目 次

1 高校数学の方法関連問題

1.1 何をどう置くか

02 名工大

平面上に 三角形 ABC と 2 つの正三角形 ADB， ACE とがある．ただし，点 C，点 D は直線 AB に関して反対側にあり，また，点 B，点 E は直線 AC に関して反対側にある．線分 AB の中点を K，線分 AC の中点を L，線分 DE の中点を M とする．線分 KL の中点を N とするとき，直線 MN と直線 BC とは垂直であることを示せ．

1.2 条件の同値変形

02 奈良女子大

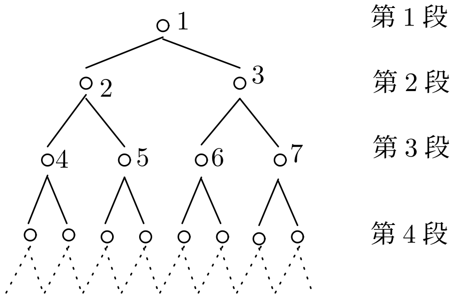
(1) 0 以上の整数 $a,\ b$ が $a>b$ を満たすとき $2^{a-1} \leqq 2^a-2^b<2^a$ が成り立つことを示せ．

(2) 0 以上の整数 $k,\ l,\ m,\ n$ が $k>l,\ m>n$ かつ $2^k-2^l=2^m-2^n$ を満たすとき， $k=m$ かつ $l=n$ であることを示せ．

1.3 例で考える

02 滋賀医大

各頂点から 2 本ずつ枝分かれした樹形図の各頂点に，上から下へ左から右へと図のように番号をつけ番号 i をつけた頂点を頂点 i と呼ぶ．



(1) 頂点 i のすぐ下の段にあって頂点 i と結ばれている頂点の番号は $2i$ と $2i+1$ であることを示せ．

(2) 第 n 段までのすべての頂点に 1 つずつ石を置いて，各石を 1 段ずつ枝に沿って上に動かし，頂点 1 に達すれば「上がり」として外に取り出す．全ての石を取り出すのに要する操作の総数 S_n を求めよ．ただし，1 つの石を 1 段上に動かすこと，または頂点 1 にある石を外に取り出すことを 1 つの操作とする．

たとえば， $S_1=1,\ S_2=5,\ S_3=17$ である．また，1 つの頂点には 2 つ以上の石は置けないものとする．

(3) 自然数 $k,\ n\ (k<n)$ に対して，次のような条件を満たす自然数の対 $(i,\ j)\ (i<j)$ の個数を $k,\ n$ で表せ．

条件 ： 頂点 i と頂点 j は第 n 段にあり，それぞれの頂点にある石を枝に沿って 1 段ずつ交互に上に動かすと，第 k 段ではじめて出会う．

1.4 必要条件・十分条件

02 都立大

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD が与えられているとする．

(1) 辺 AC と辺 BD は垂直であることを示せ．

(2) 辺 AC の中点 M と辺 BD の中点 N を結ぶ線分 MN の長さを求めよ．

(3) 直径が b の十分に長い円柱の内部に，正四面体 ABCD がすっぽり入るとき， $a,\ b$ の満たすべき不等式を求めよ．ただし，MN の中点 G は円柱の中心軸上にあるものとする．

1.5 存在の証明

02 京都府大

座標平面上に原点 O を始点とする n 個のベクトル $\overrightarrow{a}_1,\ \overrightarrow{a}_2,\ \cdots,\ \overrightarrow{a}_n$ をとる (n は自然数)．ただし，この n 個のベクトルのうち，少なくとも 1 つは $\overrightarrow{0}$ でないとする．
これを用いて，座標平面上の原点 O を始点とし，$m_1\overrightarrow{a}_1+m_2\overrightarrow{a}_2+\cdots+m_n\overrightarrow{a}_n$ ($m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$ はすべて任意の整数) の形で表されるベクトルを考える．この形のベクトル全体の集合を M とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) M の中より任意に 2 つのベクトル $\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$ をとる．
このときベクトル $\overrightarrow{b}_1+\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_1-\overrightarrow{b}_2$, $l\overrightarrow{b}_1$ (l は任意の整数) も，それぞれ M に属することを示せ．

(2) 今，M に属するベクトルがすべて原点 O を通るある一直線上に乗っているとする．さらに，M に属するベクトルで $\overrightarrow{0}$ でないもののうち，その大きさが最小のものが存在するとする．そして，大きさが最小のベクトルのうちの 1 つを $\overrightarrow{b}$ とする．このとき，M に属する任意のベクトルは $m\overrightarrow{b}$(m は整数) と表せることを証明せよ．

1.6 定義を問う問題

最近の入試問題では，定義・基本事項を証明させる問題が頻出である．2002 年もいくつか出題された．気づいたものをここで紹介する．多くは小問の最初の部分である．これらがどのような文脈で出題されているか知りたければ原題にあたってほしい．

厳格な論述を試してほしい．

- **広島大**
n を自然数とする．次の等式が成り立つことを示せ．
$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

- **大教大**
(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を証明せよ．
(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ を証明せよ．

- **津田塾大**
直線 $ax+by+c=0$ と点 $(x_0,\ y_0)$ の距離を与える公式
$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
を証明せよ．

- **九州大**
原点を中心とする半径 r $(r>0)$ の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は $ax+by=r^2$ で与えられることを示せ．

- **三重大，宮崎大**
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1)$ を証明せよ．

- **九州大**
$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ．

- **大教大**
複素数 z, w に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．
$$|z|-|w| \leqq |z+w| \leqq |z|+|w|$$

- **南山大**
定数 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ に対し
$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$
が成り立つことを示せ．

- **お茶の水女子大**
区間 $a \leqq x \leqq b$ を含む範囲で定義された正の値をとる関数 $f(x)$ を考える．$y=f(x)$ のグラフ，2 直線 $x=a,\ x=t\ (a \leqq t \leqq b)$ で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする． $S'(t)=f(t)$ を示せ．

- **神戸大**
関数 $f(x)$ は任意の実数 x に対して定義されているとする．$f(x)$ が $x=a$ において微分可能であることの定義を述べよ．

- **(参)99 東大**
(1) 一般角 θ に対して， $\sin\theta,\ \cos\theta$ の定義を述べよ．
(2) (1) で述べた定義にもとづき，一般角 $\alpha,\ \beta$ に対して
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta$$
を証明せよ．

- **(参) 作問**
二つのベクトル $\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2)$ ， $\overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2)$ がある．また二つのベクトルのなす角を θ とする．このとき
(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ と定めれば，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$ であることを示せ．
(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$ と定めれば，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ であることを示せ．

1.7 背理法

02 東京理科大

(1) 背理法とは何かを 20 字以上 100 字以内で説明せよ．

(2) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを背理法を用いて証明せよ．

02 千葉大

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ．

(2) n が正の整数のとき， $\log_2 n$ が整数でない有理数となることがあるかどうか調べよ．

02 上智大

半径 1 の球面 A の内側にあり，すべての頂点が球面 A 上にある立方体 B の 1 辺の長さを求めよ．球面 A の内側で，立方体 B の外側にある最大の球 C の半径を求めよ．球面 A の内側で，立方体 B と球 C の外側にあり，球 C に接している最大の球 D の半径を求めよ．

2　高校数学の方法関連問題解答

2.1　何をどう置くか

02 名工大

　三角形 ABC 複素平面上におき，A(z_1)，B(z_2)， C(z_3) とする．

$$\alpha = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$$

とし． D(w_1)， E(w_2) とおく．点 C ，点 D は直線 AB に関して反対側にあり，また，点 B ，点 E は直線 AC に関して反対側にあるので,

$$\begin{aligned} w_1 - z_2 &= \alpha(z_1 - Z_2) \\ w_2 - z_1 &= \alpha(z_3 - Z_1) \end{aligned}$$

である．点 M と N に対応する複素数を m, n とすると

$$m = \frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{z_1 + z_2}{2} + \alpha \frac{z_3 - z_2}{2}$$

　一方，K$\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$， L$\left(\dfrac{z_3 + z_1}{2}\right)$ なので

$$n = \frac{2z_1 + z_2 + z_3}{4}$$

　ここで

$$\begin{aligned} n - m &= \frac{2z_1 + z_2 + z_3}{4} - \left\{ \frac{z_1 + z_2}{2} + \alpha \frac{z_3 - z_2}{2} \right\} \\ &= \frac{-z_2 + z_3}{4} - \alpha \frac{-z_2 + z_3}{2} \\ &= \frac{-z_2 + z_3}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \right\} = (z_2 - z_3) \times \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

$\dfrac{n - m}{z_2 - z_3}$ が純虚数になったので，直線 MN と直線 BC が垂直であることが示された.

2.2　条件の同値変形

02 奈良女子大

(1)

$$2^{a-1} \leqq 2^a - 2^b \quad \Longleftrightarrow \quad 2^b \leqq 2^a - 2^{a-1} = 2^{a-1}$$

a と b がともに整数で $b < a$ なので $b \leqq a - 1$ が成り立つ．よって $2^b \leqq 2^{a-1}$ は成り立つ．$2^b > 0$ より $2^a - 2^b < 2^a$ も成立.

(2) (1) から

$$\begin{aligned} &2^{k-1} \leqq 2^k - 2^l < 2^k \\ &2^{m-1} \leqq 2^m - 2^n < 2^m \end{aligned}$$

$2^k-2^l=2^m-2^n$ なので,

$$2^{k-1}<2^m \quad \text{かつ} \quad 2^{m-1}<2^k$$

つまり

$$k-1<m \quad \text{かつ} \quad m-1<k$$

ゆえに

$$k-1<m<k+1$$

k, m がともに整数なので $k=m$ である．このとき $2^k-2^l=2^m-2^n$ より $l=n$ である．

［別解］$l \neq n$ とする．$l>n$ とすれば $2^k-2^l=2^m-2^n$ なので,

$$2^{k-n}-2^{l-n}=2^{m-n}-1$$

右辺は奇数で左辺は偶数なので矛盾.

$$\therefore \quad l=n$$

このとき $2^k-2^l=2^m-2^n$ より $k=m$.
$l<n$ のときも同様である.

2.3　例で考える

02 滋賀医大

(1) 頂点 i が上から k 段目，左から m 番にあるとする．k 段目には 2^{k-1} 個の頂点があるので,

$$i=1+2+2^2+\cdots+2^{k-2}+m=2^{k-1}-1+m \quad \cdots ①$$

が成り立つ.

このとき，頂点 i のすぐ下の段にあって頂点 i と結ばれている頂点は，上から k 段目，左から $2m-1,\ 2m$ の 2 つである.

① の関係式の k と m に， $k+1$ と $2m-1,\ 2m$ を代入する.

$$\begin{aligned} 2^{k+1-1}-1+(2m-1) &= 2^k-2+2m=2(2^{k-1}-1+m)=2i \\ 2^{k+1-1}-1+2m &= 2^{k+1-1}-1+(2m-1)+1=2i+1 \end{aligned}$$

であるから，それらの頂点の番号は $2i$ と $2i+1$ である.

(2) k 段目の石は k 回の操作で上がりになる.

$$\begin{aligned} \therefore \quad S_n &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot(2^k-2^{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\{k\cdot 2^k-(k-1)\cdot 2^{k-1}-2^{k-1}\} \\ &= n\cdot 2^n-\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=n\cdot 2^n-(2^n-1)=(n-1)\cdot 2^n+1 \end{aligned}$$

(3) k 段目の出会うべき頂点の決め方は 2^{k-1} 通り．

その各々について，第 k 段目のその頂点ではじめて出会うのは，その頂点の下にある $k+1$ 段目の隣りあう頂点に来ることである．

$k+1$ 段目の一つの頂点に来る n 段の頂点は 2^{n-k-1} 個あり，頂点 i と頂点 j の決め方がそれぞれ 2^{n-k-1} 通りである．

ゆえに求める自然数の対 $(i,\ j)$ $(i<j)$ の個数は

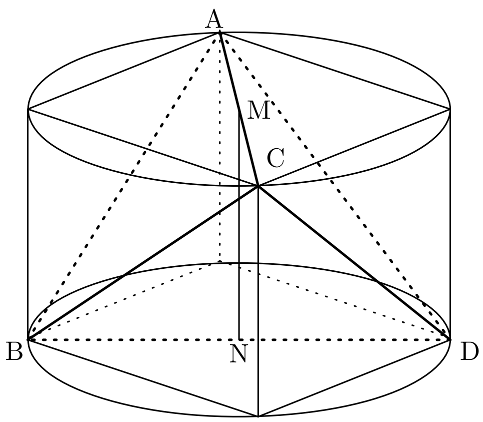
$$2^{k-1}\times(2^{n-k-1})^2=2^{2n-k-3}\ (個)$$

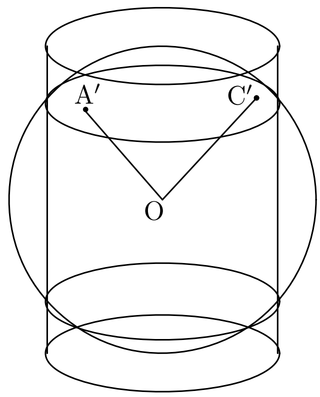
である．

2.4 必要条件・十分条件

02 都立大

(1) 1 辺の長さが a の正四面体 ABCD は 1 辺の長さが $\sqrt{2}a$ の立方体のなかに置くことができる．





このとき明らかに辺 AC と辺 BD は垂直である．

(2) 辺 AC の中点 M と辺 BD の中点 N を結ぶ線分 MN の長さは，立方体の 1 辺の長さに等しい．ゆえに $\sqrt{2}a$ ．

(3) 明らかに線分 MN は辺 AC と辺 BD に垂直である．直線 MN を回転軸にして直径 a の円柱を作ると正四面体の各頂点がちょうど円柱の表面上にある．

したがって，$a<b$ なら，直径が b の十分に長い円柱の内部に，正四面体 ABCD をすっぽり入れることができる．ゆえに $a<b$ は十分条件である．

$b\leqq a$ なら直径が b の十分に長い円柱の内部に，正四面体 ABCD をすっぽり入れることはできない．

なぜならもしできたとする．正四面体の中心 O を中心とする球面のうち，この円柱の内部にくる部分は 2 つある．正四面体の頂点は 4 個あるので，少なくとも一方には 2 つ以上の頂点が来る．それを A′, C′ とする．

このとき $\angle \mathrm{A'OC'}$ を考えると，これは明らかに

$$\angle \mathrm{A'OC'}<\angle \mathrm{AOC}$$

なので矛盾である．

ゆえに $a<b$ は必要条件でもある．

求める条件は $a<b$.

2.5　存在の証明

02 京都府大

(1)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{b}_1 &= m_1\overrightarrow{a}_1+m_2\overrightarrow{a}_2+\ \cdots+m_n\overrightarrow{a}_n\\
\overrightarrow{b}_2 &= l_1\overrightarrow{a}_1+l_2\overrightarrow{a}_2+\ \cdots+l_n\overrightarrow{a}_n
\end{aligned}
$$

とする．このとき

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{b}_1\pm\overrightarrow{b}_2 &= (m_1\pm l_1)\overrightarrow{a}_1+(m_2\pm l_2)\overrightarrow{a}_2+\ \cdots+(m_n\pm l_n)\overrightarrow{a}_n\\
l\overrightarrow{b}_1 &= lm_1\overrightarrow{a}_1+lm_2\overrightarrow{a}_2+\ \cdots+lm_n\overrightarrow{a}_n
\end{aligned}
$$

となり，$m_1\pm l_1,\ \cdots,\ m_n\pm l_n,\ lm_1,\ \cdots,\ lm_n$ はすべて整数である．ゆえにベクトル $\overrightarrow{b}_1+\overrightarrow{b}_2,\ \overrightarrow{b}_1-\overrightarrow{b}_2,\ l\overrightarrow{b}_1$ (l は任意の整数) も，それぞれ M に属する．

(2) M に属する任意のベクトル $\overrightarrow{a}$ をとる．条件から $\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{b}$ となる実数 k が存在する．また $p=|\overrightarrow{b}|$ とおく．$p>0$ である．

$|\overrightarrow{a}|=0$，つまり $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ なら $\overrightarrow{a}=0\overrightarrow{b}$ と表せ，$m=0$ が存在した．

$|\overrightarrow{a}|>0$ とする．$\overrightarrow{b}$ は 0 でないベクトルのなかで絶対値最小なので，$|\overrightarrow{b}|\leqq|\overrightarrow{a}|$ である．ところが

$$|\overrightarrow{a}|=|k\overrightarrow{b}|=|k||\overrightarrow{b}|=|k|p$$

であるから $p\leqq|k|p$ である．つまり $1\leqq|k|$ である．よってある自然数 m で

$$m\leqq|k|<m+1$$

となるものが存在する．

$k>0$ のとき．

$$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-m\overrightarrow{b}=(k-m)\overrightarrow{b}$$

とおく．条件から $\overrightarrow{c}\in M$ で，

$$|\overrightarrow{c}|=(k-m)|\overrightarrow{b}|=(k-m)p$$

ところが $0\leqq k-m<1$ なので，$0\leqq|\overrightarrow{c}|<p$ である．

ここでもし $k-m\neq0$ なら，$|\overrightarrow{c}|$ は絶対値が $|\overrightarrow{b}|$ より小さくかつ 0 でないベクトルになり，$\overrightarrow{b}$ が 0 でないベクトルで絶対値最小のものであることと矛盾する．ゆえに $k-m=0$．つまり $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ となり，その結果

$$\overrightarrow{a}=m\overrightarrow{b}$$

と整数 m が存在した．

$k<0$ のとき．$-\overrightarrow{a}$ について同様に

$$-\overrightarrow{a}=m\overrightarrow{b}$$

と表せるので $\overrightarrow{a}=(-m)\overrightarrow{b}$ と表せる．

よって題意が示された．

2.6 定義を問う問題

解答は略する．教科書によって確認すること．

2.7 背理法

02 東京理科大

(1) 結論の否定を仮定し，何らかの矛盾が生じることを示す．それによって結論の否定が否定され，結論が成立することを示す証明方法．

(2) $\sqrt[3]{2}$ が有理数であると仮定する．

［証明 1］ $\sqrt[3]{2}=\dfrac{q}{p}$ (p と q は互いに素な整数) とおく．

$$2p^3=q^3$$

となるので， q は偶数． $q=2q'$ とおく．このとき

$$2p^3=8{q'}^3$$

より p も偶数となり，互いに素という仮定と矛盾した．

ゆえに $\sqrt[3]{2}$ は無理数．

［証明 2］ $\sqrt[3]{2}=\dfrac{q}{p}$ (p と q は整数) とおく．

$$2p^3=q^3$$

となる．左辺の因数分解における因数 2 の個数は 3 で割ると 1 余る．それに対して右辺の因数分解における因数 2 の個数は 3 の倍数．素因数分解の一意性と矛盾した．

ゆえに $\sqrt[3]{2}$ は無理数．

［証明 3］ $\sqrt[3]{2}=\dfrac{q}{p}$ (p と q は 0 でない整数) とおく．

$$2p^3=q^3$$

となるので， q は偶数． $q=2q'$ とおく．このとき

$$2p^3=8{q'}^3$$

より p も偶数． $p=2p'$ とおく．これを代入して約すると

$$2{p'}^3={q'}^3$$

再び p', q' が 2 で約せ，これは何回でも繰り返せる．つまり p, q とも 2 で無限回約せる．これは p と q は 0 でない整数という仮定と矛盾した．

ゆえに $\sqrt[3]{2}$ は無理数．

02 千葉大

(1) $\log_2 3$ が有理数と仮定し

$$\log_2 3 = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素}, q > 0\ )$$

とおく．このとき，$2^{\frac{p}{q}} = 3$ なので

$$2^p = 3^q$$

素因数分解の一意性によりこの式は矛盾である．ゆえに $\log_2 3$ は無理数である．

(2) ある正の整数 n に対して， $\log_2 n$ が整数でない有理数とする．

$$\log_2 n = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素で } p \neq 0,\ q > 1\ )$$

とおく．このとき同様に

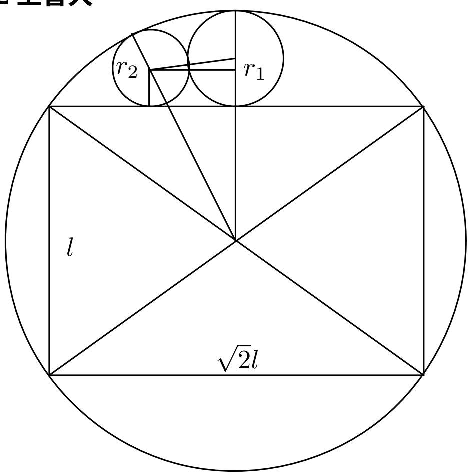
$$2^p = n^q$$

素因数分解の一意性により $n = 2^r$ となる非負整数 r が存在する．このとき指数を比較して

$$p = rq$$

これは p, q が互いに素であることに矛盾した．ゆえに $\log_2 n$ が整数でない有理数と なることはない．

02 上智大



求める立方体 B の 1 辺の長さを l とする．立方体の対角線での断面を考える．

$$l^2 + (\sqrt{2}l)^2 = 2$$

より， $l = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

次に球 C の半径を r_1 とする．明らかに

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{l}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

さらに球 D の半径を r_2 とする．

$$(1-r_2)^2 - (1-2r_1+r_2)^2 = (r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2$$

これから

$$r_2 = r_1(1-r_1) = \frac{1}{6}$$