n を自然数とし，10^n 以下で 3 の倍数か十進法表記で 3 が現れる数の個数を a_n とする．a_n を n の式で表せ．

10^n は条件を満たさないので，1 から 10^n-1 までの数，つまり 1 桁から n 桁までの数のなかで条件を満たすものの個数が a_n である．

$$b_n = 10^n - 1 - a_n$$

とする．b_n は n 桁までの数で 3 を含まず 3 の倍数でないものの個数である．

ちょうど n 桁で 3 が現れない数のうち 3 の倍数となるものが x_n 個，3 で割って 1 余るものが y_n 個，3 で割って 2 余るものが z_n 個あるとする．

$$x_n + y_n + z_n = 8 \cdot 9^{n-1}$$

である．

自然数を 3 で割った余りは，各桁の数字の和を 3 で割った余りに等しい．3 を除く 9 個の数字のなかでは 3 の倍数，1 余る数，2 余る数が 3 個ずつあるので，n 桁の数の右端に新たな数字を加え $n+1$ 桁の数を作るとすると，

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 3y_n + 3z_n = 24 \cdot 9^{n-1} \\ y_{n+1} = 3x_n + 3y_n + 3z_n = 24 \cdot 9^{n-1} \\ z_{n+1} = 3x_n + 3y_n + 3z_n = 24 \cdot 9^{n-1} \end{cases}$$

である．　よって

$$b_{n+1} - b_n = y_{n+1} + z_{n+1} = 48 \cdot 9^{n-1} \ .$$

$y_1 = z_1 = 3$ であるから $b_1 = 6$ なので

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 48 \cdot 9^{n-1} = 6 + 48 \cdot \frac{9^{n-1}-1}{9-1} = 6 \cdot 9^{n-1} \ .$$

$n=1$ のときも成立する．したがって

$$a_n = 10^n - 6 \cdot 9^{n-1} - 1 \ .$$

b_n を求める別解　数 2456 を $00 \cdots 002456$ のように $n-4$ 個の 0 が先頭に並んだ n 桁の数と考える．このように考え，さらに 0 を 1 桁の数に含めて考えると，3 を用いないで作られる 1 桁から n 桁までの数全体は，各桁が 0 から 9 までの (3 を除く) 9 個の数字のいずれかであるような数の全体なので，9^n 個ある．

このとき，x_n，y_n，z_n は初項まで含めてすべて等しいので，9^n 個の中に，3 の倍数，1 余る数，2 余る数は同数ある．3 で割りきれないものは 9^n の 3 分の 2，つまり

$$b_n = \frac{2}{3} \cdot 9^n = 6 \cdot 9^{n-1} \ .$$