解答 1　解 *1*　*(*整式の除法を用いる方法*)*

$Q(x)$ は *2* 次式なので，整式 $P(x)$ を $Q(x)$ で割った余りは *1* 次以下の整式である．商を $A(x)$，余りを $ax+b$ とする．

$$P(x)=Q(x)A(x)+ax+b$$

このとき

$$\{P(x)\}^2=\{Q(x)A(x)\}^2+2(ax+b)Q(x)A(x)+(ax+b)^2$$

ところが $\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるので $\{P(x)\}^2=Q(x)B(x)$ とおける．

これから

$$Q(x)\left[B(x)-Q(x)\{A(x)\}^2-2(ax+b)A(x)\right]=(ax+b)^2$$

$Q(x)$ は *2* 次式で，右辺は *2* 次以下であるから，$B(x)-Q(x)\{A(x)\}^2-2(ax+b)A(x)$ は定数である．これを c とする．

$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れないので右辺は定数 *0* ではない．つまり $c\neq 0$ である．よって $Q(x)$ は

$$Q(x)=\frac{1}{c}(ax+b)^2$$

と表される．$Q(x)$ は *2* 次式だから $a\neq 0$ である．

このとき方程式 $Q(x)=0$ は重解 $x=-\dfrac{b}{a}$ を持つ．

解 *2*　*(*整式の整数論を用いる方法*)*

$Q(x)=0$ の解を α と β とし，

$$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

とおく．

$\alpha\neq\beta$ と仮定する．

このとき $x-\alpha$ と $x-\beta$ は互いに素である．よって任意の整式 $f(x)$ について $f(x)$ が $Q(x)$ で割りきれることと，$f(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れかつ $x-\beta$ で割り切れることが同値である．

もし $P(x)$ が因数 $x-\alpha$ をもたなければ，整式における素因数分解の一意性によって，$\{P(x)\}^2$ も因数 $x-\alpha$ をもたない．

よってもし $\{P(x)\}^2$ が因数 $x-\alpha$ をもてば，$P(x)$ が因数 $x-\alpha$ をもつ．

$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるので，$\{P(x)\}^2$ が因数 $x-\alpha$ と $x-\beta$ をもち，その結果 $P(x)$ が因数 $x-\alpha$ と $x-\beta$ をもつ．

ところがこれは $P(x)$ が $Q(x)$ で割りきれることを意味し，仮定と矛盾する．

よって $\alpha=\beta$ であり，*2* 次方程式 $Q(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもつ．

解答 2　解 *1*　*(*整式の除法を用いる方法*)*

$A(x)$ と $B(x)$ を $C(x)$ で割った商と余りをそれぞれ a，p と b，q とし，

$$\begin{aligned}A(x)&=aC(x)+p\\B(x)&=bC(x)+q\end{aligned}$$

とおく．それぞれ *1* 次式であるので，$ab\neq 0$ である．

$\{A(x)\}^2+\{B(x)\}^2=\{C(x)\}^2$ より

$$a^2\{C(x)\}^2+2apC(x)+p^2+b^2\{C(x)\}^2+2bqC(x)+q^2=\{C(x)\}^2\quad\cdots①$$

$C(x)$ を $cx+d$ とすると，$c \neq 0$ で，両辺の x^2 の係数の比較より

$$a^2c^2 + b^2c^2 = c^2$$

これから

$$a^2 + b^2 = 1$$

である．

このとき ① は

$$2apC(x) + p^2 + 2bqC(x) + q^2 = 0$$

となる．両辺の x の係数比較から

$$2apc + 2bqc = 0$$

その結果，$ap + bq = 0 \quad \cdots$② となり，さらに

$$p^2 + q^2 = 0 \quad \cdots ③$$

である．ここで $a \neq 0$ なので ② から

$$p = -\frac{bq}{a}$$

これを ③ に代入して

$$\begin{aligned} &\frac{b^2q^2}{a^2} + q^2 \\ = \quad & \frac{b^2+a^2}{a^2}q^2 = \frac{1}{a^2}q^2 = 0 \end{aligned}$$

よって $q = 0$ となり，③ から $p = 0$．

$A(x)$ と $B(x)$ はともに $C(x)$ の定数倍であることが示された．

解 *2*　*(*整式の整数論を用いる方法*)*

$\{A(x)\}^2 + \{B(x)\}^2 = \{C(x)\}^2$ より

$$\{B(x)\}^2 = \{C(x) + A(x)\}\{C(x) - A(x)\}$$

である．

$C(x) + A(x)$ も $C(x) - A(x)$ も *1* 次以下の整式であるから $\{B(x)\}^2$ の定数倍になることはない．

したがって定数 k $(k \neq 0)$ が存在して

$$\begin{aligned} C(x) + A(x) &= kB(x) \\ C(x) - A(x) &= \frac{1}{k}B(x) \end{aligned}$$

と表される．

これから

$$A(x) = \frac{k^2-1}{2k}B(x),\ C(x) = \frac{k^2+1}{2k}B(x)$$

である．

$A(x)$ も $C(x)$ も *1* 次式なので $k^2 \pm 1 \neq 0$ である．

$$A(x) = \frac{k^2-1}{k^2+1}C(x),\ B(x) = \frac{2k}{k^2+1}C(x)$$

となり，$A(x)$ と $B(x)$ はともに $C(x)$ の定数倍であることが示された．

解答 3

S に属する最小の数を d とする．S の任意の要素 a をとり，a を d で割り商が q，余りが r とする．

$$a = dq + r$$

$r > 0$ とする．$a - d \in S$ であり，自然数 $1 \leqq j < q$ に対して $a - jd \in S$ なら $a - jd - d = a - (j+1)d \in S$ なので，数学的帰納法で $r = a - dq \in S$ である．d が S に属する正で最小の整数という仮定に反する．よって $r = 0$ である．S のすべての要素は d の倍数である．

S に属する最大の要素を md とおく，$1 < j \leqq m$ の整数に対して $jd \in S$ なら $jd - d = (j-1)d \in S$ なので

$$md,\ (m-1)d,\ \cdots,\ d$$

はすべて S に属する．要素の個数を考え $m = n$ であり

$$S = \{nd,\ (n-1)d,\ \cdots,\ d\}$$

となる．$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の順序を適当に変えれば初項 d，公差 d の等差数列になる．

※　大小の順で並べ替えて示してもよい．

解答 4

(1) （イ），（ロ）とも成り立たないとする．S の属する最大の数を M，最小の数を m とする．このとき $m < 0 < M$ が成り立っている．$M - m$ か $m - M$ は S に属するので，$M < M - m$ または $m - M < m$ が成り立つ．これは M の最大性または m の最小性に矛盾する．よって（イ），（ロ）のうちいずれか一方が成立する．

(2) （イ）が成り立っているとする．S の要素で正で最小のものを d とする．

S の d と異なる正の任意の要素 a をとる．

$$qd \leqq a < (q+1)d$$

となる自然数 q をとる．$r = a - qd$ とおく．$r > 0$ とする．$a - d \in S$ であり，自然数 $1 \leqq j < q$ に対して $a - jd \in S$ なら $a - jd - d = a - (j+1)d \in S$ なので，数学的帰納法で $r = a - dq \in S$ である．d が S の要素で正で最小のものであるという仮定に反する．よって $r = 0$ である．S のすべての要素は d の倍数である．

S に属する最大の要素を md とおく，$1 < j \leqq m$ の整数に対して $jd \in S$ なら $jd - d = (j-1)d \in S$ なので

$$md,\ (m-1)d,\ \cdots,\ d$$

はすべて S に属する．要素の個数は，*0* が S にあるかどうかを考え $m = n$ か $m = n - 1$ であり

$$S = \{nd,\ (n-1)d,\ \cdots,\ d\},\ \{(n-1)d,\ (n-2)d,\ \cdots,\ d,\ 0\}$$

のいずれかである．$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の順序を適当に変えれば初項が d または *0*，公差 d の等差数列になる．

（ロ）の場合，すべての要素の絶対値をとって考えれば同様である．

※　大小の順で並べ替えて示してもよい．

解答 5

自然数 j に対して $jd \in G$ なら $d + jd = (j+1)d \in G$ なので，数学的帰納法によって

$$\{kd \mid k \text{ は自然数 }\} \subset G$$

G の任意の要素 a をとり，a を d で割り商が q，余りが r とする．

$$a = dq + r$$

$dq \in G$ なので $r = a - dq \in S$ である．ここで $r > 0$ とすると d が G に属する正で最小の整数という仮定に反する．よって $r = 0$ である．G のすべての要素は d の倍数である．

$$G \subset \{kd \mid k \text{ は自然数 }\}$$

が示され，題意が証明された．

解答 6

(1) $p(x) = 1$ とすれば $f(x) = f(x)p(x)$ となるので，整式 $f(x)$ は $f(x)$ の約数である．

(2) *0* と異なる整式 $f(x)$ が整式 $g(x)$ なので，*(1)* から $f(x)$ は $f(x)$，$g(x)$ の公約数である．$f(x)$ の約数の次数は $f(x)$ の次数以下であるから，$f(x)$ は $f(x)$ と $g(x)$ の公約数のなかで次数最大である．つまり $f(x)$ は $f(x)$，$g(x)$ の最大公約数である．

(3) 整式 $g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $q(x)$ とすると，

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x)$$

である．整式 $d(x)$ が $r(x)$，$f(x)$ の公約数なので，$d(x)$ は $g(x)$ の約数ともなり，$d(x)$ は $f(x)$，$g(x)$ の公約数でもある．

ここで $f(x)$，$g(x)$ の最大公約数を $D(x)$ とすると，

$$d(x) \text{ の次数} \leqq D(x) \text{ の次数}$$

つぎに

$$r(x) = g(x) - f(x)q(x)$$

より $D(x)$ は $r(x)$ の約数にもなり，$D(x)$ は $r(x)$，$f(x)$ の公約数となる．この結果

$$D(x) \text{ の次数} \leqq d(x) \text{ の次数}$$

あわせて

$$D(x) \text{ の次数} = d(x) \text{ の次数}$$

となり，$d(x)$ が $f(x)$，$g(x)$ の最大公約数でもあることが示された．

解答 7

解 *1*

与式に $x = 1,\ x = -1$ を代入して

$$q(1)(1+1)^3 = 1,\ p(-1)(-1-1) = 1$$

これから $p(x)$, $q(x)$ は，ある整式 $P(x)$, $Q(x)$ を用いて

$$p(x)=(x+1)P(x)-\frac{1}{2},\ q(x)=(x-1)Q(x)+\frac{1}{8}$$

と表される．これを与式に代入して

$$(x-1)\left\{(x+1)P(x)-\frac{1}{2}\right\}+(x+1)^3\left\{(x-1)Q(x)+\frac{1}{8}\right\}=1$$

これから

$$\begin{aligned}(x^2-1)P(x)+(x^2-1)(x+1)^2Q(x) &= 1-\frac{(x+1)^3}{8}+\frac{x-1}{2}\\ &= \frac{(x^2-1)(-x-3)}{8}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad P(x)=-(x+1)^2Q(x)-\frac{x+3}{8}$$

次数を小さくとるために，$Q(x)=0$ とおく．$P(x)=-\dfrac{x+3}{8}$.
このとき

$$\begin{aligned}p(x) &= (x+1)\left(-\frac{x+3}{8}\right)-\frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8}\\ q(x) &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

逆にこれは与式を満たす.
次に与式を満たす任意の $p(x)$, $q(x)$ と，先に求めた一組の解を与式に代入し

$$\begin{aligned}&(x-1)p(x)+(x+1)^3q(x)=1\\ &(x-1)\left(-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8}\right)+(x+1)^3\left(\frac{1}{8}\right)=1\end{aligned}$$

となる．辺々引いて

$$(x-1)\left\{p(x)+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}\right\}+(x+1)^3\left\{q(x)-\frac{1}{8}\right\}=0$$

$x-1$ と $(x+1)^3$ は互いに素なので，ある整式 $T(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}&p(x)+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}=(x+1)^3T(x)\\ &q(x)-\frac{1}{8}=-(x-1)T(x)\end{aligned}$$

と表され，またこの形のものは与式を満たす．ゆえに任意の解は

$$\begin{aligned}&p(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8}+(x+1)^3T(x)\\ &q(x)=\frac{1}{8}-(x-1)T(x)\end{aligned}\quad ,\ (T(x)\text{ は任意の整式})$$

と表される．

最高次数の係数が *1* で次数最小のものは $T(x)=1$ のときだから

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3+\frac{23}{8}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{8} \\ q(x) &= -x+\frac{7}{8} \end{aligned}$$

である．

解 *2*

$(x+1)^3$ を $x-1$ で割って

$$(x+1)^3=(x-1)(x^2+4x+7)+8$$

したがって

$$\begin{aligned} & p(x)f(x)+q(x)g(x)=1 \\ \iff\quad & p(x)(x-1)+q(x)\left\{(x-1)(x^2+4x+7)+8\right\}=1 \\ \iff\quad & (x-1)\left\{p(x)+q(x)(x^2+4x+7)\right\}+8q(x)=1 \end{aligned}$$

したがって $q(x)$ を次数を小さく

$$\begin{cases} p(x)+q(x)(x^2+4x+7)=0 \\ 8q(x)=1 \end{cases}$$

とすればよい．このとき，

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8} \\ q(x) &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

逆にこれは与式を満たす．

*(*後半は上と同様である．*)*

解答 8

(1) 2 次式 $a_nx^2+2b_nx+c_n$ の判別式を D_n とする．

$$\begin{aligned} D_{n+1}/4 &= {b_{n+1}}^2-a_{n+1}c_{n+1} \\ &= (b_n+2a_n)^2-4a_n\left(\frac{c_n}{4}+a_n+b_n\right) \\ &= {b_n}^2-a_nc_n=D_n/4 \end{aligned}$$

よって帰納的に

$$D_n/4=D_{n-1}/4=\cdots=D_1/4=3^2-2\cdot 4=1>0$$

したがって，2 次方程式 $a_nx^2+2b_nx+c_n=0$ は相異なる 2 次数解をもち，H_n は x 軸と *2* 点で交わることが示された．

(2) P_n，Q_n の x 座標を p_n，q_n とする．p_n，q_n は 2 次方程式 $a_nx^2+2b_nx+c_n=0$ の *2* 解であるから，$p_n+q_n=\dfrac{-2b_n}{a_n}$，$p_nq_n=\dfrac{c_n}{a_n}$ である．よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n{}^2 &= (p_n-q_n)^2=(p_n+q_n)^2-4p_nq_n\\ &= \left(\frac{-2b_n}{a_n}\right)^2-\frac{4c_n}{a_n}=\frac{D_n}{a_n{}^2}\end{aligned}$$

(1) から $D_n=4$ なので $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\dfrac{2}{a_n}$ である．ここで条件から $a_n=2\cdot4^{n-1}$ であるから，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\dfrac{1}{4^{n-1}}$ である．

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=\frac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

別解

(1)

$$\begin{aligned}&a_{n+1}x^2+2b_{n+1}x+c_{n+1}\\ =\ &4a_nx^2+2(b_n+2a_n)x+\frac{c_n}{4}+a_n+b_n\\ =\ &\frac{1}{4}\left\{a_n(4x+2)^2+2b_n(4x+2)+c_n\right\}\end{aligned}$$

したがって 2 次方程式 $a_nx^2+2b_nx+c_n=0$ の解を α_n，β_n とすれば，2 次方程式 $a_{n+1}x^2+2b_{n+1}x+c_{n+1}=0$ の解は

$$\alpha_n=4\alpha_{n+1}+2,\ \beta_n=4\beta_{n+1}+2$$

となる．これから α_n，β_n が異なる実数なら，α_{n+1}，β_{n+1} も異なる実数である．$n=1$ のときは $2x^2+6x+4=2(x+1)(x+2)$ より α_1，$\beta_1=-1$，-2．数学的帰納法によって，2 次方程式 $a_nx^2+2b_nx+c_n=0$ は相異なる 2 次数解をもち，H_n は x 軸と *2* 点で交わることが示された．

(2)

$$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}=|\beta_{n+1}-\alpha_{n+1}|=\frac{1}{4}|\beta_n-\alpha_n|=\frac{1}{4}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$$

$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=1$ なので $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\dfrac{1}{4^{n-1}}$ である．

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=\frac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

注意：　本問は *1* 次の係数を $2b$ にとっている．そこで変換を

$$\begin{aligned}
&a_1 = 2, \quad && a_{n+1} = 4a_n \\
&2b_1 = 6, \quad && 2b_{n+1} = 2b_n + 4a_n \\
&c_1 = 4, \quad && c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + a_n + \frac{1}{2}(2b_n)
\end{aligned}$$

とすると，２次式の係数変換行列が $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$ となる．これが変換**??**となるように σ をさだめると $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ となる．別解はこのことを背景に用いている．

解答 9

(1)　*(i)* $x,\ y$ を $s,\ u$ を用いて表すと

$$x = \frac{s+u}{2}, \quad y = \frac{s-u}{2}$$

よって

$$f(x,\ y) = \left(\frac{s+u}{2}\right)^2 + \left(\frac{s+u}{2}\right)\left(\frac{s-u}{2}\right) + \left(\frac{s-u}{2}\right)^2 = \frac{3s^2+u^2}{4}$$

(ii) $f(x,\ y) = f\left(\dfrac{s+u}{2},\ \dfrac{s-u}{2}\right)$ より，$f(x,\ y)$ は $\dfrac{s+u}{2},\ \dfrac{s-u}{2}$ の多項式となるから s と u との多項式で表される．

(iii)

$$f(x,\ y) = \sum_{i,\ j} a_{ij} x^i y^j$$

とおくと，$f(x,\ y) = f(-x,\ y)$ が恒等的に成り立つとき

$$a_{ij} = a_{ij} \cdot (-1)^i$$

よって，i が奇数のとき $a_{ij} = 0$

したがって，$f(x,\ y)$ は $x^2,\ y$ の多項式，つまり y と v の多項式となる．

(iv) *(iii)* と同様において考えると $f(x,\ y) = f(y,\ x)$ が恒等的に成り立つとき

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad f(x,\ y) &= \sum_i a_{ii}(xy)^i + \sum_{i<j} a_{ij}(x^i y^j + x^j y^i) \\
&= \sum_i a_{ii} t^i + \sum_{i<j} a_{ij}(xy)^i (y^{j-i} + x^{j-i}) \\
&= \sum_i a_{ii} t^i + \sum_{i<j} a_{ij} t^i (x^{j-i} + y^{j-i}) \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

ここで $x^0+y^0=2,\ x+y=s$ であるので, $x^n+y^n,\ x^{n+1}+y^{n+1}$ が $s,\ t$ の多項式であると仮定すると

$$\begin{aligned} x^{n+2}+y^{n+2} &= (x^{n+1}+y^{n+1})(x+y)-xy(x^n+y^n) \\ &= (x^{n+1}+y^{n+1})s-t(x^n+y^n) \end{aligned}$$

より, $x^{n+2}+y^{n+2}$ も $s,\ t$ の多項式となるから，帰納的に x^n+y^n は $s,\ t$ の多項式となる.

したがって, $(*)$ により $f(x,\ y)$ は $s,\ t$ の多項式となる.

別解

$f(x,\ y)$ の各単項式の x の次数と y の次数の和をその単項式の次数とよび, その中で最大のものを $f(x,\ y)$ の次数とよぶ. $f(x,\ y)=f(y,\ x)$ が成り立つような $f(x,\ y)$ の次数 n についての帰納法で示す. $n=0,\ 1$ のときは明らかに成立する.
$n=1,\cdots,k$ で成立するとし, $f(x,\ y)$ を $k+1$ 次対称式とする.

$$F(x,\ y)=f(x,\ y)-f(x+y,\ 0)$$

とおく. これも $x,\ y$ の対称式である.

$$\begin{aligned} F(0,\ y) &= f(0,\ y)-f(y,\ 0) = f(y,\ 0)-f(y,\ 0) = 0 \\ F(x,\ 0) &= f(x,\ 0)-f(x,\ 0) = 0 \end{aligned}$$

よって, $F(x,\ y)$ は xy で割り切れる.
$F(x,\ y)=xyG(x,\ y)$ とおくと, $G(x,\ y)$ は対称式. そして, $G(x,\ y)$ の次数は $k-1$ 次以下である.

したがって, $G(x,\ y)$ は s と t の式である.
よって, $f(x,\ y)=xyG(x,\ y)+f(x+y,\ 0)$ も $s,\ t$ の多項式である.
$n=k+1$ でも成立し, 題意が示された.

(2) *(i)* $f(x,\ y)=f(x+y,\ x-y)$ が恒等的に成り立つとき

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= f(x+y,\ x-y) = f((x+y)+(x-y),\ (x+y)-(x-y)) \\ &= f(2x,\ 2y) \end{aligned}$$

(ii) *(1)* の *(iii)* と同様において考えると, $f(x,\ y)=f(2x,\ 2y)$ が恒等的に成り立つとき

$$a_{ij}=2^{i+j}a_{ij}$$

よって, $i,\ j$ の少なくとも一方が *0* でないとき, $a_{ij}=0$.
したがって, $f(x,\ y)$ は定数である.

解答 10
【解法１】

2つの2次式 $x^2+ax+b,\ ax^2+bx+1$ の終結式は

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & a & b & \\ & 1 & a & b \\ a & b & 1 & \\ & a & b & 1 \end{vmatrix} &= (1-ab)^2-(b-a^2)(a-b^2) \\ &= a^3+b^3+1-3ab \\ &= (a+b+1)(a^2+b^2+1-a-b-ab)\end{aligned}$$

である．共通解をもつ条件は終結式が *0* となることである．

(i) $a+b+1=0$ のとき．明らかに $x=1$ が共通解.

(ii) $a^2+b^2+1-a-b-ab=0$ のとき.

$$a^2+b^2+1-a-b-ab=\frac{(a-b)^2+(b-1)^2+(1-a)^2}{2}$$

で $a,\ b$ は実数なので $a=b=1$．このとき両式は一致し，共通解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

【解法２】

共通解をもつとしてそれを α とおく.

$$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots① \\ a\alpha^2+b\alpha+1=0 & \cdots② \end{cases}$$

① $\times a-$ ② より

$$(a^2-b)\alpha+ab-1=0$$

(i) $a^2-b=0$ のとき．$ab-1=0$ も成り立ち b を消去すると $a^3=1$．a が実数なので $a=1$．$b=1$．このとき両式は一致し，共通解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

(ii) $a^2-b\neq 0$ のとき．$\alpha=\dfrac{1-ab}{a^2-b}$ が必要である．これから

$$\left(\frac{1-ab}{a^2-b}\right)^2+a\left(\frac{1-ab}{a^2-b}\right)+b=0$$

この分母を払い整理すると,

$$a^3+b^3+1-3ab=(a+b+1)(a^2+b^2+1-a-b-ab)=0$$

$a^2+b^2+1-a-b-ab=\dfrac{(a-b)^2+(b-1)^2+(1-a)^2}{2}$ より，係数実数でこれが *0* になるのは $a=b=1$ のときだが，$a^2-b\neq 0$ に反する．よって $a+b+1=0$．明らかに $x=1$ が共通解.

【解法３】

共通解をもつとしてそれを α とおく.

$$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots① \\ a\alpha^2+b\alpha+1=0 & \cdots② \end{cases}$$

② $-$① より

$$\begin{aligned} & a\alpha(\alpha-1)+b(\alpha-1)-(\alpha+1)(\alpha-1) \\ = \quad & (\alpha-1)(a\alpha-\alpha+b-1)=0 \end{aligned}$$

(i) $\alpha=1$ のとき．条件は $a+b+1=0$.

(ii) $a\alpha-\alpha+b-1=0$ のとき．

$a=1$ なら $b=1$ で，このとき両式は一致し，共通解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

$a\neq 1$ なら $\alpha=\dfrac{1-b}{a-1}$ が必要.

$$\left(\frac{1-b}{a-1}\right)^2+a\left(\frac{1-b}{a-1}\right)+b=0$$

分母を払い整理すると

$$a^2+b^2+1-a-b-ab=0$$

解法２と同様に $a=b=1$ となり，$a\neq 1$ に反する.

【解法４】

共通解をもつとしてそれを α とおく.

$$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots ① \\ a\alpha^2+b\alpha+1=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① $\times\alpha-$② より

$$\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$$

(i) $\alpha=1$ のとき．条件は $a+b+1=0$.

(ii) $\alpha^2+\alpha+1=0$ のとき．$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ または $\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$．係数が実数なので一方が共通解なら他方も共通解である.

第１の方程式で解と係数の関係から

$$-a=\alpha+\overline{\alpha},\ b=\alpha\cdot\overline{\alpha}$$

第２の方程式で解と係数の関係から

$$-\frac{b}{a}=\alpha+\overline{\alpha},\ \frac{1}{a}=\alpha\cdot\overline{\alpha}$$

$\alpha+\overline{\alpha}=-1$，$\alpha\cdot\overline{\alpha}=1$ より条件は $a=b=1$.