{t}{2}}\frac{1}{2A\sin\dfrac{t}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2A}} \\
= \quad & \frac{\sqrt{g}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}+\frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2}-\frac{2}{\sqrt{2A}}
\end{aligned}$$

となる．ここで相加平均と相乗平均の不等式から

$$\frac{\sqrt{g}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}+\frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2}-\frac{2}{\sqrt{2A}}\geqq 2\sqrt{\frac{\sqrt{g}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\sqrt{g}}}-\frac{2}{\sqrt{2A}}=\frac{2}{\sqrt{2A}}-\frac{2}{\sqrt{2A}}=0$$

となり，

$$F\geqq 2\left\{(\sqrt{g}-\sqrt{f})\cos\frac{t}{2}\right\}'$$

が成立する．よって

$$\sqrt{\frac{1+g'^2}{g}}\geqq\sqrt{\frac{1+f'^2}{f}}+2\left\{(\sqrt{g}-\sqrt{f})\cos\frac{t}{2}\right\}'$$

となる．両辺の定積分をとり

$$\int_0^a\sqrt{\frac{1+g'^2}{g}}\,dx\geqq\int_0^a\sqrt{\frac{1+f'^2}{f}}\,dx+2\left[(\sqrt{g}-\sqrt{f})\cos\frac{t}{2}\right]_0^a$$

が成立する．$x=0,\ a$ における値は f と g で等しいので，$\left[(\sqrt{g}-\sqrt{f})\cos\dfrac{t}{2}\right]_0^a=0$ となり，

$$\int_0^a\sqrt{\frac{1+g'^2}{g}}\,dx\geqq\int_0^a\sqrt{\frac{1+f'^2}{f}}\,dx$$

が示された．等号成立は，コーシー・シュワルツ不等式の部分で $g=f$ が必要である．このときは定積分の等号が成立するが，念のために確認すると，

$$\frac{\sqrt{g}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}=\frac{\sqrt{f}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}=\frac{\sqrt{A(1-\cos t)}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}=\frac{\sqrt{2A\sin^2\dfrac{t}{2}}}{2A\sin\dfrac{t}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2A}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sin\frac{t}{2}=\frac{1}{\sqrt{f}}\sin\frac{t}{2}=\frac{1}{\sqrt{2A\sin^2\dfrac{t}{2}}}\sin\frac{t}{2}=\frac{1}{\sqrt{2A}}$$

となり，相加平均と相乗平均の不等式も実際に等号が成立する．

史織　すごい計算ですね．

南海　先の文献によれば，別の論文で特別な場合にサイクロイドが唯一の解であることが示され，それを一般の場合にする試みで，これが得られたようだ．いずれにせよ，必要条件でサイクロイドを求め，逆にそれがただ一つの解であることが示されたので，議論は一応完結する．この逆の証明が高校範囲でできることは，驚きである．

第5章　解答

解答 1　問題 1

(1) $a+b\sqrt{2},\ c+d\sqrt{2} \in A$ に対して

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{2} \in A$$
$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2} \in A$$
$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} \in A$$
$(b,\ c$ 有理数より $c^2-2d^2 \neq 0)$

A は実数の部分集合なので和と積の交換法則，結合法則，分配法則は満たされる．

加法と乗法の単位元，逆元が A に属することも明か．

ゆえに A は体である．

(2) 同様に乗法の逆元の存在を示せばよい．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}} \\ = & \frac{a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}-d\sqrt{6}}{(a+b\sqrt{2})^2-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6})^2} \\ = & \frac{(a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}-d\sqrt{6})\{a^2+2b^2-3c^2-6d^2-\sqrt{2}(2ab-6cd)\}}{(a^2+2b^2-3c^2-6d^2)^2-2(2ab-6cd)^2} \end{aligned}$$

これを展開して整理すれば B に属することは明らかである．ゆえに B は体である．

解答 2　問題 2

(1) 加法：$(a,\ b)+(c,\ d) = (a+c,\ b+d)$

(2) 加法, 乗法の交換法則，加法の結合法則は明かである．

(3) 乗法の結合法則：

$$\begin{aligned} & \{(a,\ b)\times(c,\ d)\}\times(e,\ f) = (ac-bd,\ ad+bc)\times(e,\ f) \\ = & (ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce) \\ & (a,\ b)\times\{(c,\ d)\times(e,\ f)\} = (a,\ b)\times(ce-df,\ cf+de) \\ = & (ace-adf-bcf-bde,\ acf+ade+bce-bdf) \end{aligned}$$

より成立．

(4) 乗法の逆元：

$$(a,\ b)\times\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\ \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right)=(1,\ 0)$$

より $(a,\ b)^{-1}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\ \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

ゆえに V は体である.

解答 3　問題 3

(1) $\mathrm{X}=(x,\ y)$ とおく．$\mathrm{A}\circ\mathrm{X}=\mathrm{B}$ より

$$\begin{cases} a_1x-a_2y=b_1 \\ a_1y+a_2x=b_2 \end{cases}$$

これを解いて

$$x=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+a_2^2},\ y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+a_2^2}$$

つまり $\mathrm{X}=\left(\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+_2^2},\ \dfrac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+_2^2}\right)$．また $b_1=a_1,\ b_2=a_2$ より $\mathrm{Z}=(1,\ 0)$.

(2) 条件から $\mathrm{P},\ \mathrm{P}\circ\mathrm{P},\ \mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P},\ \mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P}$ はすべて集合 M に属する．集合 M は 3 個の要素からなるので，P は $\mathrm{P}\circ\mathrm{P},\ \mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P},\ \mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P}$ のいずれかに等しい．$\mathrm{P}=\mathrm{P}\circ\mathrm{P}$ なら (1) より $\mathrm{P}=(1,\ 0)$．$\mathrm{P}=\mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P}$ なら (1) より $\mathrm{P}\circ\mathrm{P}=(1,\ 0)$．$\mathrm{P}=\mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P}$ なら (1) より $\mathrm{P}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{P}=(1,\ 0)$．いずれにせよ点 $(1,0)$ は集合 M に属する.

(3) (2) の条件がみたされるとき，P の座標が $(1,0)$ であるとする．$\mathrm{Q}\neq(1,\ 0)$ なので $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}$ か $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}$ である.

もし $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}$ なら (1) から $\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}=(1,\ 0)$ となる．一方 $\mathrm{R}\neq(1,\ 0)$ なので $\mathrm{Q}\circ\mathrm{R}=\mathrm{P}$ となる以外にないが，このとき $\mathrm{Q}\circ\mathrm{R}=\mathrm{P}=\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}$ より $\mathrm{R}=\mathrm{Q}$ となり相異なるという条件に反する.

ゆえに $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}$ となり $\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}=(1,\ 0)$ つまり

$$\mathrm{M}=\{(1,\ 0),\ \mathrm{Q},\ \mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\}$$

である．かつ $\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}=(1,\ 0)$ なので，$\mathrm{Q}\circ\mathrm{R}=\mathrm{P},\ \mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}=\mathrm{R}$ が成り立つ.

(4) $\mathrm{Q}=(x,\ y)$ とする．$\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}=(1,\ 0)$ かつ $\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{Q}=(x^3-3xy^2,\ 3x^2y-y^3)$ となるので

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ 3x^2y-y^3=0 \end{cases}$$

$y=0$ なら $x=1$ で $\mathrm{Q}=\mathrm{P}$ となるので $y\neq0$．ゆえに $y^2=3x^2$．これを第 1 式に代入して $-8x^3=1$ を得る．つまり $x=-\dfrac{1}{2}$．これから $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore\quad \mathrm{P},\ \mathrm{Q}=\left(-\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

解答 4　問題 4

(1)

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

であるから，この積は確かに集合 M の積になっており，可換である．

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，乗法の逆元も存在する．

2 次行列の和と積は結合法則，分配法則を満たすので，その他の条件は満たされる．

ゆえに M は可換体であることが示された．

(2) 積の定義が問題 2 と同じである．和が同じであることは明らか．したがって M は問題 2 の V と同型になり，その結果複素数体 C と同型である．

解答 5　問題 5

(1)

$$(ア)\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (イ)\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \quad (ウ)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

(2) (略)

(3)

$$(ア)\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad (イ)\ 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad (ウ)\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

(4) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ に対応する行列が D なので，D^{18} は $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{18}$ に対応する行列である．

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{18} = \frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

である．ゆえに求める行列は $\dfrac{1}{512}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

解答 6　問題 6

(1)

$$\bar{\alpha}+\alpha = 2 \quad , \quad \sqrt{3}i\bar{\alpha}-\sqrt{3}i\alpha = 2$$

より $\alpha = 1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ ，$|\alpha|^2 = \dfrac{4}{3}$.

(2) 点 A(α) とする．直線 OA は直線 L と直交している．

したがって線分 QQ$'$ の中点が L 上にあり，線分 QQ$'$ が OA と平行であればよい．

$$\begin{cases} \bar{\alpha}\left(\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)+\alpha\left(\dfrac{\bar{\omega}+\bar{\omega'}}{2}\right)=2 \\ \dfrac{\omega-\omega'}{\alpha}-\dfrac{\bar{\omega}-\bar{\omega'}}{\bar{\alpha}}=0 \end{cases}$$

これから $\bar{\alpha}\omega'+\alpha\bar{\omega}=2$ を得る．ゆえに

$$\omega'=-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{\omega}+\frac{2}{\bar{\alpha}}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{\omega}+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

解答 7　問題 7 $g(x)=f(x)-x^n$ は $n-1$ 次式である．$g(q_1),\ g(q_2),\ \cdots,\ g(q_n)$ もすべて有理数である．

$n-1$ 次式 $g(x)$ に対して n 個の x に対する値が定まれば $g(x)$ は一意に定まる．実際

$$\begin{aligned} G(x) &= g(q_1)\frac{(x-q_2)(x-q_3)\cdots(x-q_n)}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)\cdots(q_1-q_n)} \\ &\quad +g(q_2)\frac{(x-q_1)(x-q_3)\cdots(x-q_n)}{(q_2-q_1)(q_2-q_3)\cdots(q_2-q_n)} \\ &\quad +\cdots \\ &\quad +g(q_n)\frac{(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_{n-1})}{(q_n-q_1)(q_n-q_2)\cdots(q_n-q_{n-1})} \end{aligned}$$

とおく．このとき $G(q_1)=g(q_1),\cdots,\ G(q_n)=g(q_n)$ なので恒等式の原理より $G(x)=g(x)$ ．したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n+g(x) \\ &= x^n+g(q_1)\frac{(x-q_2)(x-q_3)\cdots(x-q_n)}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)\cdots(q_1-q_n)}+\cdots+g(q_n)\frac{(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_{n-1})}{(q_n-q_1)(q_n-q_2)\cdots(q_n-q_{n-1})} \end{aligned}$$

これから $f(x)$ が有理数係数の n 次多項式であることが示された．

※これが「ラグランジュの補間公式」の方法である．つぎに数学的帰納法による解を示す．

$n=1$ のとき． $f(x)=x+b$ とおく．$f(q_1)=q_1+b$ で $f(q_1)$ が有理数なので， $b=f(q_1)-q_1$ も有理数である．

$n=m$ のとき成立するとする．

$n=m+1$ のとき． $f(x)$ を x^{m+1} の係数が 1 である x の $m+1$ 次式とし，相異なる $m+1$ 個の有理数 $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{m+1}$ に対し $f(q_1),\ f(q_2),\ \cdots,\ f(q_{m+1})$ がすべて有理数であるとする．

因数定理より

$$f(x)=(x-q_{m+1})Q(x)+f(q_{m+1}) \quad \cdots①$$

となる．ここで $Q(x)$ は m 次式で x^m の係数は両辺の係数を比較して 1 である．

$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{m+1}$ はすべて異なるので，$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_m$ に対し

$$Q(q_i)=\frac{f(q_i)-f(q_{m+1})}{q_i-q_{m+1}}$$

したがって $Q(q_1),\ \cdots,\ Q(q_m)$ はすべて有理数である．

数学的帰納法の仮定から $Q(x)$ は有理数係数の多項式である．ゆえに ① から $f(x)$ も有理数係数の多項式である．

したがって題意が示された．

解答 8　問題 8

(1) $-\dfrac{a^2}{4}+1$

(2) $\begin{cases} 1 & (a \leqq 0) \\ -\dfrac{a^2}{4}+1 & (0<a<2) \\ -a+2 & (2 \leqq a) \end{cases}$

解答 9　問題 9

$$M(a)=\begin{cases} a & (1<a) \\ 1 & (a \leqq 1) \end{cases}, \quad m(a)=\begin{cases} \dfrac{a}{a+1} & (0<a) \\ a & (a \leqq 0) \end{cases}$$

解答 10　問題 10

$$m(a)=1, \quad M(a)=a^2-3a+1$$

解答 11　問題 11

(1) $f \circ g(x)=-2x+2$

(2) $f \circ g(x)=2x^2-3x-2$

(3) $f \circ g(x)=-\dfrac{1}{x}$

(4) $f \circ g(x)=x^2-p^2+q$

(5) $f \circ g(x)=\dfrac{(ap+br)x+aq+bs}{(cp+dr)x+cq+ds}$

(6) $f \circ g(x)=\dfrac{2(3x-5)^2}{(3x-5)^2+4}$

(7) $f \circ g(x)=x^3+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}$

解答 12　問題 12

(1) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$, 定義域:全実数

(2) $f^{-1}(x)=\sqrt{6-x}+2$, 定義域: $x \leqq 6$

(3) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+2}+1$, 定義域: $-2 \leqq x$

(4) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{-x+1}$, 定義域: $x \neq 1$

(5) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}, \text{ 定義域 : 全実数} & a \neq 0 \\ \text{逆関数なし} & a=0 \end{cases}$

(6) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+p^2-q}+p$, 定義域: $-p^2+q \leqq x$

(7) $f^{-1}(x) = \dfrac{dx-b}{-cx+a}$, 定義域:$c \neq 0$ なら $x \neq \dfrac{a}{c}$, $c = 0$ なら全実数

解答 13　問題 13

(1)　(i) $f(x) = a_n x^n + [n-1$ 以下の項のみ$]$ とおく.

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= a_n(x+1)^n - a_n x^n + [n-1 \text{ 以下の項のみ}] \\ &= a_n(nx^{n-1} + \cdots) + [n-1 \text{ 以下の項のみ}] \end{aligned}$$

となり，確かに $n-1$ 次以下である.

(ii) 必要条件であることは明らかである.

十分条件であることを $f(x)$ の次数 k に関する帰納法で証明する.

$k = 1$ のとき.　$f(x) = ax + b$ とおく.

$$f(m+1) - f(m) = a$$

より, a が整数で, $f(m) = am + b$ より b が整数. よって, 任意の整数 n に対して $f(n) = an + b$ は整数値である.

$1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ について成立するとする.

$$g(x) = f(x+1) - f(x)$$

とおく. このとき $g(x)$ の k 個の連続する整数 $m,\ m+1,\ \cdots,\ m+k-1$ に対する値

$$g(m) = f(m+1) - f(m),\ \cdots,\ g(m+k-1) = f(m+k) - f(m+k-1)$$

がすべて整数であるので，帰納法の仮定により任意の整数 n に対して $g(n)$ は整数値を取る.

$f(m)$ が整数で，階差がすべて整数なので，任意の整数 n に対して $f(n)$ は整数値を取る.

よって, 任意の次数 k に関して『　』が示された.

(2)　(i) k に関する帰納法で示す.

$k = 1$ のとき.　$u_1(x) = x$ なので

$$f(x) = ax + b = au_1(x) + bu_0(x)$$

より, 成立している.

$k-1$ 以下のとき成立しているとする.

$f(x)$ の x^k の係数を a_k とする.　$c_k = k!\,a_k$ とおく. このとき

$$f(x) - c_k u_k(x)$$

は $k-1$ 次以下である. したがって, これは $c_0(x),\ \cdots,\ c_{k-1}(x)$ で表せるから，$f(x)$ は $c_0(x),\ \cdots,\ c_k(x)$ で表せることが示せた.

よって, 任意の k に対して題意が成立した.

(ii) 必要条件を示す.

任意の整数 n に対して $f(n)$ が整数なので

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0 \\ f(1) &= c_1 + c_0 \\ &\cdots \\ f(k) &= c_k \frac{k!}{k!} + c_{k-1}\frac{k!}{(k-1)!1!} + \cdots + c_{k-i}\cdot {}_k\mathrm{C}_i + \cdots + c_0 \end{aligned}$$

がすべて整数である. よって, $c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_k$ がこの順に整数であることがわかる.

十分条件を示す.

$n \geqq k$ なら

$$f(n) = c_k {}_n\mathrm{C}_k + c_{k-1} {}_n\mathrm{C}_{k-1} + \cdots + c_0$$

となる. よって, $f(n)$ は整数値を取る.

$k > n > 0$ のとき ${}_n\mathrm{C}_k = 0$ とすれば上と同じ式が成り立つので $f(n)$ は整数値を取る.

$n \leqq 0$ のとき $n = -m$ とすると

$$u_l(n) = \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-l+1)}{l!} = (-1)^l {}_{m+l-1}\mathrm{C}_l$$

なので, やはり整数値を取る.

以上で必要十分条件であることが示された.

注意 1 (2) は

$$\begin{aligned} u_l(x+1) - u_l(x) &= \frac{x(x-1)\cdots(x-l+1)}{l!} - \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-l)}{l!} \\ &= \frac{\{x-(x-l)(x-1)\cdots(x-l+1)}{l!} \\ &= \frac{\{(x-1)\cdots\{x-1-(l-1)+1)}{(l-1)!} = u_{l-1}(x) \end{aligned}$$

という事実を利用して $f(x)$ の次数に関する帰納法で示すこともできる.

注意 2 (2) の証明をよく見れば

(1) の条件: $k+1$ 連続整数で $f(x)$ が整数値を取ること

(2) の条件: $c_0(x),\ \cdots,\ c_k(x)$ がすべて整数であること

の同値性を直接示すこともできる.

解答 14 問題 14

$$f(x) = a_n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} + \cdots + a_k \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} + \cdots + a_0$$

とおく.

$$f(k) = a_k + k a_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} a_{k-2} + \cdots + a_0 = 2^k$$

となる. $k = 0$ のとき, $a_0 = 1$ がわかる. $a_0 = \cdots = a_{k-1} = 1$ とする.

$$a_k + {}_k\mathrm{C}_1 + {}_k\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k = a_k + (2^k - 1) = 2^k$$

より, $a_k = 1$ だから, $a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 1$ である. よってこのとき,

$$f(n+1) = {}_{n+1}\mathrm{C}_n + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + {}_{n+1}\mathrm{C}_0 = 2^{n+1} - 1$$

解答 15 問題 15

$f(x) = x^{100}$ とおき，有限和 S_n を

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n}\right)^{100} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ f\left(\frac{2i}{2n}\right) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) \right\}$$

とする．

$0 < X < Y$ のとき平均値の定理から $X < c < Y$ で

$$\frac{f(Y) - f(X)}{Y - X} = f'(c)$$

となるものが存在する．各区間 $\left[\dfrac{2i-1}{2n},\ \dfrac{2i}{2n}\right]$ に用いて，

$$f\left(\frac{2i}{2n}\right) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} f'(c_i)$$

と表せる．つまり $S_n = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} f'(c_i)$ とリーマン和で表せた．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S_n = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)\, dx = \frac{1}{2} \left[f(x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[x^{100} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

注意

この問題はどこまで一般化できるのか．

$f(x)$ が微分可能で $f'(x)$ が連続な任意の関数で次式が成立する．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{ f\left(\frac{2i}{2n}\right) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) \right\} = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)\, dx = \frac{1}{2} \left(f(1) - f(0) \right)$$

解答 16 問題 16

(1) 部屋を移る確率は $\dfrac{1}{3}$，移らない確率は $\dfrac{2}{3}$ である．したがって

$$\begin{aligned} P_A(n+1) &= \frac{2}{3} P_A(n) + \frac{1}{3} P_B(n) \\ P_B(n+1) &= \frac{1}{3} P_A(n) + \frac{2}{3} P_B(n) \end{aligned} \qquad \cdots ①$$

ただし $P_A(n) + P_B(n) = 1$ である．これから

$$\begin{aligned} P_A(1) &= \frac{2}{3} P_A(0) + \frac{1}{3} P_B(0) = \frac{2}{3}, & P_B(1) &= 1 - P_A(1) = \frac{1}{3} \\ P_A(2) &= \frac{2}{3} P_A(1) + \frac{1}{3} P_B(1) = \frac{5}{9}, & P_B(2) &= 1 - P_A(2) = \frac{4}{9} \\ P_A(3) &= \frac{2}{3} P_A(2) + \frac{1}{3} P_B(2) = \frac{14}{27}, & P_B(3) &= 1 - P_A(3) = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

また，3 回で起こりうる持ち点は 4, 2, 0, -2 で

持ち点	4	2	-2
部屋	AAA	$AAB,\ ABA,\ BAA$	BBB
確率	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \left(\dfrac{1}{3}\right) + 2 \left(\dfrac{2}{3}\right) \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$	$\left(\dfrac{2}{3}\right) \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$$E(3) = 4 \cdot \frac{8}{27} + 2 \cdot \frac{8}{27} + (-2)\frac{4}{27} = \frac{40}{27}$$

(2) (1) に解答あり.

(3) ① から

$$P_A(n+1) - P_B(n+1) = \frac{1}{3}\{P_A(n) - P_B(n)\}$$

$$\therefore \quad P_A(n) - P_B(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \{P_A(0) - P_B(0)\} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$P_A(n) + P_B(n) = 1$ とあわせて

$$\begin{aligned} P_A(n) &= \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ P_B(n) &= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

(4) k 回目の試行による持ち点の増減量を X_k とする．n 回目の試行を終えたときの持ち点 X は

$$X = 1 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

である.

$$\therefore \quad E(n) = 1 + E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

ここで

$$E(X_k) = 1 \cdot P_A(k) + (-1) \cdot P_B(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad E(n) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\} \end{aligned}$$

［注］$n = 3$ のとき計算すると，

$$\frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4\right\} = \frac{3}{2} \cdot \frac{80}{81} = \frac{40}{27}$$

(1) ではそれぞれの持ち点に対する確率を計算したが，(4) の方法の方が簡明である.

解答 17 問題 17

(1) $N = 5$ のとき．$X = 0,\ Y = 0$ となるのは，5 の目が連続する場合なので

$$P(X = 0,\ Y = 0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

一方 $Y=0$ となるのは，2 つの目の出方が

$$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (6,\ 4),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5)$$

となる場合なので 7 通りある．

$$\therefore \quad P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{36}\neq\frac{1}{36}$$

つまり 2 つの確率変数 X と Y は独立ではない．

$N=6$ のとき．X を i に固定する．このとき 2 回目に出る目を x とすれば $Y=j$ となるのは

$$i+x=j+(6\text{ の倍数})$$

のとき．この x は $x=j-i+(6\text{ の倍数})$ より $j-i$ を 6 で割った余りなのでただ一つである．

$$\therefore \quad P(X=i,\ Y=j)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

一方 $Y=j$ となるのは，1 回目の結果が $X=i$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ のいずれに対しても，2 回目に出るべき目は $j-i$ を 6 で割った余りなのでただ一つである．

$$\begin{aligned}\therefore \qquad & P(X=i)P(Y=j)\\ = \quad & \frac{1}{6}\cdot{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}\end{aligned}$$

つまり 2 つの確率変数 X と Y は独立である．

(2) $N=3$ のとき．X を i に固定する．このとき 2 回目に出る目を x とすれば $Y=j$ となるのは

$$i+x=j+(3\text{ の倍数})$$

のとき．この x は，$x=j-i+(3\text{ の倍数})$ より $j-i$ を 3 で割った余りなので 2 つある．

$$\therefore \quad P(X=i,\ Y=j)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

一方 $Y=j$ となるのは，X が $i=1,\ 2,\ 3$ のいずれに対しても，2 回目の目は $j-i$ を 3 で割った余りなので 2 つある．

$$\begin{aligned}\therefore \qquad & P(X=i)P(Y=j)\\ = \quad & \frac{2}{6}\cdot{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

つまり 2 つの確率変数 X と Y は独立である．

$N=4$ のとき．$X=0,\ Y=0$ となるのは，4 の目が連続する場合なので

$$P(X=0,\ Y=0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

一方 $Y=0$ となるのは，2 つの目の出方が

$$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (6,\ 2),\ (5,\ 3),\ (4,\ 4),\ (3,\ 5),\ (2,\ 4),\ (6,\ 6)$$

となる場合なので 9 通りある．

$$\therefore \quad P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{9}{36}\neq\frac{1}{36}$$

2 つの確率変数 X と Y は独立ではない．

$N\geqq 7$ のとき．$X=6$ のとき，$Y=6$ となることはない．

$$\therefore \quad P(X=6,\ Y=6)=0$$

一方 $Y=6$ となるのは，2 つの目の出方が

$$(1,\ 5),\ \cdots$$

といくつかあり，$P(X=6)=\dfrac{1}{6}$ なので

$$P(X=6)P(Y=6)\neq 0$$

つまり 2 つの確率変数 X と Y は独立ではない．

解答 18 問題 18

(1) 色の変化が起こる場所 (電球と電球の間と考えればよい) は $n-1$ 通りある．1 つの場所で色が変化するのは，青赤と変化するか，赤青と変化する場合なのでその確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ゆえに 1 回だけ色が変化する確率は

$${}_{n-1}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

左端が赤色の場合と青の場合は同様に確かで $\dfrac{1}{2}$ ずつなので，求める確率は

$$\frac{n-1}{2^n}$$

(2) 1 つの場所で色が変化しない確率も $\dfrac{1}{2}$ である．ゆえに $n-1$ カ所で色が変化しない確率は $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ である．したがって色の変化が少なくとも 2 回起きる確率は，

$$1-\left(\frac{n-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1-\frac{n+1}{2^n}$$

(3) 同様に考え

$$\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_m}{2^{n-1}}$$

(4) 色の変化の回数を X とおく．

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{m=1}^{n-1} m\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_m}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{n-1} m\,{}_{n-1}\mathrm{C}_m \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{n-1} m\frac{(n-1)!}{(n-1-m)!m!} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)!}{\{n-2-(m-1)\}!(m-1)!} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{n-1}(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{m-1} = \frac{n-1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-2}\mathrm{C}_k \\ &= \frac{n-1}{2^{n-1}}2^{n-2} = \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

［注意］二項整数の性質

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

を用いている．上のように直接計算 (これが方法 1) してもよいが次のようにも示せる．

方法 2

二項定理より

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$$

この両辺を x で微分する．

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k x^{k-1}$$

両辺の x^{k-1} の係数を比較して

$$n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = k\,{}_n\mathrm{C}_k \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

方法 3

n 人から k 人の委員とその中の委員長を選ぶ選び方を考える．

n 人から k 人の委員をまず選び，k 人の中から委員長 1 人を選ぶ，とすると，${}_n\mathrm{C}_k \times k$ 通りの選び方がある．

n 人から委員長を先に選び，その後 $n-1$ 人から残る $k-1$ 人の委員を選ぶ，とすると，$n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ 通りの選び方がある．

$$\therefore \quad k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

［(4) の別解］

確率変数 X_k を

$$X_k = \begin{cases} 1 & (k \text{ 番目の場所で変化する}) \\ 0 & (k \text{ 番目の場所で変化しない}) \end{cases}$$

で定める．

$$X = X_1 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}$$

である．また

$$E(X_k) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \cdot\frac{1}{2}$$

である．

$$\therefore \quad E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k) = \frac{n-1}{2}$$

解答 19　問題 19

(1) 偽．反例 $x = -3$ ．

(2) 偽．反例 $x = 0,\ y = 1$ ．

(3) 偽．反例 $x = 1 + \sqrt{2},\ y = 1 - \sqrt{2}$ ．

(4) 真．対偶 :$x \leqq 1$ かつ $y \leqq 0$ なら $x + y \leqq 1$ である．

(5) 偽．反例 $x = 3,\ y = \dfrac{1}{2}$ ．

解答 20　問題 20

(1) n が 30 で割り切れれば，6 または 15 で割り切れるが，逆は言えない．よって，(b)
6 で割り切れるものが，50 個．
15 で割り切れるものが，20 個．
6 かつ 15 で割り切れる，つまり，30 で割りきれるものが 10 個．
$\therefore \quad 50 + 20 - 10 = 60$（個）

(2) $m + n = 12k,\ mn = 12l$ なら，$mn = m(12k - m) = 12l$ ．つまり $m^2 = 12(mk - l)$ ．m^2 が 12 の倍数なので，m は素因数 2 と 3 を持つ．つまり 6 の倍数．このとき $n = 12 - m$ から n も 6 の倍数．
逆に $m = 6,\ n = 12$ とすると $m + n = 18$ は 12 で割り切れない．よって，(c)．
$m = 6k,\ n = 6l$ とかける．さらに $m + n = 6(k + l),\ mn = 36kl$ なので，$m + n,\ mn$ が 12 の倍数になるためには k と l の偶数と奇数が一致すればよい．
$k = 1$ に対して $l = 1,\ 3,\ \cdots,\ 15$ の 8 個．
$k = 2$ に対して $l = 2,\ 4,\ \cdots,\ 16$ の 8 個．
$k = 3$ に対して $l = 3,\ \cdots,\ 15$ の 7 個．
$k = 4$ に対して $l = 4,\ \cdots,\ 16$ の 7 個．
$\cdots$
$k = 15$ に対して 15 の 1 個．
$k = 16$ に対して 16 の 1 個．

$$\therefore \quad 2(8 + 7 + \cdots + 1) = 72 \text{（個）}$$

(3) $l + m + n,\ lm + mn + nl,\ lmn$ がすべて 5 で割り切れるとする．lmn が 5 の倍数なので少なくともひとつ，例えば l は 5 の倍数．するとその結果，$m + n = -l,\ mn = -l(m + n)$ が 5 の倍数．
$m,\ n$ の少なくとも一つは 5 の倍数．m が 5 の倍数なら $n = -m$ も 5 の倍数．条件は $l,\ m,\ n$ で対称なので，$l,\ m,\ n$ は 5 の倍数．
逆は明らか．よって，(a)．

(4) (3) は任意の素数 p で成り立つ．つまり $l+m+n,\ lm+mn+nl,\ lmn$ がすべて p の倍数なら，$l,\ m,\ n$ がすべて p の倍数になる．ここで $30=2\cdot3\cdot5$ なので $p=2,\ 3,\ 5$ とすることにより $l,\ m,\ n$ はすべて 2, 3, 5 の倍数であることがわかる．
よって $l,\ m,\ n$ は 30 の倍数． 逆は明らか．∴ (a).
30 の倍数の組は

$$\begin{aligned}(l,\ m,\ n) \quad = \quad & (30,\ 30,\ 30),\ (30,\ 30,\ 60),\ (30,\ 30,\ 90),\\ & (30,\ 60,\ 60),\ (30,\ 60,\ 90),\ (30,\ 90,\ 90)\\ & (60,\ 60,\ 60),\ (60,\ 60,\ 90),\ (60,\ 90,\ 90)\\ & (90,\ 90,\ 90)\end{aligned}$$

∴ 10 個

解答 21 問題 21

(1) 原点を通る 2 つの直線が第 1 象限の原点以外の点を共有する．ゆえに 2 直線は一致し傾きは正であることが必要十分条件である．

$$\{(a,\ b)\mid ab=1,\ a,\ b<0\ \}$$

(2) 命題 $[Q]$ は，2 つのベクトルが逆方向に平行でないことと同値である．
つまり $\boxed{\overline{Q}}$ が真となる $(a,\ b)$ の条件は

$$(a,\ 1)=k(1,\ b)\ \text{となる}\ k<0\ \text{が存在する．}$$

である．存在すれば $a=k,\ 1=kb$ より $ab=1,\ a<0$ ．逆にこのとき逆方向に平行は明か．

$$\therefore\quad \{(a,\ b)\mid ab=1,\ a,\ b<0\ \}$$

(3) 命題 $[P]$ と $[Q]$ の真偽は逆になっている．

解答 22 問題 24

(1) 係数の最大値は 3，ゆえに根は $[-4,\ 4]$ にある．まずこの範囲で調べ順次範囲を狭くする．

$$f_0(x)=x^3+3x-1,\ f_1(x)=3x^2+3$$

つねに $f'(x)>0$ なので $f_2(x)$ 以下は必要ない．$x=a$ での f_0 と f_1 での符号変化を $w'(a)$ と書く．$w(a)-w(b)=w'(a)-w'(b)$ である．

x	f_0	f_1	w'
-4	-77	51	$w'(-4)=1$
4	75	51	$w'(4)=0$
0	-1	1	$w'(0)=1$
1	3	6	$w'(1)=0$

$$\therefore\quad w(-4)-w(4)=w(0)-w(1)=1$$

実根は 1 つで， $(0,\ 1)$ にある．

(2) 同様に $M = 8$ なので $[-9,\ 9]$ で調べる.

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 8 & f_0(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 8 \\
f'(x) = 3x^2 - 10x + 8 & f_1(x) = 3x^2 - 10x + 8 \\
f(x) = f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{5}{9}\right) - \left(\dfrac{2}{9}x + \dfrac{32}{9}\right) & f_2(x) = \dfrac{2}{9}x + \dfrac{32}{9}
\end{array}
$$

$-9 \leqq x$ でつねに $f_2(x) > 0$ なので $f_3(x)$ 以下は必要ない.

x	f_0	f_1	f_2	w'
-9	$-$	$+$	$+$	$w'(-9) = 1$
9	$+$	$+$	$+$	$w'(9) = 0$
0	$-$	$+$	$+$	$w'(0) = 1$
4	$+$	$+$	$+$	$w'(4) = 0$
2	$-$	0	$+$	$w'(2 = 1$
3	$-$	$+$	$+$	$w'(3) = 1$

$$\therefore\ w(-9) - w(9) = w(3) - w(4) = 1$$

実根は 1 つで, $(3,\ 4)$ にある.

(3)

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= 3.22x^6 + 4.12x^4 + 3.11x^3 - 7.25x^2 + 1.88x - 7.84 \\
f_1(x) &= 19.32x_5 + 16.48x^3 + 9.33x^2 - 14.50x + 1.88 \\
f_2(x) &= -1.32x^4 - 1.52x^3 + 4.78x^2 - 1.56x + 7.84 \\
f_3(x) &= -112.09x^3 + 94.10x^2 - 126.58x + 130.30 \\
f_4(x) &= -4.04x^2 + 0.08x - 4.71
\end{aligned}
$$

実数 x に対して $f_4(x) < 0$ なので, 以下は必要ない. 計算結果を符号で書く.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	w'
$-\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$w'(-\infty) = 3$
0	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$w'(0) = 2$
∞	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$w'(\infty) = 1$
-2	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$w'(-2) = 3$
2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$w'(2) = 1$
-1	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$w'(-1) = 2$
1	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$w'(1) = 2$

$$\therefore\ w(-\infty) - w(0) = w(-2) - w(-1) = 1,\ w(0) - w(\infty) = w(1) - w(2) = 1$$

実根は 2 つで, $(-2,\ -1)$ と $(1,\ 2)$ にある.

解答 23　問題 25

上の解に引き続いて範囲を狭める.

$$f_0(x) = x^3 + 3x - 1,\ f_1(x) = 3x^2 + 3$$

x	f_0	f_1	w'
$\frac{1}{2}$	$+$	$+$	0
$\frac{1}{4}$	$-$	$+$	1
$\frac{3}{10}$	$-$	$+$	1
$\frac{4}{10}$	$+$	$+$	1

実根は，$\left(\frac{3}{10},\ \frac{4}{10}\right)$ にあり，少数第 1 桁まで求めれば 0.3 である．

解答 24　問題 26

(1) $a \neq 0$ が必要で，このとき $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x)\left(\frac{1}{3}x\right) - (2a^2x - a^2 + a) \\ f'(x) &= (2a^2x - a^2 + a)Q(x) - f_3 \end{aligned}$$

ここで

$$f_3 = -f'\left(\frac{a-1}{2a}\right) = \frac{(2a-1)(a+1)(2a^2-a+1)}{4a^2}$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^3 - 3a^2x + a^2 - a \\ f_1(x) &= 3x^2 - 3a^2 \\ f_2(x) &= 2a^2x - a^2 + a \\ f_3(x) &= \frac{(2a-1)(a+1)(2a^2-a+1)}{4a^2} \end{aligned}$$

x	f_0	f_1	f_2
$-\infty$	$-$	$+$	$-$
∞	$+$	$+$	$+$

したがって $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数の解をもつことと $f_3 > 0$ が同値である．

$$f_3(x) = \frac{(2a-1)(a+1)(2a^2-a+1)}{4a^2} > 0$$

より $a < -1,\ \frac{1}{2} < a$

(2)

x	f_0	f_1	f_2
$2a$	$a(2a-1)(a+1)$	$9a^2$	$a(4a^2-a+1)$
$-2a$	$-a(2a^2-a+1)$	$9a^2$	$a(-4a^2-a+1)$

$a < -1$ のとき $2a < -2a$ で

x	f_0	f_1	f_2	f_3	w
$2a$	$-$	$+$	$-$	$+$	$w(2a) = 3$
$-2a$	$+$	$+$	$+$	$+$	$w(-2a) = 0$

$\dfrac{1}{2} < a$ のとき $-2a < 2a$ で

x	f_0	f_1	f_2	f_3	w
$-2a$	$-$	$+$	$-$	$+$	$w(2a) = 3$
$2a$	$+$	$+$	$+$	$+$	$w(-2a) = 0$

ゆえにいずれの場合も 3 つの根とも $-2a$ と $2a$ の間にある.

注　普通の受験参考書の解答と比較してみてほしい.

解答 25 問題 27

(1)

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$$

より，$f(x)$ は $x = 0$ で極大，$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で極小となる.

$$f(\pm 1) = f(0) = \frac{1}{8}, \quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{8}$$

であるから，

$$M = \frac{1}{8}$$

で，それを与える x は

$$-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1$$

である.

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ で $|g(x)| < \dfrac{1}{8}$ であるから，

$$\begin{aligned}
f(-1) - g(-1) &= \frac{1}{8} - g(-1) > 0 \\
f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{1}{8} - g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \\
f(0) - g(0) &= \frac{1}{8} - g(0) > 0 \\
f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{1}{8} - g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \\
f(1) - g(1) &= \frac{1}{8} - g(1) > 0
\end{aligned}$$

よって，方程式 $f(x) = g(x)$ は

$$-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0, 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}, dfrac1\sqrt{2} < x < 1$$

にそれぞれ少なくとも一つの解をもち，したがって $f(x) = g(x)$ は少なくとも四つの解をもつ.

(3) $-1 \leqq x \leqq 1$ でつねに $|g(x)| < \dfrac{1}{8}$ と仮定する．

(2) より，$f(x) - g(x) = 0$ は少なくとも四つの解をもつ．ところが，$f(x) - g(x)$ が三次式となるので，恒等式の原理によって $f(x) - g(x)$ は恒等的に 0 になる．つまり $g(x) = f(x)$ となり，$|g(x)| < \dfrac{1}{8}$ が成立しなくなる．

したがって，$|g(x)|$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の少なくとも一つの値で $\dfrac{1}{8}$ 以上の値をとるので，$|g(x)|$ の最大値は $\dfrac{1}{8}$ 以上である．

(4) $|g(x)| \leqq \dfrac{1}{8} \quad (= M)$ かつ, ある x_0で $|g(x_0)| = \dfrac{1}{8}$ となるとする.

$$\begin{aligned} f(-1) - g(-1) &\geqq 0 \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &\leqq 0 \\ f(0) - g(0) &\geqq 0 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &\leqq 0 \\ f(1) - g(1) &\geqq 0 \end{aligned}$$

よって，$f(x) - g(x) = 0$ は，次の各区間に解をもつ.

$$-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 0,\ 0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$$

このうち四つの解が $\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のいずれかで同じものであったとする.

$f(\alpha) = g(\alpha)$ より，

$$|g(\alpha)| = |f(\alpha)| = \frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} x < \alpha \text{なら } \dfrac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \geqq 0 \text{ より} & g'(\alpha) \geqq 0 \\ \alpha < x \text{ なら } \dfrac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \leqq 0 \text{ より} & g'(\alpha) \leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad g'(\alpha) = 0$$

一方 $f'(\alpha) = 0$ なので，$f'(\alpha) - g'(\alpha) = 0$.

つまり $f(x) - g(x) = 0$ は $x = \alpha$ で重解となる.

重複度まであわせると $f(x) - g(x) = 0$ は四つの解をもつ.

$$\therefore \quad g(x) = f(x) \text{ である.}$$

解答 26 問題 28

(1) $h(x)$ が，極大，極小となる x を $\alpha,\ \beta$ とする．このとき $h(x) - 1 = 0$ は $x = \alpha$ を重解にもち，他の解は $x = 1$ である．極小の方も同様に考え

$$\begin{aligned} h(x) - 1 &= p(x - \alpha)^2(x - 1) \\ h(x) + 1 &= p(x - \beta)^2(x + 1) \end{aligned}$$

となる．つまり

$$p(x-\alpha)^2(x-1)+1=p(x-\beta)^2(x+1)-1$$

は恒等式である．

係数を比較して，

$$\begin{cases} 2\alpha+1=2\beta-1 \\ \alpha^2+2\alpha=\beta^2-2\beta \\ -\alpha^2p+1=-\beta^2p-1 \end{cases}$$

これを解いて，

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{2},\ p=4$$

$$\therefore\quad h(x)=4x^4-3x$$

(2) $F(x)=h(X)-f(x)$ とおく．条件から

$$F(-1)\leqq 0,\ F(\alpha)>0,\ F(\beta)<0,\ F(1)\geqq 0$$

となり， $F(x)=0$ は $-1\leqq x<\alpha$, $\alpha<x<\beta$, $\beta<x\leqq 1$ にそれぞれ解をもつ． $F(x)$ は三次なので，これ以上の解をもつと $F(x)=0$ ，つまり $h(x)=f(x)$ となるが，$h(\alpha)=1$ なので $-1<x<1$ で $-1<f(x)<1$ という条件に反する．

$|x|>1$ で $h(x)=f(x)$ となる解はない．つまり $y=h(x)$ と $y=f(x)$ のグラフは $|x|>1$ では交わらない．$f(1)\leqq h(1)$ より $x>1$ で．$f(x)<h(x)$．$f(-1)\geqq h(-1)$ より $x<-1$ で．$f(x)>h(x)$．

ところが $f(x)$ のかわりに $-f(x)$ も同じ条件を満たすので $x>1$ で．$-f(x)<h(x)$．$x<-1$ で．$-f(x)>h(x)$．も成り立つ．

ゆえに $|x|>1$ で $-h(x)<f(x)<h(x)$ が成り立ち，$|x|>1$ なる任意の実数 x に対して不等式

$$|f(x)|<|h(x)|$$

が成立することが示された．

解答 27　問題 29

z を消去すると

$$\begin{cases} y=2x^2-1 & \cdots① \\ x=2(2y^2-1)^2-1=8y^4-8y^2+1 & \cdots② \end{cases}$$

注意　これが四次のチェビシェフの多項式そのものであることに注目!!

$$\frac{dx}{dy}=32y^3-16y=32y\left(y^2-\frac{1}{2}\right)$$

よって，$\dfrac{dx}{dy}=0$ となるのは，$y=0,\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき．

① は，

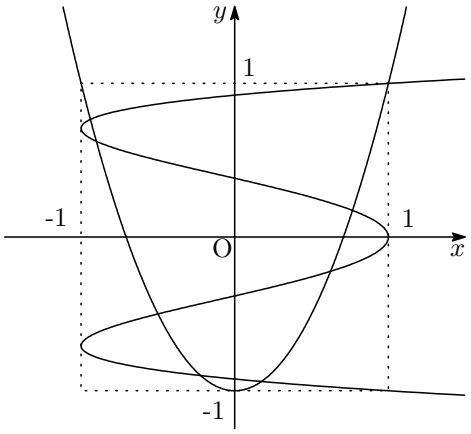
$$(1,\ 1),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

を通り，② は y の関数とし，

$$(1,\ 0),\ \left(-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

で極になり，さらに $(1,\ \pm 1)$ を通る．

そのグラフは極と極の間の単調性によって図 1 のように 8 個の交点を持つ．



さらに y も消去すると x の 8 次方程式となるのでこれがすべての交点である．

明らかにこれらの交点は $|x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1$ にあるので，

$$|a| \leqq 1,\ |b| \leqq 1$$

である． このとき $c = 2b^2 - 1$ より $-1 \leqq c \leqq 1$ となり $|c| \leqq 1$ がわかる．

全部で 8 個の解を持つことは, 既に示した．

よって (1)(2) が示された．

別解

(1) $|a| > 1$ と仮定する．

$b = 2a^2 - 1 > 1$ より $b > 1$，同様に $c > 1$．この結果 $a > 1$ となる．このとき，

$$a + b + c = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 3$$

より，

$$3 = (2a - 1)a + (2b - 1)b + (2c - 1)c > 3$$

となり，矛盾した．よって，$|a| \leqq 1$ である．同様にして，$|b| \leqq 1$，$|c| \leqq 1$ も成り立つ．

(2) 解はすべて $|x| \leqq 1$ にあるので

$$x = \cos\theta$$

とおく．

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 1 = \cos 2\theta \\ z &= 2y^2 - 1 = \cos 4\theta \\ x &= 2z^2 - 1 = \cos 8\theta \end{aligned}$$

したがって，連立方程式 $(*)$ の解は

$$\cos\theta = \cos 8\theta$$

から得られる．これは

$$8\theta = \pm\theta + 2\pi k$$

異なる x の値は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ から得られるが, たしかに

$$\theta = 0,\ \frac{2\pi}{7},\ \frac{4\pi}{7},\ \frac{6\pi}{7},\ \frac{2\pi}{9},\ \frac{4\pi}{9},\ \frac{6\pi}{9},\ \frac{8\pi}{9}$$

の 8 個ある．

解答 28　問題 30 (1)　$\alpha = \cos x + i \sin x$ とおく．

$$\cos nx = \frac{\alpha^n + \bar{\alpha}^n}{2}$$

これより

$$\begin{aligned} \cos(n+2)x &= \frac{\alpha^{n+2} + \bar{\alpha}^{n+2}}{2} \\ &= \frac{\alpha^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1}}{2}(\alpha + \bar{\alpha}) - \alpha\bar{\alpha}\frac{\alpha^n + \bar{\alpha}^n}{2} \end{aligned}$$

がなりたつ．

各自然数 n に対して，恒等式 $\cos nx = T_n(\cos x)$ が成り立つような X の n 次多項式 $T_n(X)$ で，最高次の係数が 2^{n-1} であるものが存在することを n についての数学的帰納法で示す．

$T_1(X) = X$，$T_2(X) = 2X^2 - 1$ である．よって $n = 1,\ 2$ では成立している．

n と $n+1$ のとき成立するとする．$\alpha + \bar{\alpha} = 2\cos x$，$\alpha\bar{\alpha} = 1$ なので，

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1}}{2}(\alpha + \bar{\alpha}) - \alpha\bar{\alpha}\frac{\alpha^n + \bar{\alpha}^n}{2} \\ =\ & 2\cos x T_{n+1}(\cos x) - T_n(\cos x) \end{aligned}$$

である．従って，$T_{n+2}(X)$ を

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

で定めれば，$n+2$ のときにも成立し，すべての n で成立する．

$$T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 4X^3 - 3X$$

である．

(2)　$P = a_n \cos(k\pi) - f\left(\frac{k}{n}\pi\right)$ とおく．仮定から $-a_n < f(x) < a_n$ である．よって，

$$\begin{aligned} n\text{：奇数}\quad P &= -a_n - f\left(\frac{k}{n}\pi\right) < -a_n + a_n = 0 \\ n\text{：偶数}\quad P &= a_n - f\left(\frac{k}{n}\pi\right) > a_n - a_n = 0 \end{aligned}$$

である．

(3)　$F(x) = a_n \cos(nx) - f(x)$ とおく．$f\left(\frac{k}{n}\pi\right) = P$ である．また $F(x)$ は連続関数である．(2) および連続関数の中間値の定理によって，$F(x) = 0$ となる x が，$k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ に対する各

区間 $\left[\dfrac{k}{n}\pi,\ \dfrac{k+1}{n}\pi\right]$ に存在する．つまり，方程式 $a_n\cos(nx)-f(x)=0$ は区間 $[0,\ \pi]$ に少なくとも n 個の解を持つ．

(4)

$$\begin{aligned} a_n\cos nx-f(x) &= -a_{n-1}\cos(n-1)x-\cdots-a_1\cos x-a_0 \\ &= -a_{n-1}T_{n-1}(\cos x)-\cdots-a_1T_1(\cos x)-a_0 \end{aligned}$$

$T_k(X)$ は X の $k-1$ 次整式であるから，$-a_{n-1}T_{n-1}(X)-\cdots-a_1T_1(X)-a_0$ は X の $n-1$ 次の整式である．これを，$b_{n-1}X^{n-1}+b_{n-2}X^{n-2}+\cdots+b_1X+b_0$ とすれば，

$$a_n\cos nx-f(x)=b_{n-1}(\cos x)^{n-1}+b_{n-2}(\cos x)^{n-2}+\cdots+b_1\cos x+b_0$$

である．

(5)　$n-1$ 次方程式

$$b_{n-1}X^{n-1}+b_{n-2}X^{n-2}+\cdots+b_1X+b_0=0$$

において，$X=\cos x$ とおくと

$$b_{n-1}(\cos x)^{n-1}+b_{n-2}(\cos x)^{n-2}+\cdots+b_1\cos x+b_0=0$$

となる x が区間 $[0,\ \pi]$ に少なくとも n 個存在した．この区間で x と X は一対一に対応している．

従って上記 $n-1$ 次方程式が n 個の解をもつことになり，因数定理から左辺の $n-1$ 次整式が，少なくとも n 個の因数をもつ．両辺の次数に矛盾が起こる．これは $-a_n<f(x)<a_n$ との仮定の下に起こった矛盾である．

よって，$|f(x)|$ の最大値は a_n 以上である．

※　x の n 次整式 $f(x)$ は，帰納法的に，$T_n(x),\ T_{n-1}(x),\ \cdots,\ T_1(x)$ と定数を用いて表すことができる．

従って，最高次の係数が 1 の x の n 次式 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)+c_{n-1}T_{n-1}(x)+\cdots+c_1T_1(x)+c_0$$

と表せる．これより，

$$|f(x)|\text{ の最大値}\geqq\frac{1}{2^{n-1}}$$

となる．

解答 29 問題 31 **解 1**　(整式の除法を用いる方法)

$Q(x)$ は 2 次式なので，整式 $P(x)$ を $Q(x)$ で割った余りは 1 次以下の整式である．商を $A(x)$，余りを $ax+b$ とする．

$$P(x)=Q(x)A(x)+ax+b$$

このとき

$$\{P(x)\}^2=\{Q(x)A(x)\}^2+2(ax+b)Q(x)A(x)+(ax+b)^2$$

ところが $\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるので $\{P(x)\}^2=Q(x)B(x)$ とおける．

これから

$$Q(x)\left[B(x)-Q(x)\{A(x)\}^2-2(ax+b)A(x)\right]=(ax+b)^2$$

$Q(x)$ は 2 次式で，右辺は 2 次以下であるから，$B(x)-Q(x)\{A(x)\}^2-2(ax+b)A(x)$ は定数である．これを c とする．

$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れないので右辺は定数 0 ではない．つまり $c\neq 0$ である．よって $Q(x)$ は

$$Q(x)=\frac{1}{c}(ax+b)^2$$

と表される．$Q(x)$ は 2 次式だから $a\neq 0$ である．

このとき方程式 $Q(x)=0$ は重解 $x=-\dfrac{b}{a}$ を持つ．

解 2　(整式の整数論を用いる方法)

$Q(x)=0$ の解を α と β とし，

$$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

とおく．

$\alpha\neq\beta$ と仮定する．

このとき $x-\alpha$ と $x-\beta$ は互いに素である．よって任意の整式 $f(x)$ について $f(x)$ が $Q(x)$ で割りきれることと，$f(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れかつ $x-\beta$ で割り切れることが同値である．

もし $P(x)$ が因数 $x-\alpha$ をもたなければ，整式における素因数分解の一意性によって，$\{P(x)\}^2$ も因数 $x-\alpha$ をもたない．

よってもし $\{P(x)\}^2$ が因数 $x-\alpha$ をもてば，$P(x)$ が因数 $x-\alpha$ をもつ．

$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるので，$\{P(x)\}^2$ が因数 $x-\alpha$ と $x-\beta$ をもち，その結果 $P(x)$ が因数 $x-\alpha$ と $x-\beta$ をもつ．

ところがこれは $P(x)$ が $Q(x)$ で割りきれることを意味し，仮定と矛盾する．

よって $\alpha=\beta$ であり，2 次方程式 $Q(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもつ．

解答 30 問題 32 **解 1**　(整式の除法を用いる方法)

$A(x)$ と $B(x)$ を $C(x)$ で割った商と余りをそれぞれ $a,\ p$ と $b,\ q$ とし，

$$\begin{aligned} A(x) &= aC(x)+p \\ B(x) &= bC(x)+q \end{aligned}$$

とおく．それぞれ 1 次式であるので，$ab\neq 0$ である．

$\{A(x)\}^2+\{B(x)\}^2=\{C(x)\}^2$ より

$$a^2\{C(x)\}^2+2apC(x)+p^2+b^2\{C(x)\}^2+2bqC(x)+q^2=\{C(x)\}^2 \quad \cdots ①$$

$C(x)$ を $cx+d$ とすると，$c\neq 0$ で，両辺の x^2 の係数の比較より

$$a^2c^2+b^2c^2=c^2$$

これから

$$a^2+b^2=1$$

である．

このとき ① は

$$2apC(x)+p^2+2bqC(x)+q^2=0$$

となる．両辺の x の係数比較から

$$2apc + 2bqc = 0$$

その結果，$ap + bq = 0$ $\cdots$② となり，さらに

$$p^2 + q^2 = 0 \quad \cdots③$$

である．ここで $a \neq 0$ なので ② から

$$p = -\frac{bq}{a}$$

これを ③ に代入して

$$\begin{aligned} & \frac{b^2q^2}{a^2} + q^2 \\ = \quad & \frac{b^2 + a^2}{a^2}q^2 = \frac{1}{a^2}q^2 = 0 \end{aligned}$$

よって $q = 0$ となり，③ から $p = 0$.

$A(x)$ と $B(x)$ はともに $C(x)$ の定数倍であることが示された．

解 2 (整式の整数論を用いる方法)

$\{A(x)\}^2 + \{B(x)\}^2 = \{C(x)\}^2$ より

$$\{B(x)\}^2 = \{C(x) + A(x)\}\{C(x) - A(x)\}$$

である．

$C(x) + A(x)$ も $C(x) - A(x)$ も 1 次以下の整式であるから $\{B(x)\}^2$ の定数倍になることはない．

したがって定数 k $(k \neq 0)$ が存在して

$$\begin{aligned} C(x) + A(x) &= kB(x) \\ C(x) - A(x) &= \frac{1}{k}B(x) \end{aligned}$$

と表される．

これから

$$A(x) = \frac{k^2 - 1}{2k}B(x),\ C(x) = \frac{k^2 + 1}{2k}B(x)$$

である．

$A(x)$ も $C(x)$ も 1 次式なので $k^2 \pm 1 \neq 0$ である．

$$A(x) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}C(x),\ B(x) = \frac{2k}{k^2 + 1}C(x)$$

となり，$A(x)$ と $B(x)$ はともに $C(x)$ の定数倍であることが示された．

解答 31 問題 33

S に属する最小の数を d とする．S の任意の要素 a をとり，a を d で割り商が q，余りが r とする．

$$a = dq + r$$

$r > 0$ とする．$a - d \in S$ であり，自然数 $1 \leqq j < q$ に対して $a - jd \in S$ なら $a - jd - d = a - (j+1)d \in S$ なので，数学的帰納法で $r = a - dq \in S$ である．d が S に属する正で最小の整数という仮定に反する．よって $r = 0$ である．S のすべての要素は d の倍数である．

S に属する最大の要素を md とおく，$1 < j \leqq m$ の整数に対して $jd \in S$ なら $jd-d = (j-1)d \in S$ なので

$$md,\ (m-1)d,\ \cdots,\ d$$

はすべて S に属する．要素の個数を考え $m = n$ であり

$$S = \{nd,\ (n-1)d,\ \cdots,\ d\}$$

となる．$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の順序を適当に変えれば初項 d，公差 d の等差数列になる．
※　大小の順で並べ替えて示してもよい．

解答 32 問題 34

(1) （イ），（ロ）とも成り立たないとする．S の属する最大の数を M，最小の数を m とする．このとき $m < 0 < M$ が成り立っている．$M - m$ か $m - M$ は S に属するので，$M < M - m$ または $m - M < m$ が成り立つ．これは M の最大性または m の最小性に矛盾する．よって（イ），（ロ）のうちいずれか一方が成立する．

(2) （イ）が成り立っているとする．S の要素で正で最小のものを d とする．

S の d と異なる正の任意の要素 a をとる．

$$qd \leqq a < (q+1)d$$

となる自然数 q をとる．$r = a-qd$ とおく．$r > 0$ とする．$a-d \in S$ であり，自然数 $1 \leqq j < q$ に対して $a-jd \in S$ なら $a-jd-d = a-(j+1)d \in S$ なので，数学的帰納法で $r = a-dq \in S$ である．d が S の要素で正で最小のものであるという仮定に反する．よって $r = 0$ である．S のすべての要素は d の倍数である．

S に属する最大の要素を md とおく，$1 < j \leqq m$ の整数に対して $jd \in S$ なら $jd - d = (j-1)d \in S$ なので

$$md,\ (m-1)d,\ \cdots,\ d$$

はすべて S に属する．要素の個数は，0 が S にあるかどうかを考え $m = n$ か $m = n-1$ であり

$$S = \{nd,\ (n-1)d,\ \cdots,\ d\},\ \{(n-1)d,\ (n-2)d,\ \cdots,\ d,\ 0\}$$

のいずれかである．$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の順序を適当に変えれば初項が d または 0，公差 d の等差数列になる．

（ロ）の場合，すべての要素の絶対値をとって考えれば同様である．

※　大小の順で並べ替えて示してもよい．

解答 33 問題 35

自然数 j に対して $jd \in G$ なら $d + jd = (j+1)d \in G$ なので，数学的帰納法によって

$$\{kd \mid k \text{ は自然数 }\} \subset G$$

G の任意の要素 a をとり，a を d で割り商が q，余りが r とする．

$$a = dq + r$$

$dq \in G$ なので $r = a - dq \in S$ である．ここで $r > 0$ とすると d が G に属する正で最小の整数という仮定に反する．よって $r = 0$ である．G のすべての要素は d の倍数である．

$$G \subset \{kd \mid k \text{ は自然数 }\}$$

が示され，題意が証明された．

解答 34 問題 36

(1) $p(x) = 1$ とすれば $f(x) = f(x)p(x)$ となるので，整式 $f(x)$ は $f(x)$ の約数である．

(2) 0 と異なる整式 $f(x)$ が整式 $g(x)$ なので，(1) から $f(x)$ は $f(x)$，$g(x)$ の公約数である．$f(x)$ の約数の次数は $f(x)$ の次数以下であるから，$f(x)$ は $f(x)$ と $g(x)$ の公約数のなかで次数最大である．つまり $f(x)$ は $f(x)$，$g(x)$ の最大公約数である．

(3) 整式 $g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $q(x)$ とすると，

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x)$$

である．整式 $d(x)$ が $r(x)$, $f(x)$ の公約数なので，$d(x)$ は $g(x)$ の約数ともなり，$d(x)$ は $f(x)$，$g(x)$ の公約数でもある．

ここで $f(x)$，$g(x)$ の最大公約数を $D(x)$ とすると，

$$d(x) \text{ の次数} \leqq D(x) \text{ の次数}$$

つぎに

$$r(x) = g(x) - f(x)q(x)$$

より $D(x)$ は $r(x)$ の約数にもなり，$D(x)$ は $r(x)$, $f(x)$ の公約数となる．この結果

$$D(x) \text{ の次数} \leqq d(x) \text{ の次数}$$

あわせて

$$D(x) \text{ の次数} = d(x) \text{ の次数}$$

となり，$d(x)$ が $f(x)$，$g(x)$ の最大公約数でもあることが示された．

解答 35 問題 37

解 1

与式に $x = 1,\ x = -1$ を代入して

$$q(1)(1+1)^3 = 1,\ p(-1)(-1-1) = 1$$

これから $p(x),\ q(x)$ は，ある整式 $P(x),\ Q(x)$ を用いて

$$p(x) = (x+1)P(x) - \frac{1}{2},\ q(x) = (x-1)Q(x) + \frac{1}{8}$$

と表される．これを与式に代入して

$$(x-1)\left\{(x+1)P(x) - \frac{1}{2}\right\} + (x+1)^3\left\{(x-1)Q(x) + \frac{1}{8}\right\} = 1$$

これから

$$\begin{aligned}(x^2-1)P(x)+(x^2-1)(x+1)^2Q(x) &= 1-\frac{(x+1)^3}{8}+\frac{x-1}{2}\\ &= \frac{(x^2-1)(-x-3)}{8}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad P(x)=-(x+1)^2Q(x)-\frac{x+3}{8}$$

次数を小さくとるために，$Q(x)=0$ とおく．$P(x)=-\dfrac{x+3}{8}$.

このとき

$$\begin{aligned}p(x) &= (x+1)\left(-\frac{x+3}{8}\right)-\frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8}\\ q(x) &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

逆にこれは与式を満たす.

次に与式を満たす任意の $p(x)$, $q(x)$ と，先に求めた一組の解を与式に代入し

$$\begin{aligned}&(x-1)p(x)+(x+1)^3q(x)=1\\ &(x-1)\left(-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8}\right)+(x+1)^3\left(\frac{1}{8}\right)=1\end{aligned}$$

となる．辺々引いて

$$(x-1)\left\{p(x)+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}\right\}+(x+1)^3\left\{q(x)-\frac{1}{8}\right\}=0$$

$x-1$ と $(x+1)^3$ は互いに素なので，ある整式 $T(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}&p(x)+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}=(x+1)^3T(x)\\ &q(x)-\frac{1}{8}=-(x-1)T(x)\end{aligned}$$

と表され，またこの形のものは与式を満たす．ゆえに任意の解は

$$\left.\begin{aligned}p(x)&=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8}+(x+1)^3T(x)\\ q(x)&=\frac{1}{8}-(x-1)T(x)\end{aligned}\right\},\ (T(x)\text{ は任意の整式})$$

と表される.

最高次数の係数が 1 で次数最小のものは $T(x)=1$ のときだから

$$\begin{aligned}p(x)&=x^3+\frac{23}{8}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{8}\\ q(x)&=-x+\frac{7}{8}\end{aligned}$$

である.

解 2

$(x+1)^3$ を $x-1$ で割って

$$(x+1)^3 = (x-1)(x^2+4x+7)+8$$

したがって

$$\begin{aligned} & p(x)f(x)+q(x)g(x)=1 \\ \iff\quad & p(x)(x-1)+q(x)\left\{(x-1)(x^2+4x+7)+8\right\}=1 \\ \iff\quad & (x-1)\left\{p(x)+q(x)(x^2+4x+7)\right\}+8q(x)=1 \end{aligned}$$

したがって $q(x)$ を次数を小さく

$$\begin{cases} p(x)+q(x)(x^2+4x+7)=0 \\ 8q(x)=1 \end{cases}$$

とすればよい．このとき，

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8} \\ q(x) &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

逆にこれは与式を満たす.
(後半は上と同様である．)

解答 36 問題 38

(1) 2 次式 $a_nx^2+2b_nx+c_n$ の判別式を D_n とする.

$$\begin{aligned} D_{n+1}/4 &= {b_{n+1}}^2-a_{n+1}c_{n+1} \\ &= (b_n+2a_n)^2-4a_n\left(\frac{c_n}{4}+a_n+b_n\right) \\ &= {b_n}^2-a_nc_n=D_n/4 \end{aligned}$$

よって帰納的に

$$D_n/4=D_{n-1}/4=\cdots=D_1/4=3^2-2\cdot 4=1>0$$

したがって，2 次方程式 $a_nx^2+2b_nx+c_n=0$ は相異なる 2 次数解をもち，H_n は x 軸と 2 点で交わることが示された.

(2) P_n，Q_n の x 座標を p_n, q_n とする．p_n, q_n は 2 次方程式 $a_nx^2+2b_nx+c_n=0$ の 2 解であるから，$p_n+q_n=\dfrac{-2b_n}{a_n}$, $p_nq_n=\dfrac{c_n}{a_n}$ である．よって

$$\begin{aligned} {\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^2 &= (p_n-q_n)^2=(p_n+q_n)^2-4p_nq_n \\ &= \left(\frac{-2b_n}{a_n}\right)^2-\frac{4c_n}{a_n}=\frac{D_n}{{a_n}^2} \end{aligned}$$

(1) から $D_n = 4$ なので $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \dfrac{2}{a_n}$ である．ここで条件から $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$ であるから，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \dfrac{1}{4^{n-1}}$ である．

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

別解

(1)

$$\begin{aligned} & a_{n+1}x^2 + 2b_{n+1}x + c_{n+1} \\ = \ & 4a_nx^2 + 2(b_n + 2a_n)x + \frac{c_n}{4} + a_n + b_n \\ = \ & \frac{1}{4}\left\{a_n(4x+2)^2 + 2b_n(4x+2) + c_n\right\} \end{aligned}$$

したがって 2 次方程式 $a_nx^2 + 2b_nx + c_n = 0$ の解を $\alpha_n,\ \beta_n$ とすれば，2 次方程式 $a_{n+1}x^2 + 2b_{n+1}x + c_{n+1} = 0$ の解は

$$\alpha_n = 4\alpha_{n+1} + 2,\ \beta_n = 4\beta_{n+1} + 2$$

となる．これから $\alpha_n,\ \beta_n$ が異なる実数なら，$\alpha_{n+1},\ \beta_{n+1}$ も異なる実数である．$n = 1$ のときは $2x^2 + 6x + 4 = 2(x+1)(x+2)$ より $\alpha_1,\ \beta_1 = -1,\ -2$．数学的帰納法によって，2 次方程式 $a_nx^2 + 2b_nx + c_n = 0$ は相異なる 2 次数解をもち，H_n は x 軸と 2 点で交わることが示された．

(2)

$$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1} = |\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}| = \frac{1}{4}|\beta_n - \alpha_n| = \frac{1}{4}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$$

$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = 1$ なので $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \dfrac{1}{4^{n-1}}$ である．

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

注意: 本問は 1 次の係数を $2b$ にとっている．そこで変換を

$$\begin{aligned} & a_1 = 2, && a_{n+1} = 4a_n \\ & 2b_1 = 6, && 2b_{n+1} = 2b_n + 4a_n \\ & c_1 = 4, && c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + a_n + \frac{1}{2}(2b_n) \end{aligned}$$

とすると，2 次式の係数変換行列が $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ となる．これが変換 2.9 となるように σ をさだめると $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ となる．別解はこのことを背景に用いている．

解答 37 問題 39

(1) (i) $x,\ y$ を $s,\ u$ を用いて表すと

$$x = \frac{s+u}{2}, \quad y = \frac{s-u}{2}$$

よって

$$f(x,\ y) = \left(\frac{s+u}{2}\right)^2 + \left(\frac{s+u}{2}\right)\left(\frac{s-u}{2}\right) + \left(\frac{s-u}{2}\right)^2 = \frac{3s^2+u^2}{4}$$

(ii) $f(x,\ y) = f\left(\dfrac{s+u}{2},\ \dfrac{s-u}{2}\right)$ より, $f(x,\ y)$ は $\dfrac{s+u}{2},\ \dfrac{s-u}{2}$ の多項式となるから s と u との多項式で表される.

(iii)

$$f(x,\ y) = \sum_{i,\ j} a_{ij} x^i y^j$$

とおくと, $f(x,\ y) = f(-x,\ y)$ が恒等的に成り立つとき

$$a_{ij} = a_{ij} \cdot (-1)^i$$

よって, i が奇数のとき $a_{ij} = 0$
したがって, $f(x,\ y)$ は $x^2,\ y$ の多項式, つまり y と v の多項式となる.

(iv) (iii) と同様において考えると $f(x,\ y) = f(y,\ x)$ が恒等的に成り立つとき

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f(x,\ y) &= \sum_i a_{ii}(xy)^i + \sum_{i<j} a_{ij}(x^i y^j + x^j y^i) \\ &= \sum_i a_{ii} t^i + \sum_{i<j} a_{ij}(xy)^i (y^{j-i} + x^{j-i}) \\ &= \sum_i a_{ii} t^i + \sum_{i<j} a_{ij} t^i (x^{j-i} + y^{j-i}) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

ここで $x^0 + y^0 = 2,\ x + y = s$ であるので, $x^n + y^n,\ x^{n+1} + y^{n+1}$ が $s,\ t$ の多項式であると仮定すると

$$\begin{aligned} x^{n+2} + y^{n+2} &= (x^{n+1} + y^{n+1})(x+y) - xy(x^n + y^n) \\ &= (x^{n+1} + y^{n+1})s - t(x^n + y^n) \end{aligned}$$

より, $x^{n+2} + y^{n+2}$ も $s,\ t$ の多項式となるから, 帰納的に $x^n + y^n$ は $s,\ t$ の多項式となる.

したがって, $(*)$ により $f(x,\ y)$ は $s,\ t$ の多項式となる.

別解

$f(x,\ y)$ の各単項式の x の次数と y の次数の和をその単項式の次数とよび, その中で最大のものを $f(x,\ y)$ の次数とよぶ. $f(x,\ y) = f(y,\ x)$ が成り立つような $f(x,\ y)$ の次数 n につ

いての帰納法で示す．$n=0,\ 1$ のときは明らかに成立する．
$n=1,\cdots,k$ で成立するとし，$f(x,\ y)$ を $k+1$ 次対称式とする．

$$F(x,\ y)=f(x,\ y)-f(x+y,\ 0)$$

とおく．これも $x,\ y$ の対称式である．

$$\begin{aligned}F(0,\ y) &= f(0,\ y)-f(y,\ 0) = f(y,\ 0)-f(y,\ 0) = 0\\ F(x,\ 0) &= f(x,\ 0)-f(x,\ 0) = 0\end{aligned}$$

よって，$F(x,\ y)$ は xy で割り切れる．
$F(x,\ y)=xyG(x,\ y)$ とおくと，$G(x,\ y)$ は対称式．そして，$G(x,\ y)$ の次数は $k-1$ 次以下である．

したがって，$G(x,\ y)$ は s と t の式である．
よって，$f(x,\ y)=xyG(x,\ y)+f(x+y,\ 0)$ も $s,\ t$ の多項式である．
$n=k+1$ でも成立し，題意が示された．

(2)　(i) $f(x,\ y)=f(x+y,\ x-y)$ が恒等的に成り立つとき

$$\begin{aligned}f(x,\ y) &= f(x+y,\ x-y) = f((x+y)+(x-y),\ (x+y)-(x-y))\\ &= f(2x,\ 2y)\end{aligned}$$

(ii) (1) の (iii) と同様において考えると，$f(x,\ y)=f(2x,\ 2y)$ が恒等的に成り立つとき

$$a_{ij}=2^{i+j}a_{ij}$$

よって，$i,\ j$ の少なくとも一方が 0 でないとき，$a_{ij}=0$．
したがって，$f(x,\ y)$ は定数である．

解答 38 問題 40
【解法 1 】
2 つの 2 次式 $x^2+ax+b,\ ax^2+bx+1$ の終結式は

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & a & b & \\ & 1 & a & b\\ a & b & 1 & \\ & a & b & 1\end{vmatrix} &= (1-ab)^2-(b-a^2)(a-b^2)\\ &= a^3+b^3+1-3ab\\ &= (a+b+1)(a^2+b^2+1-a-b-ab)\end{aligned}$$

である．共通解をもつ条件は終結式が 0 となることである．

(i) $a+b+1=0$ のとき．明らかに $x=1$ が共通解．

(ii) $a^2+b^2+1-a-b-ab=0$ のとき．

$$a^2+b^2+1-a-b-ab=\frac{(a-b)^2+(b-1)^2+(1-a)^2}{2}$$

で $a,\ b$ は実数なので $a=b=1$．このとき両式は一致し，共通解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$．

【解法２】

共通解をもつとしてそれを α とおく．

$$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots① \\ a\alpha^2+b\alpha+1=0 & \cdots② \end{cases}$$

① $\times a-$ ② より

$$(a^2-b)\alpha+ab-1=0$$

(i) $a^2-b=0$ のとき．$ab-1=0$ も成り立ち b を消去すると $a^3=1$．a が実数なので $a=1$．$b=1$．このとき両式は一致し，共通解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$．

(ii) $a^2-b\neq 0$ のとき．$\alpha=\dfrac{1-ab}{a^2-b}$ が必要である．これから

$$\left(\frac{1-ab}{a^2-b}\right)^2+a\left(\frac{1-ab}{a^2-b}\right)+b=0$$

この分母を払い整理すると，

$$a^3+b^3+1-3ab=(a+b+1)(a^2+b^2+1-a-b-ab)=0$$

$a^2+b^2+1-a-b-ab=\dfrac{(a-b)^2+(b-1)^2+(1-a)^2}{2}$ より，係数実数でこれが 0 になるのは $a=b=1$ のときだが，$a^2-b\neq 0$ に反する．よって $a+b+1=0$．明らかに $x=1$ が共通解．

【解法３】

共通解をもつとしてそれを α とおく．

$$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots① \\ a\alpha^2+b\alpha+1=0 & \cdots② \end{cases}$$

② $-$ ① より

$$\begin{aligned} & a\alpha(\alpha-1)+b(\alpha-1)-(\alpha+1)(\alpha-1) \\ = \ & (\alpha-1)(a\alpha-\alpha+b-1)=0 \end{aligned}$$

(i) $\alpha=1$ のとき．条件は $a+b+1=0$.

(ii) $a\alpha-\alpha+b-1=0$ のとき．

$a=1$ なら $b=1$ で，このとき両式は一致し，共通解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$．

$a\neq 1$ なら $\alpha=\dfrac{1-b}{a-1}$ が必要.

$$\left(\frac{1-b}{a-1}\right)^2+a\left(\frac{1-b}{a-1}\right)+b=0$$

分母を払い整理すると

$$a^2+b^2+1-a-b-ab=0$$

解法２と同様に $a=b=1$ となり，$a\neq 1$ に反する．

【解法４】

共通解をもつとしてそれを α とおく．

$$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots① \\ a\alpha^2+b\alpha+1=0 & \cdots② \end{cases}$$

① $\times\alpha-$② より

$$\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$$

(i) $\alpha=1$ のとき．条件は $a+b+1=0$.

(ii) $\alpha^2+\alpha+1=0$ のとき．$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ または $\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$．係数が実数なので一方が共通解なら他方も共通解である．

第 1 の方程式で解と係数の関係から

$$-a=\alpha+\overline{\alpha},\ b=\alpha\cdot\overline{\alpha}$$

第 2 の方程式で解と係数の関係から

$$-\frac{b}{a}=\alpha+\overline{\alpha},\ \frac{1}{a}=\alpha\cdot\overline{\alpha}$$

$\alpha+\overline{\alpha}=-1$，$\alpha\cdot\overline{\alpha}=1$ より条件は $a=b=1$.

解答 39 問題 41

(1)

$$\begin{aligned} A^2 &= tA+A(A-tE) = tA+\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & q \\ r & -p \end{pmatrix} \\ &= tA+\begin{pmatrix} -ps+qr & 0 \\ 0 & -ps+qr \end{pmatrix} = tA-dE \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1}A+b_{n+1}E &= A^{n+1} = AA^n = A(a_nA+b_nE) \\ &= a_nA^2+b_nA = (ta_n+b_n)A-da_nE \end{aligned}$$

$$\therefore\quad (a_{n+1}-ta_n-b_n)A=-(b_{n+1}+da_n)E$$

ここで, $a_{n+1}-ta_n-b_n\neq0$ なら, $A=\dfrac{-(b_{n+1}+da_n)}{a_{n+1}-ta_n-b_n}E$ となるので仮定に反する．したがって

$$a_{n+1}-ta_n-b_n=0,\ b_{n+1}+da_n=0 \qquad \therefore \quad \begin{cases} a_{n+1}=ta_n+b_n \\ b_{n+1}=-da_n \end{cases}$$

(3) $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, $t=3,\ d=2$ である．つまり

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+b_n & \cdots① \\ b_{n+1}=-2a_n & \cdots② \end{cases}$$

① ＋② から

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n \qquad \therefore \quad a_n+b_n=a_1+b_1=1+0$$

$b_n=1-a_n$ を① に代入する.

$$a_{n+1}=3a_n+1-a_n=2a_n+1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$
$$\therefore \quad a_n+1=2^{n-1}(a_1+1)=2^n$$
$$\therefore \quad \begin{cases} a_n=2^n-1 \\ b_n=-2^n+2 \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} A^n &= (2^n-1)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+(-2^n+2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\cdot 2^n+3 & -2\cdot 2^n+2 \\ 3\cdot 2^n-3 & 3\cdot 2^n-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解答 40 問題 42

(1)

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n\cdot x \\ &= \{(x^2-x+d)Q_n(x)+a_nx+b_n\}\cdot x \\ &= (x^2-x+d)xQ_n(x)+a_nx^2+b_nx \\ &= (x^2-x+d)\{xQ_n(x)+a_n\}+a_nx+b_nx-da_n \\ &= (x^2-x+d)Q_{n+1}(x)+a_{n+1}x+b_{n+1} \end{aligned}$$

よって, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して, $a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=-da_n$ が成り立つ.

(2) $n=1$ のときは $a_1=1,\ b_1=0$ より成立.
$A^n=a_nA+b_nE$ とする．このとき

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A(a_nA+b_nE) \ = \ a_nA^2+b_nA \\ &= a_n(A-dE)+b_nA \ = \ (a_n+b_n)A-da_nE \\ &= a_{n+1}A+b_{n+1}E \end{aligned}$$

よって, 帰納法により自然数 n に対して $A^n=a_nA+b_nE$

別解 1

$n=1$ のときは上と同様.
$n=2$ のとき, $a_2=1+0=1,\ b_2=-d$. つまり, $A^2=A-dE$ でなければならない．一方 $A^2-A+dE=O$ より, $A^2=A-dE=O$ なので成立.
$n,\ n+1$ で成立するとする.
$A^2-A+dE=O$ より, $A^{n+2}-A^{n+1}+dA^n=O$ ．よって

$$\begin{aligned} A^{n+2} &= A^{n+1}-dA^n \ = \ a_{n+1}A+b_{n+1}E-d(a_nA+b_nE) \\ &= a_{n+1}A+b_{n+1}E-da_nA-db_nE \ = \ a_{n+1}A-da_nE+b_{n+1}A-db_nE \\ &= (a_{n+1}+b_{n+1})A-d(a_n+b_n)E \ = \ (a_{n+1}+b_{n+1})A-da_{n+1}E \\ &= a_{n+2}A+b_{n+2}E \end{aligned}$$

よって, 帰納法により自然数 n に対して, $A^n = a_nA + b_nE$

別解 2

$(aA^n)(bA^m) = abA^{n+m}$ なので行列 A の多項式の積は文字の場合の展開と同様にできる.
よって，恒等式 $f(x) = g(x)$ に対して $f(A) = g(A)$ が成り立つ.
したがって, $x^n = (x^2 - x + d)Q_n(x) + a_nx + b_n$ より

$$A^n = a_nA + b_nE$$

(3) ケイレイ・ハミルトンの定理から

$$A^2 - (1+0)A + (1\cdot 0 - 2\cdot 3)E = A^2 - A - 6E = O$$

$$x^n = (x^2 - x - 6)Q_n(x) + a_nx + b_n = (x-3)(x+2)Q_n(x) + a_nx + b_n$$

ここで, $x = 3,\ x = -2$ を代入する.

$$3^n = a_n \cdot 3 + b_n, \quad (-2)^n = a_n \cdot (-2) + b_n$$

これから

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5}, \quad b_n = \frac{2\cdot 3^n + 3(-2)^n}{5}$$

よって, (2) から

$$\begin{aligned} A^n &= a_nA + b_nE \\ &= \frac{3^n - (-2)^n}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2\cdot 3^n + 3(-2)^n}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{3\cdot 3^n + 2\cdot(-2)^n}{5} & \dfrac{2\cdot 3^n - 2(-2)^n}{5} \\ \dfrac{3\cdot 3^n - 3(-2)^n}{5} & \dfrac{2\cdot 3^n + 3(-2)^n}{5} \end{pmatrix} \\ &\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

解答 41 問題 43

(1) $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$ より, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とすればよい.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ とおく.
$\begin{pmatrix} -k & 1 \\ 2 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = O$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = O$ 以外の解をもつので

$$\Delta\begin{pmatrix} -k & 1 \\ 2 & 1-k \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - k - 2 = 0 \qquad \therefore \quad k = 2,\ -1$$

$$\begin{cases} k = 2 \text{ のとき} & \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = O \text{ より}, \quad x = 2 \\ k = -1 \text{ のとき} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = O \text{ より}, \qquad x = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a = 2,\ b = -1,\ u = 2,\ v = -1$$

(3) $AP = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となるので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ である．ここで

$$\left(P^{-1}AP\right)^{n-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\left(P^{-1}AP\right)^{n-1} = P^{-1}A^{n-1}P \iff A^{n-1} = P(P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} &= A^{n-1}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1}(f_1+f_2) \\ (-1)^{n-1}(2f_1-f_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$f_n = \frac{1}{3}\{2^{n-1} + 2\cdot(-1)^{n-1}\}f_1 + \frac{1}{3}\{2^{n-1} - (-1)^{n-1}\}f_2$$

解答 42 問題 44

(1)

$$\begin{aligned} \alpha u_{n+3} + \beta v_{n+3} &= \alpha(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}) + \beta(v_n + v_{n+1} + v_{n+2}) \\ &= (\alpha u_n + \beta v_n) + (\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + (\alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2}) \end{aligned}$$

つまり，数列 $\{\alpha u_n + \beta v_n\}$ は性質 (F) を持つ．

(2)

$$\alpha = y_1,\ \beta = y_2,\ \gamma = y_3$$

とおく．このとき

$$y_n = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n$$

となることを数学的帰納法で示す．

$n = 1,\ 2,\ 3$ については 数列 $\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$ の条件から成立する．

$n,\ n+1,\ n+2$ で成立したとする．

$$\begin{aligned} y_{n+3} &= y_n + y_{n+1} + y_{n+2} \\ &= (\alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n) + (\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1} + \gamma c_{n+1}) + (\alpha a_{n+2} + \beta b_{n+2} + \gamma c_{n+2}) \\ &= \alpha(a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) + \beta(b_n + b_{n+1} + b_{n+2}) + \gamma(c_n + c_{n+1} + c_{n+2}) \\ &= \alpha a_{n+3} + \beta b_{n+3} + \gamma c_{n+3} \end{aligned}$$

ゆえに $n+3$ でも成立し，帰納法によってすべての n で成立する．

(3) ある実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を選んで

$$h_n = \alpha d_n + \beta e_n + \gamma f_n$$

と表すことができたとする．

$$\begin{aligned}(h_1,\ h_2,\ h_3) &= (\alpha d_1 + \beta e_1 + \gamma f_1,\ \alpha d_2 + \beta e_2 + \gamma f_2,\ \alpha d_3 + \beta e_3 + \gamma f_3)\\ &= \alpha(d_1,\ d_2,\ d_3) + \beta(e_1,\ e_2,\ e_3) + \gamma(f_1,\ f_2,\ f_3)\end{aligned}$$

つまり空間ベクトルの間に

$$(1,\ 1,\ 1) = \alpha(0,\ 1,\ 1) + \beta(1,\ 1,\ 0) + \gamma(1,\ 0,\ -1)$$

という関係がある．ところが $(1,\ 0,\ -1) = (1,\ 1,\ 0) - (0,\ 1,\ 1)$ なので

$$(1,\ 1,\ 1) = (\alpha - \gamma)(0,\ 1,\ 1) + (\beta + \gamma)(1,\ 1,\ 0)$$

つまり

$$1 = \beta + \gamma,\ 1 = \alpha + \beta,\ 1 = \alpha - \gamma$$

ところが第 1 式と第 3 式から $2 = \alpha + \beta$ となり，第 2 式と矛盾した．

ゆえにどのように $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を選んでも 数列 $\{h_n\}$ を題意のように表すことはできない

解答 43 問題 45

(1) 行列 $xE - A = \begin{pmatrix} x-4 & -3 \\ -2 & x+1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないので

$$\Delta(xE - A) = (x-4)(x+1) - 6 = x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2) = 0$$

したがって $\alpha = 5,\ \beta = -2$ である．よって

$$P = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ Q = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}PQ &= -\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\\ &= -\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P^2 &= \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2\\ &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 42 & 21 \\ 14 & 7 \end{pmatrix} = P\end{aligned}$$

この等式の両辺に P^n を乗じて

$$P^{n+1} = P^n$$

$$\therefore\quad P^n = P = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$$

を数学的帰納法で示す.

$n = 1$ のとき.

$$\begin{aligned} \alpha P + \beta Q &= \frac{5}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 28 & 21 \\ 14 & -7 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

より成立.

$n = k$ のとき $A^k = \alpha^k P + \beta^k Q$ とする. (1) と同様に $QP = O$ でもある.

$$\begin{aligned} \therefore \quad A^{k+1} &= (\alpha^k P + \beta^k Q)(\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha^{k+1} P^2 + \alpha^k \beta PQ + \alpha \beta^k QP + \beta^{k+1} Q^2 \\ &= \alpha^{k+1} P + \beta^{k+1} Q \end{aligned}$$

よって $n = k + 1$ でも成立し，題意が示された.

別解

※上の計算では単に計算するだけなので，もう少しなぜこのようになるのかわかるように証明しておく．冒頭の部分は同じ.

(1) 解と係数の関係から $\alpha + \beta = 3,\ \alpha\beta = -10$ である.

$$\begin{aligned} PQ &= -\frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}\begin{pmatrix} \alpha + 1 & 3 \\ 2 & \alpha - 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta + 1 & 3 \\ 2 & \beta - 4 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}\begin{pmatrix} (\alpha + 1)(\beta + 1) + 6 & 3(\alpha + \beta) - 9 \\ 2(\alpha + \beta) - 6 & 6 + (\alpha - 4)(\beta - 4) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P + Q &= \frac{1}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} \alpha + 1 & 3 \\ 2 & \alpha - 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\beta - \alpha}\begin{pmatrix} \beta + 1 & 3 \\ 2 & \beta - 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha}\begin{pmatrix} \beta - \alpha & 0 \\ 0 & \beta - \alpha \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

である．したがって

$$P^2 = P(E - Q) = P - PQ = P$$

ゆえに本解と同様に $P^n = P$ である.

(3)

$$QP = (E - P)P = P - P^2 = O$$

も同様である.

ここで

$$\begin{aligned} \alpha P + \beta Q &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} \alpha + 1 & 3 \\ 2 & \alpha - 4 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{\beta - \alpha}\begin{pmatrix} \beta + 1 & 3 \\ 2 & \beta - 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha}\begin{pmatrix} \beta^2 + \beta - \alpha^2 - \alpha & 3(\beta - \alpha) \\ 2(\beta - \alpha) & \beta^2 - 4\beta - \alpha^2 + 4\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta + \alpha + 1 & 3 \\ 2 & \beta + \alpha - 4 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

$PQ = QP = O$ なので

$$\begin{aligned} A^n &= (\alpha P + \beta Q)^n \\ &= (\alpha P + \beta Q)(\alpha P + \beta Q)\cdots(\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha^n P^n + \beta^n Q^n \\ &= \alpha^n P + \beta^n Q \end{aligned}$$

解答 44　問題 46

(1) 整数 $N = n + k$ は上段の n 番目か下段の k 番目に来る．したがって $n > k \geqq 2$ のとき，

上段の n 番目に N が来る場合，そのカードをのぞいた $N - 1$ 枚を上段 $n - 1$, 下段 k の枠におく置き方と同じだけある.

下段の k 番目に N が来る場合，そのカードをのぞいた $N - 1$ 枚を上段 n , 下段 $k - 1$ の枠におく置き方と同じだけある.

これらの並べ方には互いに重りがない.

$$\therefore \quad f(n,\ k) = f(n - 1,\ k) + f(n,\ k - 1)$$

(2) 上段も下段も n 枠ある場合． $N = 2n$ は下段の右端にあるしかない.

したがって $n \geqq 2$ のとき，それを取り除いて，上段 n 枠，下段 $n - 1$ 枠にしても並べ方は変わらない.

$$\therefore \quad f(n,\ n) = f(n,\ n - 1)$$

(3) $N = n + k$ $(N \geqq 2)$ に関する数学的帰納法で示す.

$N = 2$ のとき．$(n,\ k) = (1,\ 1)$ なので $f(1,\ 1) = 1$．一方

$$_{1+1}\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{1+1} = 1$$

なので成立する.

$N = M - 1$ で成立するとする.

$N = M$ のとき．$M = n + k$ とし，k によって場合に分け示す．

(i)　$k = 1$ のとき．下段には 2 から $N = n + 1$ までのどの数字が来てもよい．

$$\therefore \quad f(n,\ 1) = n$$

一方

$$_{n+1}\mathrm{C}_1 \frac{n-1+1}{n+1} = (n+1)\frac{n}{n+1} = n$$

ゆえに $k = 1$ のときは成立する．

※　ここは帰納法の仮定は使っていない．

(ii)　$k = n$ のとき．(2) の $f(n,\ n-1)$ に数学的帰納法の仮定を適用して

$$\begin{aligned} f(n,\ n) &= f(n,\ n-1) \\ &= {}_{n+n-1}\mathrm{C}_{n-1} \cdot \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{2}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{1}{n+1} = f(n,\ n) \end{aligned}$$

より成立．

(iii)　$n > k \geqq 2$ のとき．(1) から

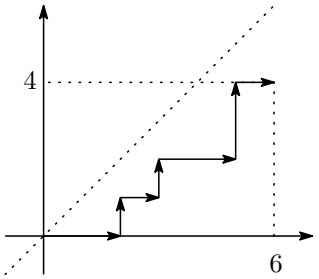
$$\begin{aligned} f(n,\ k) &= f(n-1,\ k) + f(n,\ k-1) \\ &= {}_{n-1+k}\mathrm{C}_k \frac{n-k}{n} + {}_{n+k-1}\mathrm{C}_{k-1} \frac{n-k+2}{n+1} \\ &= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \cdot \frac{n-k}{n} + \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \cdot \frac{n-k+2}{n+1} \\ &= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(k-1)!} \left\{ \frac{n-k}{kn} + \frac{n-k+2}{n(n+1)} \right\} \\ &= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(k-1)!} \cdot \frac{(n+k)(n-k+1)}{kn(n+1)} \\ &= \frac{(n+k)!}{n!k!} \cdot \frac{n-k+1}{n+1} = {}_{n+k}\mathrm{C}_k \frac{n-k+1}{n+1} \end{aligned}$$

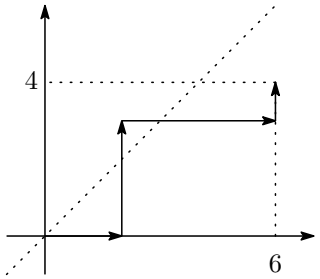
で成立．M のとき k のすべての場合で成立した．よってすべての N で成立する．

注意　一つの数の配置に対し，上段を→，下段を↑として数の順に xy 平面上を原点から動くと，原点から $(n,\ k)$ への領域 $y \leqq x$ を通る最短経路が得られる．逆に，このような最短経路から，条件を満たす配置が得られる．よって $f(n,\ k)$ はカタラン数そのものである．

上段	1	2	4	6	7	10
下段	3	5	8	9		

上段	1	2	6	7	8	9
下段	3	4	5	10		





また

$$f(n,\ k) = {}_{n+k}\mathrm{C}_k \frac{n-k+1}{n+1} = {}_{n+k}\mathrm{C}_k - {}_{n+k}\mathrm{C}_{k-1}$$

と変形される．これは原点から $(n,\ k)$ への最短経路の総数から，領域 $y > x$ を通る経路を引いた式である．

解答 45　問題 47 f はベクトル $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ を

$$f\left(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2\right) = x\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 4x+y \end{pmatrix}$$

に写す．f は成分の変換としては行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ で表される．よって f^{-1} は成分の変換としては

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

で表される．つまり，f^{-1} は

$$f(\mathbf{e}_1) = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},\ f(\mathbf{e}_2) = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定まる線型写像である．

解答 46　問題 48

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とおく．

$$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

より $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって f をこの基底で表すと対応する行列は

$$P^{-1}AP = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$$

(2) $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ である．よって f をこの基底で表すと対応する行列は

$$P^{-1}AP=-\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 0 & -9\end{pmatrix}$$

解答 47　問題 49

(1) $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ で $P^2=E$ なので，求める行列は

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(2) $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ である．$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ なので，求める行列は

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5 & 6\\ -3 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

解答 48　問題 50

(1)

$$\begin{vmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3\end{vmatrix}$$ (b_3をくくり出す)

$$=b_3\begin{vmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3\end{vmatrix}$$ (第 3 列に b_i, $(i=1,2)$ をかけ i 列から引く)

$$=b_3\begin{vmatrix}0 & 0 & a_1\\ a_1b_2-a_2b_1 & 0 & a_2\\ a_1b_3-a_3b_1 & a_2b_3-a_3b_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=a_1b_3(a_2b_1-a_1b_2)(a_3b_2-a_2b_3)$$

一般化

$$\begin{vmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n\end{vmatrix}=a_1b_n\prod_{i=2}^{n}(a_i2b_{i-1}-a_{i-1}b_i)$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_1 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_0 + {}_2\mathrm{C}_1 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_0 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_1\mathrm{C}_0 + {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_0 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_2\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_1\mathrm{C}_0 & {}_2\mathrm{C}_0 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_1\mathrm{C}_0 & {}_2\mathrm{C}_0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_1\mathrm{C}_0 + {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_0 + {}_2\mathrm{C}_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_1\mathrm{C}_0 & {}_2\mathrm{C}_0 \\ 0 & {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & {}_2\mathrm{C}_1 \end{vmatrix} = 1$$

一般化

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_1 & \cdots & {}_{n+1}\mathrm{C}_1 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_2 & \cdots & {}_{n+2}\mathrm{C}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_n\mathrm{C}_n & {}_{n+1}\mathrm{C}_n & {}_{n+2}\mathrm{C}_n & \cdots & {}_{2n}\mathrm{C}_n \end{vmatrix} = 1$$

※　この式の値を D_n とすると，$D_n = D_{n-1}$ となり示せる．

(3) 左辺の x_i に x_j を代入すれば行列式は 0 になる．よって左辺は $x_i - x_j$ で割りきれる．左辺は $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$ で割りきれる．$x_1^2 x_2$ の係数比較から

$$\text{左辺} = -(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$$

一般化

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

これを「Vandermonde の行列式」という．

解答 49　問題 51

（1）　最小多項式は

$$t^2 - 4t - 1$$

である．$t^2 - 4t - 1 = 0$ の 2 根は $2 \pm \sqrt{5}$ である．t^8 を最小多項式で割った余りを $pt + q$ とする．

$$t^8 = (t^2 - 4t - 1)Q(t) + pt + q$$

とおく．

$$(2 \pm \sqrt{5})^8 = p(2 \pm \sqrt{5}) + q$$

より

$$p=\frac{(2+\sqrt{5})^8-(2-\sqrt{5})^8}{2\sqrt{5}},\quad q=\frac{(2+\sqrt{5})^7-(2-\sqrt{5})^7}{2\sqrt{5}}$$

$$A^8=pA+qE=\frac{(2+\sqrt{5})^8-(2-\sqrt{5})^8}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}+\frac{(2+\sqrt{5})^7-(2-\sqrt{5})^7}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

（２）　最小多項式は t^3-2t^2+t.

$$t^8=(t^3-2t^2+t)Q(t)+pt^2+qt+r$$

とおく．$t^3-2t^2+t=t(t-1)^2$ から $t=0,\ 1$ を代入し，さらに微分して $t=1$ を代入することにより，余りは $7t^2-6t$ である．

$$B^8=7B^2-6B=(7B-6E)B=\begin{pmatrix}24&45&66\\-22&-41&-60\\7&13&19\end{pmatrix}$$

解答 50　問題 52

（１）　特性方程式は

$$(t-1)(t^2+1)=0$$

となり，固有値は $1,\ i,\ -i$ である．それぞれ固有ベクトルを求める．

$t=1$ のとき，

$$A-E=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&-2&1\\4&-12&0\end{pmatrix}$$

これから

$$\begin{cases}2y+2z=0\\x-2y+z=0\\4x-12y=0\end{cases}$$

x と y について解いて

$$x=-3z,\ y=-z$$

対応する固有ベクトル次のもにとる．

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$t=\pm i$ のとき，

$$A\mp iE=\begin{pmatrix}1\mp i&2&2\\1&-1\mp i&1\\4&-12&1\mp i\end{pmatrix}$$

これから

$$\begin{cases}(1\mp i)x+2y+2z=0\\x-(1\pm i)y+z=0\\4x-12y+(1\mp i)z=0\end{cases}$$

x と y について解いて

$$x = \frac{-2 \mp i}{2} z,\ y = \frac{-1 \mp i}{4} z$$

対応する固有ベクトル次のもにとる．

$$\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \pm 2i \\ 1 \pm i \\ -4 \end{pmatrix}$$

変換行列として

$$P = (\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 4+2i & 4-2i \\ 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

このとき標準形は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

である．

（２）　特性方程式を Asir で因数分解すると

```
[0] B-tE=newmat(3,3,[[-4-t,9,-4],[-9,18-t,-8],[-15,29,-13-t]]);
[ -t-4 9 -4 ][ -9 -t+18 -8 ][ -15 29 -t-13 ]
[1] fctr(det(B));
[[-1,1],[t-1,2],[t+1,]]
```

特性方程式は

$$(t-1)^2(t+1) = 0$$

となり，固有値は 1 (重根), -1 である．

$t = -1$ のとき．$B + E = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -4 \\ -9 & 19 & -8 \\ -15 & 29 & -12 \end{pmatrix}$ である．対応する固有ベクトルを次のもにとる．

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$t = 1$ のとき．$B - E = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -4 \\ -9 & 17 & -8 \\ -15 & 29 & -14 \end{pmatrix}$ で，また Asir で計算すると，$(B-E)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 12 & -24 & 12 \\ 24 & -48 & 24 \end{pmatrix}$ である．これから

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

としてみる．

$$Q = (\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

とする．

$$Q^{-1} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & -2a & a \\ -3a & 7a & -3a \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，$a = -1$ にとる．つまり変換行列を $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき標準形は次のものになる．

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答 51 問題 53

(1)

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

の両辺を平方すると

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|^2 + \frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} + \left|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|^2 = \left|\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right|^2$$

$$\therefore \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\frac{1}{2}$$

他も同様である．よって，三つのベクトルの互いになす角は何れも $120°$

(2) 右辺が 0 以下なら明か．右辺が正とする．このとき不等式は両辺の平方の不等式

$$|\vec{a} - \vec{x}|^2 \geqq \left||\vec{a}| - \vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|^2$$

と同値である．ここで $\vec{x}$ と $\vec{a}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned} & |\vec{a} - \vec{x}|^2 - \left||\vec{a}| - \vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|^2 \\ = \ & -2\vec{a}\cdot\vec{x} + |\vec{x}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{x} - \left|\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|^2 \\ = \ & |\vec{x}|^2 - \frac{(\vec{x}\cdot\vec{a})^2}{|\vec{a}|^2} = |\vec{x}|^2 - |\vec{x}|^2\cos^2\theta \geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに題意は示された．

(3) △ABC はすべての内角が 120° 未満であるから，△ABC の内部の点 X で

$$\angle \mathrm{AXC} = \angle \mathrm{CXB} = \angle \mathrm{BXA} = 120^\circ$$

となる点がとれる．この X が題意をみたすことを示す．このとき

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{XA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{XB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{XB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{XC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XC}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{XC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XC}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{XA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|} = -\frac{1}{2}$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\overrightarrow{\mathrm{XA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{XB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{XC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XC}}|} \right|^2 \\ = & \left| \frac{\overrightarrow{\mathrm{XA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|} \right|^2 + \left| \frac{\overrightarrow{\mathrm{XB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|} \right|^2 + \left| \frac{\overrightarrow{\mathrm{XC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XC}}|} \right|^2 + \\ & 2\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{XA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{XB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{XB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{XC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XC}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{XC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XC}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{XA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|} \right) = 0 \end{aligned}$$

となる．平面上の任意の点 Y をとる．(2) から

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{YA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{XA}} - \overrightarrow{\mathrm{XY}}| & \geqq |\overrightarrow{\mathrm{XA}}| - \overrightarrow{\mathrm{XY}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{XA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|} \\ |\overrightarrow{\mathrm{YB}}| & \geqq |\overrightarrow{\mathrm{XB}}| - \overrightarrow{\mathrm{XY}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{XB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|} \\ |\overrightarrow{\mathrm{YC}}| & \geqq |\overrightarrow{\mathrm{XC}}| - \overrightarrow{\mathrm{XY}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{XC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{XC}}|} \end{aligned}$$

辺々加えることにとり

$$|\overrightarrow{\mathrm{YA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{YB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{YC}}| \geqq |\overrightarrow{\mathrm{XA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{XB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{XC}}| - \overrightarrow{\mathrm{XY}} \cdot \overrightarrow{0} = |\overrightarrow{\mathrm{XA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{XB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{XC}}|$$

よってこの X が題意をみたすことが示された．

解答 52 問題 54

(1)

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|},\ \overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|},\ \overrightarrow{c} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}$$

とおく．おいた 3 ベクトルの大きさは 1 である．

$$1 = |\overrightarrow{a}|^2 = |-\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}|^2 = |\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2 + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 2 + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$$

より $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = -\dfrac{1}{2}$．よって $\angle \mathrm{BPC} = \dfrac{2\pi}{3}$．対称性から他も同じ値．よって

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{APC} = \angle \mathrm{BPC} = \frac{2\pi}{3}$$

(2) $x=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$z=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ とおく．△PAB での余弦定理から

$$1=x^2+y^2-2xy\cos\frac{2\pi}{3}=x^2+y^2+xy$$

他も同様なので，連立方程式

$$\begin{aligned}x^2+y^2+xy&=1 \quad \cdots①\\ y^2+z^2+yz&=4 \quad \cdots②\\ z^2+x^2+zx&=3 \quad \cdots③\end{aligned}$$

を得る．① $\times 4-$ ②，① $\times 3-$ ③ より

$$\begin{aligned}4x^2+3y^2-z^2+4xy-yz&=0\\ 2x^2+3y^2-z^2+3xy-zx&=0\end{aligned}$$

$s=\dfrac{y}{x}$，$t=\dfrac{z}{x}$ とおくと，

$$\begin{aligned}4+3s^2-t^2+4s-st&=0 \quad \cdots④\\ 2+3s^2-t^2+3s-t&=0 \quad \cdots⑤\end{aligned}$$

④ $-$ ⑤ から

$$2+s-st+t=0$$

を得る．$s=1$ は満たさないので $t=\dfrac{s+2}{s-1}$．これを ⑤ に代入して，$(s-1)^2$ をかけることにより，

$$2(s-1)^2+3s^2(s-1)^2-(s+2)^2+3s(s-1)^2-(s+2)(s-1)=0$$

これを整理して

$$3s(s-1)^2(s+1)-9s=3s\{(s-1)^2(s+1)-3\}=3s(s-2)(s^2+s+1)=0$$

よって $s=2$．この結果 $y=2x$ である．これを ① に代入して

$$x^2+4x^2+2x^2=1,\quad \therefore\quad x=\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$s=2$ のとき $t=4$ で $z=4x$ である．よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\frac{1}{\sqrt{7}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\frac{2}{\sqrt{7}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\frac{4}{\sqrt{7}}.$$

解答 53　問題 55

直線 AB の式は

$$\begin{aligned}y&=\frac{-2-(-2t)}{\dfrac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}-\dfrac{2t}{3}}\left(x-\frac{2t}{3}\right)-2t\\ &=3(t^2-1)x-2t^3\quad (0\leqq t\leqq 1)\end{aligned}$$

ここで

$$a(t)=3(t^2-1),\ b(t)=-1,\ c(t)=-2t^3$$

とおくと，直線 AB は

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$$

直線 AB の包絡線を $(x(t),\ y(t))$ とおく． これは

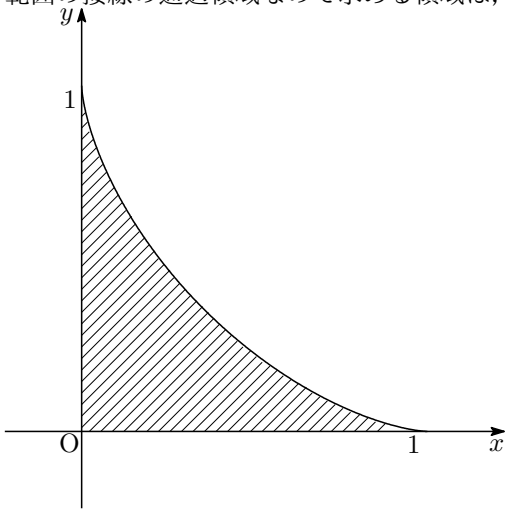
$$\begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0 \end{cases}$$

をみたす．$a'(t) = 6t,\ b'(t) = 0,\ c'(t) = -6t^2$ なので

$$\begin{cases} 3(t^2-1)x(t) - y(t) - 2t^3 = 0 \\ 6tx(t) - 6t^2 = 0 \end{cases}$$

$t \neq 0$ のとき $x(t) = t,\ y(t) = t^3 - 3t$ ．これが $t \neq 0$ 以外で成立するので，$t = 0$ でも成立する．

つまり包絡線は $y = x^3 - 3x$ である．したがって直線 AB は $y = x^3 - 3x$ の接線で，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の接線の通過領域なので求める領域は，次の図になる．



解答 54　問題 56 $\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b)$ とすると，条件は $a^2 + b^2 = 1$ である．そこで，$a = \cos\theta$，$b = \sin\theta$ とおく．直線 AB の方程式は

$$x\sin\theta + y\cos\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots ④$$

である．この両辺を θ で微分する．

$$x'\sin\theta + x\cos\theta + y'\cos\theta - y\sin\theta = \cos 2\theta$$

一般論から

$$x'\sin\theta + y'\cos\theta = 0$$

なので，

$$x\cos\theta - y\sin\theta = \cos 2\theta \quad \cdots ⑤$$

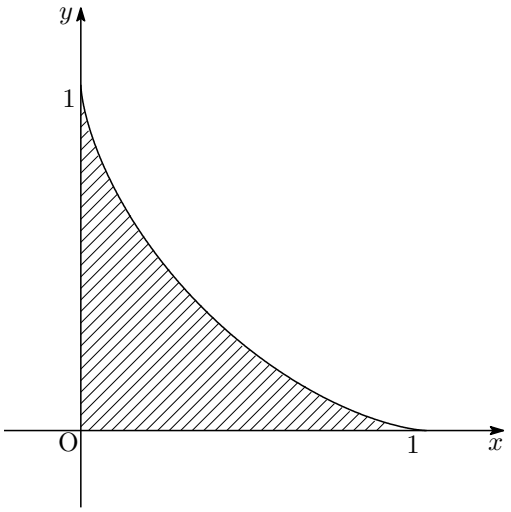
④ , ⑤ を連立して解くことにより，

$$x \quad = \quad \cos 2\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\sin\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\cos 3\theta + \cos\theta) - \frac{1}{4}(\cos 3\theta - \cos\theta) \\
&= \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos(-3\theta) = \cos^3\theta \\
y &= -\cos 2\theta \sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta \\
&= -\frac{1}{2}(\sin 3\theta - \sin\theta) + \frac{1}{4}(\sin 3\theta + \sin\theta) \\
&= \frac{3}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin(-3\theta) = \sin^3\theta
\end{aligned}
$$

これは，半径 1 の円内を半径 $\frac{1}{4}$ の円が動く，内サイクロイドである.『数学対話』「光線の包絡線」参照.

したがって，線分 AB の通過領域は，図の斜線部分である.



解答 55　問題 57

(1)

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= (m-l)^2 + (n-m)^2 + (l-n)^2 \\
|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 &= (n-m)^2 + (l-n)^2 + (m-l)^2 \\
|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= (n-l)^2 + (l-m)^2 + (m-n)^2
\end{aligned}
$$

なので △ABC は正三角形である．したがって重心 G と外心 S が一致する．ところが

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \left(\frac{l+m+n}{3},\ \frac{m+n+l}{3},\ \frac{n+l+m}{3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) \quad (\text{一定})
\end{aligned}
$$

なので，よって A，B，C は点 $\mathrm{S}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ を中心とする円周上にある.

条件① ，③ から

$$l+m+n=1,\ lm+mn+nl=0$$

なので，

$$\begin{aligned} & \mathrm{SA}^2 = \mathrm{SB}^2 = \mathrm{SC}^2 \\ = \quad & \left(l - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(m - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{3}\right)^2 \\ = \quad & l^2 + m^2 + n^2 - \frac{2}{3}(l + m + n) + \frac{1}{3} \\ = \quad & (l + m + n)^2 - 2(lm + mn + nl) - \frac{2}{3}(l + m + n) + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となり半径も一定である．

注意

対称性から，中心を $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ と推測し，直接半径を計算して，それが一定であることを示してもよい．

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (m - l,\ n - m,\ l - n),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (n - l,\ l - m,\ m - n)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad = \quad \frac{1}{3}(m - l) + \frac{1}{3}(n - m) + \frac{1}{3}(l - n) = 0$$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$

も成り立つので OS は平面 $x + y + z = 1$ の法線方向である．したがって

$$\text{四面体 OABC の体積} = \frac{1}{3} \times \mathrm{OS} \times (\ \triangle \mathrm{ABC} \text{ の面積})$$

ここで

$$\begin{aligned} 4(\triangle\mathrm{ABC} \text{ の面積})^2 \quad &= \quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}})^2 \\ &= \quad \{(m - l)^2 + (n - m)^2 + (l - n)^2\}^2 \\ &\qquad -\{(m - l)(n - l) + (n - m)(l - m) + (l - n)(m - n)\}^2 \\ &= \quad \{2(l^2 + m^2 + n^2) - 2(lm + mn + nl)\}^2 \\ &\qquad -\{l^2 + m^2 + n^2 - (lm + mn + nl)\} \\ &= \quad 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

したがって $\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$|\mathrm{OS}| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ より四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}\ (\text{一定})$$

である．

(3)

$$\mathrm{L}\left(\frac{m+n}{2},\ \frac{n+l}{2},\ \frac{l+m}{2}\right)=\mathrm{L}\left(\frac{1-l}{2},\ \frac{1-m}{2},\ \frac{1-n}{2}\right),\ \mathrm{P}\left(\frac{l}{2},\ \frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right)$$

他の点もこれらいずれかと座標の値を入れ替えたものである．ここで $\mathrm{T}\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{TL}^2 &= \left(\frac{1-l}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1-m}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1-n}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\\ &= \left(\frac{l}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\\ &= \mathrm{TP}^2\end{aligned}$$

である．他も同様.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\\ =\ &\frac{l^2+m^2+n^2}{4}-\frac{l+m+n}{4}+\frac{3}{16}=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

したがって 6 点 L，M，N，P，Q，R は点 T を中心とし，半径 $\frac{1}{4}$ の定球面上にあることが示された.

解答 56　問題 58

(1) 3 点 A，B，C の座標を

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right),\ \mathrm{B}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{C}(1,\ 0,\ 1)$$

として一般性を失わない．このとき D，E，F は

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\ \mathrm{E}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{F}(1,\ 0,\ 0)$$

である.

点 P が線分 AB を $t:1-t$ に内分する位置にあるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{1}{2}(1-t),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-t),\ 1\right)$$

と表せる．またこのとき点 Q は線分 EF を $t:1-t$ に内分する点にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(t,\ 0,\ 0)$$

である．線分 PQ と平面 $z=a$ （$0\leqq a\leqq 1$）の交点を R とすると，R は線分 PQ を $1-a:a$ に内分する点である.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= a\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= \left(\frac{a}{2}(1-t)+(1-a)t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a(1-t),\ a\right)\\ &= \left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ a\right)+t\left(1-\frac{3a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ 0\right)\end{aligned}$$

したがって点 P が A から B まで動く，つまり t が 0 から 1 まで変化すると，点 R は平面 $z = a$ 上を，点 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\ a\right)$ と点 $(1-a,\ 0,\ a)$ を結ぶ線分を動く．

この線分の長さを $l(a)$ とすると

$$l^2(a) = \left(1 - \frac{3a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 1 - 3a + 3a^2$$

正三角形の中心周りの対称性から，P が正三角形 ABC 辺上を動けば，R は 1 辺の長さが $l(a)$ の正三角形を描く．ゆえに平面 $z = a$ （$0 \leqq a \leqq 1$）による V の切り口は 1 辺の長さが $\sqrt{1 - 3a + 3a^2}$ の正三角形である．

(2) V の切り口の面積が

$$\frac{1}{2}l^2(a)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - 3a + 3a^2)$$

なので，V の体積は

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - 3a + 3a^2)\,da = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[a - \frac{3}{2}a^2 + a^3\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

解答 57　問題 59

(1) 平面 $ax + y + z + a - 2 = 0$ 上の定点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と，平面上の任意の点 $(x,\ y,\ z)$ をとる．

$$ax + y + z + a - 2 = 0$$
$$ax_0 + y_0 + z_0 + a - 2 = 0$$

より

$$a(x - x_0) + (y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

これは，平面上のベクトル $(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ とベクトル $(a,\ 1,\ 1)$ が直交していることを示している．つまりベクトル $(a,\ 1,\ 1)$ は平面 $ax + y + z + a - 2 = 0$ と直交している．

次に，この平面上の点のうちで原点に一番近い点は，原点から下ろした垂線の足 H である．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は原点を通り平面に直交するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (at,\ t,\ t)$$

とおける．H が平面上の点なので

$$a(at) + t + t + a - 2 = 0$$

つまり $t = \dfrac{-a+2}{a^2+2}$ である．ゆえに H の座標は

$$\left(\frac{-a^2+2a}{a^2+2},\ \frac{-a+2}{a^2+2},\ \frac{-a+2}{a^2+2}\right)$$

(2) 半径 3 の球体がこの平面と交わる交わりの円盤の半径を r とすると

$$\mathrm{OH}^2 + r^2 = 3^2$$

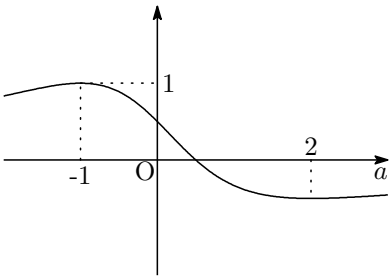
が成り立つ．よって $V(a)$ が最小，つまり r が最小にになるときは，線分 OH の長さが最大になるときである．

$$\begin{aligned} \mathrm{OH}^2 &= (at)^2+t^2+t^2 = \frac{(a^2+2)(-a+2)^2}{(a^2+2)^2} \\ &= \frac{(a-2)^2}{a^2+2} = 1+\frac{2(-2a+1)}{a^2+2} \end{aligned}$$

ここで $f(a)=\dfrac{-2a+1}{a^2+2}$ とおくと，

$$f'(a) = \frac{-2(a^2+2)-(-2a+1)2a}{(a^2+2)^2} = \frac{2(a+1)(a-1)}{(a^2+2)^2}$$

かつ $\lim\limits_{a\to\pm\infty} f(a)=0$ であるから，$f(a)$ のグラフの概形は次のようになる．



つまり $a=-1$ で OH が最大となり，$V(a)$ が最小になる．

$a=-1$ のとき

$$\mathrm{OH} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+2}} = \sqrt{3}$$

となるので，半径 3 の球体がこの平面で分けられる二つの部分のうち，体積の大きくない方は xy 平面上の円 $x^2+y^2=9$ $(\sqrt{3}\leqq x\leqq 3)$ を x 軸の周りに回転した立体である．

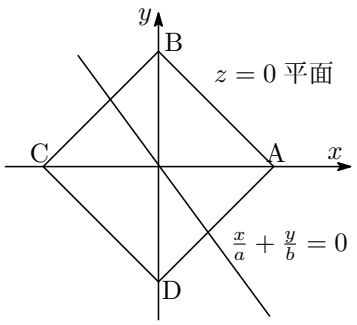
$$\begin{aligned} \therefore\quad V(-1) &= \int_{\sqrt{3}}^{3} \pi y^2\,dx \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{3} \pi(9-x^2)\,dx = \pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{3} = (18-8\sqrt{3})\pi \end{aligned}$$

解答 58　問題 60

切り口の多角形の頂点は正八面体の辺上にある．平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$ と平面 $z=0$ の交線の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

である．正八面体を平面 $z=0$ で切ると，断面は正方形 ABCD である．$a>0,\ b>0$ なので，交点は辺 AD,BC 上にある，



AD の方程式は $x-y=1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ であるから，連立方程式を解いてその交点は

$$\left(\frac{a}{a+b},\ -\frac{b}{a+b},\ 0\right)$$

である．また BC の方程式は $x-y=-1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ であるから，同様にその交点は

$$\left(-\frac{a}{a+b},\ \frac{b}{a+b},\ 0\right)$$

$y=0$ 上の交点は x を z に，y を x に，z を y に置きかえ，それに応じて a を c に，b を a に置きかえたものである．$x=0$ のときも同様である．

よって切り口の多角形の頂点の座標は次の 6 個である．

$$\left(\frac{a}{a+b},\ -\frac{b}{a+b},\ 0\right),\ \left(-\frac{a}{a+b},\ \frac{b}{a+b},\ 0\right)$$
$$\left(-\frac{a}{c+a},\ 0,\ \frac{c}{c+a}\right),\ \left(\frac{a}{c+a},\ 0,\ -\frac{c}{c+a}\right)$$
$$\left(0,\ \frac{b}{b+c},\ -\frac{c}{b+c}\right),\ \left(0,\ -\frac{b}{b+c},\ \frac{c}{b+c}\right)$$

解答 59　問題??

4 本の直線の方向ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ とする．条件から $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，は 1 次独立なので，

$$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$

となる実数 α, β, γ が存在する．どの 3 直線も同一平面上にないので，$\alpha\beta\gamma \neq 0$ である．

各直線上の 4 点 A，B，C，D を

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\alpha\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\beta\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\gamma\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$$

で定める．これらはいずれも原点とは異なる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

なので，点 D は 3 点 A，B，C で定まる平面上にあり，四辺形 ABCD の 2 辺 AD と BC が平行で長さが等しいので ABCD は平行四辺形である．つまり，4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で，4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することが示された．

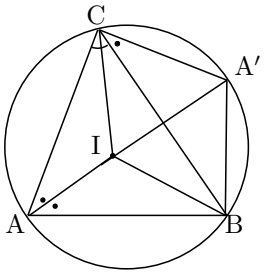
解答 60　問題??

点 P と A′, B′, C′ が題意のように定まっている前提のもとで次の二条件の同値性を示す.

条件甲：A，B，C，A′, B′, C′ が同一円周上にある.

条件乙：P が △ABC の内心 I と一致する.

(1) 甲ならば乙を示す.



A′B = A′C より A′ は弧 BC の中点．円周角の相等より ∠A′AB = ∠A′AC．つまり直線 AA′ は角 A の二等分線である．従って内心 I は AA′ 上にある．他についても同様なので，三直線 AA′, BB′, CC′ は内心 I で交わる.

∠CIA′ = ∠IAC + ∠ICA, ∠ICA′ = ∠ICB + ∠BCA′ である.

ここで角の二等分より ∠ICA = ∠ICB．円周角の相等によって ∠BCA′ = ∠BAA′ = ∠IAC．これから ∠CIA′ = ∠ICA′ が結論される.

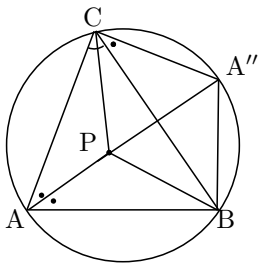
この結果 A′I = A′C となり，内心 I は A′ を中心とし B, C を通る円周上にある．点 P も同じ円周上にある．B′, C′ についても同様に成り立つ.

三点 A′, B′, C′ を中心とする三円上に I と P の両点がある．これら三円の中心が一直線上に来ることはない．よって三円が共有する点は一点しかない．つまり P = I である.

(2) 乙ならば甲を示す.

∠A の二等分線と △ABC の外接円の交点を　A″ とする．点 P は内心なので，(1) と同様にして，PA″ = BA″ = CA″ である.

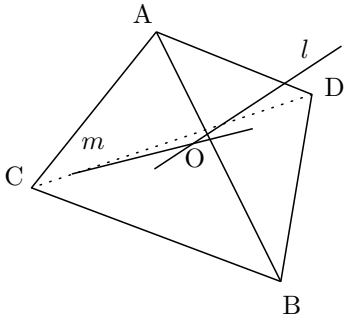
つまり A″ は三点 P, B, C から等距離にある．点 A′ も等距離にある．同一直線上にない三点から等距離にある点は一つなので A′ = A″ である．つまり A′ は △ABC の外接円上にある．他も同様である.



解答 61　問題??

解 1　辺 AB の中点を通り直線 AB に垂直な平面を α とする．α は 2 頂点 A, B からの距離が等しい点の集合である．また辺 AC の中点を通り直線 AC に垂直な平面を β とする．AB と AC が平行でないので，α と β も平行でない．よって α と β は共通直線がある．それを l とする．l は A, B, C からの距離が等しい点の集合である.

同様に辺 AD の中点を通り直線 AD に垂直な平面を γ とする．α と γ にも共通直線がある．それを m とする．m は A, B, D からの距離が等しい点の集合である.



l と m はいずれも平面 α 上にある．l は AC, AB と直交するので △ABC 平面と直交する．同様に m は △ACD 平面と直交する．△ABC と △ACD が平行でないのでそれぞれそれと直交する l と m も平行でない．ゆえに l と m は平面 α 上で交わる．交点を O とすれば，O は 4 頂点から等距離にある．つまり点 O を中心とする半径 OA の球面は頂点 A，B，C，D を同時に通る.

解 2　辺 AB の中点を通り直線 AB に垂直な平面を α とする．α は 2 頂点 A, B からの距離が等しい点の集合である．また辺 AC の中点を通り直線 AC に垂直な平面を β とする．AB と AC が平行でないので，α と β も平行でない．よって α と β は共通直線がある．それを l とする．l は A, B, C からの距離が等しい点の集合である．

辺 AD の中点を通り直線 AD に垂直な平面を γ とする．γ は 2 頂点 A, D からの距離が等しい点の集合である．

辺 AD と面 ABC は平行でないので，それらに直交する γ と l も平行でない．よって交わる．その交点を O とすると，O は 4 頂点からの距離が等しい．つまり点 O を中心とする半径 OA の球面は頂点 A，B，C，D を同時に通る．

解 3　四面体を座標空間におき，△ABC のある平面を $ax+by+cz+d=0$ とする．△ABC 平面で辺 AB の垂直二等分線と辺 AC の垂直二等分線の交点を E$(p,\ q,\ r)$ とする．E は △ABC の外心で EA = EB = EC なので，この値を R とする．k を任意の定数とするとき

$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2-R^2+k(ax+by+cz+d)=0 \quad \cdots ①$$

は 3 点 A，B，C を通る球である．

頂点 D の座標を D$(s,\ t,\ u)$ とする．D は △ABC 平面の上にはないので，$as+bt+cu+d\neq 0$ である．k を $k=-\dfrac{(s-p)^2+(t-q)^2+(u-r)^2-R^2}{as+bt+cu+d}$ とする．この k に対する球の方程式 ① は D$(s,\ t,\ u)$ で成立し，その結果この k に対する球 ① は 4 点 A，B，C，D を通る．

解 4　四面体の一つの頂点を原点 O にとり，他の 3 頂点を A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，C$(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とする．辺 OA の中点を通り OA に直交する平面の方程式は

$$a_1\left(x-\frac{a_1}{2}\right)+a_2\left(y-\frac{a_2}{2}\right)+a_3\left(z-\frac{a_3}{2}\right)=0$$

この平面が 2 頂点 O，A からの距離が等しい点の集合である．同様に，辺 OB，OC の中点を通りそれぞれの辺に直交する平面の方程式が

$$b_1\left(x-\frac{b_1}{2}\right)+b_2\left(y-\frac{b_2}{2}\right)+b_3\left(z-\frac{b_3}{2}\right)=0$$
$$c_1\left(x-\frac{c_1}{2}\right)+c_2\left(y-\frac{c_2}{2}\right)+c_3\left(z-\frac{c_3}{2}\right)=0$$

である．この 3 方程式を満たす $(x,\ y,\ z)$ が 4 頂点からの距離の等しい点である．この連立方程式は

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} {a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2 \\ {b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2 \\ {c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2 \end{pmatrix}$$

と表される．ここで行列 $U=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ とおく．

O，A，B，C は四面体の 4 頂点なので，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

は一次独立である．よって

$$(1,\ 0,\ 0) = p_1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + p_2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + p_3\overrightarrow{\mathrm{OC}},$$
$$(0,\ 1,\ 0) = q_1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q_2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + q_3\overrightarrow{\mathrm{OC}},$$
$$(0,\ 0,\ 1) = r_1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + r_2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r_3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

つまり

$$(1,\ 0,\ 0) = (p_1,\ p_2,\ p_3)U,$$
$$(0,\ 1,\ 0) = (q_1,\ q_2,\ q_3)U,$$
$$(0,\ 0,\ 1) = (r_1,\ r_2,\ r_3)U$$

となる係数 $p_1,\ \cdots,\ r_3$ が存在する．$V = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}$ とおくと V は U の逆行列，つまり U は逆行列 $V = U^{-1}$ をもつ．よって 3 方程式を同時にみたす $(x,\ y,\ z)$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}V \begin{pmatrix} {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 \\ {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 \\ {c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2 \end{pmatrix}$$

と一意に存在する．この点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から 4 頂点への距離が等しいので，4 頂点は点 P を中心とし，半径 PO の球面上にある．

解答 62 問題 61

（1）回転角を θ とする．$\tan 2\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{7-5}$ より $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ にとる．$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

とすると，X と Y は

$$A = \frac{12}{2} + \frac{2}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = 5$$
$$B = \frac{12}{2} - \frac{2}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = 7$$

より X と Y は次の関係式を満たす．x と y に変えたものが標準形である．

$$\frac{X^2}{\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)^2} = 1$$

（2）$a = b$ 型なので，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．これから $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-X+Y)$．これを方程式に代入して整理すると，同様に X と Y の関係式は次のようになる．

$$\frac{\left(X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2^2} + \frac{\left(Y + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{3^2} = 1$$

※先に平行移動してもよい.

（3）$\tan 2\theta = \dfrac{10\sqrt{3}}{11-1} = \sqrt{3}$ より $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ にとる.

$$\begin{aligned} A &= \frac{12}{2} + \frac{-10}{2}\cos\frac{\pi}{3} - 5\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = -4 \\ B &= \frac{12}{2} - \frac{-10}{2}\cos\frac{\pi}{3} + 5\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = 16 \end{aligned}$$

より X と Y は次の関係式を満たす. x と y に変えたものが標準形である.

$$\frac{X^2}{2^2} - Y^2 = 1$$

解答 63 問題 62

(1) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2lx + 2my + c = 0$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{gathered} 2ax + 2hy + 2hx\frac{dy}{dx} + 2by\frac{dy}{dx} + 2l + 2m\frac{dy}{dx} = 0 \\ \therefore \quad (hx + by + m)\frac{dy}{dx} = -(ax + hy + l) \end{gathered}$$

したがって, 点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$\begin{gathered} (hx_0 + by_0 + m)(y - y_0) = -(ax_0 + hy_0 + l)(x - x_0) \\ (hx_0 + by_0 + m = 0 \text{ のときも成立}) \end{gathered}$$

ここで, ${ax_0}^2 + 2hx_0y_0 + b{y_0}^2 + 2lx_0 + 2my_0 + c = 0$ より

$$\begin{gathered} (ax_0 + hy_0 + l)x + (hx_0 + by_0 + m)y + lx_0 + my_0 + c = 0 \\ \therefore \quad L(\mathrm{X},\ \mathrm{X}_0) = ax_0x + h(y_0x + x_0y) + by_0y + l(x + x_0) + m(y + y_0) + c \end{gathered}$$

このとき

$$L(\mathrm{X}_0,\ \mathrm{X}) = ax x_0 + h(yx_0 + xy_0) + byy_0 + l(x_0 + x) + m(y_0 + y) + c = L(\mathrm{X},\ \mathrm{X}_0)$$

(2) $L(\mathrm{X},\ \mathrm{X}_0) = 0$ と $L(\mathrm{X},\ \mathrm{X}_1)$ の交点を P とすると, $L(\mathrm{P},\ \mathrm{X}_0) = 0$, $L(\mathrm{P},\ \mathrm{X}_1) = 0$ より, $L(\mathrm{P},\ \mathrm{X}) = 0$ は直線 $\mathrm{X}_0\mathrm{X}_1$ の方程式を表す. すなわち

$$l \ :\ L(\mathrm{X},\ \mathrm{P}) = 0, \quad L(\mathrm{P},\ \mathrm{X}) = 0$$

(3) 直線 l 上の点 Q より, 2 本の接線

$$L(\mathrm{X}_2,\ \mathrm{X}) = 0, \quad L(\mathrm{X}_3,\ \mathrm{X}) = 0$$

を引く. このとき, 直線 $m : \mathrm{X}_2\mathrm{X}_3$ 上に点 P があることを示す.

Q が $L(\mathrm{P},\ \mathrm{X}) = 0$ 上にあるので

$$L(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) = 0$$

一方, m の方程式は (2) より, $L(\mathrm{Q},\ \mathrm{X}) = 0$ と書ける. すると, $L(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) = 0$ は P が直線 $L(\mathrm{Q},\ \mathrm{X}) = 0$ 上にあることを示している. □

解答 64 問題 63

(1) 2 直線 $F(\mathrm{X})=0,\ G(\mathrm{X})=0$ の交点の座標を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とおく. このとき

$$F(\mathrm{P})=0,\quad G(\mathrm{P})=0$$

であるから,

$$G(\mathrm{X}_0)F(\mathrm{P})-F(\mathrm{X}_0)G(\mathrm{P})=0$$

よって，この直線は点 P を通る．また

$$G(\mathrm{X}_0)F(\mathrm{X}_0)-F(\mathrm{X}_0)G(\mathrm{X}_0)=0$$

であるから, この直線は X_0 を通る. すなわち, 与えられた方程式はこの 2 点を通る一次式であるから，この直線の方程式に他ならない.

(2) $\mathrm{A}(\alpha_1,\ \alpha_2)$, $\mathrm{B}(\beta_1,\ \beta_2)$, $\mathrm{C}(\gamma_1,\ \gamma_2)$ とすると, L_A, L_B, L_C の方程式は

$$L_\mathrm{A}:L(\mathrm{X},\ \mathrm{A})=0$$
$$L_\mathrm{B}:L(\mathrm{X},\ \mathrm{B})=0$$
$$L_\mathrm{C}:L(\mathrm{X},\ \mathrm{C})=0$$

よって, $\mathrm{P_{AB}C}$, $\mathrm{P_{BC}A}$, $\mathrm{P_{CA}B}$ の方程式は

$$\mathrm{P_{AB}C}:L(\mathrm{C},\ \mathrm{B})L(\mathrm{X},\ \mathrm{A})-L(\mathrm{C},\ \mathrm{A})L(\mathrm{X},\ \mathrm{B})=0\quad\cdots①$$
$$\mathrm{P_{BC}A}:L(\mathrm{A},\ \mathrm{C})L(\mathrm{X},\ \mathrm{B})-L(\mathrm{A},\ \mathrm{B})L(\mathrm{X},\ \mathrm{C})=0\quad\cdots②$$
$$\mathrm{P_{CA}B}:L(\mathrm{B},\ \mathrm{A})L(\mathrm{X},\ \mathrm{C})-L(\mathrm{B},\ \mathrm{C})L(\mathrm{X},\ \mathrm{A})=0\quad\cdots③$$

すると, 前問 (1) の結果より,

$$L(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=L(\mathrm{B},\ \mathrm{A})$$
$$L(\mathrm{B},\ \mathrm{C})=L(\mathrm{C},\ \mathrm{B})$$
$$L(\mathrm{C},\ \mathrm{A})=L(\mathrm{A},\ \mathrm{C})$$

だから, ① と② の辺々を加えて得られる式が $-$③ に他ならないことがわかる. したがって, $\mathrm{P_{AB}C}$ と $\mathrm{P_{BC}A}$ の交点を $(p,\ q)$ とおけば, $(p,\ q)$ は① と② の両方の方程式を満足するから, $-$(① $+$ ②), すなわち③ も満足する. つまり, 交点は $\mathrm{P_{CA}B}$ 上にもあるので, これら三つの直線は 1 点 P で交わる.

(3) AB と L_C の交点を M とする. このとき, 前問 (2) より, A, B は $L(\mathrm{P_{AB}},\ \mathrm{X})=0$ 上にある. すると, 方程式 $L(\mathrm{M},\ \mathrm{X})=0$ で表される直線は, C と, M からのもう一つの接点 D に対して, 直線 CD を表す. ところが, 前問 (3) より, $\mathrm{P_{AB}}$ は CD 上にある. よって, $L(\mathrm{M},\ \mathrm{X})=0$ は直線 $\mathrm{P_{AB}C}$, すなわち, 上の① と一致する.

同様に, BC と L_A の交点 N に対して, $L(\mathrm{N},\ \mathrm{X})=0$ は上の② と一致し, CA と L_B の交点 K に対し, $L(\mathrm{K},\ \mathrm{X})=0$ は上の③ と一致する. そして, これら三つの直線はすべて P を通るので,

$$L(\mathrm{M},\ \mathrm{P})=0,\quad L(\mathrm{N},\ \mathrm{P})=0,\quad L(\mathrm{K},\ \mathrm{P})=0$$

したがって, 三つの交点は一つの直線 $L(\mathrm{P},\ \mathrm{X})=0$ 上にある. □

解答 65　問題 64

以下，例えば (1) で $y=0$(定数) のときの自明な考察 (いったん $y\neq 0$ として y を求め，その後 $y=0$ も含む，とする) の類を省いた概略である．

(1) $\dfrac{1}{y}dy=\dfrac{2}{x}dx$ より

$$\int \frac{1}{y}\,dy=\int \frac{2}{x}\,dx$$

$$\therefore\quad \log|y|=2\log|x|+C$$

これから任意定数を置き直して

$$y=Cx^2$$

(2) $\dfrac{1}{y^2}dy=-\dfrac{1}{x^3}dx$ より

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy=-\int \frac{2}{x^3}\,dx$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{y}=\frac{1}{2x^2}+C$$

これから任意定数を置き直して

$$y=\frac{2x^2}{Cx^2-1}$$

(3) $\dfrac{1}{1+y}dy=-\dfrac{1}{1+x}dx$ より

$$\int \frac{1}{1+y}\,dy=-\int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$\therefore\quad \log|1+y|=-\log|1+x|+C$$

これから任意定数を置き直して

$$y=\frac{C-x}{1+x}$$

(4) $\dfrac{1}{y(y+1)}dy=\dfrac{1}{x}dx$ より

$$\int \frac{1}{y(y+1)}\,dy=\int \frac{1}{y}\,dy-\int \frac{1}{y+1}\,dy=\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore\quad \log|y|-\log|y+1|=\log|x|+C$$

これから任意定数を置き直して

$$\frac{y}{y+1}=Cx$$

逆にとき任意定数を置き直して

$$y=\frac{x}{-x+C}$$

(5) $\dfrac{1}{y}dy=\dfrac{2x}{x^2+1}dx$ より

$$\int \frac{1}{y}\,dy=\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$\therefore \quad \log|y| = \log(x^2+1) + C$$

これから任意定数を置き直して

$$y = C(x^2+1)$$

(6) $e^y dy = e^x dx$ より

$$\int e^y\,dy = \int e^x\,dx$$
$$\therefore \quad e^y = e^x + C$$

これから

$$y = \log(e^x + C)$$

(7) $\dfrac{1}{y}dy = \log x dx$ より

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{x}\,dx$$
$$\therefore \quad \log|y| = x\log|x| - x + C$$

これから任意定数を置き直して

$$y = Ce^{x\log|x|-x} = Cx^x \cdot e^{-x}$$

解答 66　問題 65

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

とおく．これから

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dx$$
$$\therefore \quad \log y = kx + C$$

$x = 0$ のとき $y = 5$，$x = 5$ のとき $y = 10$ なので，

$$\log 5 = C$$
$$\log 10 = 5k + C$$

$x = 15$ のときの y の値を y_0 とすると

$$\begin{aligned}\log y_0 &= 15k + C = 3(\log 10 - C) + C = 3\log 10 - 2C \\ &= 3\log 10 - 2\log 5 = \log 40\end{aligned}$$

つまり $y = 40$ である．

解答 67　問題 66

$x^2 - y^2 = k$ より両辺 x で微分して

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

つまりもとの曲線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

である．求める曲線は微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

をみたさなければならない．これから

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dy$$

$$\therefore \quad \log|y| = -\log|x| + C$$

任意定数と取り直して

$$xy = C$$

を得る．

解答 68　問題 67

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= y'(x)\cos x + y(x)(-\sin x) \\ &\qquad -y''(x)\sin x - y'(x)\cos x \\ &= -\{y(x) + y''(x)\}\sin x = -2\cos x \sin x \\ &= -\sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= y'(x)\sin x + y(x)(\cos x) \\ &\qquad +y''(x)\cos x - y'(x)(-\sin x) \\ &= \{y(x) + y''(x)\}\cos x = 2\cos^2 x \\ &= \cos 2x + 1 \end{aligned}$$

(2)

$$f(x) = \int(-\sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\cos 2x + C_f$$

$f(0) = y(0) = 0$ より $0 = \dfrac{1}{2} + C_f$.

$$\therefore \quad C_f = -\frac{1}{2}$$

よって

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}$$

同様に

$$g(x) = \int(\cos 2x + 1)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + x + C_g$$

$g(0) = y'(0) = 1$ より $1 = C_g$．よって

$$g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x + 1$$

(3)

$$f(x) = y(x)\cos x - y'(x)\sin x$$
$$g(x) = y(x)\sin x + y'(x)\cos x$$

より，$y'(x)$ を消去して $y(x)$ を求める．

第 1 式 $\times \cos x +$ 第 2 式 $\times \sin x$ より

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x)\cos x + g(x)\sin x \\ &= \frac{1}{2}\cos x(\cos 2x - 1) + \sin x\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x) - \frac{1}{2}\cos x + (x+1)\sin x \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x - x) - \frac{1}{2}\cos x + (x+1)\sin x \\ &= (x+1)\sin x \end{aligned}$$

また，$y(x) = 0$ は $x + 1 = 0$ または $\sin x = 0$ と同値である．

ゆえに，$y(x) = 0$ をみたすすべての x は

$$x = -1,\ x = n\pi\ (n \text{ は任意の整数})$$

である．

解答 69　問題 68

(1) 与えられた微分方程式の両辺に $2x'$ をかけ t で積分する．

$$\int 2x'x''\,dt = -k^2\int \frac{x'}{x^2}\,dt$$

これから

$$x'^2 = \frac{k^2}{x} + C$$

$t = 0$ のとき，$x = R,\ x' = \dfrac{k}{\sqrt{R}}$ より

$$\frac{k^2}{R} = \frac{k^2}{R} + C$$

つまり $C = 0$.

$$\therefore \quad x' = \frac{k}{\sqrt{x}}$$

(2) (1) から

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{\sqrt{x}}$$

つまり

$$\sqrt{x}\,dx = k\,dt$$

これから

$$\int \sqrt{x}\,dx = k\int dt$$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = kt + C$$

$t = 0$ のとき $x = R$ だから

$$\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}} = C$$

これから

$$x = \left(\frac{3}{2}kt + R^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

これは t に関する正値単調増加関数なので，この物体は地球を離れることができる．

解答 70　問題 69

時刻 t における水面の半径を $R(t)$ とする．

$$R : h = R(t) : x(t)$$

であるから

$$R(t) = \frac{R}{h}x(t)$$

したがって時刻 t における残っている水の容量を $V(t)$ とすると

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{h}x(t)\right)^2 \cdot x(t) = \frac{\pi R^2}{3h^2}x^3(t)$$

である．ここで時刻 t と $t + \Delta t$ の間に流出する水量を ΔV とすれば

$$\Delta V = V(t) = V(t + \Delta t)$$

である．したがって

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t) = V(t + \Delta t)}{\Delta t} = Sv$$

$v = kx$ なので，これから

$$-\frac{dV}{dt} = kSx(t) \quad \cdots ①$$

を得る．一方

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2(t)\frac{dx}{dt}$$

$x \neq 0$ なので ① とあわせて

$$x(t)\frac{dx}{dt} = -\frac{kSh^2}{\pi R^2}$$

両辺 t で積分する．

$$\text{左辺} = \int x(t)\frac{dx}{dt}\,dt = \int x(t)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\text{右辺} = -\frac{kSh^2}{\pi R^2}t + C$$

したがって

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{kSh^2}{\pi R^2}t + C$$

$t=0$ のとき $x=h$ なので $C=\dfrac{1}{2}h^2$

$$\therefore \quad x^2=h^2\left(1-\frac{2kS}{\pi R^2}t\right)$$

つまり

$$x=h\sqrt{1-\frac{2kS}{\pi R^2}t}$$

解答 71　問題 70

(1) ∠OPQ の二等分線の方向は

$$\begin{aligned}&\frac{\overrightarrow{\mathrm{PO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}\\ =\ &\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,\ -y)+(0,\ 1)\\ =\ &\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x,\ y-\sqrt{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

これが点 P における接線方向と垂直であるから

$$\left(x,\ y-\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot(1,\ y')=0$$

つまり

$$x+yy'=\sqrt{x^2+y^2}y'$$

これから

$$x^2+2xyy'=x^2y'^2$$

x で割り $y=f(x)$ で表すと

$$x+2f(x)f'(x)-x\{f'(x)\}^2=0 \quad \cdots①$$

(2) ① を x で微分して

$$\begin{aligned}&1+2\{f'(x)\}^2+2f(x)f''(x)-\{f'(x)\}^2-2xf'(x)f''(x)\\ =\ &1+\{f'(x)\}^2+2f(x)f''(x)-2xf'(x)f''(x)=0 \quad \cdots②\end{aligned}$$

① $\times f''(x)-$ ② $\times f'(x)$ から

$$\begin{aligned}&xf''(x)-x\{f'(x)\}^2f''(x)-f'(x)-\{f'(x)\}^3+2x\{f'(x)\}^2f''(x)\\ =\ &(xf''(x)-f'(x))\left[1+\{f'(x)\}^2\right]=0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad xf''(x)-f'(x)=0$$

つまり

$$xg'(x)-g(x)=0$$

(3) (2) から

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$$

よって

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore \quad \log|g(x)| = \log|x| + C$$

任意に定数をとりなおして

$$g(x) = Cx$$

つまり

$$f'(x) = Cx$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{C}{2}x^2 + C'$$

$f(0) = -1$ から $C' = -1$. よって $f(x) = \dfrac{C}{2}x^2 - 1$. これを ① に代入して

$$x + 2\left(\frac{C}{2}x^2 - 1\right)Cx - Cx^3 = x - 2Cx = 0$$

ゆえに $C = \dfrac{1}{2}$ である.

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

解答 72　問題 71

時刻 t における容器内の水量を F，そのときの水面の高さを $y(t)$ とする．容器が，底は半径 $a\ (>0)$ の円板，側面は $x=f(y)\ (0\leqq y\leqq h)$ のグラフを y 軸の回りに回転したものであるから

$$F=\int_0^y \pi x^2\,dy$$

$x=f(y)$ なのでこれから

$$\frac{dF}{dy}=\pi\{f(y)\}^2=Vt+\pi a^2 \quad \cdots①$$

一方，この容器に単位時間あたり V （一定）の割合で水を入れるので

$$\frac{dF}{dt}=V \quad \cdots②$$

である．

① , ② から

$$V=\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt}=\left(Vt+\pi a^2\right)\frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=\frac{V}{Vt+\pi a^2}$$

よって

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{1}{t+\dfrac{\pi a^2}{V}}\,dt \\ &= \log\left(t+\frac{\pi a^2}{V}\right)+C \end{aligned}$$

$t=0$ のとき $y=0$ なので

$$C=-\log\frac{\pi a^2}{V}$$

つまり

$$\begin{aligned} y &= \log\left(t+\frac{\pi a^2}{V}\right)-\log\frac{\pi a^2}{V} \\ &= \log\left(\frac{V}{\pi a^2}+1\right) \end{aligned}$$

これを逆に解いて

$$t=\frac{\pi a^2}{V}(e^y-1) \quad \cdots③$$

③ を ① に代入し，

$$\begin{aligned} \pi\{f(y)\}^2 &= V\left(\frac{\pi a^2}{V}(e^y-1)\right)+\pi a^2 \\ &= \pi a^2 e^y \end{aligned}$$

$f(y)>0,\ a>0$ なので

$$f(y)=ay^{\frac{y}{2}}$$

さらに，$t=T$ のとき $y=h$ であるから

$$T=\frac{\pi a^2}{V}(e^h-1)$$

解答 73　問題 72

走り始めてから t 時間後のガソリンの量を $x(t)$ とする．毎時 $\dfrac{100+x}{100}e^{kv}$ kg のガソリンを消費するので，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{100+x}{100}e^{kv}$$

が成立する．つまり

$$\frac{1}{100+x}\,dx = -\frac{e^{kv}}{100}\,dt$$

である．両辺の積分をとる．$100+x>0$ なので

$$\log(100+x) = -\frac{e^{kv}}{100}t + C$$

が成り立つ．x について解くと，

$$x = e^{-\frac{e^{kv}}{100}t+C} - 100$$

任意定数 e^C を改めて C とおくと

$$x = Ce^{-\frac{e^{kv}}{100}t} - 100$$

$t=0$ のときの x の値 $C-100$ が最初に積むガソリンの量である．

一方，100km 離れたところに着く時刻は $\dfrac{100}{v}$ なので，到着時のガソリンの残量は

$$Ce^{-\frac{e^{kv}}{v}} - 100$$

したがって，目的地につけるために

$$Ce^{-\frac{e^{kv}}{v}} - 100 \geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C \geqq 100e^{\frac{e^{kv}}{v}}$$

が必要である．この条件の下で $C-100$ を最小にすればよい．v を固定すれば C の最小値は

$$C = 100e^{\frac{e^{kv}}{v}}$$

である．ここで v を動かす．$f(v) = e^{\frac{e^{kv}}{v}}$ とおく．$\log f(v) = \dfrac{e^{kv}}{v}$ の両辺を v で微分して，

$$\frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{e^{kv}(kv-1)}{v^2}$$

となる．よって $v = \dfrac{1}{k}$ のとき $f(v)$ は極小で最小である．$f(v)$ の最小値は e^k，つまり C の最小値は $100e^k$ である．

求める速度は $\dfrac{1}{k}$．ガソリンの量は $100(e^k-1)$．

解答 74 (07 京大理 (乙)6 番)　問題 73

(1) $|f(x)| \geqq 1$ となる実数 x が存在するとする．$f(x)$ は微分可能なので連続である．$f(0)=0$ であるから連続関数の中間値の定理によって．$|f(a)|=1$ となる a が存在する．

このとき

$$f(0) = f(a-a) = \frac{f(a)+f(-a)}{1+f(a)f(-a)} = \frac{\pm 1 + f(-a)}{1 \pm f(-a)} = \pm 1 \text{ (複号同順)}$$

となり，$f(0)=0$ という条件と矛盾する．

よって $|f(x)| \geqq 1$ となる実数は存在しない，つまり任意の実数 a に対して，$-1 < f(a) < 1$ である．

(2) $f(0)=0$，$f'(0)=1$ なので，

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

$f(x)$ は連続なので $\lim_{h\to 0} f(h) = f(0) = 0$ である．よって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)} - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{1-f(x)^2}{1+f(x)f(h)} = 1-f(x)^2 \end{aligned}$$

(1) から $|f(x)| < 1$ なので，$f'(x) > 0$ である．$f(0)=0$ とあわせて，$x>0$ において $f(x)>0$ である．したがって $x>0$ において

$$f''(x) = \{1-f(x)^2\}' = -f'(x)f(x) < 0$$

つまり，$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸である．

解説

微分可能で，関係式 $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ を満たし，$f(0)=0$，$f'(0)=1$ なら

$$f'(x) = 1-f(x)^2$$

となった．

$y=f(x)$ とおくと，y は微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 1-y^2$$

を満たす．$|y|<1$ なので

$$\frac{1}{1-y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

両辺 x で積分して

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int 1\,dx$$

ここで

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \frac{1}{2}(\log|1+y| - \log|1-y|)$$

よって

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + C$$

$x=0$ のとき $y=0$ なので $C=0$．これから

$$\frac{1+y}{1-y} = e^{2x}$$

ゆえに

$$y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

を得る．つまり条件を満たす $f(x)$ はこれのみである．

解答 75 問題 74

(1) $y = \dfrac{x^2}{2}$ より $y' = x$ なので，

$$s = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt, \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f'(s) &= \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ g'(s) &= \frac{dy}{ds} = x \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

したがって

$$\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2 = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$$

［別解］実は次のことから明らかである．s の定め方から

$$s = \int_0^s \sqrt{\{f'(u)\}^2 + \{g'(u)\}^2}\,du$$

両辺 s で微分して

$$1 = \sqrt{\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2}$$

(2)

$$\begin{aligned} f''(s) &= \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= -\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}} g'(s) \\ g''(s) &= \frac{d}{ds}\left(x \cdot \frac{dx}{ds}\right) = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + x\frac{d^2x}{ds^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}} f'(s) \end{aligned}$$

(3) P における C の接線方向のベクトルが

$$(f'(s),\ g'(s))$$

で，しかもこのベクトルは大きさが 1 である．これと直交し C の下側にある法線方向は

$$(g'(s),\ -f'(s))$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = a(g'(s),\ -f'(s))$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} g'(s) \\ -f'(s) \end{pmatrix}$$

つまり

$$v = f(s) + ag'(s), \quad w = g(s) - af'(s)$$

(4)

$$L = \int_0^L ds,\ M = \int_0^L \sqrt{\{v'(s)\}^2 + \{w'(s)\}^2}\, ds$$

である．ここで

$$\begin{aligned} v'(s) &= f'(s) + ag''(s) = \left(1 + \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\right) f'(s) \\ w'(s) &= g'(s) - af''(s) = \left(1 + \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\right) g'(s) \\ \therefore \quad \sqrt{\{v'(s)\}^2 + \{w'(s)\}^2} &= \left(1 + \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \sqrt{\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2} \\ &= \left(1 + \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} M - L &= \int_0^L \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\, ds = \int_0^1 \frac{a}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds}{dx}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{a}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{a}{1+x^2}\, dx = \frac{a\pi}{4} \end{aligned}$$

解答 76 問題 75

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2) 曲線を，極座標の極を原点，始線を x 軸の正の部分にあわせて xy 座標平面におく．このとき極座標で $(r,\ \theta)$ と表される点は xy 座標では $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ となる．

曲線の方程式は $r = \theta$ なので，この曲線は xy 座標では媒介変数 θ によって

$$x = \theta\cos\theta,\ y = \theta\sin\theta$$

と表される．

ここで

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= (\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + (\sin\theta + \theta\cos\theta)^2 \\ &= 1 + \theta^2 \end{aligned}$$

したがって求める長さを l とすると

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta \quad \cdots ① \\ &= \int_0^{\pi} (\theta)' \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta \\ &= \left[\theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\, d\theta \\ &= \pi\sqrt{1+\pi^2} - \int_0^{\pi} \left\{\sqrt{1+\theta^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\right\} d\theta \end{aligned}$$

(1) より $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\, d\theta = \log(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) + C$ なので

$$\begin{aligned} l &= \pi\sqrt{1+\pi^2} - l + \left[\log(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\right]_0^{\pi} \\ &= \pi\sqrt{1+\pi^2} - l + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) \\ \therefore \quad l &= \frac{1}{2}\left\{\log(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) + \pi\sqrt{1+\pi^2}\right\} \end{aligned}$$

別解

① の計算は $t = \log(\theta + \sqrt{1+\theta^2})$ と変数変換してもよい.

このとき $\theta + \sqrt{1+\theta^2} = e^t$ なので，$-\theta + \sqrt{1+\theta^2} = e^{-t}$ となる.

$$\therefore \quad \sqrt{1+\theta^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

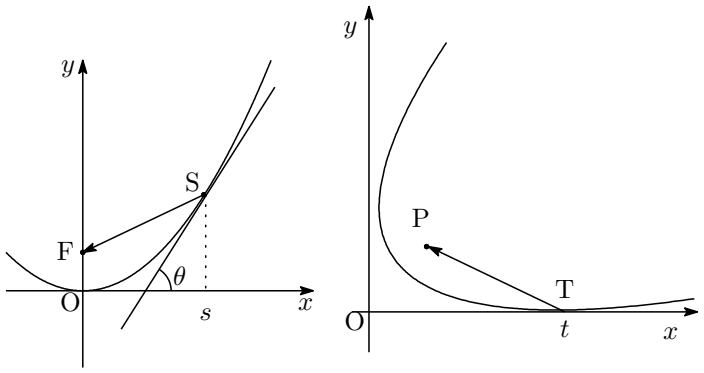
また (1) から $\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$ ，つまり $d\theta = \sqrt{1+\theta^2}dt$

積分域は $\theta : 0 \to \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$ となるので $\alpha = \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$ とおく.

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\alpha} \sqrt{1+\theta^2} \cdot \sqrt{1+\theta^2}\, dt \\ &= \int_0^{\alpha} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\alpha} (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\, dt \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\alpha} \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{2\alpha} + 4\alpha - e^{-2\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left\{(\pi + \sqrt{1+\pi^2})^2 + 4\log(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) - (\pi + \sqrt{1+\pi^2})^{-2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\log(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) + \pi\sqrt{1+\pi^2}\right\} \end{aligned}$$

解答 77 問題 76

放物線が条件を満たしながら傾くとき，接点を $\mathrm{T}(t,\ 0)$，焦点の移動先を P とする．移動して T となる C 上の点を $\mathrm{S}\left(s,\ \dfrac{s^2}{2}\right)$ とし点 S での接線の傾きを $\tan\theta$ とする．



このとき点 P を定める条件は次のようになる．

(i) 弧 OS = OT より

$$\begin{aligned} t &= \int_0^s \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^s \sqrt{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(s+\sqrt{s^2+1}) + \frac{1}{2}s\sqrt{s^2+1} \end{aligned}$$

(ii) 接点 S での傾きから

$$\tan\theta = s$$

これから

$$\sin\theta = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

(iii) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{SF}}$ を $-\theta$ 回転したものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{TP}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{TP}}$$

条件 (iii) を計算する．

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{TP}} &= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\begin{pmatrix} 1 & s \\ -s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s \\ \dfrac{1-s^2}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\begin{pmatrix} \dfrac{-s(s^2+1)}{2} \\ \dfrac{s^2+1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -s\sqrt{s^2+1} \\ \sqrt{s^2+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OT}} + \overrightarrow{\mathrm{TP}} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -s\sqrt{s^2+1} \\ \sqrt{s^2+1} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \log(s+\sqrt{s^2+1}) + s\sqrt{s^2+1} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -s\sqrt{s^2+1} \\ \sqrt{s^2+1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \log(s+\sqrt{s^2+1}) \\ \sqrt{s^2+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

P$(X,\ Y)$ とすると，

$$X = \frac{1}{2}\log(s+\sqrt{s^2+1}), \quad Y = \frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}$$

これから

$$e^{2X} = s+\sqrt{s^2+1},\ e^{-2X} = -s+\sqrt{s^2+1}$$

なので

$$Y = \frac{e^{2X}+e^{-2X}}{2}$$

右に傾けたので軌跡は次のようになる．

$$y = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\ (x>0)$$

参考文献

[1] 『数について』J.W.R. デーデキント，河野伊三郎訳（岩波文庫，1961）

[2] 『幾何学基礎論』D. ヒルベルト，中村幸四郎訳（ちくま学芸文庫，2005）

[3] 『数学の問題』D. ヒルベルト，一松信訳・解説（共立出版，1969）

[4] 『直観幾何学』D. ヒルベルト，S. コーン・フォッセン，芹沢正三訳（みすず書店，1966）

[5] 『Contributions to the founding of the theory of Transfinite Numbers』Georg Cantor，P.E.B.Jourdain 英訳（Dover Publications，1955）

[6] 『On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems』Kurt Gödel，B.Meltzer 英訳（Dover Publications，1992）

[7] 『数学史』N. ブルバキ，村田全，清水達雄訳（東京図書，1970）

[8] 『不等式』G.H. ハーディ，J.E. リトルウッド，細川尋史訳（シュプリンガー社，2003 年）

[9] 『ゲーデルの不完全性定理』R.M. スマリヤン，高橋昌一郎訳（丸善，1996）

[10] 『ゲーデルは何を証明したか』E. ナーゲル，J.R. ニューマン，林一訳（白揚社，1999）

[11] 『ゲーデルの世界』廣瀬健，横田正一（海鳴社，1985）

[12] 『数学基礎論入門』前原昭二（朝倉書店，1977）

[13] 『不完全性定理』野崎昭弘（日本評論社，1996）

[14] 『ゲーデル・不完全性定理』吉永良正（講談社ブルーバックス，1992）

[15] 『数学序説』吉田洋一，赤攝也（培風館，1961）

[16] 『集合論入門』赤攝也（培風館，1957）

[17] 『集合とは何か』竹内外史（講談社ブルーバックス，2001）

[18] 『二十世紀数学思想』佐々木力（みすず書房，2001）

[19] 『数学と論理』難波完爾（朝倉書店，2003）

[20] 『ふしぎな数学－数学のパラドックス－』E.P. ノースロップ，松井政太郎訳（みすず書房，1963）

[21] 『数学の思考』（雑誌「現代思想」臨時増刊号，青土社，2000）

[22] 『ゲーデル』（雑誌「現代思想」臨時増刊号，青土社，2007）

[23] 『ゲーデルと 20 世紀の論理学』（全 4 巻，東京大学出版会，2006〜）

[24] 『不変式とモジュライ』向井茂（『数学のたのしみ』No.28 2001.12，日本評論社）

[25] 『An Introduction to Invariants and Moduli』Mukai,S. （Cambridge Studies in Advanced Mathematics,2003）

[26] 『不変式の話』向井茂（数理解析研究所公開講座）

[27] 『不変式の話』向井茂（『数学セミナー』連載）
第 1 回　対称式からヒルベルトの第 14 問題へ（2005 年 12 月号）
第 2 回　方程式の不変式（2006 年 1 月号）
第 3 回　ヒルベルトの基定理とワイルの手品（2006 年 2 月号）
第 4 回　第 14 問題に対する反例と二つの未解決問題（最終，2006 年 4 月号）

[28] ヘルマン・ワイル，蟹江幸博訳『古典群』（シュプリンガー数学クラシックス，2007）

[29] 『代数曲線の幾何学』難波誠（現代数学社，1992）

[30] 『平面図形の幾何学』難波誠（現代数学社，2008）

[31] 『代数学講義（改訂新版）』高木貞治（共立出版，1948）

[32] 『幾何入門』佐々木重夫（岩波書店，1960）

[33] 『幾何学』長友次郎吉（東京教学社，1969）

[34] 『幾何学大辞典 2』岩田至康編（槇書店，1974）

[35] 『日本の幾何－何題解けますか?』深川英俊，ダン・ペドー（森北出版，1991）

[36] 『重力と力学的世界』山本義隆（現代数学社，1981）

[37] 『古典力学の形成』山本義隆（日本評論社，1997）

[38] 『磁力と重力の発見』山本義隆（みすず書房，2003）

[39] 『ケプラー・天空の旋律』吉田武（共立出版，1999）

[40] 『教師のための数学入門　関数・図形編』遠山啓　（国土社，1965）

[41] 『量と構造』遠山啓, 銀林浩　編集（「数学教育現代化の基礎〈1〉，国土社，1971）

[42] 『関数・空間』遠山啓, 銀林浩　編集（「数学教育現代化の基礎〈3〉，国土社，1971）

[43] 『量の世界—構造主義的分析』銀林浩（麦書房，1975）

[44] 『量とはなにか I』遠山啓（「遠山啓作集数学教育論シリーズ〈5〉，太郎次郎社，1981）

[45] 『量とはなにか II』遠山啓（「遠山啓作集数学教育論シリーズ〈6〉，太郎次郎社，1981）

[46] 『量の世界－構造主義的分析』銀林浩（教育文庫〈8〉，麥書房，1975）

[47] J. マトウシェク：離散幾何学講義，岡本吉央訳，丸善出版，2012

[48] Martin Gould : Ramsey Theory，University of Oxford，2007 以降

[49] J. コフマン : めざせ，数学オリンピック，山下純一訳，現代数学社，1995

[50] J. マトウシェク : 離散幾何学講義，岡本吉央訳，丸善出版，2012

[51] Martin Gould : Ramsey Theory，University of Oxford，2007 以降