2021年入試問題研究

2021 年 12 月 9 日

目 次

1　京大特色理学部

1.1　1 番

1.1.1　問題

n を 3 以上の自然数，λ を実数とする．次の条件 (i),(ii) を満たす空間ベクトル $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_n}$ が存在するための，n と λ が満たすべき条件を求めよ．

(i) $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_n}$ は相異なる長さ 1 の空間ベクトルである．

(ii) $i \neq j$ のときベクトル $\overrightarrow{v_i}$ と $\overrightarrow{v_j}$ の内積は λ に等しい．

※　一般化問題

$N,\ n$ を 3 以上の自然数，λ を実数とする．次の条件 (i),(ii) を満たす N 次元空間のベクトル $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_n}$ が存在するための，n と λ が満たすべき条件を N を用いて表せ．

(i) $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_n}$ は相異なる長さ 1 のベクトルである．

(ii) $i \neq j$ のときベクトル $\overrightarrow{v_i}$ と $\overrightarrow{v_j}$ の内積は λ に等しい．

1.1.2　解答

$n \geqq 5$ と仮定する．$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_4}$，$\overrightarrow{v_5}$ が同一平面にあるとき．いずれの内積も等しいので，どの 2 つのなす角もすべて等しいが，これは $n \geqq 5$ ではあり得ない．

同一平面上にないものを $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$ とし，$\overrightarrow{v_4}$ と $\overrightarrow{v_5}$ を $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$ で表す．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_4} &= \alpha_4\overrightarrow{v_1}+\beta_4\overrightarrow{v_2}+\gamma_4\overrightarrow{v_3}\\ \overrightarrow{v_5} &= \alpha_5\overrightarrow{v_1}+\beta_5\overrightarrow{v_2}+\gamma_5\overrightarrow{v_3}\end{aligned}$$

とおく．$\overrightarrow{v_4}$ と $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$ の内積をとる．

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha_4+\beta_4\lambda+\gamma_4\lambda\\ \lambda &= \alpha_4\lambda+\beta_4+\gamma_4\lambda\\ \lambda &= \alpha_4\lambda+\beta_4\lambda+\gamma_4\end{aligned}$$

第 1 式－第 2 式より，

$$0 = (\alpha_4-\beta_4)(1-\lambda)$$

$\lambda = 1$ のとき，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とすると，

$$\lambda = \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} = 1\cdot 1\cdot\cos\theta$$

より，$\cos\theta = 1$ で $\theta = 0$．このときは $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$ となり条件に反する．よって $\alpha_4 = \beta_4$．同様に $\alpha_4 = \gamma_4$ となる．$\overrightarrow{v_5}$ についても同様なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_4} &= \alpha_4\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\right)\\ \overrightarrow{v_5} &= \alpha_5\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\right)\end{aligned}$$

この結果，$\overrightarrow{v_4}$ と $\overrightarrow{v_5}$ は平行でかつ異なる．よって，$\lambda = -1$ となるが，このとき異なるものは 2 個しかなく，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$ がすべて異なることに反する．

したがって $n \leqq 4$ が必要である．

$n = 4$ のとき．

4 つのベクトルを $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_4}$ とする．

これらが同一平面上にあるとする．このときは $\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_4}$ を $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ で表すことができる．それを，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_3} &= x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}\\ \overrightarrow{v_4} &= s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}\end{aligned}$$

とする．これらと $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ の内積をとり，

$$\begin{aligned}\lambda &= x+y\lambda\\ \lambda &= x\lambda+y\\ \lambda &= s+t\lambda\\ \lambda &= s\lambda+t\end{aligned}$$

先の考察から $\lambda \neq -1$ なので，これから $x = y = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$，$s = t = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ となり，$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_4}$ となる．

よって $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_4}$ が同一平面上にあることはない．$\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ が 1 次独立であるとする．このとき上記考察より，

$$\overrightarrow{v_4} = \alpha_4 \left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} \right)$$

と表すことができる．

$$\begin{aligned} 1 &= \left|\overrightarrow{v_4}\right|^2 = {\alpha_4}^2 \left|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\right|^2 \\ &= {\alpha_4}^2 \left(1 + 1 + 1 + 2\lambda + 2\lambda + 2\lambda\right) \\ \lambda &= \alpha_4 \left(1 + \lambda + \lambda\right) \end{aligned}$$

これを解いて $\lambda = -\dfrac{1}{3}$，$\alpha_4 = -1$ を得る．

原点を中心とし原点と各頂点との距離が 1 の正四面体 ABCD と考える．対称性から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ との内積をとる．

$$1 + \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$$

対称性から各内積は等しいので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \cdots = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\frac{1}{3}$$

したがって，$\lambda = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ にとることができる．このとき，他の 2 頂点の位置ベクトルを $\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_4}$ とすれば，これは条件を満たす．

$n = 3$ のとき．

$$\overrightarrow{v_1} = (1,\ 0,\ 0),\ \overrightarrow{v_2} = (\lambda,\ p,\ 0),\ \overrightarrow{v_3} = (\lambda,\ q,\ r)$$

とおいて一般性を失わない．そして，

$$\left|\overrightarrow{v_2}\right|^2 = \lambda^2 + p^2 = 1,\ \left|\overrightarrow{v_3}\right|^2 = \lambda^2 + q^2 + r^2 = 1,\ \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3} = \lambda^2 + pq = \lambda$$

これより，実数 r が存在する条件は

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 - \lambda^2 - q^2 = 1 - \lambda^2 - \left(\frac{\lambda - \lambda^2}{p}\right)^2 \\ &= 1 - \lambda^2 - \frac{(\lambda - \lambda^2)^2}{1 - \lambda^2} \\ &= 1 - \frac{2\lambda^2}{1 + \lambda} = \frac{1 + \lambda - 2\lambda^2}{1 + \lambda} \geqq 0 \end{aligned}$$

である．これから

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = (2\lambda + 1)(\lambda - 1) \leqq 0$$

となり，$\lambda < 1$ とあわせて

$$-\frac{1}{2} \leqq \lambda < 1$$

を得る．

逆にこの範囲の λ に対して，上記関係式から p^2，q^2，r^2 の順に値が定まり，条件を満たす 3 ベクトルが存在する．

以上から，条件 (i),(ii) を満たす空間ベクト $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{v_n}$ が存在するために，n と λ が満たすべき条件は，次のいずれかである．

1)　$n=4$ で $\lambda=-\dfrac{1}{3}$

2)　$n=3$ で $-\dfrac{1}{2} \leqq \lambda < 1$

※　研究

1)　解答は $n \geqq 5$ があり得ないことを示し，$n=4$ から先に解いたが，次のように，$n=3$ を先に示し，$n \geqq 4$ のときを考える方が簡明になる．

$n=3$ のときの証明は上記と同じ．$-\dfrac{1}{2} < \lambda < 1$ とする．このとき，$\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ は 1 次独立にとれる．

$$\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3}$$

とおく．条件

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v_3} = \lambda$$

は，

$$x+\lambda y+\lambda z=\lambda,\ \lambda x+y+\lambda z=\lambda,\ \lambda x+\lambda y+z=\lambda$$

であり，これを x, y, z の連立方程式として解くと，

$$x=y=z=\frac{\lambda}{1+2\lambda}$$

となる．$\overrightarrow{v}$ が単位ベクトルとなるのは，上記 $n=4$ の場合と同様の計算により，$\lambda=-\dfrac{1}{3}$ にかぎる．

これから $n \geqq 5$ ではあり得ず，$n=4$ で $\lambda=-\dfrac{1}{3}$ となる．

2)　本問は 3 次元空間のベクトルの問題である．これを，一般の N 次元空間のベクトルの問題として考えることもできる．

$N=4$ のときは，

$$n=3,\ -\frac{1}{2} \leqq \lambda < 1,\ \text{または}\, n=4,\ -\frac{1}{3} \leqq \lambda < 1,\ \text{または}\, n=5,\ \lambda=-\frac{1}{4}$$

のいずれかとなる．

これを計算で示しておこう．

$n=4$ のとき．大きさ 1，内積 λ という条件から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_1} &= (1,\ 0,\ 0,\ 0)\\ \overrightarrow{v_2} &= (\lambda,\ p,\ 0,\ 0)\\ \overrightarrow{v_3} &= (\lambda,\ q,\ r,\ 0)\\ \overrightarrow{v_4} &= (\lambda,\ s,\ t,\ u)\end{aligned}$$

とおける．さらに，条件から，

$$\begin{aligned}&1=\lambda^2+p^2=\lambda^2+q^2+r^2=\lambda^2+s^2+t^2+u^2\\ &\lambda=\lambda^2+pq=\lambda^2+ps=\lambda^2+qs+rt\end{aligned}$$

これから $q=s$ となり，

$$
\begin{aligned}
p^2 &= 1-\lambda^2 \\
s^2 &= q^2 = \left(\frac{\lambda-\lambda^2}{p}\right)^2 = \frac{\lambda^2(1-\lambda)}{1+\lambda} \\
r^2 &= 1-\lambda^2-q^2 = 1-\lambda^2-\frac{\lambda^2(1-\lambda)}{1+\lambda} = \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{1+\lambda} \\
t^2 &= \left(\frac{\lambda-\lambda^2-q^2}{r}\right) = \frac{\lambda^2(1-\lambda)}{(1+2\lambda)(1+\lambda)}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
u^2 &= 1-\lambda^2-s^2-t^2 \\
&= 1-\lambda^2-\frac{\lambda^2(1-\lambda)}{1+\lambda}-\frac{\lambda^2(1-\lambda)}{(1+2\lambda)(1+\lambda)} \\
&= \frac{(1-\lambda)(1+3\lambda)}{1+2\lambda} \geqq 0
\end{aligned}
$$

これより，$-\dfrac{1}{3} \leqq \lambda < 1$ を得る．

$n=5$ のとき．$N=3$ における $n=4$ のときの考察と同様に，

$$
\overrightarrow{v_5} = \alpha\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_4}\right)
$$

とおけ，

$$
\begin{aligned}
1 &= |\overrightarrow{v_5}|^2 = \alpha^2\left|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_4}\right|^2 \\
&= \alpha^2\left(1+1+1+1+2\lambda+2\lambda+2\lambda+2\lambda+2\lambda+2\lambda\right) \\
\lambda &= \alpha\left(1+\lambda+\lambda+\lambda\right)
\end{aligned}
$$

となる．これを解いて $\lambda=-\dfrac{1}{4}$ を得る．

1.2　2 番

1.2.1　問題

自然数 n, m に対して横 n 個，縦 m 個からなる $n \times m$ 個のマスを考え，それぞれのマスに 1 つずつ白玉または黒玉を入れる．その白玉と黒玉の入れ方のうち，黒玉が上下左右いずれにも隣り合わないような入れ方の総数を $a_{n,m}$ とする．例えば $n = 5$，$m = 3$ のとき，図 1 の入れ方は黒玉が上下左右いすれにも隣り合わないような入れ方であり，図 2 の入れ方は黒玉が左右に隣り合っている入れ方である．

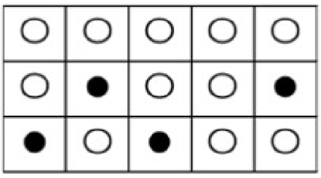


図1

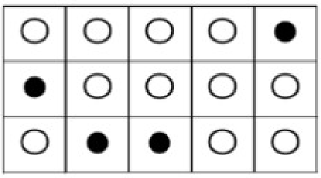


図2

下の設問に答えよ．

(1) $a_{n,2}$ を求めよ．

(2) ある正の実数 D が存在して，すべての自然数 n について

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{\log_2 a_{n,n}}{n^2} \leqq \frac{1}{2}\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{D}{n}$$

となることを示せ．

1.2.2　解答

(1)　横 n 個，縦 2 個からなるマスに黒玉が隣りあわないように白玉または黒球を入れる．そのうち，左端の 2 マスがともに白玉である入れ方が $b_{n,2}$ 通りあり，左端の 2 マスが白玉と黒球である入れ方が $c_{n,2}$ 通りあるとする．$a_{n,2}=b_{n,2}+c_{n,2}$ である．そして，入れ方の条件から

$$\begin{aligned}&b_{n+1,2}=b_{n,2}+c_{n,2}\\&c_{n+1,2}=2b_{n,2}+c_{n,2}\\&b_{1,2}=1,\ c_{1,2}=2\end{aligned}$$

が成り立つ．これから，

$$\begin{aligned}a_{n+2,2}&=3b_{n+1,2}+2c_{n+1,2}\\&=2a_{n+1,2}+b_{n+1,2}=2a_{n+1,2}+a_{n,2}\end{aligned}$$

を得る．$\alpha=1-\sqrt{2}$，$\beta=1+\sqrt{2}$ とおくと，

$$a_{n+2,2}-(\alpha+\beta)a_{n+1,2}+\alpha\beta a_{n,2}=0$$

つまり，

$$a_{n+2,2}-\alpha a_{n+1,2}=\beta\left(a_{n+1,2}-\alpha a_{n,2}\right)$$

よって，

$$a_{n+1,2}-\alpha a_{n,2}=\beta^{n-1}\left(a_{2,2}-\alpha a_{1,2}\right)$$

同様に

$$a_{n+1,2}-\beta a_{n,2}=\alpha^{n-1}\left(a_{2,2}-\beta a_{1,2}\right)$$

ここで，

$$\begin{aligned}a_{1,2}&=b_{1,2}+c_{1,2}=3\\a_{2,2}&=b_{2,2}+c_{2,2}=3+4=7\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}a_{2,2}-\alpha a_{1,2}&=4+3\sqrt{2}=\sqrt{2}\beta^2\\a_{2,2}-\beta a_{1,2}&=4-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}\alpha^2\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}&a_{n+1,2}-\alpha a_{n,2}=\sqrt{2}\beta^{n+1}\\&a_{n+1,2}-\beta a_{n,2}=-\sqrt{2}\alpha^{n+1}\end{aligned}$$

辺々引いて $a_{n,2}$ を求めると，

$$a_{n,2}=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right\}$$

である．

(2)　縦方向に i 番目，横方向に j 番目のマスを $(i,\ j)$ と表す．
$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{\log_2 a_{n,n}}{n^2}$ を示す．これは $2^{\frac{n^2}{2}}\leqq a_{n,n}$ と同値である．

n が偶数のとき．

$(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ \cdots,\ (2,\ 2),\ (2,\ 4),\ \cdots$ と 1 つおきにマスを $\dfrac{n^2}{2}$ 個選び，ここに白玉または黒球を入れ，他のマスには白玉を入れる．これは黒玉が上下左右のいずれにも隣りあわない入れ方であり，$2^{\frac{n^2}{2}}$ 通りある．よって，$2^{\frac{n^2}{2}} \leqq a_{n,n}$ である．

n が奇数のとき．

同様に，$(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ \cdots,\ (2,\ 2),\ (2,\ 4),\ \cdots$ と 1 つおきにマスを選ぶ．$(n-1,\ 2),\ (n-1,\ 4),\ \cdots$ と選んだ段階で，選ばれたマスと選ばれなかったマスが同数である．よって，縦 n 番目まで選ぶと選ばれたマスは $\dfrac{n^2+1}{2}$ である．ここに白玉または黒球を入れ，他のマスには白玉を入れる．これは黒玉が上下左右のいずれにも隣りあわない入れ方であり，$2^{\frac{n^2+1}{2}}$ 通りある．よって，$2^{\frac{n^2+1}{2}} \leqq a_{n,n}$ であり，$2^{\frac{n^2}{2}} \leqq a_{n,n}$ が成り立つ．

次に $\dfrac{\log_2 a_{n,n}}{n^2} \leqq \dfrac{1}{2}\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)+\dfrac{D}{n}$ を示す．

n が奇数のとき．

$2\times n$ のマスで黒玉が隣りあわないものを $\dfrac{n+1}{2}$ 個用意し，縦方向に隣りあわせておく．そのうち最終の横一列をのぞくと，$n\times n$ のマスができる．

これらの総数は ${a_{n,2}}^{\frac{n+1}{2}}$ 個あり，$n\times n$ で黒玉の隣りあわないものはすべてこのなかに含まれる．

よって，$a_{n,n} \leqq {a_{n,2}}^{\frac{n+1}{2}}$ が成り立つ．

同様に考え，n が偶数のときは $a_{n,\ n} \leqq {a_{n,2}}^{\frac{n}{2}}$ が成り立つ．

いずれの場合も $a_{n,n} \leqq {a_{n,2}}^{\frac{n+1}{2}}$ が成り立つ．

したがって，

$$\begin{aligned}
\log_2 a_{n,n} &\leqq \frac{n+1}{2}\log_2 a_{n,\ 2}\\
&= \frac{n+1}{2}\log_2\frac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right\}\\
&\leqq \frac{n+1}{2}\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2}\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

ここで，$(n+1)^2 \leqq n^2+4n$ なので，

$$\frac{(n+1)^2}{2}\log_2\left(1+\sqrt{2}\right) < \frac{n^2}{2}\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)+2n\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$$

したがって，

$$\frac{\log_2 a_{n,n}}{n^2} \leqq \frac{1}{2}\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{2\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)}{n}$$

が成り立ち，$D=2\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$ が条件を満たす．

1.3　3 番

1.3.1　問題

以下の条件 (i)，(ii)，(iii) を満たす実数の列 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{1000}$ は存在するか．

(i) $x_1 = \dfrac{1}{2}$

(ii) $k = 2,\ 3,\ \cdots,\ 1000$ に対し，x_k は

$$\frac{x_{k-1}+99}{100}, \qquad -\frac{100x_{k-1}}{99x_{k-1}-1}$$

のいずれかに等しい．ただし，$x_{k-1} = \dfrac{1}{99}$ のときは $x_k = \dfrac{x_{k-1}+99}{100}$ とする．

(iii) $\dfrac{49}{100} < x_{1000} < \dfrac{51}{100}$

1.3.2　解答

x_2 は次のいずれかである．

$$\begin{aligned}\frac{x_1+99}{100} &= \frac{\frac{1}{2}+99}{100}=\frac{199}{200}=1-\frac{1}{200}\\ -\frac{100x_1}{99x_1-1} &= -\frac{\frac{100}{2}}{\frac{99}{2}-1}=-\frac{100}{97}=-1-\frac{3}{97}\end{aligned}$$

したがって，x_2 は

$$|x_2-1|<\frac{1}{10},\ \text{または}\ |x_2+1|<\frac{1}{10}$$

を満たす．$k \geqq 2$ のとき，x_k が

$$|x_k-1|<\frac{1}{10},\ \text{または}\ |x_k+1|<\frac{1}{10}$$

を満たすとする．このとき x_{k+1} は

$$|x_{k+1}-1|<\frac{1}{10},\ \text{または}\ |x_{k+1}+1|<\frac{1}{10}$$

を満たすことを示す．

i)　$|x_k-1|<\dfrac{1}{10}$ のとき

$$\left|\frac{x_k+99}{100}-1\right|=\frac{|x_k-1|}{100}<\frac{1}{1000}<\frac{1}{10}$$

であり，$1-\dfrac{1}{10}<x_k$ なので，

$$\begin{aligned}\left|-\frac{100x_k}{99x_k-1}+1\right| &= \frac{|-x_k-1|}{|99x_k-1|}=\frac{|x_k-1+2|}{|99x_k-1|}\\ &< \frac{|x_k-1|+2}{\left|99\left(1-\dfrac{1}{10}\right)-1\right|}<\frac{\dfrac{1}{10}+2}{99\cdot\dfrac{9}{10}-1}=\frac{21}{881}<\frac{1}{10}\end{aligned}$$

ii)　$|x_k+1|<\dfrac{1}{10}$ のとき

$$\left|\frac{x_k+99}{100}-1\right|=\frac{|x_k+1-2|}{100}<\frac{\dfrac{1}{10}+2}{100}=\frac{21}{1000}<\frac{1}{10}$$

であり，$-1-\dfrac{1}{10}<x_k$ で，$|99x_k|-1 \leqq |99x_k-1|$ なので，

$$\begin{aligned}\left|-\frac{100x_k}{99x_k-1}+1\right| &= \frac{|-x_k-1|}{|99x_k-1|}<\frac{|x_k+1-2|}{|99x_k|-1}\\ &< \frac{|x_k-1|+2}{99\left(1+\dfrac{1}{10}\right)-1}<\frac{\dfrac{1}{10}+2}{99\cdot\dfrac{11}{10}-1}=\frac{21}{1079}<\frac{1}{10}\end{aligned}$$

である．

数学的帰納法によって，$|x_{1000}-1|$ または $|x_{1000}+1|$ が $\dfrac{1}{10}$ より小さくなり，$\dfrac{49}{100}<x_{1000}<\dfrac{51}{100}$ となることはない．よって題意をみたす実数列は存在しない．

1.4　4番

1.4.1　問題

C を 1 以上の実数，$\{a_n\}$ を 0 以上の整数からなる数列で $a_l = 0,\ a_2 = 1$ を満たすとする．xy 平面上の点 $\mathrm{A}_n = (a_n,\ a_{n+1})$ はすべての $n = 1,\ 2,\ ,3,\ \cdots$ にてついて次の条件 (i)，(ii)，(iii) を満たすとする．

(i) 3 点 A_n，O，A_{n+1} は同一直線上になく，三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1}$ と三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+2}$ の内部は互いに交わらない．

(ii) 三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1}$ の面積は C より小さい．

(iii) $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1} < \dfrac{\pi}{4}$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \angle \mathrm{A}_1\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1} = \dfrac{\pi}{4}$ である．

ここで O は xy 平面の原点を表す．以下の設問に答えよ．

(1) $C = 100$ のとき，(i)，(ii)，(iii) を満たす数列 $\{a_n\}$ の例を 1 つ与えよ．

(2) 2 以上の自然数 n,m が $n < m$ を満たすとき，

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{m+1}}{a_m} \leqq 2C\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right)$$

となることを示せ．

(3) ある実数 D が存在して，すべての自然数 n について $a_{n+1} - a_n \leqq D$ となることを云せ．

(4) ある自然数 n_0 が存在して，点 A_{n_0}，A_{n_0+1}，A_{n_0+2}，$\cdots$ はすべて同一直線上にあることを示せ．

1.4.2　解答

(1)　$a_n = n-1$ とし，xy 平面上の直線 $y=x+1$ の上にある点列 $\mathrm{A}_n(n-1,\ n)$ を考える．

条件 (i) と条件 (iii) が満たされることは明らかである，また，一般に 3 点 O，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ でできる三角形の面積は $\dfrac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ なので，三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}$ の面積は，

$$\frac{1}{2}\left|(n+1)(n-1)-n^2\right| = \frac{1}{2}$$

である．よって，この数列は条件 (ii) も満たす．

数列 $a_n = n-1$ は 3 条件を満たす．

(2)　条件 (iii) から x 軸と OA_{n+1} のなす角は $\dfrac{\pi}{4}$ より大きく，$n \geqq 2$ のとき直線 OA_n の傾きは 1 より大きい．つまり $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ である．

$k \geqq 2$ とする．条件 (i) から直線 OA_k の傾きは単調に減少する．よって，

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} > 0$$

である．またこれから，${a_{k+1}}^2 - a_ka_{k+2} > 0$ である．三角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{OA}_{k+1}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\left|{a_{k+1}}^2 - a_ka_{k+2}\right| = \frac{1}{2}\left({a_{k+1}}^2 - a_ka_{k+2}\right)$$

であるので，条件 (ii) から

$${a_{k+1}}^2 - a_ka_{k+2} < 2C$$

となる．$a_{k+1} - a_k > 1$ なので，

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} &< 2C\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}}\right) \\
&= 2C\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\cdot\frac{1}{a_{k+1}-a_k} \\
&< 2C\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

これを $k=n$ から $k=m-1$ まで加えて，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{m+1}}{a_m} < 2C\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right)$$

を得る．以上から (2) の不等式が示された．

(3)　(2) から $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - \dfrac{a_{m+1}}{a_m} < 2C\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ が得られるので，

$$a_{n+1} - a_n < \left(\frac{a_{m+1}}{a_m} - 1\right)a_n + 2C$$

$m \to \infty$ のとき $\dfrac{a_{m+1}}{a_m} \to 1$ なので，

$$a_{n+1} - a_n \leqq 2C$$

つまり，$D = 2C$ にとればよい．

(4) $\quad 0 < {a_{n+1}}^2 - a_n a_{n+2} < 2C$ より

$$\begin{aligned} & {a_{n+1}}^2 - a_n a_{n+1} - 2C < a_n\left(a_{n+2} - a_{n+1}\right) \\ \iff \quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{2C}{a_n(a_{n+1} - a_n)} < \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} \\ & a_n a_{n+2} - a_n a_{n+1} < {a_{n+1}}^2 - a_n a_{n+1} \\ \iff \quad & \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{aligned}$$

つまり，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{2C}{a_n(a_{n+1} - a_n)} < \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

である．条件 (iii) から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ である．よって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = 1$$

となる．ところが (3) から $a_{n+1} - a_n$ のとりうる値は有限個であり，$\dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$ のとりうる値も有限個である．

任意の ϵ に対して，ある自然数 n_0 が存在して，$n_0 \leqq n$ の n に対しては

$$\left| \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} - 1 \right| < \epsilon$$

となる．有限性から，

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = 1$$

となるように ϵ をとることができる．つまり直線 $\mathrm{A}_{n_0}\mathrm{A}_{n_0+1}$ の傾きと $\mathrm{A}_{n_0+1}\mathrm{A}_{n_0+2}$ の傾き，$\mathrm{A}_{n_0+2}\mathrm{A}_{n_0+2}$ の傾き，…がすべて等しくなる．

よって，点 A_{n_0}，A_{n_0+1}，A_{n_0+2}，$\cdots$ はすべて同一直線上にある．

2　京大特色総人理系

2.1　1番

2.1.1　問題

平面上の曲線 γ に対する次の条件 $(\ast)$ を考える。

（$\ast$）任意の三角形△ PQR に対し，γ 上に適当な 3 点 A，B，C をとると
△ PQR ∽ △ ABC となる。

このとき以下の問に答えよ。
問 1　円周は $(\ast)$ を満たすことを示せ。
問 2　曲線 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ は $(\ast)$ を満たさないことを示せ。
問 3　問 2 の曲線は次の条件 $(\ast)$' を満たすことを示せ。

（$\ast$）' 任意の鈍角三角形△ PQR に対し，γ 上に適当な 3 点 A，B，C をとると
△ PQR ∽ △ ABC となる。

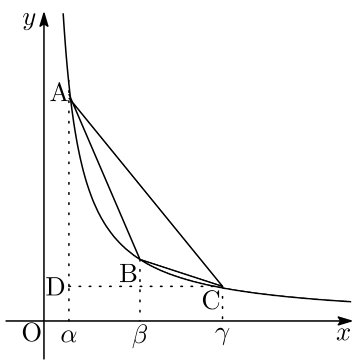
2.1.2　解答

(1)　平面上の 2 つの円は相似である。三角形△ PQR の外接円を C とすると C と γ は相似である。C 上の 3 点 P，Q，R に対応する γ 上の 3 点を A，B，C とすると△ PQR ∽ △ ABC となる。

(2)　γ 上の 3 点を $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$，$\mathrm{B}\left(\beta,\ \dfrac{1}{\beta}\right)$，$\mathrm{C}\left(\gamma,\ \dfrac{1}{\gamma}\right)$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とする。点 $\mathrm{D}\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\gamma}\right)$ をとる。$\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{\gamma}$ なので，点 D は第 1 象限の $y<\dfrac{1}{x}$ で定まる領域にある。

$$\angle\mathrm{CAB}<\angle\mathrm{CAD},\quad \angle\mathrm{ACB}<\angle\mathrm{ACD}$$

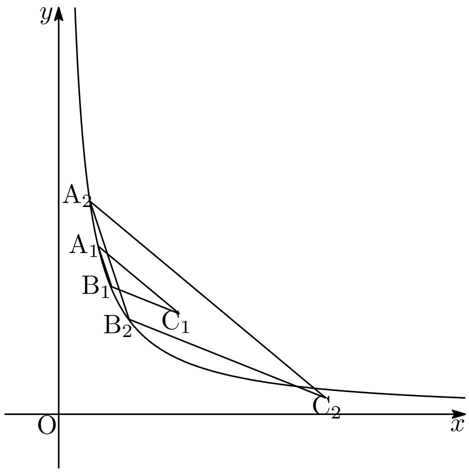
で，$\angle\mathrm{ADC}=\dfrac{\pi}{2}$ なので，△ABC はつねに鈍角三角形となる。よって，鋭角三角形△ PQR に対しては，△ PQR ∽ △ ABC となる 3 点 A，B，C の組は存在しない。



(3)　鈍角三角形△ PQR に対して△ PQR ∽ △ ABC となる 3 点 A，B，C の組は，点 A と点 B を $y=\dfrac{1}{x}$ 上に任意にとれば，それに対して C は一意に定まる。点 A と点 B が $y=\dfrac{1}{x}$ 上を連続して動けば，点 C も連続して動く。

最初△ ABC は△ $A_1B_1C_1$ であるとする。A_1 と B_1 を，その x 座標を十分小さくとり，直線 B_1C_1 の x 軸に対する傾きが負であり，点 C_1 が領域 $y > \dfrac{1}{x}$ にあるようにとる。鈍角三角形なので，可能である。

辺 AB の長さをのばしてゆき，図の△ $A_2B_2C_2$ 間で連続的に変化させるとする。ただし，△ $A_2B_2C_2$ の頂点 C_2 は領域 $y < \dfrac{1}{x}$ にあるものとする。これもまた可能である。



△ ABC を△ $A_1B_1C_1$ から△ $A_2B_2C_2$ 間で連続的に変化させるとき，点 C の動きも連続的なので，点 C が $y = \dfrac{1}{x}$ 上にあるときがある。このとき，△ ABC は γ 上にある。つまり，△ PQR ∽ △ ABC となる 3 点 A，B，C が γ 上に存在することが示された。

2.2　2 番

2.2.1　問題

a を正の実数とし，直線 $l_a : y = ax$ と曲線 $C : y = e^x$ を考える。このとき以下の問に答えよ。

問 1　次の不等式を示せ (ただし n は自然数)。

$$e^x \geqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \geqq 0)$$

問 2　l_a と C がちょうど 2 点で交わるような a の範囲を求めよ。

問 3　a が問 2 の範囲にあるとき，2 つの交点の x 座標をそれぞれ $x_1(a)$，$x_2(a)$ とする (ただし $x_1(a) < x_2(a)$)。また l_a と C で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とする。さらに C と 2 直線 $x = x_1(a)$，$x = x_2(a)$，それに x 軸とで囲まれる図形の面積を $T(a)$ とする。このとき

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{\log a} \cdot \frac{S(a)}{T(a)}$$

を求めよ。

2.2.2　解答

(1)　$n \geqq 1$ に対して，$f_n(x) = e^x - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$ とおく。

このとき，$f_n'(x) = f_{n-1}(x)$ となる。また，$f_n(0) = 1 - 1 = 0$ である。

$x \geqq 0$ で $f_n(x) \geqq 0$ であることを，n に関する数学的帰納法で示す。

$n = 1$ のとき。$f_1(x) = e^x - (1 + x)$ で，$f_1'(x) = e^x - 1$ である。$x \geqq 0$ より $e^x \geqq 1$ なので，$f_1'(x) \geqq 0$ である。かつ $f_1(0) = 0$ なので，$x \geqq 0$ において $f_1(x) \geqq 0$ である。

$n = k$ のとき，成立するとする。

$f_{k+1}'(x) = f_k(x) \geqq 0$，かつ $f_{k+1}(0) = 0$ より，$x \geqq 0$ で $f_{k+1}(x) \geqq 0$ である。

これよりすべての自然数 n に対して，$x \geqq 0$ において $f_n(x) \geqq 0$，つまり $e^x \geqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$ となる。

(2)　C 上の点 $(t,\ e^t)$ での C の接線は $y = e^t(x - t) + e^t$ である。これが原点を通るのは，$t = 1$ のときで，このとき接線は $y = ex$ である。

つまり，$a = e$ のとき，$y = e^x$ と $y = x$ は点 $(1,\ e)$ で接する。$y = e^x$ のグラフは，$y'' = e^x > 0$ より下に凸である。よって，l_a と C がちょうど 2 点で交わるような a の範囲は $a > e$ である。

(3)　$x_1(a)$ と $x_2(a)$ は $ax = e^x$ を満たす。

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_{x_1(a)}^{x_2(a)} (ax - e^x)\ dx = \left[\frac{a}{2}x^2 - e^x\right]_{x_1(a)}^{x_2(a)} \\
&= \frac{a}{2}\left\{x_2^2(a) - x_1^2(a)\right\} - \left\{e^{x_2(a)} - e^{x_1(a)}\right\} \\
&= \frac{a}{2}\left\{x_2^2(a) - x_1^2(a)\right\} - a\left\{x_2(a) - x_1(a)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(a) &= \int_{x_1(a)}^{x_2(a)} e^x\,dx = e^{x_2(a)} - e^{x_1(a)} \\ &= a\{x_2(a) - x_1(a)\} \end{aligned}$$

よって，

$$\frac{S(a)}{T(a)} = \frac{1}{2}\{x_2(a) + x_1(a)\} - 1$$

であり，これより

$$\frac{1}{\log a} \cdot \frac{S(a)}{T(a)} = \frac{x_2(a) + x_1(a)}{2\log a} - \frac{1}{\log a}$$

となる。

$a \to \infty$ のとき，$\dfrac{1}{\log a} \to 0$ であり，かつ直線 l_a は y 軸に近づく。よって，$x_1(a) \to 0$，$x_2(a) \to \infty$ である。ここで，$X = x_2(a)$ とおく。$aX = e^X$ より，

$$\log a + \log X = X$$

である。よって，

$$\frac{x_2(a)}{2\log a} = \frac{X}{2(X - \log X)}$$

となる。これより

$$\lim_{a\to\infty} \frac{x_2(a)}{2\log a} = \lim_{X\to\infty} \frac{X}{2(X - \log X)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{X\to\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{\log X}{X}}$$

ここで，$\log X = t$ とおくと，1 より大きい X に対して $t > 0$ であり，(1) より，$e^t \geqq t + \dfrac{1}{2}t^2$ なので

$$\frac{\log X}{X} = \frac{t}{e^t} \leqq \frac{t}{t + \dfrac{1}{2}t^2} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2}t}$$

であるから

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\log X}{X} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2}t} = 0$$

となる。したがって，

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{\log a} \cdot \frac{S(a)}{T(a)} = \frac{1}{2}$$

である。

3　東大理科

3.1　4番

3.1.1　問題

以下の問いに答えよ．

(1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする．K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとするこのとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ．

(3) a, b は (2) の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする．${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ．

3.1.2　解答

(1)　$KA = LB$ のとき，

$$K(A - B) = KA - KB = LB - KB = B(L - K)$$

である．よって $L - B \equiv 0 \pmod 4$ なら $K(A - B) \equiv 0 \pmod 4$ となるが，K が奇数で 4 と互いに素なので，$A - B \equiv 0 \pmod 4$ である．

(2)　数列 $\{a_n\}$ に対し，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$ で積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を表すものとする．

$$\begin{aligned}
{}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} &= \prod_{k=0}^{4b} \frac{4a+1-k}{4b+1-k} \\
&= \prod_{k=0}^{b} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-4k}{4b-4k} \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-1-4k}{4b-1-4k} \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-2-4k}{4b-2-4k}
\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k}$，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-1-4k}{4b-1-4k}$，および，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-2-4k}{4b-2-4k} = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{2a-1-2k}{2b-1-2k}$ に現れるの各分数の分子分母はすべて奇数である．これらの分母の積を K，分子の積を L とおく．また，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-4k}{4b-4k} = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k} = {}_a\mathrm{C}_b$ である．

よって ${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} = \dfrac{L}{K} {}_a\mathrm{C}_b$ となり，$KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在した．

(3)　$a - b$ が 2 の倍数のとき，任意の整数 m に対して $2a - m \equiv 2b - m \pmod 4$ であるから，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k}$，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-1-4k}{4b-1-4k}$，および，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} \frac{2a-1-2k}{2b-1-2k}$ に現れる各分数の分母と分子はすべて 4 で割った余りが等しい．

したがって，$K \equiv L \pmod 4$ である．この結果，(1) より，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しい．

(4)　$2021 = 4 \times 505 + 1$，$37 = 4 \times 9 + 1$，$505 = 4 \times 126 + 1$，$9 = 4 \times 2 + 1$ なので，

$$ {}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_{9} \equiv {}_{126}\mathrm{C}_{2} \pmod 4 $$

であり，

$$ {}_{126}\mathrm{C}_{2} = \frac{126 \cdot 125}{2} = 63 \cdot 125 \equiv 3 \cdot 1 = 3 \pmod 4 $$

なので，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りは 3 である．

3.2　6番

3.2.1　問題

定数 $b,\ c,\ p,\ q,\ r$ に対し，

$$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$$

が x についての恒等式であるとする．

(1) $p\neq 0$ であるとき，$q,\ r$ を $p,\ b$ で表せ．

(2) $p\neq 0$ とする．$b,\ c$ が定数 a を用いて

$$b=(a^2+1)(a+2),\qquad c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$$

を満たすものを 1 組求めよ．

(3) a を整数とする．x の 4 次式

$$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ．

3.2.2　解答

(1)

$$\begin{aligned}x^4+bx+c &= (x^2+px+q)(x^2-px+r)\\ &= x^4+(q+r-p^2)x^2+p(r-q)x+qr\end{aligned}$$

これが恒等式なので，係数を比較して，

$$\begin{cases}q+r-p^2=0\\ p(r-q)=b\\ qr=c\end{cases}$$

となる．$p\neq 0$ なので，

$$q+r=p^2,\qquad r-q=\frac{b}{p}$$

これより，

$$q=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right),\qquad r=\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)$$

(2)　(1) の結果より

$$c=qr=\frac{1}{4}\left(p^4-\frac{b^2}{p^2}\right)$$

$4p^2$ 倍して整理すると，

$$p^6 - 4cp^2 - b^2 = 0$$

ここに，b と c の条件を代入して

$$p^6 + (4a+3)\,(a^2+1)p^2 - (a^2+1)^2(a+2)^2 = 0$$

$4a+3 = (a+2)^2 - (a^2+1)$ なので，左辺を因数分解して

$$\{p^2 - (a^2+1)\}\{p^4 + (a^2+1)p^2 + (a^2+1)(a+2)^2\} = 0$$

よって，

$$f(t) = t^2+1, \quad g(t) = (t^2+1)(t+2)^2$$

は条件をみたす整式の 1 組である．

(3)　$x^4 + bx + c$ が 2 次式の積に因数分解できたとして，それを

$$\begin{aligned} x^4 + bx + c &= (x^2+px+q)(x^2+sx+r) \\ &= x^4 + (p+s)x^3 + (ps+q+r)x^2 + (pr+qs)x + qr \end{aligned}$$

とおく．これより $p+s=0$ である．したがって，$x^4 + (a^2+1)(a+2)x - \left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$ が 2 次式の積に因数分解できれば，ある実数 $p,\ q,\ r$ を用いて

$$\begin{aligned} & x^4 + (a^2+1)(a+2)x - \left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1) \\ = \ & (x^2+px+q)(x^2-px+r) \end{aligned}$$

とおくことができる．

$p=0$ のとき．$(x^2+px+q)(x^2-px+r) = x^4 + (q+r)x^2 + qr$ なので，

$$(a^2+1)(a+2) = 0, \quad q+r = 0$$

これから $a=-2$ で $c = qr = -q^2$ となる．つまり，

$$q^2 = -c = \left(-2+\frac{3}{4}\right)\{(-2)^2+1\} =$$

これをみたす有理数 q は存在しない．

$p \neq 0$ のとき．任意の a に対して

$$p^4 + (a^2+1)p^2 + (a^2+1)(a+2)^2 > 0$$

であるから，(2) より $p^2 - (a^2+1) = 0$ である．p が有理数であるものを求めるので，$p = \dfrac{m}{n}$ ($m,\ n$ は互いに素) とおく．$p^2 = a^2+1$ より，

$$m^2 = n^2(a^2+1)$$

となるが，m^2 と n^2 も互いに素なので，$n^2 = 1$ である．これから $(m-a)(m+a) = 1$ となり，

$$m - a = m + a = \pm 1$$

よって $a=0$，$m=\pm 1$ が必要である．このとき，

$$\begin{aligned}
& x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1) \\
= \quad & x^4+2x-\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

であるが，(1) の式から

$$p(r-q)=2, \qquad qr=-\frac{3}{4}$$

とおくと，$p=1$，$q=-\dfrac{1}{2}$，$r=\dfrac{3}{2}$ がこれをみたす．つまり，

$$x^4+2x-\frac{3}{4}=\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)$$

と因数分解される．よって，条件をみたす a は $a=0$ である．

4　東大文科

4.1　2番

4.1.1　問題

N を 5 以上の整数とする．1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ．ただし 1 は必ず選ぶこととする．選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える．

条件 1：S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない．

条件 2：S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む．

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l, l+1, \cdots, l+k-1\}$ と表される集合を指す．たとえば $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1, 2, 3\}$，$\{7, 8, 9\}$，$\{8, 9, 10\}$ を含む．

(1)　条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか．

(2)　条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか．

4.1.2　解答

(1)　選ばれた N 個の整数を，小さい方から

$$a_1 = 1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$$

とする．

すべての i $(1 \leqq i \leqq N-1)$ で $a_{i+1} - a_i = 2$ のとき，$a_N = 2N-1$ である．

$a_N = 2N$ となるのは，ある i $(1 \leqq i \leqq N-1)$ で $a_{i+1} - a_i = 3$ となるものが 1 つあるときである．これは $N-1$ 通りある．

よって，条件 1 を満たすような選び方は

$$1 + N - 1 = N\ (\text{通り})$$

ある．

(2) 連続する $N-2$ 個の整数を

$$l, l+1, \cdots, l+N-3$$

とする．l は

$$l = 1,\ \text{または}\quad 3 \leqq l \leqq N+3$$

を満たす．

$l = 1$ のときは，$1 \sim N-2$ が連続し，$N-1 \sim 2N$ から 2 個選ぶので，$2N-(N-1)+1 = N+2$ より，${}_{N+2}\mathrm{C}_2$ 通りある．

$3 \leqq l \leqq N+3$ のときは，1 と $l+N-2 \sim l+2N-2$ の N 個から 1 個選ぶので，$l+2N-2-(l+N-2) = N$ より，${}_N\mathrm{C}_1$ 通りあり，l は $N+1$ 個ある．

よって，条件 2 を満たすような選び方は

$$\frac{(N+2)(N+1)}{2} + N(N+1) = \frac{1}{2}(N+1)(3N+2)\ (\text{通り})$$

ある．

4.2　4番

4.2.1　問題

以下の問いに答えよ．

(1) 正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA=LB$ を満たしているとする．K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(2) 正の整数 $a,\ b$ が $a>b$ を満たしているとするこのとき，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B={}_a\mathrm{C}_b$ に対して $KA=LB$ となるような正の奇数 $K,\ L$ が存在することを示せ．

(3) $a,\ b$ は (2) の通りとし，さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする．${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ．

4.2.2　解答

(1)　$KA=LB$ のとき，

$$K(A-B)=KA-KB=LB-KB=B(L-K)$$

である．よって $L-B\equiv 0 \pmod 4$ なら $K(A-B)\equiv 0 \pmod 4$ となるが，K が奇数で 4 と互いに素なので，$A-B\equiv 0 \pmod 4$ である．

(2)　数列 $\{a_n\}$ に対し，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$ で積 $a_1a_2\cdots a_n$ を表すものとする．

$$\begin{aligned}{}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} &= \prod_{k=0}^{4b}\frac{4a+1-k}{4b+1-k}\\ &= \prod_{k=0}^{b}\frac{4a+1-4k}{4b+1-4k}\times\prod_{k=0}^{b-1}\frac{4a-4k}{4b-4k}\times\prod_{k=0}^{b-1}\frac{4a-1-4k}{4b-1-4k}\times\prod_{k=0}^{b-1}\frac{4a-2-4k}{4b-2-4k}\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b}\frac{4a+1-4k}{4b+1-4k}$，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1}\frac{4a-1-4k}{4b-1-4k}$，および，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1}\frac{4a-2-4k}{4b-2-4k}=\prod_{k=0}^{b-1}\frac{2a-1-2k}{2b-1-2k}$ に現れるの各分数の分子分母はすべて奇数である．これらの分母の積を K，分子の積を L とおく．また，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1}\frac{4a-4k}{4b-4k}=\prod_{k=0}^{b-1}\frac{a-k}{b-k}={}_a\mathrm{C}_b$ である．

よって ${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}=\dfrac{L}{K}{}_a\mathrm{C}_b$ となり，$KA=LB$ となるような正の奇数 $K,\ L$ が存在した．

(3)　$a-b$ が 2 の倍数のとき，任意の整数 m に対して $2a-m\equiv 2b-m \pmod 4$ であるから，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b}\frac{4a+1-4k}{4b+1-4k}$，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1}\frac{4a-1-4k}{4b-1-4k}$，および，$\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1}\frac{2a-1-2k}{2b-1-2k}$ に現れる各分数の分母と分子はすべて 4 で割った余りが等しい．

したがって，$K\equiv L \pmod 4$ である．この結果，(1) より，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい．

(4)　$2021 = 4 \times 505 + 1$，$37 = 4 \times 9 + 1$，$505 = 4 \times 126 + 1$，$9 = 4 \times 2 + 1$ なので，

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_{9} \equiv {}_{126}\mathrm{C}_{2} \pmod 4$$

であり，

$${}_{126}\mathrm{C}_{2} = \frac{126 \cdot 125}{2} = 63 \cdot 125 \equiv 3 \cdot 1 = 3 \pmod 4$$

なので，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りは 3 である．

5　京大理系

5.1　3 番

5.1.1　問題

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ．

5.1.2　解答

$\displaystyle I_N=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}$，$\displaystyle J_N=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{6}$ とおく．

$$\begin{aligned}
I_N+iJ_N &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n \\
&= \frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{N+1}}{1-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{N+1}\right| \leqq \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}=0$$

なので，

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}(I_N+iJ_N) &= \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{}{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)}=\frac{4}{4-\sqrt{3}-i} \\
&= \frac{4(4-\sqrt{3}+i)}{(4-\sqrt{3})^2+1}=\frac{4-\sqrt{3}+i}{5-2\sqrt{3}} \\
&= \frac{14+3\sqrt{3}+(5+2\sqrt{3})i}{13}
\end{aligned}$$

複素数平面上の点列の収束と考えることにより，

$$\lim_{N\to\infty}(I_N+iJ_N)=\lim_{N\to\infty}I_N+i\lim_{N\to\infty}J_N$$

であるから，

$$\lim_{N\to\infty}I_N=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$$

である．

5.2　5番

5.2.1　問題

xy 平面において，2 点 B$(-\sqrt{3}, -1)$，C$(\sqrt{3}, -1)$ に対し，点 A は次の条件 $(*)$ を満たすとする．

$$(*) \quad \angle \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{3} \text{ かつ点 A の } y \text{ 座標は正．}$$

次の各問に答えよ．

(1)　$\triangle$ ABC の外心の座標を求めよ．

(2)　点 A が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，$\triangle$ ABC の垂心の軌跡を求めよ．

5.3　6番

5.3.1　問題

　次の各問に答えよ．

問1　n を 2 以上の整数とする．$3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数であることを示せ．

問2　a を 1 より大きい定数とする．微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a) = af(1)$ を満たすとき，曲線 $y = f(x)$ の接線で原点 $(0,\ 0)$ を通るものが存在することを示せ．

5.3.2　解答

問1　n が合成数であるとし，$p,\ q \geqq 2$ である整数で $n = pq$ と分解されるとする．このとき，

$$\begin{aligned}3^n - 2^n &= (3^p)^q - (2^p)^q \\ &= (3^p - 2^p)\{(3^p)^{q-1} + (3^p)^{q-2}(2^p) + \cdots + (2^p)^{q-1}\}\end{aligned}$$

$p,\ q \geqq 2$ より

$$(3^p)^{q-1} + (3^p)^{q-2}(2^p) + \cdots + (2^p)^{q-1} \geqq 3^p + 2^p \geqq 3^2 + 2^2 = 13$$

したがって $3^n - 2^n$ は素数でない．

対偶をとって，$3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数である．

問2　$f(x)$ は区間 $[1,\ a]$ を含む区間で定義されているものとする．条件より，$\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(1)}{1}$ である．$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ とおく．$g(x)$ は $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ と微分可能である．

$g(a) - g(1) = 0$ であるから，平均値の定理から

$$0 = \frac{g(a) - g(1)}{a - 1} = g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2}$$

となる c が $1 < c < a$ に存在する．

点 $(c,\ f(c))$ における $y = f(x)$ の接線は

$$y = f'(c)(x - c) + f(c) = f'(c)x - \{cf'(c) - f(c)\} = f'(c)x$$

となり，原点を通る．

6　阪大理系

6.1　4 番

6.1.1　問題

整数 $a,\ b,\ c$ に関する次の条件 $(*)$ を考える．

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots\cdots\ (*)$$

(1)　整数 $a,\ b,\ c$ が $(*)$ および $a \neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ．

(2)　$c=3600$ のとき，$(*)$ および $a<b$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ．

6.1.2　解答

(1)　条件より

$$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_a^c - \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_b^c = 0$$

これより，

$$\left\{\frac{c^2}{2}+\frac{ab}{2}\right\}(b-a)+\frac{1}{3}(b^3-a^3)=0$$

を得る．$a \neq b$ のとき，

$$3c^2+3ab+2(b^2+ba+a^2)=0 \quad \cdots ①$$

となる．これから

$$2(b^2-2ba+a^2)+9ab+3c^2=0$$

となり，$b^2-2ba+a^2=(b-a)^2$ が 3 の倍数である．よって，$b \equiv a \pmod 3$ となる．この結果

$$3c^2 \equiv -3a^2-2(a^2+a^2+a^2) = -9a^2 \pmod 3$$

$3c^2$ が 9 の倍数なので，c^2 は 3 の倍数，つまり c は 3 の倍数である．
(2)　① から

$$3c^2 = -(2a+b)(a+2b)$$

である．$c=3600$ のとき，$3c^2=2^8 3^5 5^4$ である．

$2a+b+(a+2b)$ は 3 の倍数なので，$2a+b,\ a+2b$ の一方が 3 の倍数なら他方も 3 の倍数である．$2a+b=3m$，$a+2b=3n$ とおくと，$a=2m-n$，$b=-m+2n$ より $a,\ b$ は整数である．

$2^8 3^5 5^4$ を，いずれもが 3 の倍数となるように $2a+b$ と $a+2b$ に振り分ける．3 の分け方は $(3,3^4)$〜$(3^4,3)$ の 4 通り，2 の分け方は $(1,2^8)$〜$(2^8,1)$ の 9 通り，5 の分け方は $(1,5^4)$〜$(5^4,1)$ の 5 通りなので，$2^8 3^5 5^4=(2a+b)(a+2b)$ となる $2a+b$ と $a+2b$ は 180 個ある．

$a=2m-n$，$b=-m+2n$ のとき，$a<b$ となるのは，$2m-n<-m+2n$ より $m<n$ のときである．したがって m を負にとるときである．これより，$2^8 3^5 5^4=-(2a+b)(a+2b)$ となる $2a+b$ と $a+2b$ も 180 個ある．よって，条件を満たす $(a,\ b)$ の個数は 180 である．

6.2　5番

6.2.1　問題

次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ．

(2) 自然数 n に対し，$x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく．t を $|t| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．このとき，曲線 $C : y = \sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, \sin t)$ における接線が，$x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が x_1，x_2，x_3，$\cdots$ のいずれかと等しいことであることを示せ．

6.2.2　解答

(1)　$f(x) = x - \tan x$ とおく．

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\cos^2 x}$$

であり，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$ において，$0 < \cos x \leqq 1$ なので，この区間で $f'(x) \leqq 0$ であり，$f(x)$ は単調減少な関数である．そして，

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2} + 0} f(x) = \infty$$

であるから，実数 a に対して $f(x) = a$ となる x がただ 1 つ存在する．

(2)　$(\sin x)' = \cos x$ なので，曲線 $C : y = \sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, \sin t)$ における接線と，点 $\mathrm{Q}(u, \sin u)$ における接線の方程式は，それぞれ，

$$y = \cos t(x - t) + \sin t = (\cos t)x - t\cos t + \sin t$$
$$y = \cos u(x - u) + \sin u = (\cos u)x - u\cos u + \sin u$$

である．次の 2 つの命題が同値であることを示す．

(i)　2 つの接線が一致するような，$-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \leqq u$ 範囲の t と u が存在する．

(ii)　t が x_1，x_2，x_3，$\cdots$ のいずれかと一致する．

(i) が成り立つとする．つまり，

$$\cos t = \cos u, \qquad -t\cos t + \sin t = -u\cos u + \sin u$$

となる $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \leqq u$ が存在するとする．$\cos t = \cos u$ より，$u = t + 2l\pi$ または $u = -t + 2m\pi$ となる自然数 l，m がとれる．

$u = t + 2l\pi$ とする．このとき，

$$-t\cos t + \sin t = -(t + 2l\pi)\cos t + \sin(t + 2l\pi) = -(t + 2l\pi)\cos t + \sin t$$

より，$2l\pi\cos t=0$ となるが，$l>0$ で $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ なので，これを満たす t は存在しない．

$u=-t+2m\pi$ とする．このとき，

$$-t\cos t+\sin t=-(-t+2m\pi)\cos t+\sin(-t+2m\pi)=-(-t+2m\pi)\cos t-\sin t$$

より，

$$2t\cos t-2m\pi\cos t-2\sin t=0$$

となり，$\cos t>0$ なので，これから

$$t-\tan t=m\pi$$

となる．つまり，t は $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ にある $f(t)=m\pi$ の解である．よって $t=x_m$ である．(ii) の成立が示された．

(ii) が成立するとする．このとき $t=x_m$ とする．

そして，この自然数 m を用いて u を $u=-t+2m\pi$ととる．このとき，

$$u>-\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{3\pi}{2}>\frac{\pi}{2}$$

である．そして，

$$\begin{aligned}\cos u &= \cos(-t+2m\pi)=\cos t\\ -u\cos u+\sin u &= (t-2m\pi)\cos t+\sin(-t+2m\pi)\\ &= t\cos t-\sin t-2m\pi\cos t\end{aligned}$$

ここで，$t-\tan t=m\pi$ より $t\cos t-\sin t=m\pi\cos t$ なので，

$$t\cos t-\sin t-2m\pi\cos t=-t\cos t+\sin t$$

となる．つまり，(i) が成立した．

したがって (i) と (ii) の同値性が示された．

7　東北大数学 AO

7.1　3 番

7.1.1　問題

n を正の整数，a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_n を非負の整数として，整式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

を考える。ただし，$a_0 \neq 1$ とする。p が素数ならば $f(p)$ も素数であるとき，次の (A) または (B) が成り立つことを示せ。

(A)　$a_i = 0$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ かつ a_0 は素数である。
(B)　$a_i = 0$ $(i = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ かつ $a_1 = 1$ である。

7.1.2　解答

a_0 が合成数であるとし，その 1 つの素因数を p として，$a_0 = pq$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} f(p) &= a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_1 p + pq \\ &= \left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_1 + q\right) p \end{aligned}$$

a_1，a_2，$\cdots$，a_n が非負整数で，$q > 0$ なので，

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_1 + q > 0$$

となり，$f(p)$ は素数ではない．
$a_0 \neq 1$ なので，a_0 は素数かまたは 0 である．
a_0 が素数のとき．$a_0 = p$ とおく．

$$f(p) = \left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_1 + 1\right) p$$

これが素数となるのは

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_1 + 1 = 1$$

のときである．非負整数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n の中に 0 でないものがあればこの式の左辺は 1 より大きい．よって，この場合 (A) が成り立つ．
a_0 が 0 のとき．

$$f(p) = \left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_1\right) p$$

これが素数となるのは

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_2 p + a_1 = 1$$

のときである．非負整数 a_2，$\cdots$，a_n の中に 0 でないものがあればこの式の左辺は 1 より大きい．1 となるのは，$a_1 = 1$，$a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$，つまり (B) が成り立つ場合にかぎる．
よって題意が示された．

7.2　4 番

7.2.1　問題

n を非負の整数とし，

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx, \quad L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx$$

とする。

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して K_n，L_n が満たす漸化式を求めよ。

(2) K_n を求めよ。

7.2.2　解答

(1)　$n \geqq 1$ のとき，部分積分より，

$$\begin{aligned}
K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n (-\cos x)' \, dx = [-x^n \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n x^{n-1} \cos x \, dx \\
&= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \cos x \, dx \\
&= n L_{n-1} \\
L_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n (\sin x)' \, dx = [x^n \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n x^{n-1} \sin x \, dx \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \sin x \, dx \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n K_{n-1}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
K_{n+1} &= (n+1) L_n = (n+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n+1) K_{n-1} \\
L_{n+1} &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+1) K_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - n(n+1) L_{n-1}
\end{aligned}$$

(2)　定義より，

$$\begin{aligned}
K_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\
L_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1
\end{aligned}$$

である．また (1) から

$$\begin{aligned}
K_1 &= L_0 = 1 \\
L_1 &= \frac{\pi}{2} - K_0 = \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

である．(1) の結果より，

$$\frac{K_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - \frac{K_{n-1}}{(n-1)!}$$

これから，

i)　n が偶数のとき

$$\begin{aligned}
\frac{K_n}{n!} &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{K_{n-2}}{(n-2)!} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} + (-1)^{\frac{3-1}{2}}\frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} + \frac{K_{n-4}}{(n-4)!} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1-1}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - K_0\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)
\end{aligned}$$

ii)　n が奇数のとき，同様に

$$\begin{aligned}
\frac{K_n}{n!} &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{K_{n-2}}{(n-2)!} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} + (-1)^{\frac{3-1}{2}}\frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} + \frac{K_{n-4}}{(n-4)!} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}K_1 \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}
\end{aligned}$$

よって，

$$K_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-1)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{n!}{(n-3)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-3} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1}\cdot n!\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right) & (n:\text{偶数}) \\ \dfrac{n!}{(n-1)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{n!}{(n-3)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n-3} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}n! & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

となる．

8　東北大 AOII 期

8.1　1 番

8.1.1　問題

以下の問いに答よ．

(1) $a,\ b$ を 3 以上の整数とする．次の 2 つの条件 (p) と (q) は同値であることを示せ．必要ならば，自然対数の底 e の値は，$2.71\cdots$ であることを用いてもよい．

(p) $a < b$

(q) $a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$

(2) $a_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n^2+1^2)(n^2+2^2)(n^2+3^2)\cdots(n^2+n^2)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) 実数 t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，直線 $y = (2t-2)x - t^2 - 1$ の通過する領域を xy 平面上に図示せよ．

8.1.2　解答

(1)　関数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ を，$x>e$ で考える．

$$\log y=\frac{1}{x}\log x$$

なので，両辺を x で微分する．

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\log x)$$

よって，$x>e$ において $\dfrac{y'}{y}$ は負．$y>0$ なので，$y'<0$ である．

　したがって，関数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ は $x>e$ において単調減少である．

　よって，$a, b\geqq 3>e$ のとき，$a<b$ と $a^{\frac{1}{a}}>b^{\frac{1}{b}}$ は同値である．

(2)

$$a_n=\sqrt[n]{\left\{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right\}\cdots\left\{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}}$$

であるから，

$$\log a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log a_n &= \int_0^1\log\left(1+x^2\right)\,dx\\ &= \left[x\log(1+x^2)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx\\ &= \log 2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\end{aligned}$$

定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$ において，$x=\tan\theta$ と置換すると，$\dfrac{1}{1+x^2}=\cos^2\theta$ で，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ なので，

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=\frac{\pi}{4}$$

である．これより，

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\log 2-2+\frac{\pi}{2}$$

となる．関数 $\log x$ は連続なので，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\log 2-2+\frac{\pi}{2}}=2e^{-2+\frac{\pi}{2}}$$

である．

(3)　直線 $y=(2t-2)x-t^2-1$ の式を t で整理すると，$t^2-2xt+2x+y+1=0$ となるので，点 $(x,\ y)$ が直線の通過する領域にあるための必要十分条件は，

$$t^2-2xt+2x+y+1=0,\quad 0\leqq t\leqq 1$$

となる t が存在することである．

$f(t)=t^2-2xt+2x+y+1$ とおくと，次のいずれかが成立することである．

① $f(0) \leqq 0,\ f(1) \geqq 0$

② $f(0) \geqq 0,\ f(1) \leqq 0$

③ $f(0) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 1,$ 判別式 $D \geqq 0$

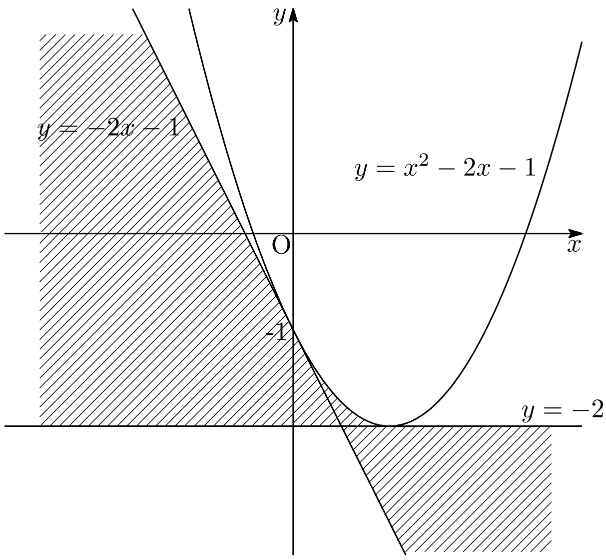
$f(0)=2x+y+1$，$f(1)=y+2$，$D/4=x^2-2x-y-1$ なので，

① $2x+y+1 \leqq 0,\ y+2 \geqq 0$

② $2x+y+1 \geqq 0,\ y+2 \leqq 0$

③ $2x+y+1 \geqq 0,\ y+2 \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ y \geqq x^2-2x-1$

となる．これを図示する．



9　東北大経済後期

9.1　3番

9.1.1　問題

0でない実数 a に対して曲線 $y = ax^2 + \dfrac{1}{a}$ を C_a とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 l は，0でないすべての実数 a に対して曲線 C_a と接するとする．このような直線 l の方程式を求めよ．

(2) a を $a \geqq 1$ の範囲で動かしたときに曲線 C_a が通過する領域を図示せよ．

9.1.2　解答

(1)
方法1
l の方程式を $y = px + q$ とおく．これが C_a と接するのは，2次方程式

$$ax^2 + \frac{1}{a} = px + q$$

が重解をもつときである．それは，この2次方程式の判別式を D とすると，

$$D = p^2 - 4a\left(\frac{1}{a} - q\right) = p^2 - 4 + 4aq = 0$$

となるときである．$p = \pm 2$，$q = 0$ のとき，a の値に係わらず $D = 0$ となる．つまり直線 $y = \pm 2x$ はつねに C_a と接する．$l : y = 2x$，および $l : y = -2x$ である．
方法2
C_a の方程式に対し，$y' = 2ax$ であるから，上の点 $\left(t,\ at^2 + \dfrac{1}{a}\right)$ における接線の方程式は

$$y = 2at\,(x - t) + at^2 + \frac{1}{a} = 2atx - at^2 + \frac{1}{a}$$

である．$t = \pm\dfrac{1}{a}$ のとき，この方程式は $y = \pm 2x$ となり，a によらず一定である．よって $l : y = 2x$ および $l : y = -2x$ である．
(2)　点 $(X,\ Y)$ が，a を $a \geqq 1$ の範囲で動かしたときに曲線 C_a が通過する領域の点である条件は，

$$Y = aX^2 + \frac{1}{a}, \qquad a \geqq 1$$

となる a が存在することである．
　これを a で整理して

$$X^2a^2 - Ya + 1 = 0$$

となる．$f(a) = X^2a^2 - Ya + 1$ とおく．a の方程式 $f(a) = 0$ が $a \geqq 1$ の解を持つ条件を求める．
i)　$X = 0$ のとき
　$f(a) = -Ya + 1 = 0$ より $a = \dfrac{1}{Y}$ なので，$\dfrac{1}{Y} \geqq 1$．つまり $0 < Y \leqq 1$

ii)　$X \neq 0$ のとき

$$f(a) = X^2\left(a - \frac{Y}{2X^2}\right)^2 - \frac{Y^2}{4X^2} + 1$$

なので，

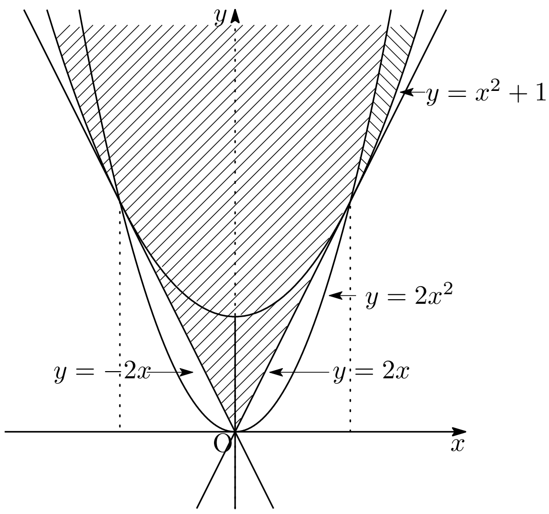
（ア）　$\dfrac{Y}{2X^2} \leqq 1$ のときは，$f(1) = X^2 - Y + 1 \leqq 0$ が条件である．よって，

$$Y \leqq 2X^2, \quad Y \geqq X^2 + 1$$

（イ）　$\dfrac{Y}{2X^2} \geqq 1$ のときは，$-\dfrac{Y^2}{4X^2} + 1 \leqq 0$ が条件である．よって，

$$Y \geqq 2X^2, \quad -Y \leqq 2X \leqq Y$$

これをみたす $(X,\ Y)$ の集合を xy 平面上に図示する．ただし，y 軸上は $0 < y \leqq 1$ の部分のみを含む．



10　広大後期理系

10.1　3 番

10.1.1　問題

以下の問いに答えよ．

(1) a と b を互いに素な自然数とし，自然数 n に対し $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{b}{a} < \dfrac{1}{n}$ が成り立つとする．互いに素な自然数 c，d により

$$\frac{b}{a} - \frac{1}{n+1} = \frac{d}{c}$$

と表すとき，$d < b$ となることを示せ．

(2) S を 0 より大きく 1 より小さい有理数とする．このとき，S は異なる自然数 n_1，n_2，$\cdots$，n_l の逆数の和として

$$S = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_l} \quad (1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_l)$$

と表すことができることを示せ．

10.1.2　解答

(1) $\dfrac{b}{a}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{b(n+1)-a}{a(n+1)}=\dfrac{d}{c}$ である．

　よって，$\dfrac{b(n+1)-a}{a(n+1)}$ が既約なら $b(n+1)-a=d$ となり，可約なら $b(n+1)-a>d$ となる．
また $\dfrac{b}{a}<\dfrac{1}{n}$ より $bn-a<0$ である．あわせて

$$d \leqq b(n+1)-a<b$$

となる．

(2) $S=\dfrac{b}{a}$ とおく．

　$S=\dfrac{1}{2}$ なら $l=1$，$n_1=2$ で成立する．

　$\dfrac{1}{2}<S<1$ なら $0<S-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$ である．

　従って $0<S<\dfrac{1}{2}$ のとき (2) が成立すれば，$\dfrac{1}{2}<S<1$ のとき，

$$S-\frac{1}{2}=\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_l}$$

と表せる．$n_1=2$ とすることで，成立する．

　よって，$0<S<\dfrac{1}{2}$ のとき成立することを示せばよい．以下，$0<S<\dfrac{1}{2}$ とする．

　$b=1$ なら $n_1=a$ とすることで，$1<n_1$ であり $S=\dfrac{1}{n_1}$ と表せる．

　$b \geqq 2$ とする．$\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{1}{n}$ となる n をとると，$n \geqq 2$ である．

　$n_1=n+1$ とおく．$\dfrac{1}{n_1}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{1}{n_1-1}$ である．

$$\frac{b}{a}-\frac{1}{n_1}=\frac{d}{c}$$

とすると，(1) から $b>d$ であり，

$$0<\frac{b}{a}-\frac{1}{n_1}=\frac{d}{c}<\frac{1}{n_1-1}-\frac{1}{n_1}=\frac{1}{n_1(n_1-1)}<\frac{1}{n_1}<\frac{b}{a}$$

となる．

　この $\dfrac{d}{c}$ に対して，$\dfrac{b}{a}$ のときと同じ操作をくりかえす．

$$\frac{d}{c}-\frac{1}{n_2}=\frac{f}{e}$$

とすると，$d>f>0$ である．このとき，

$$\frac{1}{n_2}<\frac{f}{e}+\frac{1}{n_2}=\frac{d}{c}<\frac{1}{n_1}$$

より，$n_1<n_2$ である．

よって，この操作をくりかえすと $1 \leqq l \leqq d$ のある l で

$$\frac{b}{a} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \cdots - \frac{1}{n_{l-1}} = \frac{1}{n_l}$$

となり，$1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_l$ をみたす．

※　有理数をいくつかの異なる単位分数（分子が 1 の分数）の和に表したものをエジプト分数という．本問から，1 より小さい正の有理数はエジプト分数に表すことができることがわかる．

単位分数のエジプト分数による下からの近似

http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa/taiwasen/egyptian2/node1.html

参照．

11　一橋大後期

11.1　3番

11.1.1　問題

$\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab}+\dfrac{k}{\sqrt{ab}}$ かつ $a>b>0$ を満たす整数 $a,\ b$ が存在するような実数 k の範囲を求めよ．

11.1.2　解答

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ を用いて，$\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab}+\dfrac{k}{\sqrt{ab}}$ を変形すると，

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\sqrt{ab}}{2} < k$$

となる．

整数 a と b が $a>b>0$ を満たして動くときの，$\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\sqrt{ab}}{2}$ の最小値を m とする．条件を満たす整数 $a,\ b$ が存在する実数 k の範囲は，$m<k$ である．

b を固定し $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\sqrt{ab}}{2}$ を a の関数と考える．これは a の単調増加関数であるから，$a=b+1$ のときに最小値 $\dfrac{(\sqrt{b+1}-\sqrt{b})^2\sqrt{(b+1)b}}{2}$ をとる．

ここで $(\sqrt{b+1}-\sqrt{b})(\sqrt{b+1}+\sqrt{b})=b+1-b=1$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{b+1}-\sqrt{b})^2\sqrt{(b+1)b}}{2} &= \frac{\sqrt{(b+1)b}}{2(\sqrt{b+1}+\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{(b+1)b}}{2\{2b+1+2\sqrt{b(b+1)}\}} \\ = \quad & \frac{1}{2\cdot\dfrac{2b+1}{\sqrt{b(b+1)}}+4} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{4b^2+4b+1}{b^2+b}}+4} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4+\dfrac{1}{b^2+b}}+4}\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{(\sqrt{b+1}-\sqrt{b})^2\sqrt{(b+1)b}}{2}$ が最小になるのは，$\sqrt{4+\dfrac{1}{b^2+b}}$ が最大のときで，それは b^2+b が最小のときである．よって，$b=1$ で最小となり，

$$m=\frac{(\sqrt{1+1}-\sqrt{1})^2\sqrt{(1+1)1}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$$

である．したがって，条件を満たす k の範囲は

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}-2<k$$

である．

11.2　5番

11.2.1　問題

次の [I]，[II] のいずれか一方を選択して解答せよ．

[I]　x，y は実数とする。$y > x^n$ を満たす正の整数 n が存在するような点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，xy 平面に図示せよ．

[II]　$f(x)$ は微分可能でかつ導関数が連続な関数とする．$f(0)=0$ であるとき，

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt\right)=\int_0^x e^{-t}f'(x-t)\,dt$$

を示せ．

11.2.2　解答

[I]

$x<-1$ のとき．$\displaystyle\lim_{m\to\infty}x^{2m+1}=-\infty$ なので，任意の実数 y に対して $x^n<y$ となる n が存在する．

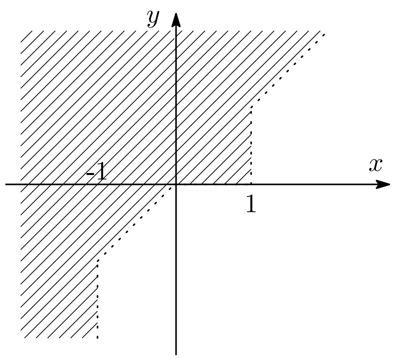
$-1\leqq x<0$ のとき．$x^1<x^3<\cdots<0<x^{2m}$ なので，$x<y$ であるときにかぎり $n=1$ が条件を満たす．

$x=0$ のとき．$0<y$ が条件である．

$0<x<1$ のとき．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$ なので，$0<y$ であるとき，$0<x^n<y$ となる n が存在する．

$1\leqq x$ のとき．$x^1<x^2<\cdots$ なので，$x^1=x<y$ の y が条件を満たす．

以上より，条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は次図のようになる．ただし境界は含まない．



[II]

部分積分により，

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt &= \left[-e^{-t}f(x-t)\right]_0^x-\int_0^x(-e^{-t})\{-f'(x-t)\}\,dt\\ &= f(x)-\int_0^x e^{-t}f'(x-t)\,dt\end{aligned}$$

これより，

$$f(x)-\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt=\int_0^x e^{-t}f'(x-t)\,dt \quad \cdots ①$$

一方，$x-t=s$ とおくと，

$$\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt=\int_x^0 e^{-x+s}f(s)\,(-ds)=e^{-x}\int_0^x e^s f(s)\,ds$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt\right) &= \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\int_0^x e^s f(s)\,ds\right)\\ &= -e^{-x}\int_0^x e^s f(s)\,ds+e^{-x}\cdot e^x f(x)\\ &= f(x)-e^{-x}\int_0^x e^s f(s)\,ds\\ &= f(x)-\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt\end{aligned}$$

したがって ① より，

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt\right)=\int_0^x e^{-t}f'(x-t)\,dt$$

が示された．

12　東工大

12.1　1 番

12.1.1　問題

正の整数に関する条件

$$(*)\qquad 10\text{ 進法で表したときに，どの位にも数字 }9\text{ が現れない}$$

を考える．

（1）k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件 $(*)$ を満たす正の整数の個数を a_k とする．このとき，a_k を k の式で表せ．

（2）正の整数 n に対して，

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n\text{ が条件 }(*)\text{ を満たすとき}) \\ 0 & (n\text{ が条件 }(*)\text{ を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく．このとき，すべての正の整数 k こ対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_k < 80$$

12.1.2　解答

（1）10 進法で，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満の数は k 個の数字で構成される。条件を満たすものは，1 の位から $k-1$ の位までは 0〜8 のいずれかであり，k の位は 1〜8 のいずれかである。よって，

$$a_k = 8\cdot 9^{k-1}$$

である。

（2）m 桁で条件を満たす n に対する $\dfrac{1}{n}$ の和を c_m とおく。$10^{m-1} \leqq n < 10^m$ なので，$\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{10^{m-1}}$ である。よって，

$$c_m \leqq \frac{1}{10^{m-1}} \times a_m = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$$

である。これより，

$$\begin{aligned} S(k) &= \sum_{m=1}^{k} c_m \\ &\leqq \sum_{m=1}^{k} 8\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} = 8\cdot\frac{1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^k}{1-\dfrac{9}{10}} \\ &= 80\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\} < 80 \end{aligned}$$

である。

12.2　3 番

12.2.1　問題

以下の問いに答よ．

(1)　正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ．

$$n_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ．

(2)　正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく．このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ．

(3)　a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ．

12.2.2　解答

(1)

$$\begin{aligned} n_{2n}\mathrm{C}_n &= n\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \\ (n+1)_{2n}\mathrm{C}_{n-1} &= (n+1)\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \end{aligned}$$

より，$n_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ が示された．

これから，$n_{2n}\mathrm{C}_n$ が $n+1$ の倍数であるが，n と $n+1$ は互いに素なので，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ が $n+1$ の倍数である．

※　意味から示してもよい．

$n_{2n}\mathrm{C}_n = {}_{2n}\mathrm{C}_{n\,n}\mathrm{C}_1$ は $2n$ 人から n 人の委員を選び，その n 人から 1 人の委員長を選ぶ．

$(n+1)_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1\,n+1}\mathrm{C}_1$ は $2n$ 人から $n-1$ 人の委員を選び，残る $n+1$ 人から委員長を選んで加える．

いずれも n 人の委員とそのなかの委員長 1 人を決める場合の数であるから，等しい．

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{{}_{2n+2}\mathrm{C}_{n+1}}{n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)(n+1)} \cdot {}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{4n+2}{n+2}a_n \end{aligned}$$

である．

$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを数学的帰納法で示す．$n=4$ のとき．

$$a_4 = \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 14 > 4+2$$

で成立．

$n=k$ のとき $a_k > k+2$ とする．$k \geqq 4$ とする．

$$\begin{aligned} a_{k+1}-(k+1+2) &= \frac{2(2k+1)}{k+2}a_k-(k+3) \\ &> \frac{4k+2}{k+2}(k+2)-(k+3)=3k-1 \geqq 12-1>0 \end{aligned}$$

より成立する．

よって $n \geqq 4$ のとき $a_n > n+2$ が示された．

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{4n+2)}{n+2}a_n$ が整数で，かつ $a_n > n+2$，$4n+2>n+2$ であるから，a_{n+1} は $n+2=pq$ となる，$4n+2$ の約数 p と a_n の約数 q を用いて，$a_{n+1}=\dfrac{4n+2)}{p}\cdot\dfrac{a_n}{q}$ と因数分解される．

よって，$n \geqq 4$ のとき a_{n+1} は素数ではない．

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{{}_2\mathrm{C}_1}{1+1}=1 \\ a_2 &= \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2+1}=\frac{6}{3}=2 \\ a_3 &= \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{3+1}=\frac{20}{4}=5 \\ a_4 &= \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{4+1}=\frac{70}{5}=14 \end{aligned}$$

である．よって，a_n が素数となる正の整数 n は 2 と 3 である．

※　$a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ を「カタラン数」という．これについては青空学園数学科の『数学対話』「カタラン数」

http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa/taiwasen/node8.html

を参照のこと．

13　千葉大

13.1　9 番

13.1.1　問題

多項式 $f_n(x)$，$g_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を条件

$$\begin{aligned}&f_1(x) = x, \quad g_1(x) = 1,\\ &f_{n+1}(x) = f_n(x) + xg_n(x), \quad g_{n+1}(x) = g_n(x) - xf_n(x)\end{aligned}$$

で定める。

(1) 正の整数 n に対して，等式

$$\{f_{n+1}(x)\}' = (n+1)g_n(x), \quad \{g_{n+1}(x)\}' = -(n+1)f_n(x)$$

が成り立つことを示し，多項式 $f_n(x)$ の次数を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，区間 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta = f_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \quad \cos n\theta = g_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

が成り立つことを示せ．

(3) 正の整数 n と実数 a に対して，方程式 $f_n(x) = ag_n(x)$ の異なる実数解の個数を求めよ．

13.1.2　解答

(1)　与等式が成立することを，n についての数学的帰納法で示す．

$$f_2(x) = x + x = 2x, \quad g_2(x) = 1 - x\cdot x = 1 - x^2$$

であるから，$n = 1$ のとき，

$$\{f_2(x)\}' = 2 = (1+1)g_1(x), \quad \{g_2(x)\}' = -2x = -(1+1)f_1(x)$$

より成立する．$n \geqq 2$ とし，$n-1$ のとき成立するとする．n のとき，

$$\begin{aligned}\{f_{n+1}(x)\}' &= \{f_n(x)\}' + g_n(x) + x\{g_n(x)\}'\\ &= ng_{n-1}(x) + g_n(x) + x\left(-nf_{n-1}(x)\right)\\ &= n\left(g_{n-1}(x) - xf_{n-1}(x)\right) + g_n(x) = (n+1)g_n(x)\\ \{g_{n+1}(x)\}' &= \{g_n(x)\}' - f_n(x) - x\{f_n(x)\}'\\ &= -nf_{n-1}(x) - f_n(x) - x\left(ng_{n-1}(x)\right)\\ &= -n\left(f_{n-1}(x) + xg_{n-1}(x)\right) - f_n(x) = -(n+1)f_n(x)\end{aligned}$$

より成立し，すべての自然数 n で等式が成立する．

次に，$f_n(x)$ と $g_n(x)$ の次数を a_n，b_n とおく．

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0$$

であり，整式の微分で次数は 1 下がるので，

$$a_{n+1}-1=b_n,\quad b_{n+1}-1=a_n$$

が成り立つ．これから，

$$a_{n+2}=b_{n+1}+1=a_n+2,\ b_{n+2}=a_{n+1}+1=b_n+2$$

が成り立つ．そして，$a_1=1,\ a_2=1$ なので，

$$a_n=\begin{cases} n & (n:\text{奇数}) \\ n-1 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$$

である．

(2)　等式の成立を，n についての数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき．

$$\begin{aligned} \sin 1\theta &= f_1(\tan\theta)\cos\theta=\tan\theta\cos\theta \\ \cos 1\theta &= g_1(\tan\theta)\cos\theta=\cos\theta \end{aligned}$$

より成立．n のときの成立を仮定する．

$$\begin{aligned} \sin(n+1)\theta &= \sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta \\ &= f_n(\tan\theta)\cos^n\theta\cos\theta+g_n(\tan\theta)\cos^n\theta\sin\theta \\ &= f_n(\tan\theta)\cos^{n+1}\theta+\tan\theta g_n(\tan\theta)\cos^{n+1}\theta=f_{n+1}(\tan\theta)\cos^{n+1}\theta \\ \cos(n+1)\theta &= \cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta \\ &= g_n(\tan\theta)\cos^n\theta\cos\theta-\sin\theta f_n(\tan\theta)\cos^n\theta \\ &= g_n(\tan\theta)\cos^{n+1}\theta-\tan\theta f_n(\tan\theta)\cos^{n+1}\theta=g_{n+1}(\tan\theta)\cos^{n+1}\theta \end{aligned}$$

$n+1$ のときも成立し，すべての自然数 n で等式が成立する．

(3)　関数 $\tan\theta$ は区間 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，単調増加ですべての実数値をとる．よって，方程式 $f_n(x)=ag_n(x)$ の異なる実数解の個数と，θ の方程式 $f_n(\tan\theta)=ag_n(\tan\theta)$ の，区間 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における異なる実数解 θ の個数は等しい．

この区間で $\cos\theta\neq 0$ なので，(2) より，$f_n(\tan\theta)=ag_n(\tan\theta)$ は $\dfrac{\sin n\theta}{\cos^n\theta}=a\dfrac{\cos n\theta}{\cos^n\theta}$ と同値である．さらにこの等式は $\tan n\theta=a$ と同値である．

$\tan\alpha=a$ となる $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ をとる．

$\tan\theta$ の周期は π なので，$n\theta=\alpha+k\pi$ とおく．$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$-\dfrac{n\pi}{2}-\alpha<n\theta-\alpha<\dfrac{n\pi}{2}-\alpha$，なので，

$$-\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{\pi}<k<\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{\pi}$$

である．これを満たす k の個数が，条件を満たす解の個数である．

$-\dfrac{1}{2}<\dfrac{\alpha}{\pi}<\dfrac{1}{2}$ であるから，

(i) n が奇数のとき

$-\dfrac{n}{2}-\dfrac{\alpha}{\pi}<-\dfrac{n-1}{2}$，$\dfrac{n-1}{2}<\dfrac{n}{2}-\dfrac{\alpha}{\pi}$ なので，

$$-\frac{n-1}{2} \leqq k \leqq \frac{n-1}{2} \text{ の } n \text{ 個}$$

(ii) n が偶数のとき

- $a>0$，つまり $0<\dfrac{\alpha}{\pi}<\dfrac{1}{2}$ のとき

$$-\frac{n}{2} \leqq k \leqq \frac{n}{2}-1 \text{ の } n \text{ 個}$$

- $a=0$，つまり $0=\dfrac{\alpha}{\pi}$ のとき

$$-\frac{n}{2}+1 \leqq k \leqq \frac{n}{2}-1 \text{ の } n-1 \text{ 個}$$

- $a<0$，つまり $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{\alpha}{\pi}<0$ のとき

$$-\frac{n}{2}+1 \leqq k \leqq \frac{n}{2} \text{ の } n \text{ 個}$$

以上から，実数解の個数は

$$\begin{cases} n-1 & (n \text{ が偶数かつ } a=0) \\ n & (\text{上記以外のとき}) \end{cases}$$

である．

14　京都府立医大

14.1　4 番 A

14.1.1　問題

複素数 z に関する以下の条件 (C)，(D) を考える．

条件 (C)　　$z^2+mz+n=0$ を満たす整数 m，n が存在する．
条件 (D)　　$z^3+pz+q=0$ を満たす整数 p，q が存在する．

(1) 複素数 z が条件 (C) を満たすならば，条件 (D) も満たすことを証明せよ．

(2) $\sqrt[3]{2}$ は条件 (D) は満たすが，条件 (C) は満たさないことを証明せよ．ただし，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることは用いてよい．

(3) $|z|=1$ である複素数 z で条件 (D) を満たすものをすべて求めよ．

14.1.2　解答

(1)　複素数 z が条件 (C) を満たすので，これに z を乗じて $z^3+mz^2+nz=0$ を満たす．ここに $z^2=-mz-n$ を代入して，

$$z^3+m(-mz-n)+nz=z^3-(m^2-n)z-mn=0 \quad \cdots①$$

つまり，$p=-(m^2-n)$，$q=-mn$ とすれば，$z^3+pz+q=0$ となり，条件 (D) が成立した．
(2)　$z=\sqrt[3]{2}$ とおく．$z^3-2=0$ なので，$p=0$，$q=-2$ で条件 (D) を満たす．
さらに条件 (C) も満たすとする．
(1) の ① に $z^3=2$ を代入して，$2-(m^2-n)z-mn=0$，つまり，

$$(m^2-n)z=2-mn$$

を得る．$m^2-n=0$ なら $2-mn=2-m^3=0$ となるが、このとき，$m=\sqrt[3]{2}$ となり，m が整数であることに反する．よって $m^2-n\neq 0$ とあり $z=\dfrac{2-mn}{m^2-n}$ となる．右辺は有理数なので，z が無理数であることと矛盾する．
したがって条件 (C) は満たさない．
(3)　$|z|=1$ であるので，

$$|z|^2=z\bar{z}=1$$

で，$z\neq 0$。条件 (D) より

$$z^2+p+\frac{q}{z}=z^2+p+q\bar{z}=0$$

共役をとって

$$\bar{z}^2+p+qz=0$$

である。辺々引いて

$$z^2-\bar{z}^2+q(\bar{z}-z)=(z-\bar{z})(z+\bar{z}-q)=0$$

である。

i)　$z=\bar{z}$ のとき。

　z は実数で $|z|=1$ より $z=\pm 1$。このとき，

$$(\pm 1)^3+p(\pm 1)+q=0$$

となる p と q は存在する。

ii)　$z+\bar{z}-q=0$ のとき。

　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，これから $2\cos\theta=q$ である。$|\cos\theta| \leqq 1$ で q が整数なので，$q=0,\ \pm 1,\ \pm 2$ でぞれぞれ $\cos\theta=0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm 1$ である。そしてこのとき，$\sin\theta=\pm 1,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0$ で，p は

$$z^2+\bar{z}^2+2p+q(\bar{z}+z)=(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}+2p+q(\bar{z}+z)=0$$

より，$p=1-q^2$ で定まる。これらの θ で定まる z は条件 (D) を満たす。

　i)，ii) あわせて，$|z|=1$ で条件 (D) を満たすものは

$$\pm 1,\ \pm i,\ \frac{\pm 1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

である。

15　奈良医大

15.1　3 番

15.1.1　問題

以下の問に答えよ．

整数を係数とする文字 x に関する 5 次以下の整式全体からなる集合を A とする．つまり，A は

$$\{a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0,\ \cdots,\ a_5 \text{は整数}\}$$

という集合である．整数 k と A の要素 $F(x)$ に対し，$T_k(F(x))$ を

$$T_k(F(x)) = xF''(x) - kF'(x)$$

と定める．ここで，$F'(x)$ は $F(x)$ を x の関数とみた場合の導関数，$F''(x)$ は $F'(x)$ の導関数を表す．

(1) $F(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ に対し，$T_4(F(x))$ を求めよ．

(2) A の要素のうち $T_2(F(x)) = 0$ を満たす整式 $F(x)$ 全体からなる集合を求めよ．

(3) A の部分集合 B をとり，B のすべての要素 $F(x)$ に対して $T_3(F(x))$ を集めると

$$\{12bx + 12c \mid b, c \text{ は整数}\}$$

という集合になる．そのような B をひとつ求めよ．

15.1.2　解答

(1)　$F(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ のとき，

$$\begin{aligned} F'(x) &= 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 5 \\ F''(x) &= 20x^3 - 24x^2 + 18x - 8 \\ T_4(F(x)) &= xF''(x) - 4F'(x) \\ &= 20x^4 - 24x^3 + 18x^2 - 8x - 4\left(5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 5\right) \\ &= 8x^3 - 18x^2 + 24x - 20 \end{aligned}$$

(2)　A の要素 $F(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ をとる。

$$\begin{aligned} F'(x) &= 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 \\ F''(x) &= 20a_5x^3 + 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2 \\ T_2(F(x)) &= xF''(x) - 2F'(x) \\ &= 20a_5x^4 + 12a_4x^3 + 6a_3x^2 + 2a_2x - 2\left(5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1\right) \\ &= 10a_5x^4 + 4a_4x^3 - 2a_2x - 2a_1 \end{aligned}$$

条件は，これが恒等式として 0 となることなので，

$$a_5 = a_4 = a_2 = a_1 = 0$$

よって，$T_2(F(x))=0$ を満たす整式 $F(x)$ 全体からなる集合は

$$\{a_3x^3+a_0\}$$

(3)　$F(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ が条件を満たすとする。条件は

$$\begin{aligned} T_3(F(x)) &= xF''(x)-3F'(x) \\ &= 20a_5x^4+12a_4x^3+6a_3x^2+2a_2x-3\left(5a_5x^4+4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1\right) \\ &= 15a_5x^4-3a_3x^2-4a_2x-3a_1 \\ &= 12bx+12c \end{aligned}$$

と整数 $b,\ c$ を用いて表されることである。よって，

$$a_5=a_3=0,\ 12b=-4a_2,\ 12c=-3a_1$$

つまり，

$$a_5=a_3=0,\ a_2\text{は 3 の倍数},\ a_1\text{は 4 の倍数}$$

よって，a_1，a_2 を取りなおして，集合 B として，

$$\{a_4x^4+3a_2x^2+4a_1x+a_0|\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_4\ \text{は整数}\ \}$$

がとれる。

15.2　5番

15.2.1　問題

$a,\ m,\ n$ は正整数であり $m > n$ とする．

(1) 整式 $x^{16} - 1$ を因数分解せよ．

(2) $a^{2^m} - 1$ は $a^{2^n} + 1$ で割り切れることを証明せよ．

(3) $a^{2^m} + 1$ と $a^{2^n} + 1$ の最大公約数を d とする．a が偶数ならば $d = 1$，奇数ならば $d = 2$ であることを証明せよ．

15.2.2　解答

(1) 係数範囲が指定されていないので，実数範囲で因数分解する．

$$
\begin{aligned}
x^{16} - 1 &= (x^8 - 1)(x^8 + 1) = (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) \\
&= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) \\
&= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)
\end{aligned}
$$

(2) 一般に因数分解

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + 1)$$

が成り立つ．

$m \geqq n + 1$ なので，

$$a^{2^m} - 1 = \left(a^{2^{n+1}}\right)^{2^{m-n-1}} - 1$$

より，$a^{2^m} - 1$ は

$$a^{2^{n+1}} - 1 = (a^{2^n} - 1)(a^{2^n} + 1)$$

を因数にもつ．つまり，$a^{2^n} + 1$ で割り切れる．

(3) (2) より，ある奇数 A を用いて，

$$a^{2^m} - 1 = A(a^{2^n} + 1)$$

と表せる．よって，

$$a^{2^m} + 1 = A(a^{2^n} + 1) + 2$$

である．これより，$a^{2^m} + 1$ と $a^{2^n} + 1$ の最大公約数 d は 2 の約数であることが必要である．

これから，a が偶数ならば $d = 1$，奇数ならば $d = 2$ である．

16　奈良医大（後）

16.1　2番

16.1.1　問題

正の実数 $a,\ b,\ c,\ d$ は以下の条件をみたすとする．

● $ad - bc \neq 0$

このとき，2 次方程式 $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ は相異なる 2 個の実数解 $\alpha,\ \beta$ (ただし$\alpha > \beta$) を持つ．また，任意の正の実数 $u > 0$ に対して，数列 $\{x_n\}_{n=1,\ 2,\ \ldots}$ を以下の漸化式で定める．

$$x_1 = u, \qquad x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + c} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $a - c\beta \neq 0$ を証明せよ．

(2) 任意の正整数 n について，$x_n \neq \beta$ であり，かつ，任意の正整数 n に対して，

$$y_n = \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta}$$

とおくと，数列 $\{y_n\}_{n=1,\ 2,\ \ldots}$ は等比数列になることを証明せよ．

(3) 任意の正の実数 u に対して，数列 $\{x_n\}_{n=1,\ 2,\ \ldots}$ は $n \to \infty$ のとき収束することを示し，その極限値を求めよ．

16.1.2　解答

(1)　解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -\frac{d-a}{c}, \qquad \alpha\beta = \frac{-b}{c}$$

なので，$\alpha\beta < 0$ である．よって $\alpha > 0 > \beta$ となり，これから

$$a - c\beta > 0$$

である．

(2)　$x_1 > 0$ で，漸化式から $x_n > 0$ なら $x_{n+1} > 0$．よって $x_n > 0 > \beta$ となる．

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_{n+1} - \beta} = \frac{\dfrac{ax_n + n}{cx_n + r} - \alpha}{\dfrac{ax_n + n}{cx_n + r} - \beta} = \frac{(a - c\alpha)x_n + b - d\alpha}{(a - c\beta)x_n + b - d\beta} \\ &= \frac{a - c\alpha}{a - c\beta} \cdot \frac{x_n + \dfrac{b - d\alpha}{a - c\alpha}}{x_n + \dfrac{b - d\beta}{a - c\beta}} \end{aligned}$$

ここで，β は 2 次方程式 $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ の解なので，$c\beta^2 + (d-a)\beta - b = 0$．これより，

$$(c\beta - a)\beta + d\beta - b = 0$$

なので，$\dfrac{b-d\beta}{a-c\beta}=-\beta$．$\alpha$ についても同様に $\dfrac{b-d\alpha}{a-c\alpha}=-\alpha$ である．よって，

$$y_{n+1}=\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}\cdot\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}=\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}\cdot y_n$$

となり，数列 $\{y_n\}$ は公比 $\dfrac{a-c\alpha}{a-c\beta}$ の等比数列になる．

(3)　(2) から

$$y_n=\left(\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}\right)^{n-1}y_1$$

ここで，$a-c\alpha<a-c\beta$ であるが，

$$\begin{aligned}a-c\alpha-\{-a+c\beta\} &= 2a-c(\alpha+\beta)\\ &= 2a-c\left(-\frac{d-a}{c}\right)=a+d>0\end{aligned}$$

なので，

$$-a+c\beta<a-c\alpha<a-c\beta$$

となり，

$$-1<\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}<1$$

である．よって

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0$$

これから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}=0$$

なので，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$$

である．

16.2　3 番

16.2.1　問題

正の整数 $a,\ b$ の最大公約数を $(a,\ b)$ で表す.

(1) 任意の正整数 $m,\ n$ に対して，等式

$$(m+n,\ n)=(m,\ n)$$

が成り立つことを示せ.

(2) 互いに素な正整数 $m,\ n$ に対して，$(m+n-1)!$ は $m!n!$ によって割り切れることを証明せよ.

16.2.2　解答

(1)　$d_1=(m+n,\ n)$，$d_2=(m,\ n)$ とおく．

　$m+n=d_1\alpha$，$n=d_1\beta$ とすると，$m=d_1(\alpha-\beta)$ となり，d_1 は m と n の公約数である．d_2 は m と n の最大公約数なので，$d_1 \leqq d_2$ である．

　$m=d_2\gamma$，$n=d_2\delta$ とすると．$m+n=d_2(\gamma+\delta)$ となり，d_2 は $m+n$ と n の公約数である．d_1 は $m+n$ と n の最大公約数なので，$d_2 \leqq d_1$ である．

　これより $d_1=d_2$ が示された．

(2)　二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k \quad \cdots ①$$

で定義する．このとき，${}_n\mathrm{C}_k$ は $(1+x)^n$ の展開において 1 を $n-k$ 個，x を k 個並べる順列の総数なので，整数であり，${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ となる．

　① の両辺を x で微分して，

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k x^{k-1} \quad \cdots ②$$

である．よって $k \geqq 1$ のとき ② の x^{k-1} の係数を比較して，次の等式がなり立つ．

$$n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=k{}_n\mathrm{C}_k$$

したがって，この n と k を $m+n$ と n で用いることにより，正整数 $m,\ n$ に対して

$$(m+n){}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1}=n{}_{m+n}\mathrm{C}_m$$

である．(1) から正整数 m と n が互いに素なとき，n と $m+n$ が互いに素なので，${}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1}$ は n の倍数である．${}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1}=nN$ とおくと，

$$\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}=nN$$

である．したがって

$$\frac{(m+n-1)!}{m!n!}=N$$

となり，$(m+n-1)!$ は $m!n!$ によって割り切れることが示された．

17　滋賀医大

17.1　1番

17.1.1　問題

座標平面上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ について，x，y がともに有理数であるとき，Q を有理点という。

(1) P を曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点とする。P を通る傾き 1 の直線と x 軸の交点が有理点ならば，P も有理点であることを示せ。

(2) r を正の実数とする。曲線 $x^2-y^2=1$ 上の有理点のうち，原点との距離が r より大きいものがあることを示せ。

(3) 曲線 $x^2-6y^2=7$ 上に有理点がないことを示せ。

17.1.2　解答

(1)　P を通る傾き 1 の直線と x 軸の交点を $(a,\ 0)$ とする。a は有理数である。この直線と曲線の交点が P である。P を求める。直線の方程式は $y=x-a$ なので，$x^2-y^2=1$ に代入して

$$x^2-(x-a)^2=1$$

これから $x=\dfrac{1+a^2}{2a}$，$y=\dfrac{1-a^2}{2a}$ となり，共に有理数である。

(2)　(1) で求めた点 P と原点との距離は

$$\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2+\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}$$

である。

$$\lim_{a\to\infty}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=+\infty$$

であるから，任意の正の実数 r に対して，原点との距離が r より大きい点 P がある。

(3)　曲線 $x^2-6y^2=7$ 上に有理点があるとし，それを $\left(\dfrac{q}{p},\ \dfrac{s}{r}\right)$ とする。これを $x^2-6y^2=7$ に代入して $q^2r^2-6p^2s^2=7p^2r^2$ となる。つまり方程式 $X^2-6Y^2=7Z^2$ を満たす整数解が存在することになる。

これを $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ とする。$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の最大公約数は 1 であるとしてよい。$\alpha^2-6\beta^2=7\gamma^2$ が成り立つとき，α と γ の偶奇は一致する。

ありうる $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ の偶奇の配置は次の場合であるが，それぞれ $\alpha^2-6\beta^2=7\gamma^2$ の成立を確認すると，

(i) (奇数，奇数，奇数) のとき：$\alpha^2-6\beta^2\equiv 1+2 \pmod 8$, $7\gamma^2\equiv 7 \pmod 8$

(ii) (奇数，偶数，奇数) のとき：$\alpha^2-6\beta^2\equiv 1+0 \pmod 8$, $7\gamma^2\equiv 7 \pmod 8$

(iii) (偶数，奇数，偶数) のとき：$\alpha^2-6\beta^2\equiv 0+2 \pmod 4$, $7\gamma^2\equiv 0 \pmod 4$

となり，いずれの場合も等号が成り立たない。

よって，$\alpha^2-6\beta^2=7\gamma^2$ を満たす整数の組は存在しない。この結果，曲線 $x^2-6y^2=7$ 上に有理点がないことが示された。

17.2　2番

17.2.1　問題

a, b, p, q を $p<0<q<a<b$ を満たす実数とする。座標平面上で曲線

$$C: y=\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

を考える。曲線 C，x 軸，y 軸および直線 $x=p$ で囲まれた部分の面積 $S(p)$ は，曲線 C，x 軸，y 軸および直線 $x=q$ で囲まれた部分の面積 $S(q)$ と等しいとする。$S=S(p)=S(q)$ とおく。次を示せ。

(1) $(p+q)ab=pq(a+b)$

(2) $q<\dfrac{ab}{a+b}$

(3) $S<\dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}$

(4) $S<\dfrac{1}{a}$

17.2.2　解答

(1)

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)$$

であるから，C を積分定数として

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx &= \frac{1}{b-a}\int\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)dx\\ &= \frac{1}{b-a}\log\frac{|x-b|}{|x-a|}+C\end{aligned}$$

である。よって，

$$\begin{aligned}S(p) &= \frac{1}{b-a}\left[\log\frac{|x-b|}{|x-a|}\right]_p^0=\frac{1}{b-a}\left(\log\frac{b}{a}-\log\frac{b-p}{a-p}\right)\\ S(q) &= \frac{1}{b-a}\left[\log\frac{|x-b|}{|x-a|}\right]_0^q=\frac{1}{b-a}\left(\log\frac{b-q}{a-q}-\log\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

である。$S(p)=S(q)$ なので

$$\log\frac{b}{a}-\log\frac{b-p}{a-p}=\log\frac{b-q}{a-q}-\log\frac{b}{a}$$

である。これから

$$\log\left(\frac{b}{a}\right)^2=\log\frac{(b-p)(b-q)}{(a-p)(a-q)}$$

つまり，

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{(b-p)(b-q)}{(a-p)(a-q)}$$

これを整理して

$$(b-a)(p+q)ab = pq(b^2-a^2) = pq(b-a)(b+a)$$

$b-a>0$ なので，

$$(p+q)ab = pq(a+b)$$

を得る。

(2)　(1) から

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{ab}{a+b} > 0$$

$q>0$ であるから，$\dfrac{p}{p+q}>0$ である。$p<0$ より $p+q<0$ である。$p<p+q$ とあわせて

$$\frac{p}{p+q} > 1$$

となり，これから

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{pq}{p+q} > q$$

である。

(3)

$$b-p > a-p$$

より，$\dfrac{b-p}{a-p}>1$ である。よって $\log\dfrac{b-p}{a-p}>0$ となるので，

$$S = \frac{1}{b-a}\left(\log\frac{b}{a} - \log\frac{b-p}{a-p}\right) < \frac{1}{b-a}\log\frac{b}{a}$$

となる。

(4)　関数 $y=\log x$ の区間 $a \leqq x \leqq b$ における平均値の定理から，$a<c<b$ で

$$\frac{\log b - \log a}{b-a} = \frac{1}{b-a}\log\frac{b}{a} = \frac{1}{c}$$

となるものがある。よって，(3) とあわせて

$$S < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

となる。

17.3　3番

17.3.1　問題

n を自然数とする．n 色の異なる色を用意し，そのうちの何色かを使って正多面体の面を塗り分ける方法を考える．つまり，一つの面には一色を塗り，辺をはさんで隣り合う面どうしは異なる色となるように塗る．ただし，正多面体を回転させて一致する塗り分け方どうしは区別しない．

(1) 正四面体の面を用意した色で塗り分ける．

- (i) 少なくとも何色必要か．
- (ii) $n \geqq 4$ とする．この方法は何通りあるか．

(2) 正六面体（立方体）の面を用意した色で塗り分ける．

- (i) 少なくとも何色必要か．
- (ii) $n \geqq 6$ とする．この方法は何通りあるか．

17.3.2　解答

(1)

(i)　いずれの面も他の 3 面と隣りあうので，4 面とも異なる色でなければならない．

よって，4 色必要である．

(ii)　n 色から 4 色選ぶのが ${}_n\mathrm{C}_4$ 通りある．1 色をある面に塗る．その面に隣りあう 3 面に他の 3 色を塗るのは，3 個の円順列なので，$\dfrac{3!}{3} = 2$ 通り．よって，求める塗り方の数は

$$ {}_n\mathrm{C}_4 \times 2 = \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n-3) \text{（通り）} $$

(2)

(i)　いずれの面も，4 面と隣りあい，1 面とは隣りあわない．ある面に 1 色，それと隣りあう 4 面は 2 色で塗り分けられる．ある面と隣りあわない面は同色を塗る．

よって，3 色必要である．

(ii)　何色で塗るかで場合に分ける．

3 色で塗る場合：塗り方は対面同色なので 1 通り．3 色の決め方は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通り．

4 色で塗る場合：塗り方は 1 組の対面を異なる色で塗るので，${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り，4 色の決め方は ${}_n\mathrm{C}_4$ 通り．

5 色で塗る場合：塗り方は 1 組の対面を同色，他は異なる色で塗る．対面を同色で塗る色を決める．周りは 4 色の環順列になる．$\mathrm{C}_1 \cdot \dfrac{(4-1)!}{2} = 15$ 通り，5 色の決め方は ${}_n\mathrm{C}_5$ 通り．

6 色で塗る場合：塗り方は対面すべて異なる色で塗るので，$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2}{3} = 30$ 通り，6 色の決め方は ${}_n\mathrm{C}_6$ 通り．

よって，

$$
\begin{aligned}
& {}_n\mathrm{C}_3 + 6 \cdot {}_n\mathrm{C}_4 + 15 \cdot {}_n\mathrm{C}_5 + 30 \cdot {}_n\mathrm{C}_6 \\
= \ & \frac{1}{24} n(n-1)(n-2) \left\{ 4 + 6(n-3) + 3(n-3)(n-4) + (n-3)(n-4)(n-5) \right\} \\
= \ & \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n^3 - 9n^2 + 32n - 38) \text{（通り）}
\end{aligned}
$$

※　本問はさらに，正八面体，正十二面体，正二十面体の場合に拡張される．

18　早大商学

18.1　1番

18.1.1　問題

$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$にあてはまる数または式を記述解答用紙の所定欄に記入せよ．

(1)　三角形 ABC において，$\angle\mathrm{B} = 2\alpha$ $\angle\mathrm{C} = 2\beta$ とする．

$$\tan\alpha\tan\beta = x, \qquad \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = y$$

とするとき，y を x で表すと $y = \boxed{\text{ア}}$ となる．

(2)　n を正の整数とする．$f(x)$ は x の $n+1$ 次式で表される関数，x が 0 以上 n 以下の整数のとき $f(x) = 0$ であり，$f(n+1) = n+1$ である．このとき，

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-\sqrt{2})^k}{f'(k)} > 2^{2021}$$

を満たす最小の n は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3)　正の実数 x, y, zs が

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$$

を満たすとき，$(x-1)(y-2)(z-3)$ の最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4)　座標空間において，各座標が整数である 6 個のの点 P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 を，次の条件を満たすように重複をを許して選ぶ．

(i)　$\mathrm{P}_0 = (0,\ 0,\ 0)$

(ii)　P_k と P_{k+1} との距離は 1　(k=0, 1, 2, 3, 4)

(iii)　P_0 と P_5 との距離は 1

このとき，選び方の総数は $\boxed{\text{エ}}$ 通りである．

18.1.2　解答

(1)　三角形 ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理から，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{C}} = 2R$$

である．

$$\sin\angle\mathrm{A} = \sin(\pi - \angle\mathrm{B} - \angle\mathrm{C}) = \sin(\angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C})$$

なので，$\angle\mathrm{B} = 2\alpha$，$\angle\mathrm{C} = 2\beta$ より，

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin\angle\mathrm{B} + \sin\angle\mathrm{C}}{\sin(\angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C})} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\sin(2\alpha + 2\beta)} \\ &= \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \boxed{\frac{1+x}{1-x}}
\end{aligned}
$$

(2)　$f(x)$ は因数定理からある定数 a を用いて

$$f(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

とおけ，$f(n+1)=n+1$ より，$a(n+1)! = n+1$ なので，$a = \dfrac{1}{n!}$ である．よって

$$f(x) = \frac{1}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ を x で微分すると，x, $x-1$, $\cdots$, $x-n$ のいずれかを 1 に置きかえたものの積全体の和である．よって，

$$
\begin{aligned}
f'(k) &= \frac{1}{n!}k(k-1)(k-2)\cdots\{k-(k-1)\}\{k-(k+1)\}\cdots(k-n) \\
&= \frac{1}{n!}k!\{(-1)^{n-k}(n-k)!\} \\
&= \frac{(-1)^{n-k}}{{}_n\mathrm{C}_k}
\end{aligned}
$$

である．これから，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-\sqrt{2})^k}{f'(k)} &= \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(1-\sqrt{2})^k(-1)^{n-k} \\
&= \{(1-\sqrt{2})-1\}^n = (-\sqrt{2})^n
\end{aligned}
$$

よって，条件 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-\sqrt{2})^k}{f'(k)} > 2^{2021}$ は，

$$(-\sqrt{2})^n > 2^{2021}$$

となり，n は偶数で，

$$\frac{n}{2} > 2021$$

つまり，$n > 4042$ となる最小の偶数であり，条件を満たす最小の n は $\boxed{4044}$ である．

(3)　条件

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$$

より，

$$3xy+2xz+yz=xyz$$

である．よって

$$
\begin{aligned}
(x-1)(y-2)(z-3) &= xyz-3xy-2xz-yz+6x+3y+2z-6 \\
&= 6x+3y+2z-6
\end{aligned}
$$

条件式に相加相乗平均の不等式を適用して $1 \geqq 3\sqrt[3]{\dfrac{6}{xyz}}$ である．これより，$xyz \geqq 3^3 \cdot 6$ である．等号は，$\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{y} = \dfrac{3}{z} = \dfrac{1}{3}$ より，$x = 3,\ y = 6,\ z = 9$ で成立する．

そして，

$$\begin{aligned} 6x + 3y + 2z - 6 &\geqq 3\sqrt[3]{36xyz} - 6 \\ &\geqq 3\sqrt[3]{36 \cdot 3^3 \cdot 6} - 6 = 3 \cdot 18 - 6 = 54 - 6 = 48 \end{aligned}$$

であり，この等号も $x = 3,\ y = 6,\ z = 9$ で成立する．

よって，$(x-1)(y-2)(z-3)$ は，$x = 3,\ y = 6,\ z = 9$ のとき最小値は $\boxed{48}$ をとる．

(4) P_5 の次に P_0 に戻るとすると，6 回の移動で P_0 から P_0 に戻る場合の数が求めるものである．

(i) 1 つの軸上のみ動く場合．軸の決め方が 3 通りあり，そこで 1 と -1 の動きが 3 回ずつなので，

$$\frac{6!}{3!3!} \times 3 = 20 \times 3 = 60 \text{ (通り)}$$

(ii) 2 つの軸上のみ動く場合．1 つの軸上を 4 回，他の軸上を 2 回動く．軸の決め方が $3! = 6$ 通りあり，2 回ある動きが 2 つあるので，

$$\frac{6!}{2!2!} \times 6 = 180 \times 6 = 1080 \text{ (通り)}$$

(iii) 3 つの軸上を動く場合．すべてが異なる動きになるので，

$$6! = 720 \text{ (通り)}$$

あわせて，選び方の総数は $\boxed{1860}$ 通りである．

19　早大理工

19.1　3 番

19.1.1　問題

整式 $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ について，以下の問に答えよ．

(1)　x^6 を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ．

(2)　x^{2021} を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ．

(3)　自然数 n が 3 の倍数であるとき，$(x^2-1)^n - 1$ が $f(x)$ で割り切れることを示せ．

19.1.2　解答

(1)　$x^6 + 1 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)$ であるから，

$$x^6 = (x^2+1)f(x) - 1$$

となり，x^6 を $f(x)$ で割ったときの余りは -1 である．
(2)　整式 $p(x)$ と $q(x)$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを，$p(x) \equiv q(x) \pmod{f(x)}$ と書く．
$2021 = 336 \times 6 + 5$ である．よって，

$$x^{2021} = (x^6)^{336} \cdot x^5 \equiv (-1)^{336} x^5 \pmod{f(x)}$$

$$x^5 = xf(x) + x^3 - x$$

なので，x^{2021} を $f(x)$ で割ったときの余りは $x^3 - x$ である．
(3)

$$\begin{aligned}(x^2-1)^3 &= (x^2-1)(x^4-2x^2+1)\\ &\equiv (x^2-1)(-x^2) \pmod{f(x)}\\ &= -x^4 + x^2 = -(x^4 - x^2 + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{f(x)}\end{aligned}$$

である．$n = 3m$ とおく．

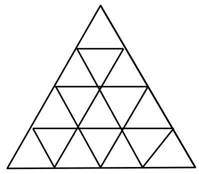
$$(x^2-1)^n - 1 = \{(x^2-1)^3\}^m - 1 \equiv 1^m - 1 = 0 \pmod{f(x)}$$

であるから，$(x^2-1)^n - 1$ は $f(x)$ で割り切れる．

20　早大教育

20.1　4 番

20.1.1　問題



　1 辺の長さが 1 の正三角形を右図のように積んでいく．図の中には大きさの異なったいくつかの正三角形が含まれているが，底辺が下側にあるものを「上向きの正三角形」，底辺が上側にあるものを「下向きの正三角形」とよぶことにする．例えば，この図は 1 辺の長さが 1 の正三角形を 4 段積んだものであり，1 辺の長さが 1 の上向きの正三角形は 10 個あり，1 辺の長さが 2 の上向きの正三角形は 6 個ある．また，1 辺の長さが 1 の下向きの正三角形は 6 個ある．上向きの正三角形の総数は 20 であり，下向きの正三角形の総数は 7 である．こうした正三角形の個数に関して，次の問いに答えよ．

(1) 1 辺の長さが 1 の正三角形を 5 段積んだとき，上向きと下向きとを合わせた正三角形の総数を求めよ．

(2) 1 辺の長さが 1 の正三角形を n 段（ただし n は自然数）積んだとき，上向きの正三角形の総数を求めよ．

(3) 1 辺の長さが 1 の正三角形を n 段（ただし n は自然数）積んだとき，下向きの正三角形の総数を求めよ．

21 同志社大

21.1　社会・理工 3 番

21.1.1　問題

n を自然数とし，実数 x を $|x|<1$ とする．関数 $f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1-x^2}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，$g(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ とし，初項 1，公比 x^2，項数 n の等比数列の和を $S_n(x)$ とする．次の問に答えよ．

(1)　$\dfrac{d}{dx}f_n(x)$ を求めよ．また，区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ における $f_n(x)$ の最大値を n で表せ．

(2)　$T_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx$ とする．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ．

(3)　k を自然数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2k}\,dx$ を k で表せ．また，これを用いて，式 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} S_{n+1}(x)\,dx-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k(2k+1)}$ の値を求めよ．

(4)　$S_n(x)$ を $f_n(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ．また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx$ を求めよ．

(5)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k(2k+1)}$ を求めよ．