

1 平面内の曲線が曲率だけで決まること

* 曲率が等しい二つの曲線が与えられたときに、片方の曲線を回転させて e_i たちが同じ向きになるようにするとそれらは平行移動で重なることを示す。

曲線 $\mathbf{p}(s)$ と $\bar{\mathbf{p}}(s)$ について

$$\begin{cases} \mathbf{p}' = \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}'_1 = \kappa \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}'_2 = -\kappa \mathbf{e}_1, \\ \bar{\mathbf{p}}' = \bar{\mathbf{e}}_1, & \bar{\mathbf{e}}'_1 = \kappa \bar{\mathbf{e}}_2, & \bar{\mathbf{e}}'_2 = -\kappa \bar{\mathbf{e}}_1 \end{cases}$$

とする。 $l(s) = |\mathbf{p}'(s) - \bar{\mathbf{p}}'(s)|^2$ とおく。 $l(s) \geq 0$ である。

$$\begin{aligned} l(s) &= (\mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{e}}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{e}}_1) \\ &= |\mathbf{e}_1|^2 + |\bar{\mathbf{e}}_1|^2 - 2\mathbf{e}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \\ &= 2 - 2\mathbf{e}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} l'(s) &= -2(\mathbf{e}'_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}'_1) \\ &= -2((\kappa \mathbf{e}_2) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot (\kappa \bar{\mathbf{e}}_2)) \\ &= 2(\mathbf{e}_2 \cdot (-\kappa \bar{\mathbf{e}}_1) + (-\kappa \mathbf{e}_1) \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) \\ &= 2(\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}'_2 + \mathbf{e}'_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) \\ &= 2(\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2)' + (\mathbf{e}'_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 + \bar{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{e}_3) \\ &= 2(\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3)'. \end{aligned}$$

したがって

$$l(s) = 2\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \text{const.}$$

$s = s_0$ で $\mathbf{e}_2(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_2(s_0)$, $l(s_0) = 0$ なので
 $\text{const} = -2$.

$\mathbf{e}_2, \bar{\mathbf{e}}_2$ は単位ベクトルなので

$$l(s) = 2\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 - 2 \leq 0.$$

よって

$$l(s) \equiv 0.$$

つまり

$$\mathbf{p}(s) \equiv \bar{\mathbf{p}}(s) + \text{const vector.}$$

2 空間内の曲線が曲率と捩率だけで決まる

$$\begin{cases} \mathbf{p}' = \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}'_1 = \kappa \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}'_2 = -\kappa \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}'_3 = -\tau \mathbf{e}_2, \\ \bar{\mathbf{p}}' = \bar{\mathbf{e}}_1, & \bar{\mathbf{e}}'_1 = \kappa \bar{\mathbf{e}}_2, & \bar{\mathbf{e}}'_2 = -\kappa \bar{\mathbf{e}}_1 + \tau \bar{\mathbf{e}}_3, & \bar{\mathbf{e}}'_3 = -\tau \bar{\mathbf{e}}_2 \end{cases}$$

とする。 $l(s) = |\mathbf{p}'(s) - \bar{\mathbf{p}}'(s)|^2$ とおく。 $l(s) \geq 0$ である。

$$l(s) = 2 - 2\mathbf{e}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1.$$

よって

$$\begin{aligned} l'(s) &= -2(\mathbf{e}'_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}'_1) \\ &= -2((\kappa \mathbf{e}_2) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot (\kappa \bar{\mathbf{e}}_2)) \\ &= 2(\mathbf{e}_2 \cdot (-\kappa \bar{\mathbf{e}}_1) + (-\kappa \mathbf{e}_1) \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) \\ &= 2(\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}'_2 + \mathbf{e}'_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) \\ &= 2((\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}'_2 + \mathbf{e}'_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) + ((-\tau \mathbf{e}_2) \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 + (-\tau \bar{\mathbf{e}}_2) \cdot \mathbf{e}_3)) \\ &= 2((\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2)' + (\mathbf{e}'_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 + \bar{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{e}_3)) \\ &= 2(\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3)'. \end{aligned}$$

したがって

$$l(s) = 2(\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3) + \text{const.}$$

$s = s_0$ で $\mathbf{e}_2(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_2(s_0)$, $\mathbf{e}_3(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_3(s_0)$,
 $l(s_0) = 0$ なので $\text{const} = -4$.

$\mathbf{e}_2, \bar{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_3, \bar{\mathbf{e}}_3$ は単位ベクトルなので

$$l(s) = 2(\mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 - 2) \leq 0.$$

よって

$$l(s) \equiv 0.$$

つまり

$$\mathbf{p}(s) \equiv \bar{\mathbf{p}}(s) + \text{const vector.}$$